Jornada sobre Técnicas de Modelado y Simulación

Sistemas de Tiempo Discreto

Ernesto Kofman y Federico Bergero

Laboratorio de Sistemas Dinámicos y Procesamiento de la Información
FCEIA - Universidad Nacional de Rosario.
CIFASIS – CONICET. Argentina

Organización de la Presentación

Organización de la Presentación

Ecuaciones en Diferencias

El siguiente modelo, correspondiente a un filtro digital muy simple, es una ecuación en diferencias de segundo orden

$$y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) = b_0 u(k)$$

- El modelo está definido sólo para los instantes discretos $t_0, t_1, \cdots, t_k, \cdots$.
- $y(k) = y(t_k)$ es la variable de salida del modelo.
- $u(k) = u(t_k)$ es la variable de entrada del modelo.
- Las constantes a_1, a_2, b_0 son parámetros del modelo.
- Este caso se trata de un modelo lineal.

Ecuaciones en Diferencias: Estados

Una ecuación en diferencias de orden n se puede representar por n ecuaciones de orden 1. En el caso anterior,

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = -a_2 \cdot x_1(k) - a_1 \cdot x_2(k) + u(k)$$

donde además

$$y(k) = -a_2 \cdot b_0 \cdot x_1(k) - a_1 \cdot b_0 \cdot x_2(k) + b_0 \cdot u(k)$$

- Las nuevas variables $x_1(k)$ y $x_2(k)$ se denominan variables de estado.
- Las dos ecuaciones de orden 1 se llaman ecuaciones de estado.
- La ecuación estática que calcula $y(k)$ es la ecuación de salida.

Ecuaciones en Diferencias. Ejemplo No Lineal

El siguiente modelo se denomina Ecuación de Nicholson–Bailey y representa la dinámica de poblaciones de parásitos y huéspedes.

$$N(k+1) = \lambda \cdot N(k) \cdot e^{-a \cdot P(k)}$$
$$P(k) = N(k) \cdot (1 - e^{-a \cdot P(k)})$$

- $N(k)$ y $P(k)$ son las variables de estado (número de huéspedes y parásitos, respectivamente).
- Son Ecuaciones de Estado no lineales.
- Es un modelo autónomo.

Ecuaciones en Diferencias: Forma General

La forma general de escribir una ecuación en diferencias en su representación de Ecuaciones de Estado es la que sigue:

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= f_1[x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k), u_1(k), \cdots, u_m(k)] \\
x_2(k+1) &= f_2[x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k), u_1(k), \cdots, u_m(k)] \\
&\vdots \\
x_n(k+1) &= f_n[x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k), u_1(k), \cdots, u_m(k)]
\end{aligned}
$$

con las Ecuaciones de Salida:

$$
\begin{aligned}
y_1(k) &= g_1[x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k), u_1(k), \cdots, u_m(k)] \\
y_2(k) &= g_2[x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k), u_1(k), \cdots, u_m(k)] \\
&\vdots \\
y_p(k) &= g_p[x_1(k), x_2(k), \cdots, x_n(k), u_1(k), \cdots, u_m(k)]
\end{aligned}
$$

Ecuaciones en Diferencias: Notación Vectorial

Las Ecuaciones de Estado se escriben generalmente en forma vectorial. Definiendo:

$$\mathbf{x}(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} ; \mathbf{u}(k) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix} ; \mathbf{y}(k) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix} ; \mathbf{f}(\cdot) \triangleq \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix}$$

las ecuaciones de estado y salida se pueden reescribir:

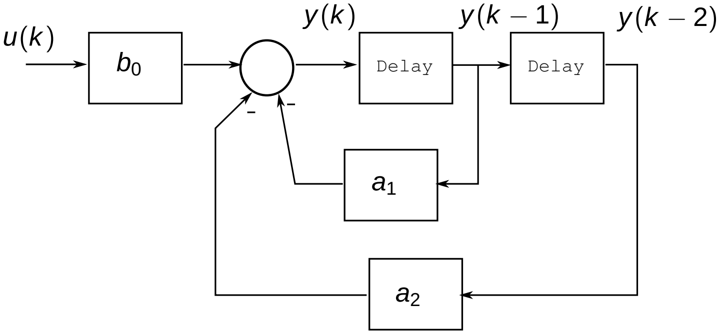
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$$

Organización de la Presentación

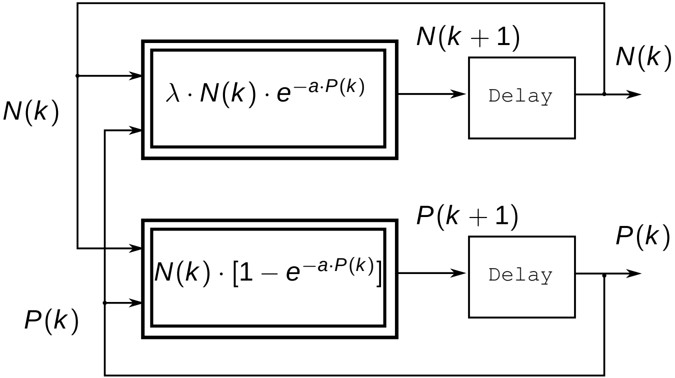
Diagramas de Bloques

Los Diagramas de Bloques son una herramienta gráfica de representación de modelos. Las variables se representan con flechas, y las operaciones matemáticas con bloques.



