

Introducción a la modelización con Bond Graphs

Cátedra de Dinámica de los Sistemas Físicos

Depto. de Electrónica, FCEIA, UNR

Características Generales

- Los Bond Graphs (BG) son un lenguaje
 - gráfico
 - **acausal**
 - con simbología
 - cuantificadora del flujo instantáneo de potencia
 - unificada
 - independiente de alinealidades

para la modelización de Sistemas Físicos

Características Generales

- Los BG proveen una metodología
 - sistemática
 - estructurada, orientada a objetos
 - unificada

de modelado, análisis y simulación de
Sistemas Físicos Dinámicos ($\Sigma\Phi\Delta$)

| DB / EE-ES / PO / SD

$\Sigma\Phi R \rightarrow \Sigma\Phi I \rightarrow DE \rightarrow DECO \rightarrow$ ANALISIS: Estabilidad
| Propiedades Estructurales

Modelado con BG

- $\Sigma\Phi R$ (Sistema Físico Real) $\rightarrow \Sigma\Phi I$ (Idealizado):
 - Análisis de {Sistema + Problema}
 - Identificación de fenómenos dominantes
 - Hipótesis simplificadoras

etapas

- $\Sigma\Phi I \rightarrow DE \rightarrow DECO \rightarrow \dots$: completamente
algoritmizables

Modelado con BG

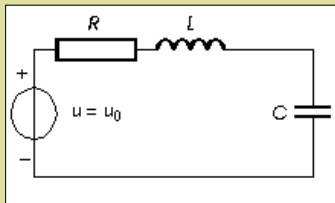
- *Sistema*: disposición delimitada de entidades interactuantes
- *Sistema*: {estructura + componentes}
- *Sistema Físico*: interacción consiste en transformación y/o transporte de materia y/o energía.
- *Sistema Físico Dinámico*: almacenamiento de materia y/o energía.

Modelado con BG

DOS EJEMPLOS SIMPLES

Modelado con BG

Circuito Electrico Serie



Estructura:

Serie **Conserva** Potencia

→ Vínculo Estructural **1**

Componentes:

Fuente: **Genera** Energía

Resistor: **Disipa** Energía

Bobina: **Conserva** Energía (magnética)

Capacitor: **Conserva** Energía (eléctrica)

S (Source)

R (Resistor)

I (Inertia)

C (Capacitor)

Fuente

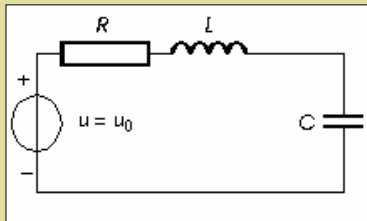
Disipador

Almacenador

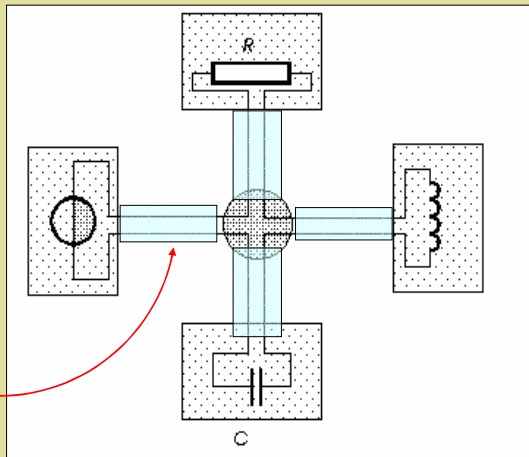
Almacenador

Modelado con BG

Una extraña pero ilustrativa topología

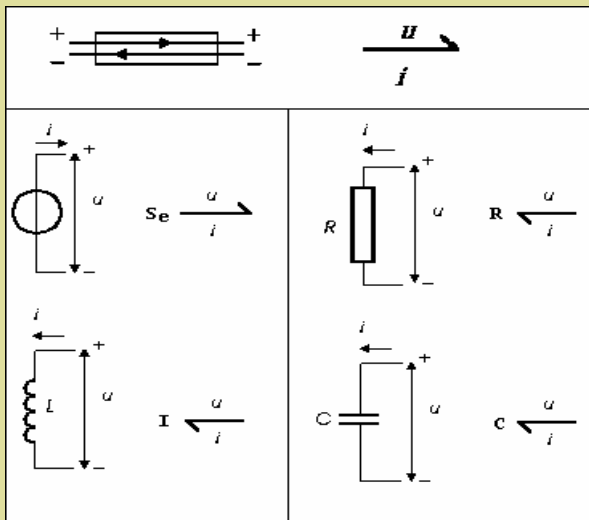


Enlace de Potencia



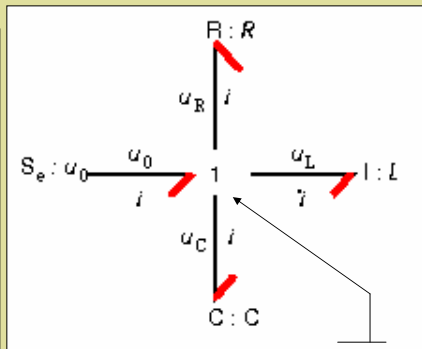
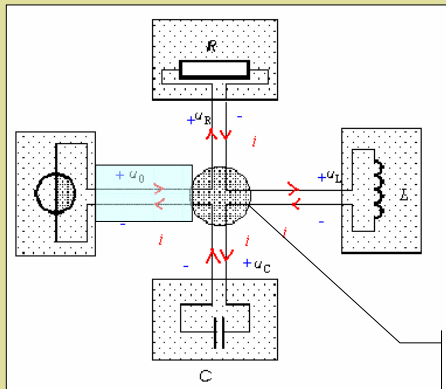
Modelado con BG

