

# INTEGRACIÓN POR CUANTIFICACIÓN DE SISTEMAS STIFF. PARTE I: TEORÍA.

Ernesto Kofman<sup>†</sup>, Gustavo Migoni<sup>†</sup> y François Cellier<sup>††</sup>

<sup>†</sup>*Laboratorio de Sistemas Dinámicos. FCEIA - UNR - CONICET. Riobamba 245 bis - (2000) Rosario*

<sup>††</sup>*Institute of Computational Science - ETH Zürich. CH-8092 Zürich. Switzerland.*

Abstract: Este artículo presenta un nuevo método de integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias basado en la cuantificación de las variables de estado. Utilizando conceptos de integración implícita, el nuevo método denominado BQSS (Backward Quantized State Systems) permite integrar sistemas stiff de manera eficiente. Siendo el primer método de cuantificación para sistemas stiff, BQSS es en sí un método explícito, por lo que la contribución es importante en el contexto general de los métodos de integración numérica. Además de presentar el método, el artículo estudia las principales propiedades teóricas del mismo.

Keywords: Stiff System Simulation, Quantization Based Integration, DEVS

## 1. INTRODUCCIÓN

Muchos sistemas dinámicos de la práctica, tanto en las ciencias como en la ingeniería, son stiff. Esto es, tienen matrices Jacobianas con autovalores muy separados sobre el eje real negativo del plano complejo.

La integración de estos sistemas mediante métodos numéricos tradicionales de discretización temporal, requiere de la utilización de algoritmos implícitos ya que todos los métodos explícitos deben necesariamente restringir excesivamente el paso de integración para garantizar estabilidad numérica.

Más precisamente, deben utilizarse algoritmos cuyos dominios de estabilidad se cierran en el semiplano derecho del plano complejo  $\lambda \cdot h$ . En algunos métodos implícitos se observan tales dominios de estabilidad, mientras que todos los métodos explícitos exhiben dominios de estabilidad que se cierran en el semiplano izquierdo del plano complejo  $\lambda \cdot h$  (Cellier and Kofman, 2006).

Sin embargo, los métodos implícitos tienen una mayor carga computacional ya que requieren de algoritmos iterativos en cada paso para despejar el siguiente valor. Esto es además inaceptable en aplicaciones de tiempo real, ya que no puede garantizarse cuanto tiempo demandará la convergencia de las iteraciones (típicamente se utilizan iteraciones de Newton). Por este motivo, la simulación de sistemas stiff en tiempo real es un problema para el cual no se habían encontrado aún soluciones satisfactorias.

Un enfoque esencialmente distinto al de los métodos de integración clásica surge al reemplazar la discretización del tiempo por la cuantificación de las variables de estado. Esta idea dio lugar a los *métodos de integración por cuantificación*, que aproximan las ecuaciones diferenciales ordinarias por *sistemas de eventos discretos* en términos del formalismo DEVS (Zeigler et al., 2000).

El primero de estos métodos es el de QSS1 (Quantized State Systems) (Kofman and Junco, 2001), que realiza una aproximación de primer orden. En base a principios similares, se desarrollaron

también métodos de segundo orden (QSS2) (Kofman, 2002) y de tercer orden (QSS3) (Kofman, 2006), que permiten obtener una mejor precisión sin incrementar mucho el número de cálculos.

Los métodos de QSS tienen propiedades teóricas muy fuertes (estabilidad y existencia de cota de error global calculable) y presentan grandes ventajas al simular sistemas discontinuos (Kofman, 2004). Sin embargo, no son apropiados para la simulación de sistemas stiff, debido a la aparición de oscilaciones de alta frecuencia (Kofman, 2003; Cellier and Kofman, 2006). Lo que ocurre es que, al igual que cualquier método clásico explícito, el paso de integración se reduce excesivamente para mantener la estabilidad numérica.

