CURSO DE INGRESO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

FEDERICO SEVERINO GUIMPEL* & NATALIA COLUSSI*
LAURA POMPONIO[1] & EUGENIA SIMICH*

Febrero 2015

CONTENIDOS

* *Departamento de Ciencias de la Computación, Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario*
[1] *CIFASIS, CONICET-Universidad Nacional de Rosario*

1 PRELIMINARES

La breve introducción sobre el uso de la matemática y la lógica que abordaremos con más detalles en los siguientes secciones, pretende iniciar a los estudiantes en el objetivo de este curso.

La meta es enseñar lógica como una herramienta. No pretendemos que los alumnos sean profundos conocedores de la lógica sino que sepan como aplicarla. La lógica brinda todos los métodos de razonamiento posibles, mientras que la matemática aporta los modelos dotados del rigor necesario para las estructuras de estos razonamientos. Ambas disciplinas proveen un sostén fundamental para la *derivación de programas*, técnica que abordaremos en los cursos de Programación I, y II, que básicamente consiste en la construcción de *programas* correctos.

A esta altura podemos decir que un programa es una secuencia lógica de proposiciones descriptas en un lenguaje formal (riguroso) que tiene por objeto la consecución de una tarea específica. Los alumnos de ciencias de la computación no serán lógicos ni matemáticos sino serios estudiosos de los métodos de programación para lo cual es necesario contar tanto con teoría de demostraciones como con modelos de esas teorías. Por esta razón es que haremos énfasis en la manipulación sintáctica de fórmulas como herramienta poderosa para poder descubrir y afirmar verdades.

2 UTILIZANDO LA MATEMÁTICA

La matemática se utiliza con frecuencia para representar o modelar distintos fenómenos reales. Esto se debe a que la matemática provee una forma de representación concisa, precisa y además apta para la manipulación de la estructura interna de los objetos que se modelan. Una definición de modelo matemático podría ser la siguiente:

Definición. 1. Un modelo matemático es una construcción matemática abstracta y simplificada relacionada con una parte de la realidad y creada para un propósito particular. Así, por ejemplo, un gráfico, una función o una ecuación pueden ser modelos matemáticos de una situación específica.

Por ejemplo, la ecuación $e = m \times c^2$ fue la forma en que Albert Einstein expresó su convencimiento sobre la relación entre la energía e y la masa m de una partícula (siendo c la velocidad de la luz).

Las leyes del movimiento planetario, o al menos los modelos de estas leyes, se utilizan en el lanzamiento y puesta en órbita de los satélites. Las ciencias sociales también emplean matemática a la hora de realizar estadísticas o analizar, comprender y predecir el comportamiento de la sociedad. Los modelos matemáticos también ayudan en la predicción del estado del tiempo o el stock de una empresa.

Como simple ejemplo de modelo matemático, presentamos el siguiente problema:

Ejemplo. 1
Se nos pide resolver el siguiente sistema de ecuaciones simples:

> *María tiene el doble de manzanas que Juan, María tira la mitad de las manzanas pues están en mal estado y Juan come una de sus manzanas. María todavía tiene el doble de manzanas que Juan. ¿Cuántas manzanas tienen María y Juan?*

Supongamos que mediante las letras m *y* j *representamos las cantidades de manzanas que tienen María y Juan, entonces ponemos el problema anterior en fórmulas matemáticas del siguiente modo:*

$$m = 2 \times j \qquad \text{y} \qquad \frac{m}{2} = 2 \times (j - 1)$$

Cualquier valor de m *y* j *que haga ciertas a las dos igualdades expresadas arriba es una posibilidad en el número de manzanas que tenían inicialmente María y Juan.*

Observemos que la forma matemática de expresar el problema es más reducida que la forma de expresarlo en lenguaje español. En general podemos afirmar que todo modelo matemático es más preciso, conciso y riguroso que cualquier descripción informal de un problema escrito en lenguaje español.

Para ilustrar las ventajas del rigor matemático, consideremos un proceso de cálculo mediante el cual se consigue una aproximación entera de la raíz cuadrada de un número entero n, a la que llamaremos b.

Ejemplo. 2
Para calcular $\sqrt{n}$, *es necesario que* $n \geqslant 0$, *pues no existe la raíz cuadrada de un número entero negativo. Por lo tanto la expresión* $n \geqslant 0$ *especifica rigurosamente bajo qué condiciones puede llevarse a cabo el proceso de cálculo, con lo cual esta expresión recibe el nombre de* precondición *del proceso. Mientras que la precondición indica qué debe suponerse cierto antes de la ejecución de un proceso, la* poscondición *determina qué es cierto luego de la ejecución de éste. En nuestro ejemplo, formalizar la poscondición requiere que nos pongamos de acuerdo acerca de* b *que, como ya dijimos, representa la aproximación de* $\sqrt{n}$. *A continuación damos dos posibles elecciones de aproximación adecuada de* $\sqrt{n}$*:*

1. $b^2 \leqslant n < (b+1)^2$
2. $(b-1)^2 < n \leqslant b^2$

La primera elección de b *consiste en calcular el mayor entero que es a lo sumo* $\sqrt{n}$, *y la segunda corresponde a calcular el menor entero que es al menos* $\sqrt{n}$.

Observemos que en lenguaje español nos referimos simplemente a "una aproximación de $\sqrt{n}$", mientras que cuando usamos formulaciones matemáticas nos vemos forzados a ser precisos especificando con exactitud qué aproximación es considerada aceptable, el rigor nos conduce a un análisis más exhaustivo.

Otra importante ventaja en el uso de modelos matemáticos es la posibilidad que ofrecen de contestar preguntas sobre los objetos o fenómenos que se modelan. El descubrimiento del planeta Neptuno ilustra esta ventaja.

Ejemplo. 3
En el siglo XVII, Kepler, Newton y otros formularon modelos matemáticos que describían el movimiento planetario basados en la observación de los planetas y las estrellas. En el siglo XVIII los científicos descubrieron que el movimiento de Urano no acordaba con la descripción formulada por los modelos, estas discrepancias produjeron que la Real Sociedad de Ciencias de Göttingen, en Alemania, ofreciera un premio a quien estableciera una teoría aceptable sobre el movimiento de Urano. Los científicos de la época conjeturaron que la órbita de Urano era afectada por la presencia de un planeta desconocido. Luego de dos o tres años de cálculos (todos hechos a mano) obtuvieron la posición probable del planeta desconocido y rastreando el área con telescopios descubrieron el planeta Neptuno en 1846.

Por otra parte, es importante destacar que la matemática provee métodos de razonamiento: a través de la manipulación de expresiones se pueden demostrar propiedades de las expresiones y obtener nuevos resultados desde otros ya conocidos. Este razonamiento puede realizarse sin el conocimiento sobre el significado de los símbolos que son manipulados. Es decir, la matemática ofrece reglas que permiten aprender cuestiones sobre el objeto o el fenómeno que se describe mediante el modelo, sólo la formulación inicial y final necesitan ser interpretadas en términos del problema original. Esto es lo que se conoce como *manipulación sintáctica.* Aquí presentamos un ejemplo sencillo de manipulación sintáctica.

