Polinomios de Secciones Normales en Hipersuperficies Isoparamétricas

Julio C. Barros - Cristián U. Sánchez

email: jbarros@exa.unrc.edu.ar - csanchez@mate.uncor

UNRC - UNC

Encuentro de Geometría Diferencial Rosario 2012

Definiciones

Sea M una variedad Riemanniana compacta conexa n-dimensional e $I : M \longrightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ un embedding isométrico en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^{n+k}$. Se identifica M con su imagen por I.

Definiciones

Sea M una variedad Riemanniana compacta conexa n-dimensional e $I : M \longrightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ un embedding isométrico en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^{n+k}$. Se identifica M con su imagen por I.

Una subvariedad del espacio euclídeo $\mathbf{R}^{n+k}$ es llamada full, si no está incluida en ningún hiperplano afín.

Definiciones

Sea M una variedad Riemanniana compacta conexa n-dimensional e $I : M \longrightarrow \mathbf{R}^{n+k}$ un embedding isométrico en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^{n+k}$. Se identifica M con su imagen por I.

Una subvariedad del espacio euclídeo $\mathbf{R}^{n+k}$ es llamada full, si no está incluida en ningún hiperplano afín.

Por $<,>$ se denota el producto interno en $\mathbf{R}^{n+k}$. Por ∇^E la derivada covariante euclídea en $\mathbf{R}^{n+k}$ y por ∇ la conexión Levi-Civita en M.

Definiciones

Se dice que la subvariedad M is *esférica* si está contenida en una esfera de radio r en $\mathbf{R}^{n+k}$, la cual se piensa centrada en el origen.

Definiciones

Se dice que la subvariedad M is *esférica* si está contenida en una esfera de radio r en $\mathbf{R}^{n+k}$, la cual se piensa centrada en el origen.

Por α se denota la segunda forma fundamental del embedding en $\mathbf{R}^{n+k}$.

Definiciones

Se dice que la subvariedad M is *esférica* si está contenida en una esfera de radio r en $\mathbf{R}^{n+k}$, la cual se piensa centrada en el origen.

Por α se denota la segunda forma fundamental del embedding en $\mathbf{R}^{n+k}$.

Se denota por $T_p(M)$ y $T_p(M)^\perp$ el espacio tangente y normal a M en p, respectivamente.

Definiciones

Se dice que la subvariedad M is *esférica* si está contenida en una esfera de radio r en $\mathbf{R}^{n+k}$, la cual se piensa centrada en el origen.

Por α se denota la segunda forma fundamental del embedding en $\mathbf{R}^{n+k}$.

Se denota por $T_p(M)$ y $T_p(M)^{\perp}$ el espacio tangente y normal a M en p, respectivamente.

M se dice *extrínsecamente homogénea*, si para cualquier par de puntos $p, q \in M$ existe una isometría g de $\mathbf{R}^{n+k}$ tal que $g(M) = M$ y $g(p) = q$.

Secciones Normales

Sea p un punto en M y consideremos $X \in T_p(M)$, con $\|X\| = 1$, se define el subespacio afín de $\mathbf{R}^{n+k}$ por,

Secciones Normales

Sea p un punto en M y consideremos $X \in T_p(M)$, con $\|X\| = 1$, se define el subespacio afín de $\mathbf{R}^{n+k}$ por,

$$Sec(p, X) = p + span\{X, T_p(M)^{\perp}\}.$$

Secciones Normales

Sea p un punto en M y consideremos $X \in T_p(M)$, con $\|X\| = 1$, se define el subespacio afín de $\mathbf{R}^{n+k}$ por,

$$Sec(p, X) = p + span\{X, T_p(M)^{\perp}\}.$$

Si U es una vecindad suficientemente pequeña de p en M entonces, la intersección $U \cap Sec(p, X)$ es una curva regular, C^{∞}, $\gamma(s)$, parametrizada por logitud de arco, tal que, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$. Esta curva es llamada una *Sección Normal de M en p en la dirección de X*.

Secciones Normales

Sea p un punto en M y consideremos $X \in T_p(M)$, con $\|X\| = 1$, se define el subespacio afín de $\mathbf{R}^{n+k}$ por,

$$Sec(p, X) = p + span\{X, T_p(M)^{\perp}\}.$$

Si U es una vecindad suficientemente pequeña de p en M entonces, la intersección $U \cap Sec(p, X)$ es una curva regular, C^{∞}, $\gamma(s)$, parametrizada por logitud de arco, tal que, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$. Esta curva es llamada una *Sección Normal de M en p en la dirección de X*.