Elementos estructurales y componentes



Modelado con BG

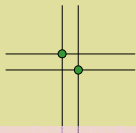
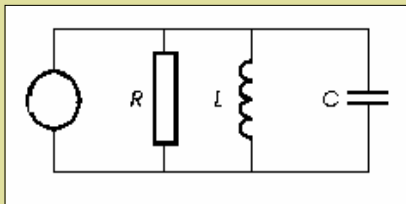
Bond Graph del Circuito Serie



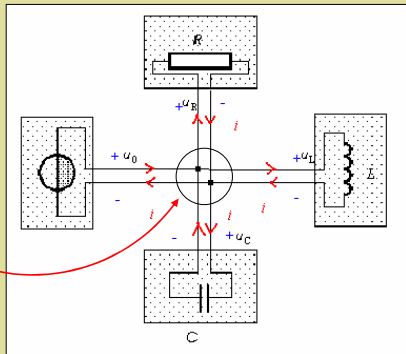
Conexión Serie
Vínculo Estructural Tipo 1

Modelado con BG

Circuito Electrico Paralelo

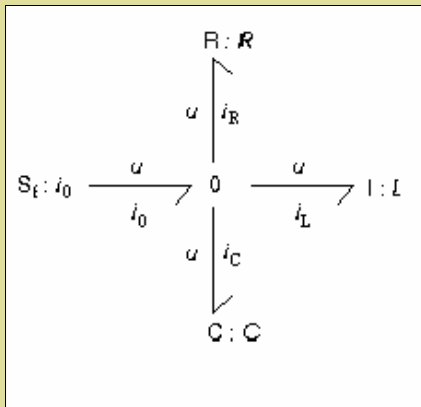
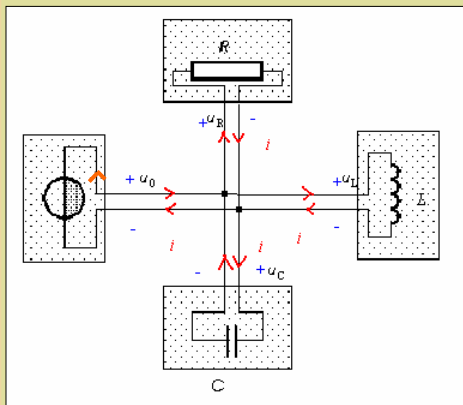


Conexión Paralelo
Vínculo Estructural Tipo 0



Modelado con BG

Bond Graph del Circuito Paralelo



EXTENSIÓN A SISTEMAS MECÁNICOS

ANALOGÍA

Analogía

Analogía Electricidad - Mecánica

- Energía Cinética ~ Energía Campo Magnético $\leftrightarrow$ **I**
- Energía Potencial ~ Energía Campo Eléctrico $\leftrightarrow$ **C**
- $\Rightarrow$ Energía Cinética $\rightarrow$ **I**
- $\Rightarrow$ Energía Potencial $\rightarrow$ **C**

Analogía

Implicancias de la Analogía elegida

ANALOGIA
ENERGETICA



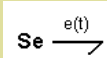
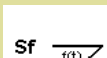
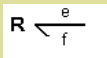
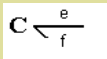
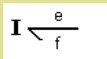
ANALOGIA EN
SEÑAL

Tensión~	Fuerza	(Esfuerzo generalizado)
Corriente	~ Velocidad	(Flujo generalizado)
Flujo Magn.	~ Impulso	(Impulso generalizado)
Carga	~ Desplaz./Def.	(Desplaz. Generalizado)

Analogía - Generalización de Variables

Dominio físico	Variables de Potencia				Variables de Energía			
	Esfuerzo e	S.I.	Flujo f	S.I.	Momento p	S.I.	Desplaz. q	S.I.
Traslación	fuerza F	N	velocidad v	$\frac{m}{s}$	impulso p	N · s	desplaz. x	m
Rotación	torque τ	N · m	velocidad angular ω	$\frac{rad}{s}$	momento angular L	Nm · s	ángulo ϕ	rad
Fluidodinámica	presión P	$\frac{N}{m^2}$	caudal Q	$\frac{m^3}{s}$	impulso del fluido Γ	$\frac{N \cdot s}{m^2}$	volumen V	m^3
Electromagnetismo	tensión U	V	corriente I	A	flujo magnético ϕ	V · s	carga eléctrica	C
Química	potencial químico μ	$\frac{J}{mol}$	flujo molar ν	$\frac{mol}{s}$			número de moles n	mol
Termodinámica	temperatura absoluta T	$^{\circ}K$	flujo de entropía $\dot{S}$	$\frac{W}{^{\circ}K}$			entropía S	$\frac{J}{^{\circ}K}$