Ejemplo. 4
Supongamos que queremos una expresión equivalente a la ecuación $e = m \times c^2$ *que permita calcular el valor de* m *suponiendo* e *dado. Sin necesidad de pensarlo demasiado podemos escribir* $m = e/c^2$. *En la escuela secundaria se enseñan reglas para la manipulación de expresiones aritmética y la práctica hace que se apliquen automáticamente utilizando una o más de estas reglas simultáneamente. A continuación daremos un detalle de las reglas que aplicadas a la expresión* $e = m \times c^2$ *permiten obtener* $m = e/c^2$*:*

$$
\begin{aligned}
& e = m \times c^2 \\
= \quad & \langle \textit{dividimos ambos miembros por } c^2 \neq 0 \rangle \\
& e/c^2 = (m \times c^2)/c^2 \\
= \quad & \langle \textit{asociatividad de la multiplicación} \rangle \\
& e/c^2 = m \times (c^2/c^2) \\
= \quad & \langle c^2/c^2 = 1 \rangle \\
& e/c^2 = m \times 1 \\
= \quad & \langle m \times 1 = m \rangle \\
& m = e/c^2.
\end{aligned}
$$

En los cálculos realizados arriba, existe un formato especial que adoptaremos en este curso: entre dos expresiones existe un signo igual seguido de una breve frase encerrada entre los signos $\langle\,\rangle$. El signo igual indica que las dos expresiones son iguales mientras que la frase es una explicación que sostiene esa igualdad. Por otra parte, como la relación de igualdad es transitiva (es decir si $a = b$ y $b = c$ podemos concluir que $a = c$), podemos concluir que $e = m \times c^2$ es equivalente a $m = e/c^2$.

Observemos que pudimos entender cada una de las manipulaciones anteriores sin entender el significado de e, m y c, es decir, sin conocer que las ecuaciones que fueron manipuladas corresponden a un modelo de la relación entre la masa y la energía; fuimos capaces de razonar sintácticamente.

2.1 El Formato de Prueba Ecuacional

Veamos algunos ejemplos más sobre este formato de prueba al que llamaremos ecuacional, para entender y asimilar este mecanismo de prueba, el cual emplearemos de aquí en adelante, tanto en el curso de ingreso como en las materias Programación I y II.

Supongamos que se nos pide resolver la siguiente ecuación lineal, $3 \times x + 1 = 7$. Dicha ecuación se trata de dos expresiones aritméticas unidas por un símbolo de igualdad, el cual nos lleva a pensar que toda la ecuación tiene cierto valor de verdad, es decir que será verdadera o falsa. Pero, la ecuación tal cual está escrita , no tiene un valor de verdad fijo.

La letra x cumple la función de *variable*. En secciones posteriores volveremos a este concepto, pero intuitivamente, una variable puede representar muchos valores. En este caso, cualquier número. La presencia de la variable x, indica que el valor de verdad de la ecuación dependerá del valor que tome esta variable. Para algunos valores será verdadera y para otros será falsa. Por ejemplo, para $x = 1$ será falsa, mientras que para $x = 2$ será verdadera.

La resolución de esta ecuación consiste en identificar el conjunto de valores de x para los cuales la ecuación es verdadera. La forma usual de hacer esto es obtener otra ecuación equivalente a la primera, pero suficientemente simple como para que el conjunto de soluciones sea visible de manera inmediata. Procederemos a resolverla utilizando nuestro formato de prueba de la siguiente forma:

Ejemplo. 5

$$
\begin{array}{ll}
 & 3 \times x + 1 = 7 \\
= & \quad \langle \text{ \textit{restamos 1 en ambos miembros} } \rangle \\
 & 3 \times x = 6 \\
= & \quad \langle \text{ \textit{dividimos por 3 en ambos miembros} } \rangle \\
 & x = 2.
\end{array}
$$

En la demostración anterior, las leyes de la aritmética aseguran la corrección de cada paso, esto es cada una de las sucesivas ecuaciones tiene el mismo conjunto de soluciones o, dicho de otra manera, son verdaderas para los mismos valores de x.

Como resultado de la demostración podemos afirmar que el valor de verdad (verdadero o falso) de la primera ecuación para un x fijo, es el mismo que para el de la última, para el mismo valor de x. O lo que es lo mismo, el conjunto de valores de x para los cuales la ecuación $3 \times x + 1 = 7$ es verdadera, es exactamente el mismo para los de la ecuación $x = 2$ es verdadera. De esto último se desprende que el único valor para la variable x que hace verdadera la ecuación $3 \times x + 1 = 7$ es 2. Llamaremos al conjunto de valores que hace verdadera una ecuación como el conjunto de soluciones de esa ecuación.

Observación. 1. El tamaño de los pasos, con esto entendemos la cantidad de pasos que emplearemos para la transformación de una expresión, dependerá del objetivo de la demostración que se esté realizando. En este caso, se está presentando de una manera detallada la resolución de una ecuación lineal, por lo cual los pasos son particularmente detallados. Si se esta trabajando por ejemplo, en la derivación de programas, donde el énfasis estará en otro lado, la demostración precedente puede abreviarse de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
 & 3 \times x + 1 = 7 \\
= & \quad \langle \text{ Aritmética } \rangle \\
 & x = 2.
\end{array}
$$

donde se asume que el lector de la demostración puede comprender y verificar el paso sin ningún problema. De todas formas, frente a la duda, conviene ser lo más explícito posible.

Consideremos la resolución de la siguiente ecuación,

Ejemplo. 6

$$
\begin{array}{ll}
 & 3 \times x + 1 = 3 \times (x+1) - 2 \\
= & \quad \langle \textit{ Prop. Distributiva } \rangle \\
 & 3 \times x + 1 = 3 \times x + 3 - 2 \\
= & \quad \langle \textit{ Evaluación Aritmética } \rangle \\
 & 3 \times x + 1 = 3 \times x + 1 \\
= & \quad \langle \textit{ Reflexividad de la Igualdad } \rangle \\
 & \mathsf{true}.
\end{array}
$$

Usamos la palabra true para denotar la proposición siempre verdadera, independientemente de los valores que las variables que estén usando. Esto significa que para cualquier valor de la variable x la ecuación es verdadera o, dicho de otro modo, que el conjunto de soluciones de la última ecuación es el de todos los enteros (o reales, o naturales, según como se haya planteado el problema). Por lo tanto, como resultado de la demostración el conjunto de soluciones de la ecuación $3 \times x + 1 = 3 \times (x+1) - 2$ es el de todos los números enteros.

Consideremos ahora la resolución de la siguiente ecuación:

Ejemplo. 7

$$
\begin{array}{ll}
 & 3 \times x + 1 = 3 \times (x+1) \\
= & \quad \langle \textit{ Prop. Distributiva } \rangle \\
 & 3 \times x + 1 = 3 \times x + 3 \\
= & \quad \langle \textit{ Restamos } 3 \times x \textit{ en cada miembro } \rangle \\
 & 1 = 3 \\
= & \quad \langle \textit{ Igualdad entre enteros } \rangle \\
 & \mathsf{false}.
\end{array}
$$

Simétricamente al ejemplo anterior, la proposición false es la que resulta falsa para cualquier valor de x. Se dice que en este caso que la ecuación no tiene solución, o que equivalentemente, que su conjunto de soluciones es vacío. Por lo tanto, como resultado de la demostración, el conjunto de soluciones de la ecuación $3 \times x + 1 = 3 \times (x+1)$ es vacío, o directamente, no tiene solución.

3 UTILIZANDO LA LÓGICA

¿Qué es la lógica?. La lógica es el estudio de los métodos y principios usados para distinguir el buen (correcto) razonamiento del malo (incorrecto).

No debe interpretarse esta definición en el sentido de que sólo el estudioso de la lógica puede razonar correctamente, pero la persona que ha estudiado lógica tiene mayor posibilidad de razonar correctamente que aquella que nunca ha pensado en los principios generales implicados en esta actividad.