Diremos que la Sección Normal γ es *plana* en p si sus tres primeras derivadas γ', γ'' y γ''' son *linealmente dependientes*.

Proposición C. U. Sánchez 2009

Sea M una subvariedad esférica compacta. La sección normal γ de M en p en la dirección $X \in T_p(M)$, es plana en p si y sólo si la derivada covariante de la segunda forma fundamental se anula sobre $X = \gamma'(0)$.

Proposición C. U. Sánchez 2009

Sea M una subvariedad esférica compacta. La sección normal γ de M en p en la dirección $X \in T_p(M)$, es plana en p si y sólo si la derivada covariante de la segunda forma fundamental se anula sobre $X = \gamma'(0)$. Esto es, X satisface la ecuación:

$$(\nabla_X \alpha)(X, X) = 0.$$

Proposición C. U. Sánchez 2009

Sea M una subvariedad esférica compacta. La sección normal γ de M en p en la dirección $X \in T_p(M)$, es plana en p si y sólo si la derivada covariante de la segunda forma fundamental se anula sobre $X = \gamma'(0)$. Esto es, X satisface la ecuación:

$$(\nabla_X \alpha)(X, X) = 0.$$

Proposición Si M es esférica y ω_1 es un campo vectorial unitario, umbilical a M entonces, para $X, Y, Z \in T_p(M)$ se tiene,

Proposición C. U. Sánchez 2009

Sea M una subvariedad esférica compacta. La sección normal γ de M en p en la dirección $X \in T_p(M)$, es plana en p si y sólo si la derivada covariante de la segunda forma fundamental se anula sobre $X = \gamma'(0)$. Esto es, X satisface la ecuación:

$$(\nabla_X \alpha)(X, X) = 0.$$

Proposición Si M es esférica y ω_1 es un campo vectorial unitario, umbilical a M entonces, para $X, Y, Z \in T_p(M)$ se tiene,

$$< \omega_1, (\nabla_X \alpha)(Y, Z) >= 0.$$

Los polinomios

Dado un punto p en la subvariedad M se denota por, $\widehat{X_p}(M)$ el conjunto:

Los polinomios

Dado un punto p en la subvariedad M se denota por, $\widehat{X_p}(M)$ el conjunto:

$$\widehat{X_p}(M) = \{Y \in T_p(M) : \|Y\| = 1, (\nabla_Y \alpha)(Y, Y) = 0\}$$

Los polinomios

Dado un punto p en la subvariedad M se denota por, $\widehat{X_p}(M)$ el conjunto:

$$\widehat{X_p}(M) = \{Y \in T_p(M) : \|Y\| = 1, (\nabla_Y \alpha)(Y, Y) = 0\}$$

Para estudiar las secciones normales en p de una subvariedad esférica compacta M en $\mathbf{R}^{n+k}$, es conveniente considerar los polinomios:

Los polinomios

Dado un punto p en la subvariedad M se denota por, $\widehat{X_p}(M)$ el conjunto:

$$\widehat{X_p}(M) = \{Y \in T_p(M) : \|Y\| = 1, (\nabla_Y \alpha)(Y, Y) = 0\}$$

Para estudiar las secciones normales en p de una subvariedad esférica compacta M en $\mathbf{R}^{n+k}$, es conveniente considerar los polinomios:

$$P_j(X) =< \omega_j, (\nabla_X \alpha)(X, X) >, j = 1, ..., k$$

Los polinomios

Dado un punto p en la subvariedad M se denota por, $\widehat{X_p}(M)$ el conjunto:

$$\widehat{X_p}(M) = \{Y \in T_p(M) : \|Y\| = 1, (\nabla_Y \alpha)(Y, Y) = 0\}$$

Para estudiar las secciones normales en p de una subvariedad esférica compacta M en $\mathbf{R}^{n+k}$, es conveniente considerar los polinomios:

$$P_j(X) =< \omega_j, (\nabla_X \alpha)(X, X) >, j = 1, ..., k$$

Donde $\omega_1, ..., \omega_k$ es una base del espacio normal $T_p(M)^{\perp}$.