El presente artículo desarrolla entonces un nuevo método de cuantificación de primer orden, similar a QSS1, pero utilizando principios de integración implícita, realizando la cuantificación sobre valores futuros de los estados. Esta idea ya había sido planteada en (Kofman, 2003) y (Cellier and Kofman, 2006), pero nunca formalizada ni implementada.

Este nuevo método –que denominaremos BQSS por Backward Quantized State Systems– veremos que permite la simulación de sistemas stiff sin necesidad de reducir el paso de integración.

Además de ser el primer algoritmo implícito de QSS, BQSS tiene la particularidad de no requerir ningún tipo de iteraciones para su implementación. Gracias a la cuantificación, un estado cuantificado cuyo valor es  $q_i$  puede en el siguiente paso tomar solamente dos valores:  $q_i + \Delta q_i$  o  $q_i - \Delta q_i$  lo que simplifica muchísimo el problema. Más aún, veremos que la determinación del siguiente estado puede realizarse aún probando sólo uno de los dos valores posibles, lo que conlleva una solución explícita.

Además de definir el método, en esta primera parte estudiaremos sus principales propiedades teóricas, que resultarán similares a las de los métodos de QSS.

Los detalles relativos a la implementación del método así como los ejemplos y resultados de simulación son presentados en la segunda parte del artículo (Migoni et al., 2006).

El artículo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 se presentan los métodos de QSS y sus problemas frente a la simulación de sistemas stiff. Luego, en la Sección 3 se introduce el nuevo método BQSS y en la Sección 4 son estudiadas sus principales propiedades.

## 2. INTEGRACIÓN POR CUANTIFICACIÓN

Presentaremos en esta sección los métodos de QSS y los problemas que aparecen en los mismos al integrar sistemas stiff.

### 2.1 Método de QSS

Dado el sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (1)$$

el método de QSS lo aproxima por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (2)$$

En este último sistema,  $\mathbf{q}$  es el vector de variables cuantificadas, cuyas componentes se relacionan con las del vector de estado  $\mathbf{x}$  mediante la siguiente función de cuantificación con histéresis:

$$q_j(t) = \begin{cases} q_j(t^-) + \Delta Q_j \text{ si } x_j(t^-) - q_j(t) \geq \Delta Q_j \\ q_j(t^-) - \Delta Q_j \text{ si } q_j(t^-) - x_j(t) \geq \varepsilon_j \\ q_j(t^-) \text{ en otro caso} \end{cases}$$

donde  $\Delta Q_j$  se denomina *quantum* y  $\varepsilon_j$  se denomina *ancho de histéresis*.

El ancho de histéresis en general se toma igual al quantum (para reducir oscilaciones sin aumentar el error). En tal caso, puede verse fácilmente que  $q_j(t)$  sigue una trayectoria seccionalmente constante, que sólo cambia cuando la diferencia con  $x_j(t)$  se hace igual al quantum, y tras cada cambio queda  $q_j(t) = x_j(t)$ .

El sistema definido por el método de QSS (2) es equivalente a un modelo DEVS (Zeigler et al., 2000). Una explicación resumida del formalismo DEVS puede encontrarse en la segunda parte de este artículo (Migoni et al., 2006).

### 2.2 QSS y Sistemas Stiff

El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 0.01 x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -100 x_1(t) - 100 x_2(t) + 2020 \end{aligned} \quad (3)$$

tiene autovalores  $\lambda_1 \approx -0.01$  y  $\lambda_2 \approx -99.99$ , por lo que puede considerarse stiff.

El método de QSS aproximará este sistema según

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 0.01 q_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -100 q_1(t) - 100 q_2(t) + 2020 \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando condiciones iniciales  $x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 20$ , y cuantificación  $\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = 1$ , la integración por QSS hará los siguientes pasos:

En  $t = 0$  tenemos  $q_1(0) = 0$  y  $q_2(0) = 20$ . Por lo tanto  $\dot{x}_1(0) = 0.2$  y  $\dot{x}_2(0) = 20$ . Esta situación se mantiene hasta que  $|q_i - x_i| = \Delta Q_i = 1$ .