La lógica ha sido definida a menudo como la ciencia de las leyes del pensamiento. Pero esta definición no es exacta. En primer lugar, el pensamiento es uno de los procesos estudiados por los psicólogos, y la lógica no es una rama de la psicología; es un campo de estudio separado y distinto. En segundo lugar, si pensamiento es cualquier proceso mental que se produce en la mente de las personas, no todo pensamiento es un objeto de estudio para el lógico. Todo razonamiento es pensamiento, pero no todo pensamiento es razonamiento. Por ejemplo, es posible pensar en un número entre 1 y 10, sin elaborar ningún razonamiento acerca de él. Es posible recordar algo, imaginarlo o lamentarlo sin razonar sobre ello.

Otra definición común de la lógica es aquella que la considera como la ciencia del razonamiento. Esta definición es mejor, pero aún no es adecuada. El razonamiento es un tipo especial de pensamiento en el que se realizan inferencias, o sea en el que se realizan conclusiones que derivan de premisas. Pero los oscuros caminos por los cuales la mente llega a sus conclusiones durante los procesos reales de razonamiento, no son en absoluto de la incumbencia del lógico. Sólo le interesa la corrección del proceso, una vez terminado. Su problema es siempre el siguiente: la conclusión a la que se ha llegado ¿deriva de las premisas usadas o afirmadas?. Si las premisas brindan adecuados fundamentos para aceptar la conclusión, si afirmar que las premisas son verdaderas garantías de que la conclusión también será verdadera, entonces el razonamiento es correcto. De lo contrario es incorrecto.

La distinción entre el razonamiento correcto y el incorrecto es el problema central de la lógica. Los métodos y las técnicas de la lógica han sido desarrollados esencialmente con el propósito de aclarar esta distinción. La lógica se interesa por todos los razonamientos sin tomar en cuenta su contenido. Es decir, la lógica nos permitirá la manipulación de expresiones más generales que las expresiones aritméticas que ya hemos mencionado.

3.1 Terminología

Vamos a presentar ahora cierta terminología que es utilizada en la lógica.

Definición. 2. Una *proposición* es una frase o expresión que sólo puede ser verdadera o falsa.

En esto las proposiciones se diferencian de otras frases o expresiones como las exclamaciones, las preguntas o las órdenes, dado que una pregunta: *¿Cuándo llega el colectivo?*, una exclamación: *¡ Pepe que alegría de verte!*, o una orden: *No pasar, riesgo* *eléctrico*, no puede decirse que sean verdaderas o falsas: su función dentro del lenguaje no es postular o establecer hechos.

En los textos lógicos, también suele diferenciarse entre una oración o sentencia, y su significado, reservándose la palabra proposición para este último: el significado de la oración. Es decir, dos oraciones pueden ser diferentes por estar compuestas de diferentes palabras o éstas pueden estar dispuestas de formas distintas, pero si expresan el mismo significado, constituyen la misma proposición, por ejemplo:

Juan ama a María.

Ama Juan a María.

Es claro, que se trata de dos oraciones diferentes, pero ambas tienen el mismo significado, por lo tanto lo que ellas afirman es considerado una proposición.

Otro ejemplo de oraciones diferentes que representan la misma proposición es el siguiente:

Llueve.

It rains.

Il pleut.

La primera está en castellano, la segunda en inglés y la tercera en francés, pero cualquiera de ellas expresa una misma idea.

Por otra parte, en contextos distintos, la misma oración puede ser usada para expresar enunciados diferentes:

El actual presidente de Argentina es un ex gobernador.

En 1998 expresaría un enunciado acerca de Carlos Menem, mientras que en 2004 corresponde a Néstor Kirchner, y actualmente a Cristina Fernandez de Kirchner. En estos contextos temporales diferentes, la oración anterior sería usada para afirmar proposiciones diferentes. Notar que la veracidad de las proposiciones puede depender del contexo, del *estado* del mundo. En el desarrollo de la materia Programación I volveremos sobre el concepto de proposición a la que también llamaremos *expresión booleana.*

La *inferencia* es un proceso por el cual se llega a una proposición y se la afirma sobre la base de otra u otras proposiciones aceptadas como punto de partida del proceso. Al lógico no le interesa el proceso de inferencia, sino las proposiciones que constituyen los puntos inicial y final de este proceso, así como las relaciones existentes entre ellas.

Aunque el proceso de inferencia no concierne a los lógicos, para cada inferencia posible hay un razonamiento correspondiente y son esos razonamientos los que caen en el ámbito de la lógica. En este sentido un *razonamiento* es cualquier grupo de proposiciones tal que de una de ellas se afirma que deriva de las otras, las cuales son consideradas como elementos de juicio a favor de la verdad de la primera. La palabra "razonamiento" se usa a menudo para indicar el proceso mismo, pero en lógica tiene el sentido técnico recién explicado.

Al describir esta estructura se emplean comúnmente los términos *premisa* y *conclusión*. La *conclusión* de un razonamiento es la proposición que se afirma sobre la base de las otras proposiciones del mismo, y a la vez estas proposiciones de las que se afirma que brindan los elementos de juicio o las razones para aceptar la conclusión son las *premisas* del razonamiento.

Debemos observar que premisa y conclusión son términos relativos; la misma proposición puede ser premisa en un razonamiento y conclusión en otro. Por ejemplo:

Todo lo que está predeterminado es necesario.
Todo suceso está predeterminado.

Por lo tanto, todo suceso es necesario.

Aquí, la proposición *todo suceso es necesario* es la conclusión, y las otras dos son premisas. Pero la proposición *Todo suceso está predeterminado* es la conclusión del siguiente razonamiento:

Todo suceso causado por otros sucesos está predeterminado.
Todo suceso está causado por otro suceso.

Por lo tanto, todo suceso está predeterminado.

Tomada aisladamente ninguna proposición es una premisa o una conclusión. Es una premisa cuando aparece como supuesto de un razonamiento. Es una conclusión sólo cuando aparece en un razonamiento en el que se afirma que se desprende de las proposiciones afirmadas en ese razonamiento.

En algunos razonamientos, como los dos anteriores, las premisas se enuncian primero y la conclusión al final. Pero no todos los razonamientos presentan ese orden, como por ejemplo:

> *En una democracia, los pobres tienen más poder que los ricos, porque son más, y la voluntad de la mayoría es suprema.*

4 CONJUNTOS Y VARIABLES

En la vida cotidiana es corriente considerar colecciones de objetos o conjunto de objetos, como por ejemplo el conjunto de alumnos que están inscriptos en el primer año de esta facultad, el conjunto de líneas de colectivo que cubren el tramo Rosario–San Lorenzo, etc. En Informática llamaremos *conjunto* a cualquier colección de objetos que compartan ciertas características, y un *elemento* de un conjunto es cualquiera de sus objetos. En particular consideraremos ciertos conjuntos de números que tienen una importancia especial.

- El conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ al que llamaremos *conjunto de los números naturales*.
- El conjunto $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ es el *conjunto de los números enteros*.
- El conjunto $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ es el *conjunto de los números enteros positivos*.
- El conjunto $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$ es el *conjunto de los números enteros negativos*.
- El conjunto $\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ es el *conjunto de los números enteros no negativos*.
- El conjunto $\mathbb{Z}_0^- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ es el *conjunto de los números enteros no positivos*.

Una forma muy usual de definir conjuntos es establecer las propiedades que deben satisfacer sus elementos. Por ejemplo, mediante la frase: "Sea A el conjunto de todos los números enteros mayores que -1 y menores que 100"; estamos señalando a todos los elementos del conjunto A. Una lista exhaustiva de ellos es también una definición del conjunto, pero no es necesario aclarar que sería extensa y tediosa de escribir. Por ello es que en matemática es común recurrir a la siguiente definición:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : -1 < x < 100\}$$

aquí, mediante x estamos representando a cualquier número que cumpla con la propiedad de ser entero, mayor que -1 y menor que 100. Claramente cualquier número que satisfaga esta propiedad pertenecerá a A y con la letra x estamos simbolizando a cualquiera de las posibilidades. Cuando se utiliza de esta forma, x recibe el nombre de *variable*, puesto que su valor puede variar entre diversas alternativas posibles, 100 para ser precisos en el caso de nuestro ejemplo.