Analogía - Generalización de Componentes

Fenómeno energético	Clase		Elementos				Ejemplos técnicos
			Símbolo	Nombre	Potencia Energía	Relación Constitutiva	
Generación de Energía	Fuentes	Monopuertas		Fuente de esfuerzo	$P_{entregada} = e(t) \cdot f$	$e(t)$ independiente	Gravedad , Fuente de f.e.m.
				Fuente de flujo	$P_{entregada} = f \cdot e(t)$	$f(t)$ independiente	Fuente de corriente Bomba hidráulica
Disipación de energía	Disipadores			Resistor	$P_{disipada} = f \cdot e(t)$	$\phi(e,f) = 0$	Rozamiento, Electroresistor
Conservación de Energía	Almacenadores			Capacitor	$\varepsilon_{almac.} = \varepsilon_0 + \int_{q_0}^q e(q) dq$	$f - \frac{dq}{dt} = 0$ $\phi(e,q) = 0$	Elasticidad de materiales Tanque de agua
				Inercia	$\varepsilon_{almac.} = \varepsilon_0 + \int_{p_0}^p e(p) dp$	$e - \frac{dp}{dt} = 0$ $\phi(f,p) = 0$	Inductancia Inercia mecánica

Introducción a la modelización con

17

Analogía - Generalización de Componentes

Fenómeno energético	Clase		Elementos				Ejemplos técnicos	
			Símbolo	Nombre	Potencia Energía	Relación Constitutiva		
Conservación de Potencia	Acopladores			Enlace	$P_{transferida} = e \cdot f$		Cardan (ideal) Línea eléctrica	
	Acopladores Conversores	Multipuertas		Transformador	$P_{absorbida} = P_1 - P_2 = 0$	$e_2 - m \cdot e_1 = 0$ $f_1 - m \cdot f_2 = 0$	Piñón-cremallera Pistón-cilindro	
				Girador	$P_{absorbida} = P_1 - P_2 = 0$	$f_2 - m \cdot e_1 = 0$ $f_1 - m \cdot e_2 = 0$	Giróscopo Convers. electro-mecánica	
	Vínculos			Vínculo uno	$P_{absorbida} = \sum_{j=1}^n \pm P_j = 0$	$f_1 = \dots = f_n = f$ $\sum_{j=1}^n \pm e_j = 0$	Velocidad común Circuito serie	
				Vínculo cero	$P_{absorbida} = \sum_{j=1}^n \pm P_j = 0$	$e_1 = \dots = e_n = e$ $\sum_{j=1}^n \pm f_j = 0$	Serie mecánico Circuito paralelo	

Causalización y Generación de Modelos Matemáticos y Computacionales a partir de Bond Graphs.

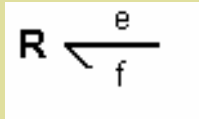
Causalidad

$f(a, b, c) = 0$  Relación NO Causal

$a = g(b, c)$  Relación Causal

Causalidad

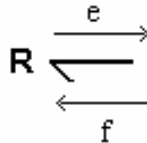
Ejemplo:



Resistencia Lineal: $e - R \cdot f = 0$

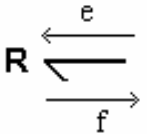
•Opción 1

$$e = R \cdot f$$



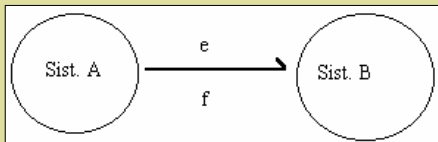
•Opción 2

$$f = \frac{e}{R}$$

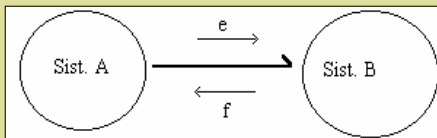


Causalidad

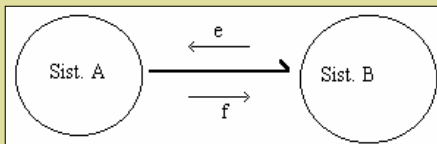
En General:



•Opción 1



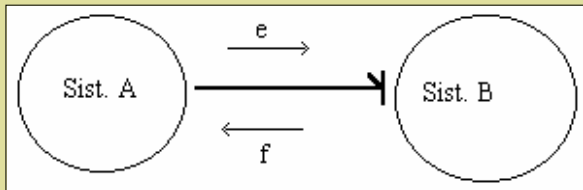
•Opción 2



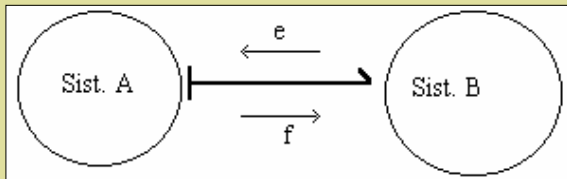
Causalidad

Codificación:

•Opción 1



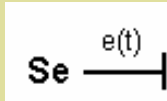
•Opción 2



Causalidad

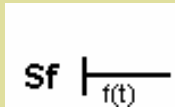
Fuentes: (causalidad necesaria)

Fuente de Esfuerzo:



$e(t)$ independiente

Fuente de Flujo:

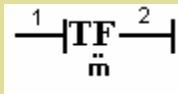


$f(t)$ independiente

Causalidad

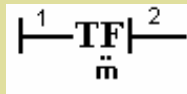
Componentes estructurales: (causalidad restringida)

Transformador:



$$e_2 = m \cdot e_1$$

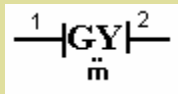
$$f_1 = m \cdot f_2$$



$$e_1 = m \cdot e_2$$

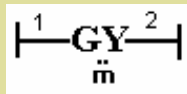
$$f_2 = m \cdot f_1$$

Girador:



$$f_1 = m \cdot e_2$$

$$f_2 = m \cdot e_1$$



$$e_1 = m \cdot f_2$$

$$e_2 = m \cdot f_1$$

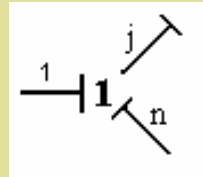
Causalidad

Componentes estructurales: (causalidad restringida)

Vínculo 1:

$$f_1 = f_j, \dots, f_n = f_j$$

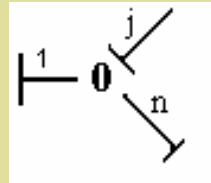
$$e_j = \sum_{k \neq j} \pm e_k$$



Vínculo 0:

$$e_1 = e_j, \dots, e_n = e_j$$

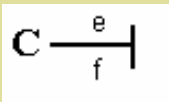
$$f_j = \sum_{k \neq j} \pm f_k$$



Causalidad

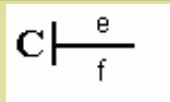
Almacenadores: (causalidad preferencial)

Capacitor:



$$e = e(q)$$

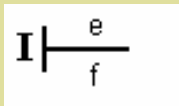
$$q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$



$$f = \frac{d}{dt} q(t)$$

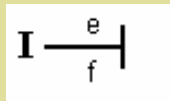
$$q = q(e)$$

Inercia:



$$f = f(p)$$

$$p(t) = p_0 + \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$$

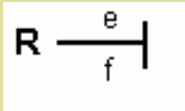


$$e = \frac{d}{dt} p(t)$$

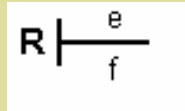
$$p = p(f)$$

Causalidad

Disipadores: (causalidad arbitraria)



$$e = e(f)$$

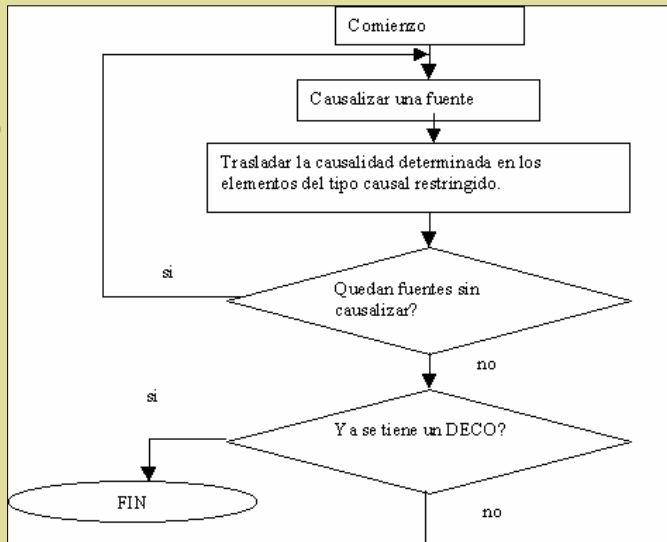


$$f = f(e)$$

Causalidad

Procedimiento de Asignación de Causalidad

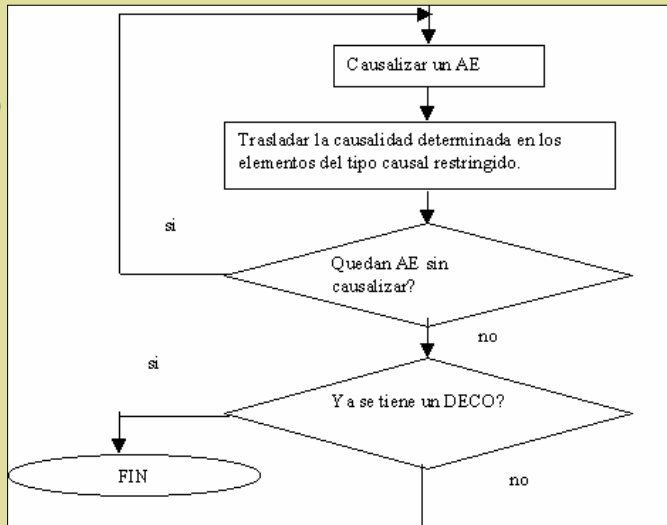
(1)