El próximo cambio en  $q_1$  es entonces agendado para  $t = 1/0.2 = 5$  mientras que el cambio en  $q_2$  se agenda para  $t = 1/20 = 0.05$ .

Por lo tanto en  $t = 0.05$  hay un nuevo paso, tras el cual,  $q_1(0.05) = 0$ ,  $q_2(0.05) = 21$ ,  $x_1(0.05) = 0.01$ ,  $x_2(0.05) = 21$ . Las derivadas quedan  $\dot{x}_1(0.05) = 0.21$  y  $\dot{x}_2(0.05) = -80$ .

El próximo cambio en  $q_1$  se reagenda para  $t = 0.05 + (1 - 0.01)/0.21 = 4.764$  mientras el siguiente cambio en  $q_2$  se agenda para  $0.05 + 1/80 = 0.0625$ . Por lo tanto, el siguiente paso se hace en  $t = 0.0625$ .

En  $t = 0.0625$  tenemos  $q_1(0.0625) = 0$ ,  $q_2(0.0625) = x_2(0.0625) = 20$ ,  $x_1(0.0625) \approx 0.0126$  y las derivadas son las mismas que en  $t = 0$ .

Esto se repite cíclicamente hasta que efectivamente se produce el cambio en  $q_1$  (esto se da en  $t \approx 4.95$ , tras 158 cambios en el valor de  $q_2$ , oscilando entre 20 y 21).

La simulación continua de la misma manera. En las Figs.1-2 puede observarse la evolución de  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  hasta  $t = 500$  seg.

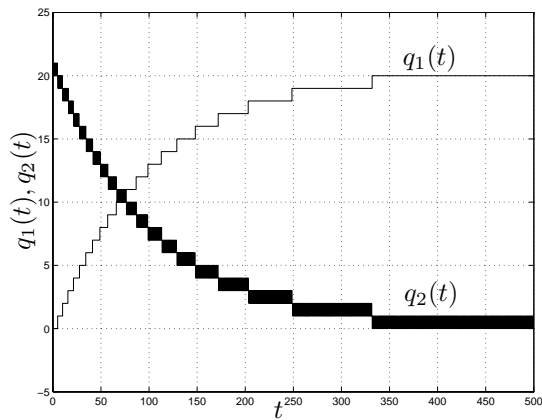


Fig. 1. Simulación con QSS

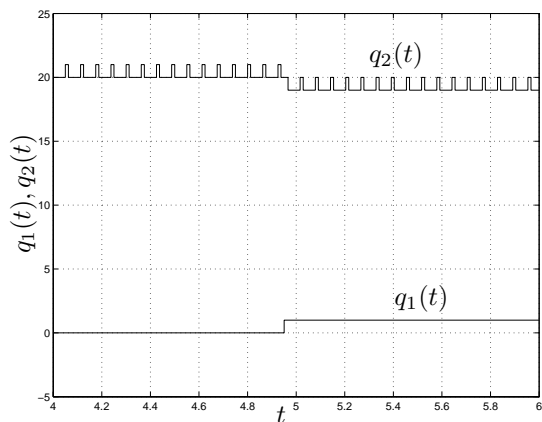


Fig. 2. Simulación con QSS (detalle)

Como puede verse, hay oscilaciones rápidas en  $q_2$  que provocan un total de 15995 transiciones en dicha variable, mientras que  $q_1$  realiza sólo 21

cambios. En definitiva hay más de 16000 pasos para completar la simulación (es del orden de los 25000 pasos que realizaría como mínimo el método de Euler para obtener un resultado estable).

Evidentemente, el método de QSS no es capaz de integrar eficientemente el sistema (3).

### 3. BACKWARD QSS

#### 3.1 Idea Básica

La integración eficiente de sistemas stiff requiere del uso de métodos implícitos, que evalúen la derivada en instantes futuros de tiempo.