Una de las nociones fundamentales en Informática es el concepto de variable. Una variable es un mecanismo de notación que se toma prestado de la matemática que aporta concisión y precisión cuando es necesario representar ideas complejas. En resumen podemos decir que:

Definición. 3. Una variable es un símbolo que se asocia a cualquier elemento de un conjunto predefinido.

5 EXPRESIONES ARITMÉTICAS

Las *expresiones aritméticas* son muy utilizadas en la matemática básica que se enseña en la escuela secundaria, por lo tanto consideraremos cierta familiaridad con ellas. Con frecuencia aparecen variables en las expresiones aritméticas, como por ejemplo:

$$(-5) \times (3 + x) \text{ o } (4 + x)/2.$$

A continuación presentamos una definición axiomática de expresión aritmética:

Definición. 4. Expresiones aritméticas:

REGLA 1: Una constante es una expresión aritmética.

REGLA 2: Una variable es una expresión aritmética.

REGLA 3: Si E es una expresión aritmética, (E) también es una expresión aritmética.

REGLA 4: Si E es una expresión aritmética, $-E$ también es una expresión aritmética.

REGLA 5: Si E y F son expresiones aritméticas, $(E + F)$, $(E - F)$, $(E \times F)$ y (E/F) también son expresiones aritméticas

A partir de esta definición sólo son expresiones aritméticas aquellas construídas utilizando las reglas anteriores.

Podemos decir entonces que hemos establecido la *sintaxis* de las expresiones aritméticas. Con el término *sintaxis* nos estamos refiriendo al conjunto de reglas o leyes que aseguran que cierta sucesión de símbolos pertenece a una determinada clase o tiene una estructura precisa. Por lo tanto, para reconocer si estamos frente a una expresión aritmética debemos analizar si tal sucesión de símbolos aritméticos puede construirse siguiendo las reglas.

Ejemplo. 8
¿Es $((3 + x) \times 2)$ *una expresión aritmética?*

Para contestar esta pregunta, comenzamos observando que por la regla 1, el número 3 es una expresión aritmética y por la regla 2, también lo es x. Ahora usando la regla 5, sigue que $(3 + x)$ es una expresión aritmética y otra vez la regla 5 y la regla 1 nos garantizan que $((3 + x) \times 2)$ es una expresión aritmética.

Ejemplo. 9
¿Es $(\times 2)$ *una expresión aritmética?*

La regla **1** nos dice que 2 es una expresión aritmética, pero de acuerdo a la regla **5** el símbolo $\times$ correspondiente a la *multiplicación* es un *operador binario*, es decir necesita dos operandos, aquí sólo tenemos uno. Observemos además que la única expresión que puede construirse usando un operando es mediante el símbolo $-$ que corresponde al *operador unario* de la *negación*. Concluímos que la expresión $(\times 2)$ no es una expresión aritmética.

5.1 Precedencia y Asociatividad de Operadores

Un concepto importante vinculado a las expresiones aritméticas es el de *precedencia*. Los paréntesis en las expresiones aritméticas se utilizan en general para indicar qué operaciones preceden a otras. En matemática existen reglas que permiten quitar paréntesis en las expresiones sin dar lugar a interpretaciones ambiguas, esta reglas establecen una jerarquía entre las operaciones que tienen como objetivo abreviar la escritura y que adoptaremos para las expresiones aritméticas.

Ejemplo. 10
La operación producto $\times$ tiene mayor precedencia que la suma $+$ y por lo tanto se evaluará primero. Por esta razón, los paréntesis en la expresión $(7 \times 5) + 3$ son redundantes. En la expresión $(8 + 5) \times 2$, en cambio, no lo son, puesto que quitarlos nos llevaría a otro resultado.

La *asociatividad* de los operadores también nos permiten ahorrar paréntesis. La resta, por ejemplo, es una operación *asociativa a izquierda*. Esto significa que la expresión $x - y - z$ es equivalente a la expresión $(x - y) - z$, pero no a $x - (y - z)$. Es decir, la evaluación se realiza de izquierda a derecha. Otra operación asociativa a izquierda en la aritmética es la división.

Ejemplo. 11
Los paréntesis de la expresión $(5 - 3) - 2$ son redundantes, mientras que los de $12/(6/2)$ no lo son.

La suma y el producto también resultan asociativas a izquierda, pero más aún, son también asociativas a derecha. Esto significa que también pueden ser evaluadas de derecha a izquierda, dando el mismo resultado. Entonces, por ejemplo, las expresiones $x + (y + z)$, $(x + y) + z$ y $x + y + z$ son equivalentes. En estos casos directamente diremos que el operador es asociativo, sin distinguir si se trata a derecha o izquierda, ya que goza de ambas propiedades.

Ejemplo. 12
Los paréntesis de la expresión $(2 + 1) + 2$ son redundantes, así como también los de la expresión $(3 \times (8 \times 2))$

A continuación resumimos la precedencia y asociatividad usual de los operadores aritméticos en las siguientes tablas.

Tabla de Precedencia (de mayor a menor)

Descripción	Operador
Signo	$(-)$
Potencia, y Raíz	$(.)^{(.)}\ \sqrt[(.)]{(.)}$
Producto, y División	$\times, /$
Suma y Resta	$+, -$
Igualdad	$=$

Tabla de Asociatividad

Descripción	Operador	Tipo de Asociatividad	¿Cómo lo evaluó?
Suma	$+$	Asociativo	$x+y+z=(x+y)+z=x+(y+z)$
Producto	$\times$	Asociativo	$x\times y\times z=(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$
Resta	$-$	a Izquierda	$x-y-z=((x-y)-z)$
División	$/$	a Izquierda	$x/y/z=((x/y)/z)$
Potencia	$(.)^{(.)}$	a Derecha	$x^{y^z}=(x^{(y^z)})$
Signo	$(-)$	a Derecha	$--x=-(-x)$

Para el caso de la raíz, se expresa la misma como una potencia y se resuelve la asociatividad a partir de esta última.

5.2 Evaluación de Expresiones Aritméticas

Otro concepto clave es el de *evaluación de expresiones*. Puntualmente, la evaluación de una expresión aritmética consiste en realizar las operaciones que se indican sobre los operandos que en ella aparecen, está claro en el caso en que sólo existan constantes como operandos, pero como ya mencionamos anteriormente una expresión puede contener variables, en este caso evaluar una expresión requiere conocer que valores deben considerarse para esas variables, para esto introducimos el concepto de *estado*.

Definición. 5. Sea E una expresión aritmética, y sean las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ en E. Un estado de estas variables es una lista de ellas con sus valores asociados, es decir, $\{(x_1, v_1), (x_2, v_2), \dots, (x_n, v_n)\}$.

Por ejemplo, en el estado $\{(x,5),(y,6)\}$ la variable x está asociada al valor 5 y la variable y está asociada al valor 6.

Ahora podremos definir qué entendemos por *evaluar una expresión* E *en un estado*.

Definición. 6. Dada una expresión E y un estado de las variables de E, evaluar a E en ese estado significa calcular el valor que se obtiene al realizar las operaciones de E sobre los valores asociados a las variables.

Si $E = x \times 5 + y$ y el estado es $\{(x, 8), (y, 2)\}$, la evaluación de la expresión en este estado da como resultado el número 42.

6 EL CONCEPTO DE IGUALDAD

Hasta ahora hemos hablado del significado de evaluar una expresión aritmética E en un estado. Supongamos que consideramos una expresión un poco más compleja en donde participa la igualdad, como por ejemplo,

$$E = F,$$

en este caso evaluar la expresión en un estado arroja como resultado *true (verdadero))* si las expresiones E y F tienen el mismo valor y *false (falso)* si tienen distintos valores.