Los polinomios

Dado un punto p en la subvariedad M se denota por, $\widehat{X_p}(M)$ el conjunto:

$$\widehat{X_p}(M) = \{Y \in T_p(M) : \|Y\| = 1, (\nabla_Y \alpha)(Y, Y) = 0\}$$

Para estudiar las secciones normales en p de una subvariedad esférica compacta M en $\mathbf{R}^{n+k}$, es conveniente considerar los polinomios:

$$P_j(X) =< \omega_j, (\nabla_X \alpha)(X, X) >, j = 1, ..., k$$

Donde $\omega_1, ..., \omega_k$ es una base del espacio normal $T_p(M)^{\perp}$.

$$P_j(X) = 0, j = 1, ..., k, \|X\| = 1$$

Definiciones y resultados

Se dice que la subvariedad $M^n \subset \mathbf{R}^{n+k}$ (como se la definió antes), tiene curvaturas principales constantes si, para cualquier campo normal paralelo $\xi(t)$ a lo largo de una curva diferenciable a trozos en M^n, los autovalores del operador forma $A_{\xi(t)}$ son constantes.

Definiciones y resultados

Se dice que la subvariedad $M^n \subset \mathbf{R}^{n+k}$ (como se la definió antes), tiene curvaturas principales constantes si, para cualquier campo normal paralelo $\xi(t)$ a lo largo de una curva diferenciable a trozos en M^n, los autovalores del operador forma $A_{\xi(t)}$ son constantes.

Es conocido que las subvariedades con curvaturas principales constantes son isoparamétricas o una sus variedades focales.

Definiciones y resultados

Se dice que la subvariedad $M^n \subset \mathbf{R}^{n+k}$ (como se la definió antes), tiene curvaturas principales constantes si, para cualquier campo normal paralelo $\xi(t)$ a lo largo de una curva diferenciable a trozos en M^n, los autovalores del operador forma $A_{\xi(t)}$ son constantes.

Es conocido que las subvariedades con curvaturas principales constantes son isoparamétricas o una sus variedades focales.

Para subvariedades isoparamétricas full, M^n de $\mathbf{R}^{n+k}$ el rango es su codimensión, más precisamente, k.

Definiciones y resultados

Sea M una subvariedad isoparamétrica de $\mathbf{R}^{n+k}$, compact de rango k entonces, M es esférica y se puede pensar centrada en $0 \in \mathbf{R}^{n+k}$ y radio 1.

Definiciones y resultados

Sea M una subvariedad isoparamétrica de $\mathbf{R}^{n+k}$, compact de rango k entonces, M es esférica y se puede pensar centrada en $0 \in \mathbf{R}^{n+k}$ y radio 1.

M es el conjunto de nivel de un *mapeo polinomial isoparamétrico* $f : \mathbf{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbf{R}^k$ el cual tiene componentes $f = (h_1, ..., h_k)$, usualmente se toma, $M = f^{-1}(0)$.

Definiciones y resultados

Sea M una subvariedad isoparamétrica de $\mathbf{R}^{n+k}$, compact de rango k entonces, M es esférica y se puede pensar centrada en $0 \in \mathbf{R}^{n+k}$ y radio 1.

M es el conjunto de nivel de un *mapeo polinomial isoparamétrico* $f : \mathbf{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbf{R}^k$ el cual tiene componentes $f = (h_1, ..., h_k)$, usualmente se toma, $M = f^{-1}(0)$.

La importancia de las subvariedades isoparamétricas para nuestro estudio es que, los gradientes, $\{\nabla h_j : j = 1, ..., k\}$ proveen un un marco $\nabla^\perp$ - paralelo del fibrado normal de M. Se usará esta base natural de fibrado normal en lugar de $\omega_1, ..., \omega_k$.

Propiedades de los polinomios para subvariedades isoparamétricas

Propiedad 1 Sea $e_1, ..., e_n$ una base ortonormal de $T_p(M)$ formada por una base ortonormal en cada autodistribucion $H_i(p), i = 1, ..., g$. Entonces escribiendo $X \in T_p(M)$, $\|X\| = 1$, como $X = \Sigma a_i e_i$, en los polinomios $P_j(X), j = 1, ..., k$, no hay monomios con dos subíndices del mismo $H_i(p)$. En particular no hay cubos ni cuadrados en los polinomios.

Propiedades de los polinomios para subvariedades isoparamétricas

Propiedad 1 Sea $e_1, ..., e_n$ una base ortonormal de $T_p(M)$ formada por una base ortonormal en cada autodistribucion $H_i(p), i = 1, ..., g$. Entonces escribiendo $X \in T_p(M)$, $\|X\| = 1$, como $X = \Sigma a_i e_i$, en los polinomios $P_j(X), j = 1, ..., k$, no hay monomios con dos subíndices del mismo $H_i(p)$. En particular no hay cubos ni cuadrados en los polinomios.

