

Jornada sobre Técnicas de Modelado y Simulación

Sistemas Continuos

Ernesto Kofman y Federico Bergero

Laboratorio de Sistemas Dinámicos y Procesamiento de la Información
FCEIA - Universidad Nacional de Rosario.
CIFASIS – CONICET. Argentina

Organización de la Presentación

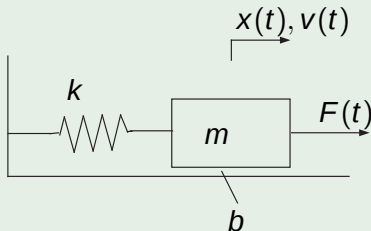
- 1 Ecuaciones Diferenciales
- 2 Diagramas de Bloques
- 3 Introducción a los Bond Graphs

Organización de la Presentación

- 1 Ecuaciones Diferenciales
- 2 Diagramas de Bloques
- 3 Introducción a los Bond Graphs

Ejemplo Introductorio

Sistema Masa-Resorte



Relaciones **Constitutivas**:

- $F_{neta} = m \cdot \ddot{x}(t)$ (Newton)
- $F_{res} = k \cdot \delta(t)$ (Resorte)
- $F_{roz} = b \cdot v_{roz}$ (Fricción)

Relaciones **Estructurales**:

- $F(t) - F_{roz} - F_{res} = F_{neta}$
- $\delta(t) = x(t)$
- $v_{roz} = \dot{x}(t)$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = F(t)$$

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

El modelo que obtuvimos del sistema masa–resorte consituye una **Ecuación Diferencial Ordinaria** (EDO).

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = F(t)$$

- $x(t)$ es la variable de **salida** del modelo.
- $F(t)$ es la variable de **entrada**.
- El modelo es de **segundo orden**.
- Es un modelo **lineal y estacionario**.

Ecuaciones de Estados

Una EDO de orden n puede reescribirse como un sistema de n EDOs de orden 1, denominadas **Ecuaciones de Estado**. Por ejemplo, para la EDO

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = F(t)$$

definiendo $v(t) \triangleq \dot{x}(t)$, queda el sistema

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{m}[-k x(t) - b v(t) + F(t)]$$

en el cual las variables $x(t)$ y $v(t)$ se denominan **variables de estado**

Ecuaciones de Estado. Forma General

La forma general de las **Ecuaciones de Estado** (EE) es la que sigue:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$

que se puede completar con **Ecuaciones de Salida**:

$$y_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$

$$\vdots$$

$$y_p(t) = g_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t)$$

Modelado con Ecuaciones Diferenciales

Si bien los Sistemas Continuos se representan mediante modelos de Ecuaciones Diferenciales, es muy difícil obtener directamente las ecuaciones correspondiente a un modelo complejo, ya que:

- los sistemas de ecuaciones no se pueden **acoplar** para obtener modelos complejos a partir de modelos simples,
- llegar a la EDO desde las relaciones constitutivas y estructurales requiere mucho trabajo **algebraico**,
- los modelos obtenidos no guardan similitud visual con los esquemas originales.

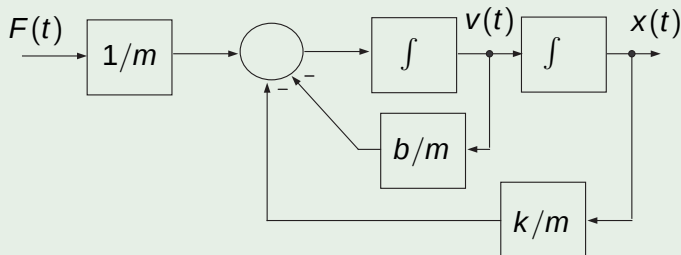
Debido a esto, para obtener modelos de sistemas continuos se prefiere utilizar lenguajes **gráficos**.

Organización de la Presentación

- 1 Ecuaciones Diferenciales
- 2 Diagramas de Bloques
- 3 Introducción a los Bond Graphs

Diagramas de Bloques

Diagrama de Bloques



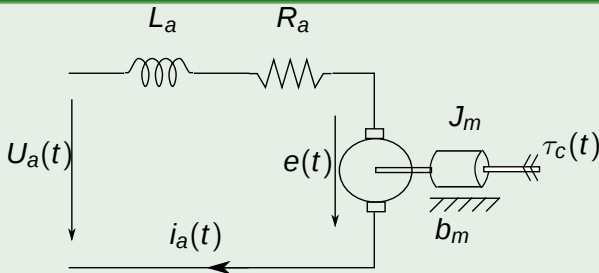
$$\dot{x}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{b}{m}v(t) + \frac{1}{m}F(t)$$