Veamos algunos ejemplos, en donde utilizaremos la relación de igualdad entre expresiones aritméticas.

Ejemplo. 13
Si $E = 3 \times x - 1$ *y* $G = x + 1$, *entonces la expresión* $E = G$ *devuelve true si el estado de* x *es* 1 *y devuelve false en cualquier otro estado de la variable* x.

Ejemplo. 14
Si $E = x \times x - 1$ *y* $G = (x + 1) \times (x - 1)$ *la expresión* $E = G$ *devuelve el valor true en cualquier estado de la variable* x.

Ejemplo. 15
Si $E = x - x$ *y* $G = 1$ *Si la expresión* $E = G$ *devuelve el valor false en cualquier estado de la variable* x.

También es posible construir expresiones utilizando otros operadores relacionales entre expresiones aritméticas, como por ejemplo

Ejemplo. 16
Si $E = x - 2$ *y* $G = x - 1$ *la expresión* $E < G$ *devuelve el valor true en cualquier estado de sus variables.*

La expresión $E = F$ se considerará *verdadera* (o equivalentemente a la expresión *true*) si su evaluación en *todo estado posible* produce el valor *true*. Pero, si su evaluación en *todo estado posible* produce el valor *false*, la expresión será *falsa* (o equivalentemente a la expresión *false*). Existen expresiones que no son verdadera o falsas, como en el ejemplo (13). En estos casos la expresión en cuestión se evaluará a distintos valores según el estado considerado, por lo que no se podrá asignar un valor de verdad a la misma. Las expresiones de los ejemplos (14) y (16) son verdaderas, mientras que la del ejemplo (13) no es verdadera ni falas, y la del ejemplo (15) es falsa.

También se suele llamar a una expresión verdadera como expresión *válida*, y aquellas que no sean verdaderas, se las denominan *inválidas*. Las expresiones falsas también se las denominan *contradicciones*. En el curso de Programación I retomaremos estos conceptos trabajando detalladamente en la *Lógica Proposicional*.

Ahora, supongamos que queremos determinar si dos expresiones aritméticas E y F son iguales. De acuerdo con lo visto, ésto equivale a determinar si la expresión $E = F$ es verdadera, lo cual se realiza evaluando el valor de verdad de la expresión $E = F$ en todos los estados posibles de las variables contenidas en E y en F. Esta tarea puede resultar tediosa y hasta imposible en casos en que las variables puedan asumir infinitos estados.

Existe una forma alternativa de determinar la igualdad entre dos expresiones, la cual consiste en utilizar un conjunto de reglas para la relación de igualdad (estrategia ampliamente utilizada en los cursos de Álgebra y Análisis). Por ejemplo, sabemos que $x = y$ es lo mismo que $y = x$, sin importar el valor de las variables x e y. Es más, una adecuada colección de esta reglas puede pensarse como una definición de igualdad. Este criterio de igualdad es el que emplearemos.

6.1 Las Cuatro Leyes de la Igualdad

La igualdad es una relación de equivalencia, o sea que satisface las leyes de *reflexividad* , *simetría*, y *transitividad*. La reflexividad nos da un axioma del cual partir (o al cual llegar) en una demostración de igualdad, la simetría permite razonar "hacia adelante" o "hacia atrás" indistintamente, mientras que la transitividad nos permite descomponer una demostración en una secuencia de demostraciones más simples. Enunciemos cada una de ellas:

$$\mathsf{Reflexividad}: x = x \tag{1}$$

$$\mathsf{Simetría}: (x = y) = (y = x) \tag{2}$$

La tercera regla, *transitividad*, está dada como regla de inferencia

$$\mathsf{Transitividad}: \frac{X = Y, Y = Z}{X = Z} \tag{3}$$

Utilizaremos la regla (3) del siguiente modo: de $X = Y$ e $Y = Z$ concluimos que $X = Z$.

Por ejemplo de $x + y = w + 1$ y $w + 1 = 7$ concluimos por la regla (3) que $x + y = 7$. En la sección 2 esta regla fue la que nos permitió afirmar que las expresiones $e = m \times c^2$ y $m = e/c^2$ son iguales.

Existe una *cuarta regla* para la relación de igualdad, la cual fue establecida por Gottfried Leibniz hace unos 350 años, y de quién toma su nombre, Regla de Leibniz. En términos coloquiales, la Regla de Leibniz puede expresarse así:

> *Dos expresiones son iguales en todos los estados, si y sólo si al reemplazar una de ellas por la otra en cualquier expresión* E*, el valor de ésta no cambia.*

lo cual nos dice que podemos *reemplazar iguales por iguales* sin cambiar el valor de una expresión. Daremos una expresión formal de esta regla cuando hayamos presentado la operación de sustitución.

6.1.1 *Razonando con la Regla de Leibniz*

Utilizaremos la Regla de Leibniz , o la Regla de Reemplazo de Iguales por Iguales, del siguiente modo, por ejemplo, sabemos que podemos descomponer un producto como una suma, así, resulta siempre cierto que **Teo1** $: 2 \times x = x + x$. Tomemos una expresión que contenga como subexpresión a $2 \times x$, por ejemplo, $2 \times x + 1$, por lo tanto concluimos por la Regla de Leibniz según **Teo1** que $2 \times x + 1 = x + x + 1$. De igual modo, utilizando la siguiente expresión verdadera **Teo1**, podríamos reemplazar, combinado con la Regla de Simetría de la Igualdad, la subexpresión $x + x$ de la siguiente expresión $\sqrt{(x + x) \times 2}$ por $2 \times x$, obteniendo la siguiente igualdad también por Regla de Leibniz según **Teo1**, $\sqrt{(x + x) \times 2} = \sqrt{2 \times x \times 2}$. Si el **Teo1** no fuese una expresión verdadera, entonces, la igualdad de nuestro reemplazo tampoco lo sería.

Es importante notar, que la estructura de la expresión, su forma sintáctica, tiene que ser idéntica para ser reemplazada por la otra equivalente mediante la Regla de Leibniz. Por ejemplo, siguiendo con nuestro expresión verdadera **Teo1** $: 2 \times x = x + x$, si la expresión sobre la cual queremos realizar el reemplazo tiene la forma $x \times 2 + 1$, no es posible aplicar el reemplazo de Leibniz por la expresión verdadera **Teo1**, dado que la subexpresión $2 \times x$ en su sintaxis no es la misma que $x \times 2$, por lo tanto, no podemos reemplazar por Leibniz según **Teo1** acá. Sí sabemos que existe una regla aritmética, conocida como la propiedad conmutativa del producto, la cual nos permite transformar (mediante una igualdad) $x \times 2$ en $2 \times x$, la cual llamaremos **Teo2** $: x \times 2 = 2 \times x$, y esta expresión sabemos que es verdadera. De este modo, procedemos a aplicar primero la Regla de Leibniz según **Teo2** sobre nuestra expresión de reemplazo, obteniendo la siguiente igualdad $x \times 2 + 1 = 2 \times x + 1$. Luego, sí sobre la expresión $2 \times x + 1$ podemos aplicar Leibniz según **Teo1**, obteniendo la igualdad $2 \times x + 1 = x + x + 1$. Y, así combinando las dos igualdades anteriores, $x \times 2 + 1 = 2 \times x + 1$ y $2 \times x + 1 = x + x + 1$ obtenidas por Leibniz según **Teo2** y **Teo1**, respectivamente, podemos concluir por la Regla de Transitividad que $x \times 2 + 1 = x + x + 1$.