Propiedad 2 Para una subvariedad isoparamétrica compacta M de $\mathbf{R}^{n+k}$, los polinomios $P_j(X), j = 1, ..., k$, son armónicos en $T_p(M)$ para cualquier $p \in M$.

Cálculo de los polinomios en subvariedades Isoparamétricas

En esta sección se verá que los polinomios pueden ser calculados en forma más directa, a partir de:$(h_1, ..., h_k)$ que definen a M

Cálculo de los polinomios en subvariedades Isoparamétricas

En esta sección se verá que los polinomios pueden ser calculados en forma más directa, a partir de:$(h_1, ..., h_k)$ que definen a M

Proposición Si $\gamma(s)$ es una sección normal de M tal que, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$ entonces,

$$P_j(X) = -X < \nabla^E_{\gamma'(s)}(\nabla h_j(\gamma(s))), \gamma'(s) > \tag{1}$$

Cálculo de los polinomios en subvariedades Isoparamétricas

En esta sección se verá que los polinomios pueden ser calculados en forma más directa, a partir de:$(h_1, ..., h_k)$ que definen a M

Proposición Si $\gamma(s)$ es una sección normal de M tal que, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$ entonces,

$$P_j(X) = -X < \nabla^E_{\gamma'(s)}(\nabla h_j(\gamma(s))), \gamma'(s) > \qquad (1)$$

Puesto que se puede tomar h_1 como el polinomio cuadrático que define la esfera unidad en $\mathbf{R}^{n+k}$. Entonces, $\widehat{X_p}(M)$ está definido por,

Cálculo de los polinomios en subvariedades Isoparamétricas

En esta sección se verá que los polinomios pueden ser calculados en forma más directa, a partir de:$(h_1, ..., h_k)$ que definen a M

Proposición Si $\gamma(s)$ es una sección normal de M tal que, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X$ entonces,

$$P_j(X) = -X < \nabla^E_{\gamma'(s)}(\nabla h_j(\gamma(s))), \gamma'(s) > \tag{1}$$

Puesto que se puede tomar h_1 como el polinomio cuadrático que define la esfera unidad en $\mathbf{R}^{n+k}$. Entonces, $\widehat{X_p}(M)$ está definido por,

$$P_j(X) = 0, \|X\| = 1, j = 2, ..., k \tag{2}$$

Cálculo de los polinomios en Hipersuperficies Isoparamétricas

Sea M una subvariedad isoparamétrica, compacta, *full* de rango 2 de $\mathbf{R}^{n+2}$. M es el conjunto de nivel regular de un mapeo polinomial isoparamétrico $f : \mathbf{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ el cual tiene componentes $f = (h_1, h_2)$.

Cálculo de los polinomios en Hipersuperficies Isoparamétricas

Sea M una subvariedad isoparamétrica, compacta, *full* de rango 2 de $\mathbf{R}^{n+2}$. M es el conjunto de nivel regular de un mapeo polinomial isoparamétrico $f : \mathbf{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ el cual tiene componentes $f = (h_1, h_2)$.
Sea p un punto en M. Se puede pensar h_1 como el polinomio cuadrático que define la esfera unidad de $\mathbf{R}^{n+2}$ y los gradientes $\nabla h_1, \nabla h_2$, proveen un marco $\nabla^{\perp}$-paralelo del fibrado normal.

Cálculo de los polinomios en Hipersuperficies Isoparamétricas

Sea M una subvariedad isoparamétrica, compacta, *full* de rango 2 de $\mathbf{R}^{n+2}$. M es el conjunto de nivel regular de un mapeo polinomial isoparamétrico $f : \mathbf{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ el cual tiene componentes $f = (h_1, h_2)$.

Sea p un punto en M. Se puede pensar h_1 como el polinomio cuadrático que define la esfera unidad de $\mathbf{R}^{n+2}$ y los gradientes $\nabla h_1, \nabla h_2$, proveen un marco $\nabla^{\perp}$-paralelo del fibrado normal. Tenemos el polinomio asociado (2) para $j = 2$, $\widehat{X_p}(M)$ y está definido por,

Cálculo de los polinomios en Hipersuperficies Isoparamétricas

Sea M una subvariedad isoparamétrica, compacta, *full* de rango 2 de $\mathbf{R}^{n+2}$. M es el conjunto de nivel regular de un mapeo polinomial isoparamétrico $f : \mathbf{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ el cual tiene componentes $f = (h_1, h_2)$.