Causalidad

Procedimiento de Asignación de Causalidad

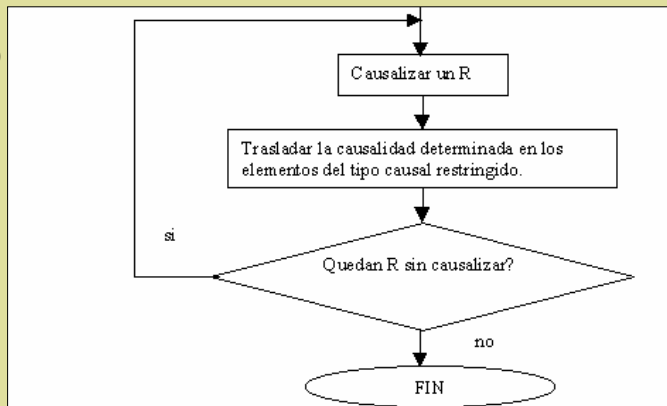
(2)



Causalidad

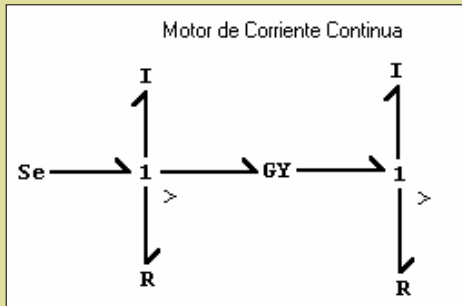
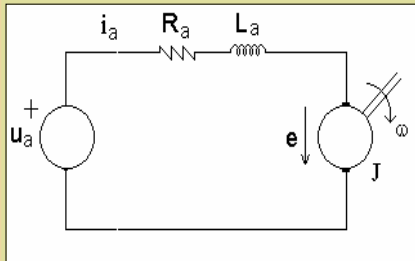
Procedimiento de Asignación de Causalidad

(3)



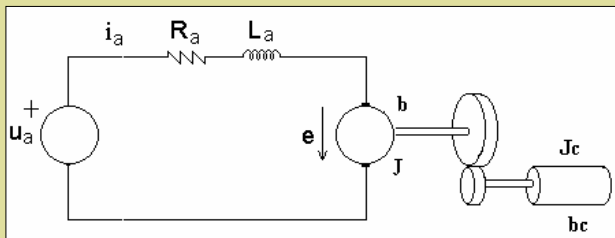
Causalidad

Ejemplo 1:

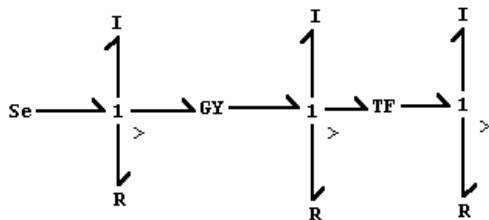


Causalidad

Ejemplo 2:

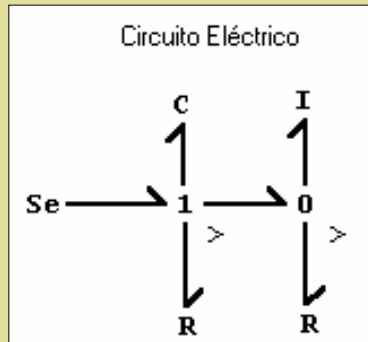
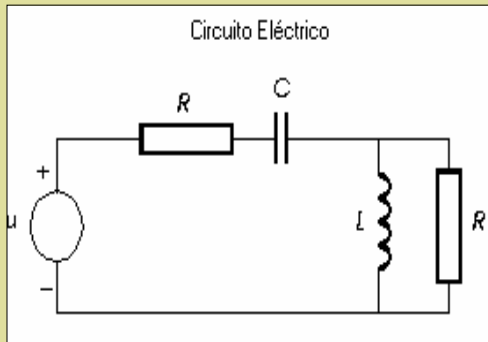


Motor de Corriente Continua con carga



Causalidad

Ejemplo 3:



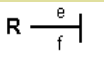
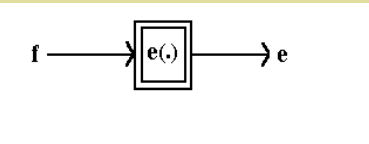
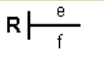
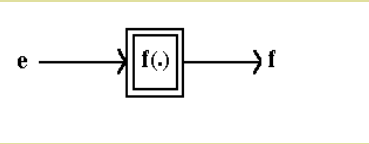
Causalidad- Resumen

Tipo Causal	Notación		
	Gráfica		Matemática
	Diagrama de Enlaces	Diagrama de Bloques	
Necesario			$e(t)$ independiente
			$f(t)$ independiente
Restringido			$e_2 = m \cdot e_1$ $f_1 = m \cdot f_2$
			$e_1 = \rho \cdot e_2$ $f_2 = \rho \cdot f_1$ $\rho = 1/m$
			$f_1 = m \cdot e_2$ $f_2 = m \cdot e_1$
			$e_1 = \rho \cdot f_2$ $e_2 = \rho \cdot f_1$ $\rho = 1/m$