Esta idea, aplicada a QSS implicaría que las componentes de  $q(t)$  en (2) sean versiones cuantificadas de valores futuros de  $x(t)$ . En otras palabras, dado  $x_i(t)$ ,  $q_i(t)$  será un valor cuantificado cercano a  $x_i(t)$  tal que  $x_i(t)$  evolucione hacia  $q_i(t)$ .

Para el ejemplo (3), con las condiciones iniciales y cuantificación utilizada anteriormente, esta idea nos llevaría a la siguiente simulación:

En  $t = 0$ , podemos elegir  $q_2(0) = 19$  o  $q_2(0) = 21$  según  $\dot{x}_2(0)$  sea positivo o negativo. En ambos casos resultará  $\dot{x}_1(0) > 0$  por lo que el valor cuantificado futuro de  $x_1$  será  $q_1(0) = 1$ .

Si elegimos  $q_2(0) = 21$  resulta  $\dot{x}_2(0) = -180 < 0$ , por lo que  $x_2$  no evoluciona hacia  $q_2$ , sino en sentido contrario.

Por otro lado, si elegimos  $q_2(0) = 19$  resulta  $\dot{x}_2(0) = 20 > 0$ . Luego, no es posible elegir  $q_2$  tal que  $x_2$  evolucione hacia  $q_2$ .

Sin embargo, dado que el signo de  $\dot{x}_2$  cambia segúnelijamos  $q_2 = 19$  o  $q_2 = 21$ , necesariamente hay un punto intermedio  $\hat{q}_2$  entre estos valores tal que  $\dot{x}_2 = 0$ .

En este caso, dejaremos  $q_2 = 21$  pero fijaremos  $\dot{x}_2 = 0$  (como si  $q_2$  hubiera adoptado el valor de la raíz  $\hat{q}_2$ ).

El próximo cambio en  $q_1$  quedará entonces agendado para  $t = 1/0.21 \approx 4.762$  mientras que el próximo cambio en  $q_2$  se agendará para  $t = \infty$ .

El siguiente paso es entonces en  $t = 4.762$ . Aquí resulta  $x_1 = 1$  y  $x_2 = 20$ . Luego tendremos  $q_1(4.762) = 2$  (porque  $\dot{x}_1 > 0$ ). Aquí evaluamos nuevamente  $\dot{x}_2$  para  $q_2 = 19$  y  $q_2 = 21$ , resultando negativa en ambos casos, por lo tanto el valor correcto es  $q_2(4.762) = 19$  ya que de esta manera  $x_2$  evoluciona hacia  $q_2$ .

Con estos valores de  $q_1$  y  $q_2$  se tiene  $\dot{x}_1 = 0.19$  y  $\dot{x}_2 = -80$ . El próximo cambio en  $q_1$  se agenda para  $t = 4.762 + 1/0.19 = 10.025$ , mientras que el de  $q_2$  se agenda para  $t = 4.762 + 1/80 = 4.774$ .

Por lo tanto, el siguiente paso se da en  $t = 4.774$ , cuando  $x_2$  alcanza a  $q_2$ .

Los cálculos continúan de la misma manera. El algoritmo es similar a QSS, sólo que siempre intentamos utilizar el valor  $q_i$  que esté en el sentido de la evolución de  $x_i$ . Cuando esto no es posible, es porque existe un punto intermedio en el cual  $\dot{x}_i = 0$  y entonces forzamos esta condición, pero conservando el valor de  $q_i$ .

La Figura 3 muestra el resultado de esta simulación, que llevó 21 cambios en  $q_1$  y 22 en  $q_2$ . En realidad, luego de  $t = 354.24$  seg no se realizan más cálculos ya que los cambios en ambas variables se agendan en  $t = \infty$  (se encuentra una situación estable).