El razonamiento anterior se traduce al formato de prueba ecuacional, como se muestra a continuación, donde cada reemplazo por iguales lo hemos remarcado para hacer aún más explícita cada sustitución, y como puede observarse es mucho más claro que cualquier explicación coloquial:

Ejemplo. 17

$$
\begin{aligned}
& \underline{x \times 2} + 1 \\
= \quad & \langle\ \textbf{Teo2} : x \times 2 = 2 \times x\ \rangle \\
& \underline{(2 \times x)} + 1 \\
= \quad & \langle\ \textbf{Teo1} : 2 \times x = x + x\ \rangle \\
& (x + x) + 1 \\
= \quad & \langle\ \textit{Eliminación de paréntesis innecesarios}\ \rangle \\
& x + x + 1.
\end{aligned}
$$

Luego, hemos demostrado, o derivado que: $x \times 2 + 1 = x + x + 1$ *es una expresión verdadera usando las reglas de la igualdad, y las reglas aritméticas.*

Observemos que en cada reemplazo hemos agregado paréntesis sobre la expresión. Esto se debe a que en los reemplazos por iguales podemos llegar a alterar el significado de la expresión, al no respetar el orden de prioridad de los operadores. Por lo tanto, la única forma de asegurarnos de no cometer errores es agregar los paréntesis del modo mencionado. Un ejemplo donde se puede notar este problema es en la siguiente derivación:

Ejemplo. 18

$$
\begin{aligned}
& \underline{(x + 1) \times (x - 1)} \times x + 1 \\
= \quad & \left\langle\ \textbf{Teo3} : x^2 + 1 = (x + 1) \times (x - 1)\ \right\rangle \\
& \underline{(x^2 + 1) \times x} + 1 \\
= \quad & \langle\ \textit{Prop. Distributiva}\ \rangle \\
& x^3 + x + 1.
\end{aligned}
$$

Luego, hemos demostrado, o derivado que: $(x + 1) \times (x - 1) \times x + 1 = x^3 + x + 1$. Notar que si no hubiésemos agregado los paréntesis en el reemplazo según el **Teo3**, la expresión final hubiera sido otra, $x^2 + x + 1$, cometiendo así un error en nuestra derivación.

A continuación veremos un ejemplo más para ilustrar y comprender correctamente el estilo de prueba que utilizaremos en este curso según el reemplazo de iguales por iguales.

Ejemplo. 19
Veamos como empleamos la Regla de Leibniz para el problema enunciado en la sección 2 sobre las manzanas de Juan y María. Recordemos el modelo asociado al problema:

$$m = 2 \times j \qquad y \qquad m/2 = 2 \times (j-1)\,,$$

y, supongamos que sabemos que la siguiente expresión es verdadera:

$$\textbf{Teo4}: \quad 2 \times j/2 = j \tag{4}$$

entonces

$$\begin{array}{ll}
 & \underline{m}/2 = 2 \times (j-1) \\
= & \quad \langle m = 2 \times j;\ \textit{Eliminación Paréntesis}\ \rangle \\
 & \underline{2 \times j/2} = 2 \times (j-1) \\
= & \quad \langle \textbf{Teo4} \rangle \\
 & j = \underline{2 \times (j-1)} \\
= & \quad \langle\ \textit{Prop. Distributiva} \rangle \\
 & \underline{j = 2 \times j - 2} \\
= & \quad \langle\ \textit{Restamos } j \textit{ en cada miembro} \rangle \\
 & \underline{0 = j - 2} \\
= & \quad \langle\ \textit{Sumamos } 2 \textit{ en cada miembro} \rangle \\
 & j = 2
\end{array}$$

Luego, Juan tiene 2 *manzanas y María* 4.

La regla de Leibniz nos permite sustituir iguales por iguales en una expresión sin cambiar el valor de la expresión. Esto nos provee un método para demostrar que dos expresiones son iguales. En este método, el formato que utilizaremos será el siguiente:

$$\begin{array}{ll}
 & E_0 \\
= & \quad \langle \text{argumento a favor de } E_0 = E_1 \text{, usando Leibniz } \rangle \\
 & E_1 \\
= & \quad \langle \text{argumento a favor de } E_1 = E_2 \text{, usando Leibniz } \rangle \\
 & E_2 \\
= & \quad \langle \text{argumento a favor de } E_2 = E_3 \text{, usando Leibniz } \rangle \\
 & E_3
\end{array}$$

Los pasos individuales $E_0 = E_1$, $E_1 = E_2$ y $E_2 = E_3$ y la regla de Transitividad (regla (3)), nos permiten concluir que $E_0 = E_3$. Las explicación entre los signos $\langle\,\rangle$

corresponde a la expresión verdadera de reemplazo que emplearemos, este será una igualdad $X = Y$, donde reemplazaremos en la expresión de la línea superior la subexpresión X por la expresión Y. Si la subexpresión X ocurriese varias veces podemos reemplazar todas ellas, o sólo las que necesitemos, siempre teniendo en cuenta el objetivo de nuestra transformación. Recordemos nuevamente, que los reemplazos deben incluir paréntesis para no alterar el significado dado por los órdenes de precedencia.

7 LA SUSTITUCIÓN

7.1 Simple

Definición. 7. Sean E y F dos expresiones aritméticas y x una variable en E. Sustituir x por la expresión F en E, significa reemplazar x por F en todas las ocurrencias de la variable x en la expresión E, agregando paréntesis alrededor de F para no alterar el significado de la expresión. Esta operación da como resultado una nueva expresión aritmética que notaremos $E\,[x := F]$.

Veamos a continuación algunos ejemplos:

Ejemplo. 20
Si $E = (x + y)$ *y sustituimos* y *por la expresión* $F = (2 \times z)$ *entonces,*

$$
\begin{aligned}
& (x + y)\,[y := 2 \times z] \\
= \quad & \langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
& (x + (2 \times z)) \\
= \quad & \langle \textit{ Eliminación de Paréntesis} \rangle \\
& x + 2 \times z.
\end{aligned}
$$

Observemos que hemos quitado los paréntesis, utilizando las reglas de precedencia ya mencionadas.

Ejemplo. 21
Si $E = x$ *y* $F = (2 + z)$ *entonces para calcular* $E\,[x := F]$ *procedemos como sigue:*

$$
\begin{aligned}
& x[x := 2 \times z] \\
= \quad & \langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
& (2 \times z) \\
= \quad & \langle \textit{ Eliminación de Paréntesis} \rangle \\
& 2 \times z.
\end{aligned}
$$

7.2 Simultánea

Definición. 8. La sustitución simultánea de una lista x de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por una lista F de expresiones $F_1, F_2, \ldots F_n$, que notaremos $E\,[x := F]$ se realiza mediante el reemplazo de las variables en x por las expresiones en F, cada una de ellas encerradas entre paréntesis, siguiendo como regla de correspondencia el orden y el número de variables.

Ejemplo. 22
Si $E = x + z$, $F = z + 1$ *y* $G = 4$ *entonces para calcular* $E\,[x, z := F, G]$ *procedemos de la siguiente manera:*

$$
\begin{array}{ll}
 & (x+z)\,[x, z := z+1, 4] \\
= & \quad\langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
 & ((z+1)+(4)) \\
= & \quad\langle \textit{ Eliminación de Paréntesis} \rangle \\
 & z+1+4.
\end{array}
$$

7.3 Sucesiva

Llamamos sustitución sucesiva a la aplicación de más de una sustitución sobre una expresión, teniendo en cuenta que la operación de sustitución es *asociativa a izquierda*, con lo cual, en la expresión $E[x := F][y := G][z := H]$ las sustituciones deben aplicarse según los paréntesis señalados: $(((E[x := F])[y := G])[z := H])$, esto es, de a una por vez, según el orden de aparición de las mismas, de izquierda a derecha.