Causalidad- Resumen

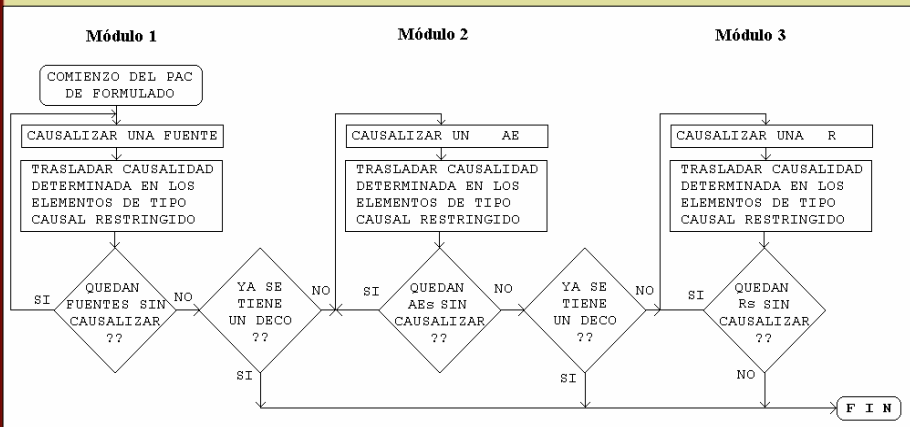
Tipo Causal		Notación		
		Gráfica		Matemática
		Diagrama de Enlaces	Diagrama de Bloques	
Restringido				$f_1 = f_j, \dots, f_n = f_j$ $e_j = \sum_{k \neq j} \pm e_k$
				$e_1 = e_j, \dots, e_n = e_j$ $f_j = \sum_{k \neq j} \pm f_k$
Preferencial	Integral			$e = e(q)$ $q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$
				$f = f(p)$ $p(t) = p_0 + \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau$
	Derivativa			$f = \frac{d}{dt} q(t)$ $q = q(e)$
				$e = \frac{d}{dt} p(t)$ $p = p(f)$

Causalidad- Resumen

Tipo Causal	Notación		
	Gráfica		Matemática
	Diagrama de Enlaces	Diagrama de Bloques	
Arbitrario			$e = e(f)$
			$f = f(e)$

Causalidad- Resumen

Procedimiento de Asignación de Causalidad



Ecuaciones de Estado

- Paso 1: Causalizar el BG.
- Paso 2: Enumerar los Enlaces.
- Paso 3: Identificar las Variables de Estado.

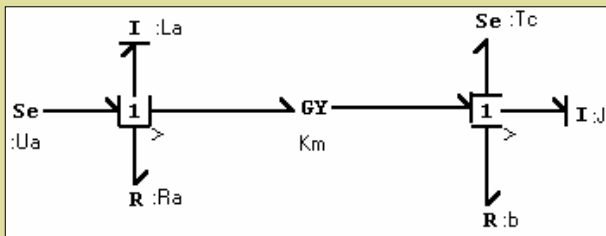
Tomamos como Variables de Estado las variables de energía de los Almacenadores que tengan causalidad Integral.

- Paso 4: Leer las ecuaciones siguiendo la causalidad del BG y utilizando las leyes de los componentes.

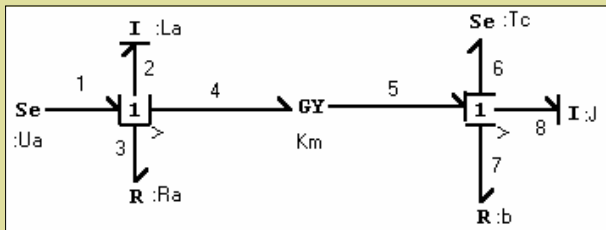
Ecuaciones de Estado

Ejemplo 1:

Paso 1:

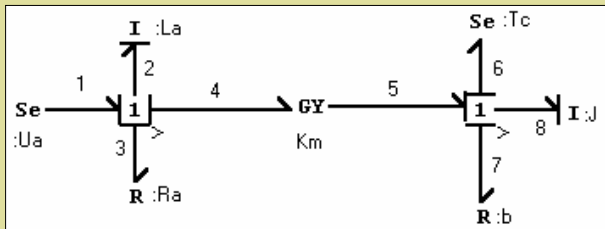


Paso 2:



Ecuaciones de Estado

Ejemplo 1:

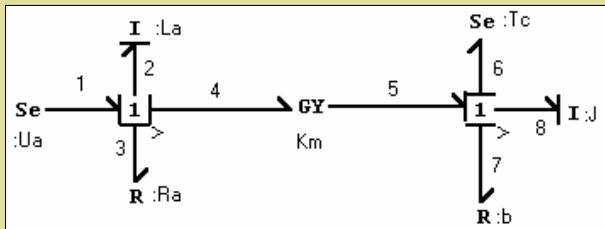


Utilizamos los números de los enlaces como subíndices de las correspondientes variables de potencia y energía.