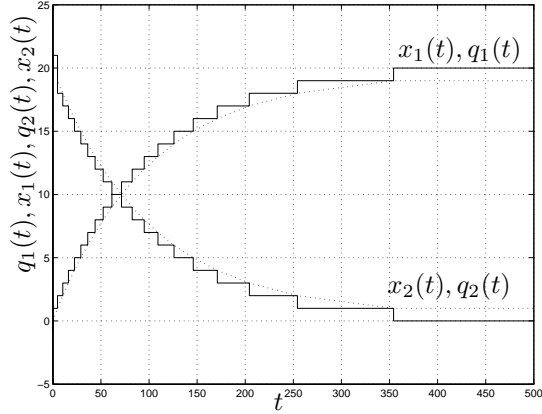


Fig. 3. Simulación con QSS

Esta es la idea básica del método de BQSS: Para cada variable de estado usamos dos funciones de cuantificación, una por encima y otra por debajo del valor del estado  $x_i$ . Luego, el valor de  $q_i$  adopta una u otra función de cuantificación según el sentido en que quede la derivada de  $x_i$ .

Esta idea, en el caso analizado, funcionó muy bien. El algoritmo pudo resolver el sistema stiff (3) con sólo 43 pasos, lo que iguala la performance de cualquier método implícito (si bien el error es aquí algo grande ya que es una aproximación de primer orden).

Sin embargo, como sabemos del caso de QSS, el uso de cuantificación sin histéresis puede provocar oscilaciones infinitamente rápidas. Por ejemplo, usando la misma idea que antes en el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 0.5 x_1 + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + 0.5 x_2(t) \end{aligned} \quad (5)$$

con  $\Delta Q_i = 1$  y condiciones iniciales  $x_1(0) = 0.1$ ,  $x_2(0) = -0.01$  se obtiene una solución donde los cambios en  $q_1$  y  $q_2$  ocurren cada vez más rápido, con una frecuencia que tiende a infinito.

La solución a este problema, al igual que en QSS, es el agregado de histéresis en las funciones de cuantificación superior e inferior.

### 3.2 Definición de BQSS

Dado el sistema (1), el método BQSS lo aproxima por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t)) + \Delta \mathbf{f} \quad (6)$$

donde las componentes  $q_j$  de  $\mathbf{q}$  verifican:

$$q_j(t) \in \{\underline{q}_j(t), \bar{q}_j(t)\} \quad (7)$$

con:

$$\underline{q}_j(t) = \begin{cases} \underline{q}_j(t^-) - \Delta Q_j & \text{si } x_j(t) - \underline{q}_j(t^-) \leq 0 \\ \underline{q}_j(t^-) + \Delta Q_j & \text{si } x_j(t) - \underline{q}_j(t^-) \geq \varepsilon_j + \Delta Q_j \\ \underline{q}_j(t^-) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (8)$$

$$\bar{q}_j(t) = \begin{cases} \bar{q}_j(t^-) + \Delta Q_j & \text{si } \bar{q}_j(t^-) - x_j(t) \leq 0 \\ \bar{q}_j(t^-) - \Delta Q_j & \text{si } \bar{q}_j(t^-) - x_j(t) \geq \varepsilon_j + \Delta Q_j \\ \bar{q}_j(t^-) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (9)$$

y además debe verificarse:

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t)) \cdot (q_j(t) - x_j(t)) &> 0 \\ \bigvee \\ \exists \hat{\mathbf{q}}^{(j)}(t) / f_j(\hat{\mathbf{q}}^{(j)}(t), \mathbf{u}(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

donde cada componente del vector  $\hat{\mathbf{q}}^{(j)}(t)$  cumple:

$$|x_i(t) - \hat{q}_i^{(j)}(t)| < \Delta Q_i + \varepsilon_i \quad (11)$$

Por otro lado

$$\Delta f_j = \begin{cases} 0, & \text{si } f_j(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t)) \cdot (q_j - x_j) > 0 \\ -f_j(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t)), & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (12)$$

Como en QSS, a  $\Delta Q_j$  lo llamaremos quantum y a  $\varepsilon_j < \Delta Q_j$  lo denominaremos ancho de histéresis.

Como vemos, la definición del valor de  $q_j$  conocido  $x_j$ , es implícita. Incluso, puede conllevar más de una solución. Sin embargo, sabemos que  $q_j(t)$  puede tomar sólo 2 valores ( $\underline{q}_j(t)$  o  $\bar{q}_j(t)$ ).