Veamos un ejemplo,

Ejemplo. 23

$$
\begin{array}{ll}
 & (x+z)\,[x := z+1]\,[z := 4] \\
= & \quad\langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
 & ((z+1)+z)\,[z := 4] \\
= & \quad\langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
 & ((4)+1)+(4) \\
= & \quad\langle \textit{ Eliminación de Paréntesis } \rangle \\
 & 4+1+4.
\end{array}
$$

Observemos que el resultado no es el mismo que la sustitución simultánea, donde todas las sustituciones se aplican al mismo tiempo. Sobre el ejemplo anterior, el resultado de sustituir simultáneamente sería:

Ejemplo. 24

$$
\begin{array}{ll}
 & (x+z)\,[x,z := z+1,4] \\
= & \quad \langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
 & ((z+1)+(4)) \\
= & \quad \langle \textit{ Eliminación de Paréntesis } \rangle \\
 & z+1+4.
\end{array}
$$

el cual resulta diferente al de la sustitución sucesiva.

7.4 Observaciones sobre la Sustitución

Es posible sustituir una variable que no aparece en la expresión. En este caso la sustitución se aplica, pero no tiene efecto alguno, no cambia nada en la expresión, dicha variable es ignorada. Por ejemplo:

Ejemplo. 25

$$
\begin{array}{ll}
 & (x+z)\,[x,w := z+1,4] \\
= & \quad \langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
 & ((z+1)+z) \\
= & \quad \langle \textit{ Eliminación de Paréntesis } \rangle \\
 & z+1+z.
\end{array}
$$

Por convención, la sustitución tiene mayor jerarquía que cualquier otra operación, es decir tiene precedencia sobre operaciones entre expresiones. Por lo tanto, en caso de que el orden deba alterarse, es necesario el uso de paréntesis. Por ejemplo,

Ejemplo. 26

$$
\begin{array}{ll}
 & x+z\,[x,z := z+1,4] \\
= & \quad \langle \textit{ Precedencia Operaciones } \rangle \\
 & x+(z\,[x,z := z+1,4]) \\
= & \quad \langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
 & x+(4) \\
= & \quad \langle \textit{ Eliminación de Paréntesis } \rangle \\
 & x+4.
\end{array}
$$

Si quisiéramos realizar la sustitución $[x,z := z+1,4]$ *en la expresión* $E = x+z$, *deberíamos utilizar paréntesis sobre toda la expresión.*

7.5 Sustitución Vs Evaluación

Es importante no confundir una sustitución con una evaluación. La primera consiste en el reemplazo de variables por expresiones, obteniendo así nuevas expresiones, la segunda en cambio obtiene un valor de una expresión a partir del estado determinado de cada una de las variables de la expresión.

Veamos cada caso, si nos piden por ejemplo: (a) evaluar la siguiente expresión $(x + z)\,[x, z := z + 1, 4]$ en el estado $\{(z, 1)\}$, y (b) aplicar las sustituciones sobre la expresión $(x + z)\,[x, z := z + 1, 4]$; resolvemos cada caso de la siguiente manera:

Ejemplo. 27
Evaluación de Expresiones

$$
\begin{array}{ll}
 & (x + z)\,[x, z := z + 1, 4] \\
= & \quad \langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
 & ((z + 1) + (4)) \\
= & \quad \langle \textit{ Eliminación de Paréntesis } \rangle \\
 & z + 1 + 4 \\
= & \quad \langle \textit{ Evaluación Aritmética } \rangle \\
 & z + 5 \\
= & \quad \langle \textit{ Evaluación en } \{(z, 1)\} \rangle \\
 & 1 + 5 \\
= & \quad \langle \textit{ Evaluación Aritmética } \rangle \\
 & 6.
\end{array}
$$

Ejemplo. 28
Aplicación de Sustituciones

$$
\begin{array}{ll}
 & (x + z)\,[x, z := z + 1, 4] \\
= & \quad \langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
 & ((z + 1) + (4)) \\
= & \quad \langle \textit{ Eliminación de Paréntesis } \rangle \\
 & z + 1 + 4.
\end{array}
$$

7.6 Revisitamos la Regla de Leibniz

Habiendo introducido el concepto de sustitución, podemos ahora expresar la Regla de Leibniz como una regla de inferencia del siguiente modo:

$$
\text{Leibniz} : \frac{X = Y}{E\,[z := X] = E\,[z := Y]} \tag{5}
$$

Observemos que se utilizó la variable z en la formulación de la regla anterior, pues la sustitución está definida para el reemplazo de variables y no para el reemplazo de una expresión. En el lado izquierdo de la igualdad que aparece en la conclusión, z es reemplazada por X mientras que en lado derecho z es reemplazada por Y, así este uso de la variable z permite el reemplazo de una instancia de X en la expresión $E[z := X]$ por Y.

Veamos un ejemplo de la aplicación de la regla de Leibniz. Supongamos que $b + 3 = c + 5$ es una expresión verdadera. Si llamamos $X : b + 3$, $Y : c + 5$, $E : d + z$ y $z : z$, usando la regla (5), podemos concluir que $d + b + 3 = d + c + 5$ también es una expresión verdadera.

8 CASOS DE ESTUDIO

En esta sección veremos algunos ejemplos sobre cómo trabajar con el formato de prueba ecuacional. Comenzaremos mostrando cómo calcular sustituciones simples, simultáneas, sucesivas, y cómo evaluar una expresión aplicando la sustitución.

Ejemplo. 29
Para el caso de una sustitución simple procederemos de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
 & ((x+1) \times (x+3) \times (x+5))[x := 3] \\
= & \quad \langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
 & (((3)+1) \times ((3)+3) \times ((3)+5)) \\
= & \quad \langle \textit{ Eliminación de Paréntesis } \rangle \\
 & (3+1) \times (3+3) \times (3+5)\,.
\end{array}
$$

Ejemplo. 30
Para el caso de una sustitución simultánea procederemos de igual manera, pero aplicando todos los reemplazos al mismo tiempo.

$$
\begin{array}{ll}
 & (x+y)[x, y := 6, 3 \times z] \\
= & \quad \langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
 & ((6) + (3 \times z)) \\
= & \quad \langle \textit{ Eliminación de Paréntesis } \rangle \\
 & 6 + 3 \times z\,.
\end{array}
$$

Ejemplo. 31
Para el caso de una sustitución sucesiva procederemos aplicando las sustituciones de a una por vez, respetando el orden en que aparecen de izquierda a derecha.

$$
\begin{array}{ll}
 & (x+2)[x := 6][y := x] \\
= & \quad \langle \textit{Sustitución} \rangle \\
 & ((6)+2)[y := x] \\
= & \quad \langle \textit{Eliminación de Paréntesis, Sustitución } \rangle \\
 & 6 + 2\,.
\end{array}
$$

Ejemplo. 32
En este caso ilustramos otro ejemplo de sustitución sucesiva:

$$
\begin{array}{ll}
 & (x + y \times 2)[x := 6 \times y][y := x] \\
= & \quad \langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
 & ((6 \times y) + y \times 2)[y := x] \\
= & \quad \langle \textit{ Eliminación de Paréntesis, Sustitución } \rangle \\
 & (6 \times (x) + (x) \times 2) \\
= & \quad \langle \textit{ Eliminación de Paréntesis } \rangle \\
 & 6 \times x + x \times 2\,.
\end{array}
$$

Ejemplo. 33
Para evaluar una expresión en un estado dado podemos utilizar la sustitución y el formato de prueba para alcanzar el valor deseado. Así, por ejemplo, si nos piden que evaluemos la expresión $2 \times y + z$ *en el estado* $\{(y, 1), (z, 5)\}$ *podemos calcular su valor de la siguiente manera:*

$$
\begin{array}{ll}
 & (2 \times y + z)[y, z := 1, 5] \\
= & \quad \langle \textit{ Sustitución } \rangle \\
 & (2 \times (1) + (5)) \\
= & \quad \langle \textit{ Eliminación de Paréntesis } \rangle \\
 & 2 \times 1 + 5 \\
= & \quad \langle \textit{ Evaluación Aritmética } \rangle \\
 & 7\,.
\end{array}
$$

Notar que cuando realizamos pasos de sustitución y eliminación de paréntesis estamos manipulando *sintácticamente* la expresión. En cambio, cuando realizamos pasos de *evaluación aritméticos*, estamos *calculando* la expresión según el significado que ya conocemos de las operaciones de suma, resta, multiplicación, etc.