Paso 3: Variables de Estado: p_2, p_8

Ecuaciones de Estado

Ejemplo 1:



Paso 4:

$$\dot{p}_2 = e_2 = e_1 - e_3 - e_4 = U_a(t) - R_a f_3 - k_m f_5$$

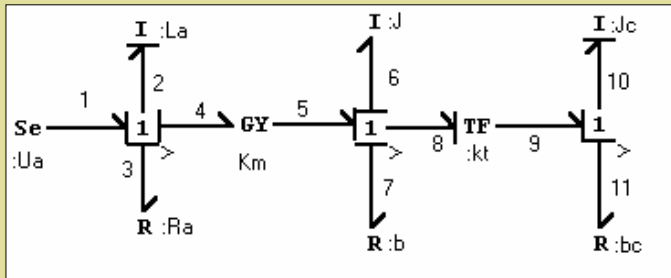
$$\dot{p}_2 = U_a(t) - R_a f_2 - k_m f_8 = U_a(t) - \frac{R_a}{L_a} p_2 - \frac{k_m}{J} p_8$$

$$\dot{p}_8 = e_8 = e_5 - e_6 - e_7 = k_m f_4 - T_c(t) - b \cdot f_7 =$$

$$\dot{p}_8 = k_m f_2 - T_c(t) - b \cdot f_8 = \frac{k_m}{L_a} p_2 - T_c(t) - \frac{b}{J} \cdot p_8$$

Ecuaciones de Estado

Ejemplo 2:

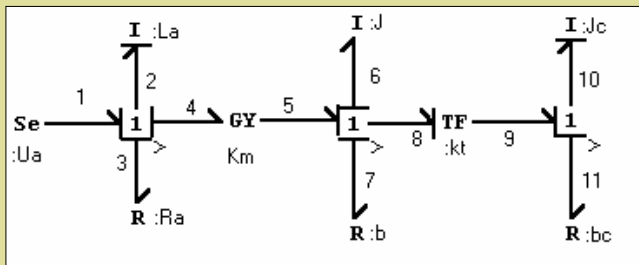


Variables de Estado: p_2, p_{10}

p_6 no es variable de estado porque la inercia correspondiente tiene causalidad derivativa.

Ecuaciones de Estado

Ejemplo 2:

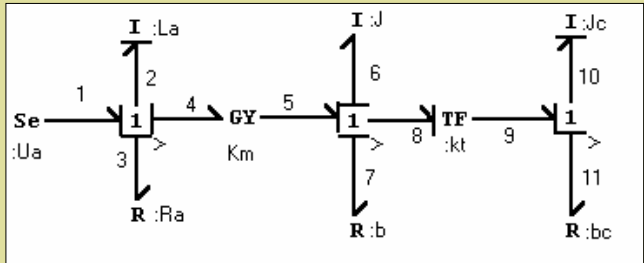


$$\dot{p}_{10} = e_{10} = e_9 - e_{11} = k_t e_8 - b_c f_{11} = k_t (e_5 - e_6 - e_7) - b_c f_{10}$$

Debido a la causalidad derivativa, encontramos un primer inconveniente al intentar leer e_6 .

Ecuaciones de Estado

Causalidad derivativa



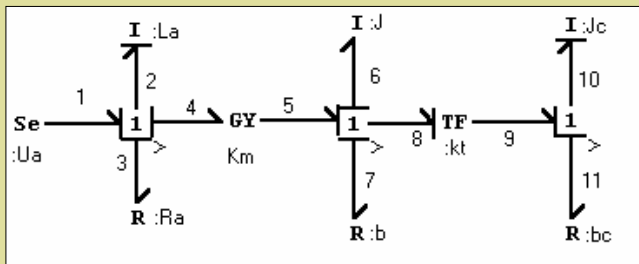
Método:

1 - Continuar leyendo, utilizando como variables auxiliares las derivadas de las variables de energía de los almacenadores con causalidad derivativa.

$$\dot{p}_{10} = \dots = \frac{k_t k_m}{L_a} p_2 - k_t \dot{p}_6 - \frac{k_t^2 b}{J_c} p_{10} - \frac{b_c}{J_c} p_{10}$$

Ecuaciones de Estado

Causalidad derivativa



2 - Leer del BG las variables de energía de los almacenadores con causalidad derivativa en función de las restantes variables de energía y entradas.

$$p_6 = J \cdot f_6 = J \cdot f_8 = J \cdot k_t f_9 = J \cdot k_t f_{10} = \frac{J \cdot k_t}{J_c} p_{10}$$

Ecuaciones de Estado

Causalidad derivativa

3 - Derivar miembro a miembro las expresiones obtenidas en el punto anterior

$$\dot{p}_6 = \frac{J \cdot k_t}{J_c} \dot{p}_{10}$$

4 - Reemplazar las derivadas de las variables de energía en las ecuaciones obtenidas en el primer punto

$$\dot{p}_{10} = \frac{k_t k_m}{L_a} p_2 - k_t \frac{J \cdot k_t}{J_c} \dot{p}_{10} - \frac{k_t^2 b}{J_c} p_{10} - \frac{b_c}{J_c} p_{10}$$