En principio, podría pensarse que es necesario evaluar todas las combinaciones de valores posibles de los  $q_j$  hasta encontrar un vector  $\mathbf{q}$  correcto.

Sin embargo, como veremos en la segunda parte de este artículo (Migoni et al., 2006), esto no es necesario sino que  $\mathbf{q}$  puede obtenerse de manera explícita.

## 4. PROPIEDADES DE BQSS

Trataremos aquí las propiedades fundamentales del método de BQSS. Primero veremos que en BQSS se realizan un número finito de pasos para

cada intervalo finito de tiempo (lo que garantiza que las simulaciones no pueden *trabarse*). Luego, analizaremos las propiedades de estabilidad y cota de error global.

#### 4.1 Legitimidad de BQSS

*Teorema 1.* Supongamos que la función  $\mathbf{f}$  del lado derecho de (1) es acotada en cualquier dominio acotado y que la función  $\mathbf{u}(t)$  es seccionalmente constante. Luego,

- (1) Cualquier solución  $\mathbf{x}(t)$  de (6) es continua mientras permanece acotada,
- (2) La trayectoria de  $\mathbf{q}(t)$  es seccionalmente constante mientras permanece acotada.

*Demostración:* La prueba del punto (1) es trivial, ya que al estar acotada la derivada de  $\mathbf{x}$  en (6), la trayectoria resulta continua.

Para el punto (2) en tanto, es claro que cada componente  $q_j$  puede sólo tomar valores de la forma  $k \cdot \Delta Q_j$ . Sin embargo, para probar que  $\mathbf{q}$  es seccionalmente constante es necesario asegurar que sólo cambia un número finito de veces en cualquier intervalo finito de tiempo.

Sea entonces un intervalo arbitrario  $(t_1, t_2)$ , en el cual una solución  $\mathbf{x}(t)$  de (6) permanece acotada. Probaremos que en este intervalo  $\mathbf{q}(t)$  realizará sólo un número finito de cambios.

Dado que cada componente  $q_j$  difiere de  $x_j$  en a lo sumo  $\Delta Q_j + \epsilon_j$ , resulta que  $\mathbf{q}(t)$  está también acotado en  $(t_1, t_2)$ . Dado que  $\mathbf{u}(t)$  es seccionalmente constante (y por ende acotado en este intervalo) resulta que  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{u})$  es también acotado. Teniendo en cuenta (6) y (12), existen constantes  $m_j$  tales que en el intervalo  $(t_1, t_2)$

$$|\dot{x}_j(t)| \leq m_j; \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

Sea  $t_c \in (t_1, t_2)$  y supongamos que  $\bar{q}_j(t_c^-) \neq \bar{q}_j(t_c^+)$ . De acuerdo a (9), esta situación no puede repetirse hasta que  $|x_j(t) - x_j(t_c)| \geq \epsilon_j$ . Por lo tanto, el intervalo de tiempo mínimo entre dos discontinuidades en  $\bar{q}_j(t)$  es

$$t_j = \frac{\epsilon_j}{m_j}$$

Luego, llamando  $\bar{n}_j$  al número de cambios que realiza  $\bar{q}_j(t)$  en el intervalo  $(t_1, t_2)$ , resulta

$$\bar{n}_j \leq (t_2 - t_1) \frac{m_j}{\epsilon_j}$$

Puede verse fácilmente que  $\underline{q}_j$  realizará también un máximo número de cambios acotado por la ecuación anterior.

Siendo  $\mathbf{u}(t)$  seccionalmente constante, realizará un número de cambios finito  $n_u$  en el intervalo  $(t_1, t_2)$ .