9 EJERCICIOS

Ejercicio. 1. En base a lo visto en las secciones 2 y 3, responda a las siguientes preguntas:

a) ¿ Qué es un modelo ?

b) Dado un problema, ¿ cuál es la diferencia entre la descripción de éste mediante un modelo y la descripción del mismo mediante lenguaje natural (es decir, en español) ?

c) ¿ Qué ventajas tiene el uso de la matemática para modelar problemas ?

d) ¿ Qué es la manipulación sintáctica ?

Ejercicio. 2. Determine cuáles de las siguientes expresiones son *proposiciones*.

a) *¿ Los unicornios existen ?*

b) *Bajó la temperatura.*

c) *Cuatro son las estaciones del año.*

d) *¡ Eureka !*

e) *Las cuatro estaciones del año.*

f) *Licenciatura en Ciencias de la Computación.*

g) *Los unicornios existen.*

h) *¡ A comer !*

i) *Zeus es el padre de Afrodita.*

j) *¿ Qué hora es ?*

Ejercicio. 3. De acuerdo a la Definición 4, establezca cuáles de las siguientes expresiones son *expresiones aritméticas*. En cada caso indique las reglas que permiten o no su construcción.

a) $-(-4) + x$

b) $(x+)/5$

c) $(y/3) \times 4 + (1)$

d) $(\ (\ ((7)) - z - y\ ) \times 2\ )$

e) $-(+y)$

Ejercicio. 4. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales usando el formato de prueba ecuacional:

a) $x - 1 - 3 \times x + 9 = -6$

b) $\frac{3}{4} \times (2 \times x + 4) = x + 19$

c) $2 \times (x + 1) - 3 \times (x - 2) = x + 6$

d) $2 \times x + 3 = 2 \times x$

e) $3 \times x + 1 - 3 \times (-1 + 2 \times x) = 2 - 2 \times (x - 1) - x$

Ejercicio. 5. Resuelva las siguientes sistemas de ecuaciones lineales planteando el modelo matemático y usando el formato de prueba ecuacional para dar una respuesta al mismo.

a) *Ana tiene el triple de edad que su hijo Jaime. Dentro de 15 años, la edad de Ana será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que Jaime tiene su madre?*

b) *Jorge tiene en su cartera billetes de $10 y $20, en total tiene 20 billetes y $440. ¿Cuántos billetes tiene de cada tipo?*

c) *En una curso hay 70 alumnos matriculados. En el último examen de Computación han aprobado 39 alumnos, el 70% de las chicas y el 50% de los chicos. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en el curso?*

Ejercicio. 6. Teniendo en cuenta el orden de precedencia y la asociatividad de los operadores aritméticos, eliminar de cada una de las siguientes expresiones todos los paréntesis innecesarios:

a) $\left(2 + \left(z^2\right)\right) \times 5 - (3 \times y)$

b) $3 - ((x + 4) \times 9)$

c) $(2 - 4) + 6$

d) $(2 - 4) \times (6 \times 2)$

Ejercicio. 7. Evaluar las siguientes expresiones en los estados indicados

a) $2 + x \times y$ en el estado $\{(x, 2), (y, 5)\}$

b) $(x + 4) \times y$ en el estado $\{(x, 1), (y, 2)\}$

Ejercicio. 8. Realizar las siguientes sustituciones eliminando los paréntesis innecesarios:

a) $(x + 2)\,[x := 6]$

b) $(x + 2)\,[x := x + 6]$

c) $(x \times x)\,[x := x + 1]$

d) $(x + z)\,[y := z]$

e) $(x \times (z + 1))\,[x := z + 1]$

f) $35[x := 2]$

g) $y[x := 2]$

h) $x[x := 2]$

i) $(x \times x + y)[x := c + y]$

j) $(x^2 + y^2 + x^3)[x := x + y]$

Ejercicio. 9. Realizar las siguientes sustituciones simultáneas eliminando los paréntesis innecesarios:

a) $(x+y)\,[x,y := 6, 3\times z]$
b) $(x+2)\,[x,y := y+5, x+6]$
c) $(x\times(y-z))\,[x,y := z+1, z]$
d) $(x+y)\,[y,x := 6, 3\times x]$
e) $(x\times(z+1))\,[x,y,z := z,y,x]$
f) $(x+y+y)\,[x,y := z,w]$
g) $(x+y+y)\,[x,y := 2\times y, x\times z]$
h) $(x+2\times y)\,[x,y := y,x]$
i) $(x+2\times y\times z)\,[x,y,z := z,x,y]$

Ejercicio. 10. Realizar las siguientes sustituciones eliminando los paréntesis innecesarios:

a) $(x+2)\,[x := 6]\,[y := x]$
b) $(x+2)\,[x := y+6]\,[y := x-6]$
c) $(x+y)\,[x := y]\,[y := 3\times x]$
d) $(x\times(z+1))\,[x,y,z := z,y,x]\,[z := y]$
e) $(4\times x\times x+4\times y\times x+y\times y)\,[x,y := y,x]\,[y := 3]$

Ejercicio. 11. Realizar las siguientes sustituciones eliminando los paréntesis innecesarios. Al finalizar la ejercitación enuncie alguna propiedad que haya podido determinar para la *sustitución simultánea* y para la *sustitución sucesiva*. Corrobore con los auxiliares la validez de las mismas.

a) $(\frac{x+y+z}{w+1})[x := 1]\,[y := 2]$
b) $(\frac{x+y+z}{w+1})[y := 2][x := 1]$
c) $(\frac{x+y+z}{w+1})[x,y := 1,2]$
d) $(\frac{x+y+z}{w+1})[y,x := 2,1]$
e) $(\frac{x+y+z}{w+1})[y,x := 1,2]$
f) $(\frac{x+y+z}{w+1})[x := z+1]\,[z := 1]\,[y := z^2]$
g) $(\frac{x+y+z}{w+1})[x := z+1]\,[y := z^2]\,[z := 1]$
h) $(\frac{x+y+z}{w+1})[y := z^2]\,[x,z := 1,1]$
i) $(\frac{x+y+z}{w+1})[x,z := 1,1][y := z^2]$
j) $(\frac{x+y+z}{w+1})[x,y,z,w := 1,1,1,-1]$
k) $(\frac{x+y+z}{w+1})[x,y,z,w := 1,1,1,1]$
l) $(\frac{x+y+z}{w+1})[x,y,z,w := 1,-1,0,1]$

REFERENCIAS

[1] Javier Blanco, Silvina Smith, and Damián Barsotti. *Cálculo de Programas*. Universidad Nacional de Córdoba, 2008.

[2] D. Gries and F.B. Schneider. *A Logical Approach to Discrete Math*. A Logical Approach to Discrete Math. Springer, 1993.

[3] Bianchi Silvia and et. al. Apuntes de cátedra: Programación i y ii. Lic. Cs. de la Computación. Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario., 2009.