Ecuaciones de Estado

Causalidad derivativa

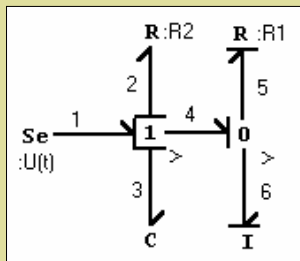
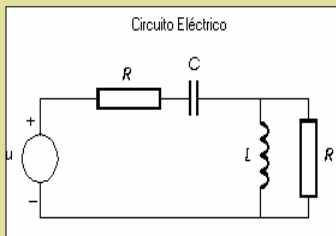
5 - Despejar la expresión de las derivadas de las variables de estado.

$$\dot{p}_{10} = \left(\frac{J_c}{J_c + J \cdot k_t^2} \right) \left(\frac{k_t k_m}{L_a} p_2 - \frac{k_t^2 b + b_c}{J_c} p_{10} \right)$$

Ejercicio: Obtener la otra Ecuación de Estado

Ecuaciones de Estado

Ejemplo 3:



$$\dot{q}_3 = f_3 = f_4 = f_5 + f_6 = \frac{e_5}{R_1} + \frac{1}{L} p_6 = \frac{1}{R_1} e_4 + \frac{1}{L} p_6$$

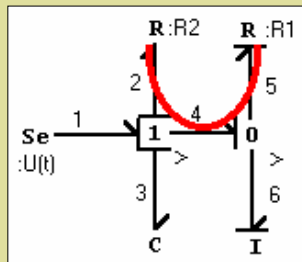
$$\dot{q}_3 = \frac{1}{R_1} (e_1 - e_2 - e_3) + \frac{1}{L} p_6 = \frac{1}{R_1} U(t) - \frac{R_2}{R_1} (f_4) - \frac{1}{R_1 C} q_3 + \frac{1}{L} p_6$$

Debido a la presencia de *disipadores acoplados*, para calcular f_4 necesitamos f_4 .

Ecuaciones de Estado

Disipadores Acoplados

Método:

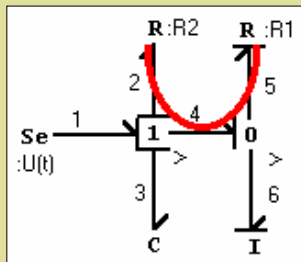


1 -Detectar los disipadores acoplados y utilizar las salidas de los mismos como variables auxiliares al leer las ecuaciones.

$$\dot{q}_3 = f_3 = f_4 = f_5 + f_6 = f_5 + \frac{1}{L} p_6$$

Ecuaciones de Estado

Disipadores Acoplados



2 -Leer del BG las variables auxiliares en función de las variables de estado, entradas y de ellas mismas.

$$f_5 = \frac{e_5}{R_1} = \frac{1}{R_1} e_4 = \frac{1}{R_1} (e_1 - e_2 - e_3) = \frac{1}{R_1} U(t) - \frac{1}{R_1} e_2 - \frac{1}{R_1 C} q_3$$

$$e_2 = R_2 \cdot f_2 = R_2 \cdot f_4 = R_2 (f_5 + f_6) = R_2 f_5 + \frac{R_2}{L} p_6$$

Ecuaciones de Estado

Disipadores Acoplados

3 -Despejar del sistema anterior las variables auxiliares en función de las variables de estado y de entrada.

$$f_5 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(\frac{1}{R_1} U(t) - \frac{R_2}{R_1 L} p_6 - \frac{1}{R_1 C} q_3 \right)$$

4 -Reemplazar las variables auxiliares en las ecuaciones obtenidas en el primer punto.

$$\dot{q}_3 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(\frac{1}{R_1} U(t) - \frac{R_2}{R_1 L} p_6 - \frac{1}{R_1 C} q_3 \right) + \frac{1}{L} p_6$$

Ejercicio: Obtener la otra Ecuación de Estado

Comentarios

- Separación de los problemas de modelado y de obtención del modelo computacional.
- Ventajas al trabajar con un paradigma acausal.
- El pasaje del modelo BG al modelo “matemático” es completamente algoritmizable.
- Algunas herramientas de Software para dicho pasaje: Dymola, 20Sim, Power Dynamo.
- Problemas de “Singularidades Estructurales”.

Bibliografía Recomendada

(Disponible en la cátedra)

- Cellier, F.E. 1991. *Continuous System Modeling*. Springer-Verlag, New York.
- Karnopp, D.C., D.L. Margolis, and R.C. Rosenberg. 1990. *System Dynamics: A Unified Approach*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York.
- Karnopp, D. and R. Rosenberg. 1983. *Introduction to Physical System Dynamics*. N.Y: McGraw-Hill.
- Cellier, F., H. Elmqvist, and M. Otter. 1995. "Modeling from Physical Principles", *The Control Handbook* (W.S. Levine, ed.), CRC Press, Boca Raton, FL, pp.99-108.
- Borutzky, W. 1999. "Relations between bond graph based and object-oriented physical systems modeling". *Proceedings ICBGM'99 /Simul. Series* 31:1
- Junco, S. 1986 "Los Diagramas de Enlaces y un Eficaz Método Estructurado de Modelado Analítico de Sistemas Dinámicos". *Anales del 2do. Congreso Latinoamericano de Control Automático*.