De acuerdo a la definición de  $q_j(t)$ , ésta puede tomar sólo los valores  $\bar{q}_j(t)$  o  $\underline{q}_j(t)$ . Además, podrá cambiar sólo si cambian éstas, o si cambia alguna otra variable  $q_i(t)$  o  $u_i(t)$  para que se siga cumpliendo la restricción (10). En definitiva, los cambios de  $q_j(t)$  estarán ligados a cambios en alguna  $\bar{q}_i(t)$ ,  $\underline{q}_i(t)$  o  $u_i(t)$ . Por lo tanto, el número total de cambios será menor o igual a la suma de cambios en dichas variables, es decir,

$$n_j \leq n_u + 2(t_2 - t_1) \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\epsilon_i}$$

lo que es evidentemente un número finito.  $\square$

#### 4.2 Representación Perturbada

Las propiedades teóricas de los métodos de QSS se basan en el hecho de que la aproximación (2) puede verse como una versión perturbada del sistema original (1), donde las perturbaciones en la primera están acotadas por la cuantificación utilizada. Veremos entonces que en BQSS ocurre algo similar.

Cada componente de la Ec.(6) puede escribirse como

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t)) + \Delta f_i \quad (13)$$

Definiendo

$$\mathbf{q}^{*(i)}(t) = \begin{cases} \mathbf{q}(t) & \text{si } \Delta f_i = 0 \\ \hat{\mathbf{q}}^{(i)}(t) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y utilizando las Ecs. (10)–(12), la Ec.(13) puede reescribirse como

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{q}^{*(i)}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (14)$$

Definiendo  $\Delta \mathbf{x}^{(i)}(t) \triangleq \mathbf{q}^{*(i)} - \mathbf{x}(t)$  y reemplazando en la Ec.(14) resulta

$$\dot{x}_i(t) = f_i(\mathbf{x}(t) + \Delta \mathbf{x}^{(i)}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (15)$$

donde

$$|\Delta x_j^{(i)}(t)| \leq \Delta Q_j + \epsilon_j \quad (16)$$

ya que, de las Ecs.(7), (8) y (9) resulta

$$|q_j(t) - x_j(t)| \leq \Delta Q_j + \epsilon_j$$

y de la Ec.(11) se tiene que

$$|\hat{q}_j^{(i)}(t) - x_j(t)| \leq \Delta Q_j + \epsilon_j$$

#### 4.3 Estabilidad y Cota de Error Global

El caso Lineal y Estacionario de la Ec.(1) toma la forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \mathbf{x}(t) + B \mathbf{u}(t) \quad (17)$$

La aproximación BQSS, en tanto, será

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A \mathbf{q}(t) + B \mathbf{u}(t) + \Delta \mathbf{f}(t) \quad (18)$$

Para este caso, el siguiente teorema demuestra la existencia de una cota de error global:

*Teorema 2.* Supongamos que la matriz  $A$  es Hurwitz. Sea  $\phi(t)$  la solución de (17) con condición inicial  $\phi(0)$  y sea  $\tilde{\phi}(t)$  una solución de (18) desde la misma condición inicial. Sea  $\mathbf{e}(t) \triangleq \phi(t) - \tilde{\phi}(t)$ . Luego, para todo  $t \geq 0$  resulta<sup>1</sup>

$$|\mathbf{e}(t)| \leq |V| \cdot |\Re(\Lambda)^{-1}V^{-1}| |A| (\Delta\mathbf{Q} + \varepsilon) \quad (19)$$

donde  $\Lambda = V^{-1}AV$  es la descomposición modal de  $A$  y  $\Delta\mathbf{Q}$  y  $\varepsilon$  son los vectores de las cuantificaciones y anchos de histéresis en (18).