Modelado con Diagramas de Bloques

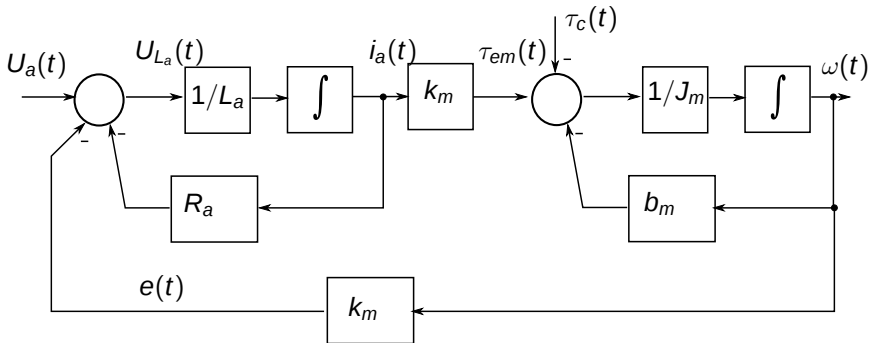
Los Diagramas de Bloques (DBs) simplifican el trabajo de manipulación algebraica de las relaciones constitutivas y estructurales.

Ejemplo: Motor de Corriente Continua



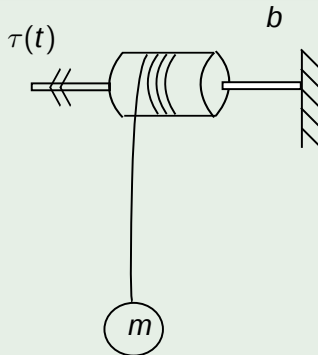
Modelado con Diagramas de Bloques

Diagrama de Bloques del Motor de Corriente Continua



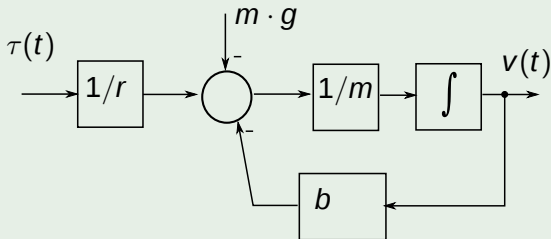
Modelado con Diagramas de Bloques

Sistema Roto–Translacional: Polea



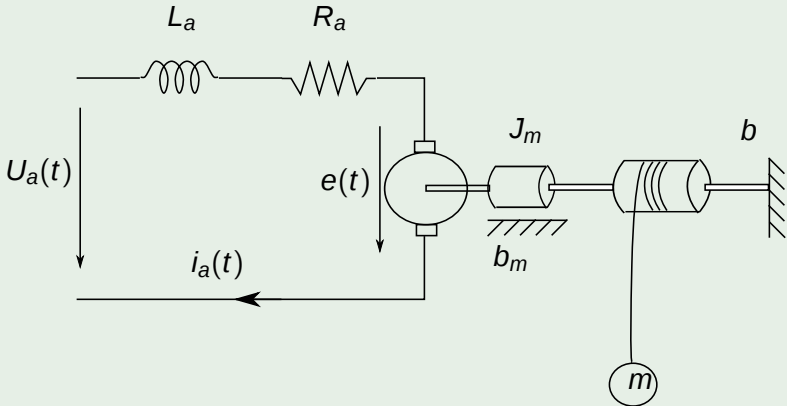
Modelado con Diagramas de Bloques

DB del Sistema Roto–Translacional



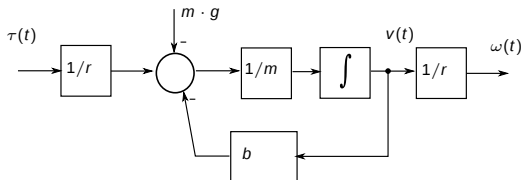
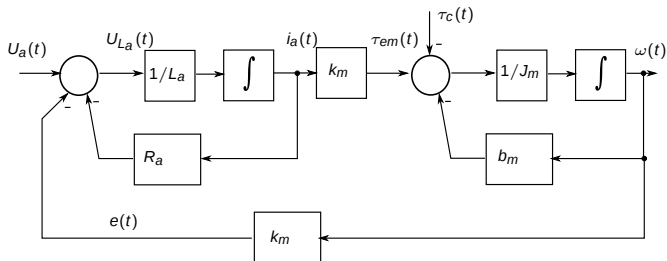
Modelado con Diagramas de Bloques

Ejemplo: Motor de Corriente Continua + Polea



¿Podemos construir el DB **acoplado** los Diagramas de Bloques del Motor y de la Polea?

Modelado con Diagramas de Bloques



Limitaciones de los Diagramas de Bloques

- Además de establecer relaciones matemáticas, los DB establecen **relaciones causales** entre las variables.
- Debido a esto, cada subsistema ve las **variables de interacción** como variables de entrada o de salida.
- Si dos subsistemas ven sus variables de interacción con la misma causalidad, se genera un **conflicto causal** y no se pueden acoplar los DB.

Un formalismo que permita acoplar subsistemas debe ser **acausal**.

Organización de la Presentación

- 1 Ecuaciones Diferenciales
- 2 Diagramas de Bloques
- 3 Introducción a los Bond Graphs**