$$y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) = b_0 u(k)$$

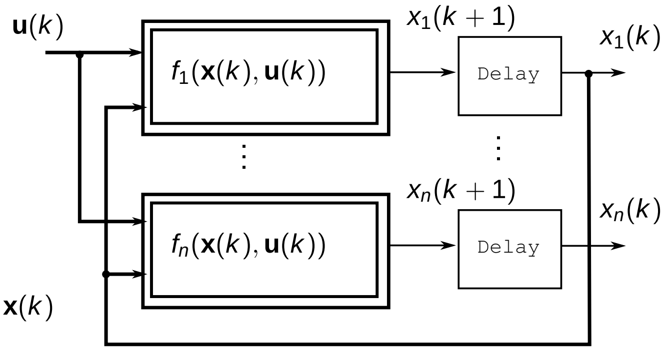
Diagramas de Bloques. Ejemplo No Lineal



$$N(t_{k+1}) = \lambda \cdot N(t_k) \cdot e^{-a \cdot P(t_k)}$$
$$P(t_{k+1}) = N(t_k) \cdot [1 - e^{-a \cdot P(t_k)}]$$

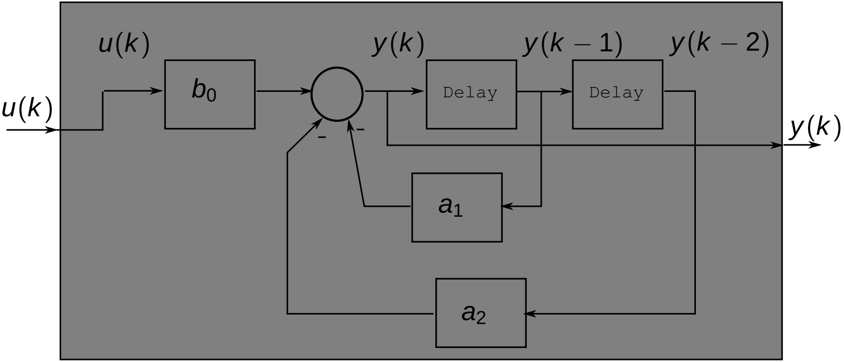
Nicholson–Bailey

Diagrama de Bloques. Caso General



$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$$

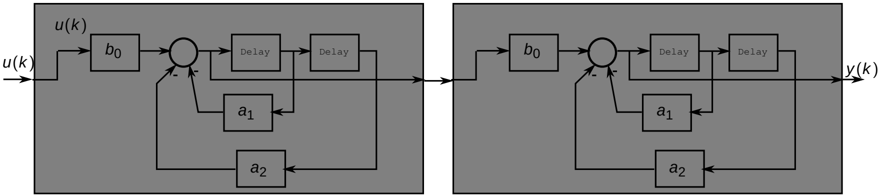
Diagramas de Bloques Jerárquicos



$$y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) = b_0 u(k)$$

Diagramas de Bloques Jerárquicos

El acoplamiento jerárquico permite construir modelos más complejos a partir de submodelos ya construidos.



Cascada de dos filtros.

Organización de la Presentación

Simulación de Sistemas de Tiempo Discreto

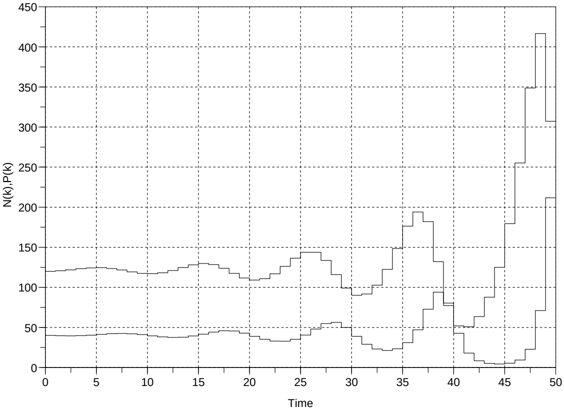
La simulación de un sistema de tiempo discreto es trivial. Dada una representación de la forma

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$$

y conocidas las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0)$, el siguiente algoritmo simula el sistema:

1. Ponemos inicialmente $k = 0$
2. Calculamos el siguiente valor del estado $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$.
3. Incrementamos k en 1.
4. Si $t_k \geq t_f$ terminamos la simulación. En otro caso, volvemos al punto 2.

Simulación de la Ecuación de Nicholson-Bailey



Cond.Inic.
$N(0) = 120$,
$P(0) = 40$.
Parámetros:
$\lambda = 1.5$, $a = 0.01$.

Bibliografía

J. Proakis and D. Manolakis.
Digital Signal Processing.
Prentice Hall, 4th. edition, 2006.