*Demostración:*

De acuerdo a la Ec.(15), la  $i$ -ésima componente de (18) puede escribirse como

$$\dot{x}_i(t) = A_i(\mathbf{x}(t) + \Delta\mathbf{x}^{(i)}(t)) + B_i \mathbf{u}(t)$$

Definiendo  $d_i(t) \triangleq A_i \Delta\mathbf{x}^{(i)}(t)$ , podemos reescribir

$$\dot{x}_i(t) = A_i(\mathbf{x}(t)) + d_i + B_i \mathbf{u}(t) \quad (20)$$

Teniendo en cuenta (16) y la definición de  $d_i$  resulta

$$|d_i(t)| \leq |A_i| \cdot (\Delta\mathbf{Q} + \varepsilon) \quad (21)$$

Volviendo a la notación vectorial, (20) resulta:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t) \quad (22)$$

con

$$|\mathbf{d}(t)| \leq |A| \cdot (\Delta\mathbf{Q} + \varepsilon) \quad (23)$$

Reemplazando (17) con  $\phi(t)$  y (22) con  $\tilde{\phi}(t)$  y restando, resulta el sistema

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = A\mathbf{e}(t) + \mathbf{d}(t) \quad (24)$$

con  $\mathbf{e}(0) = 0$ .

Si  $A$  es Hurwitz y diagonalizable, el Teorema 3 de (Kofman, 2005) establece directamente la validez de (19) a partir de (24) y (23), mientras que para el caso no diagonalizable, el mismo resultado se obtiene del Teorema 3.3 de (Kofman et al., 2006).  $\square$

Un corolario de este Teorema es que si la matriz  $A$  es estable, entonces la aproximación numérica da una solución finalmente acotada (no se puede garantizar estabilidad asintótica, pero siempre se garantiza estabilidad *práctica*).

Otro corolario es que la cota de error depende linealmente de la cuantificación.

## 5. CONCLUSIONES

Se presentó el método de BQSS, el primer algoritmo de QSS implícito que permite simular sistemas stiff de manera eficiente. Se demostró

también que el método comparte las propiedades de precisión de los métodos de QSS anteriores

Una característica notable de BQSS es que su implementación es en realidad explícita, por lo que se trata de un método explícito que no necesita reducir excesivamente el paso de integración para conservar la estabilidad numérica.

El trabajo futuro deberá orientarse a desarrollar métodos similares de orden mayor, ya que BQSS está limitado en precisión al realizar una aproximación de primer orden. Para esto, debería tomarse como base la idea de las aproximaciones de QSS2 y QSS3.

Además un problema en el que BQSS puede resultar muy importante y que por lo tanto debe estudiarse es la simulación en tiempo real de sistemas stiff, ya que este método no necesita realizar las iteraciones que constituyen el principal inconveniente de los métodos implícitos.

## REFERENCES

- F.E. Cellier and E. Kofman. *Continuous System Simulation*. Springer, New York, 2006.
- E. Kofman. A Second Order Approximation for DEVS Simulation of Continuous Systems. *Simulation*, 78(2):76–89, 2002.
- E. Kofman. *Simulación y Control de Sistemas Continuos por Eventos Discretos*. PhD thesis, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario., 2003.
- E. Kofman. Discrete Event Simulation of Hybrid Systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(5):1771–1797, 2004.
- E. Kofman. Non conservative ultimate bound estimation in LTI perturbed systems. *Automatica*, 41(10):1835–1838, 2005.
- E. Kofman. A Third Order Discrete Event Simulation Method for Continuous System Simulation. *Latin American Applied Research*, 36(2):101–108, 2006.
- E. Kofman, H. Haimovich, and M. Seron. A systematic method to obtain ultimate bounds for perturbed systems. *International Journal of Control*, 2006. in press.
- E. Kofman and S. Junco. Quantized State Systems. A DEVS Approach for Continuous System Simulation. *Transactions of SCS*, 18(3):123–132, 2001.
- G. Migoni, E. Kofman, and F.E. Cellier. Integración por Cuantificación de Sistemas Stiff. Parte II: Aplicaciones. Technical Report LSD0602, LSD–UNR, 2006. Submitted to AADECA 2006.
- B. Zeigler, T.G. Kim, and H. Praehofer. *Theory of Modeling and Simulation. Second edition*. Academic Press, New York, 2000.

<sup>1</sup> El símbolo “ $\leq$ ” representa una desigualdad vectorial componente a componente. De manera similar, “[ $\cdot$  |” es el módulo por componentes de una matriz o vector.