Sea p un punto en M. Se puede pensar h_1 como el polinomio cuadrático que define la esfera unidad de $\mathbf{R}^{n+2}$ y los gradientes $\nabla h_1, \nabla h_2$, proveen un marco $\nabla^{\perp}$-paralelo del fibrado normal. Tenemos el polinomio asociado (2) para $j = 2$, $\widehat{X_p}(M)$ y está definido por,

$$P_2(X) = 0, \|X\| = 1$$

Cálculo de los polinomios en Hipersuperficies Isoparamétricas

Sea M una subvariedad isoparamétrica, compacta, *full* de rango 2 de $\mathbf{R}^{n+2}$. M es el conjunto de nivel regular de un mapeo polinomial isoparamétrico $f : \mathbf{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ el cual tiene componentes $f = (h_1, h_2)$.

Sea p un punto en M. Se puede pensar h_1 como el polinomio cuadrático que define la esfera unidad de $\mathbf{R}^{n+2}$ y los gradientes $\nabla h_1, \nabla h_2$, proveen un marco $\nabla^{\perp}$-paralelo del fibrado normal. Tenemos el polinomio asociado (2) para $j = 2$, $\widehat{X_p}(M)$ y está definido por,

$$P_2(X) = 0, \|X\| = 1$$

El conjunto algebraico de secciones normales planas de M en p es entonces $P^{-1}(0)$

Ecuaciones de Cartan - Münzner

Teorema Si M es una hipersuperficie isoparamétrica de S^{n+1} con g curvaturas principales distintas entonces, existe una función $f : S^{n+1} \to \mathbb{R}$ Tal que,

Ecuaciones de Cartan - Münzner

Teorema Si M es una hipersuperficie isoparamétrica de S^{n+1} con g curvaturas principales distintas entonces, existe una función $f : S^{n+1} \to \mathbb{R}$ Tal que,

(i) f satisface,

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|^2 &= g^2 \|X\|^{2g-2} && (3) \\ \triangle f &= c \|X\|^{g-2}, && (4) \end{aligned}$$

Ecuaciones de Cartan - Münzner

Teorema Si M es una hipersuperficie isoparamétrica de S^{n+1} con g curvaturas principales distintas entonces, existe una función $f : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ Tal que,
(i) f satisface,

$$\|\nabla f\|^2 = g^2 \|X\|^{2g-2} \tag{3}$$

$$\triangle f = c \|X\|^{g-2}, \tag{4}$$

donde, $c = \frac{g^2(m_2 - m_1)}{2}$, 0 *para* g *impar*. Aquí se denota por m_i la multiplicidad correspondiente a la curvatura principal λ_i.

Ecuaciones de Cartan - Münzner

Teorema Si M es una hipersuperficie isoparamétrica de S^{n+1} con g curvaturas principales distintas entonces, existe una función $f : S^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ Tal que,
(i) f satisface,

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|^2 &= g^2 \|X\|^{2g-2} \quad (3) \\ \triangle f &= c\|X\|^{g-2}, \quad (4) \end{aligned}$$

donde, $c = \frac{g^2(m_2-m_1)}{2}$, 0 *para* g *impar*. Aquí se denota por m_i la multiplicidad correspondiente a la curvatura principal λ_i.
(ii) f es de un polinomio homogéneo de grado g en S^{n+1}.

Ecuaciones de Cartan - Münzner

Teorema Si M es una hipersuperficie isoparamétrica de S^{n+1} con g curvaturas principales distintas entonces, existe una función $f : S^{n+1} \to \mathbb{R}$ Tal que,
(i) f satisface,

$$\|\nabla f\|^2 = g^2 \|X\|^{2g-2} \quad (3)$$
$$\triangle f = c \|X\|^{g-2}, \quad (4)$$

donde, $c = \frac{g^2(m_2 - m_1)}{2}$, 0 *para* g *impar*. Aquí se denota por m_i la multiplicidad correspondiente a la curvatura principal λ_i.
(ii) f es de un polinomio homogéneo de grado g en S^{n+1}.
(iii) Recíprocamente, para cada polinomio homogéneo f de grado g, que satisface (3,4), las hipersuperficies de nivel de $f \mid_{S^{n+1}}$ forman una familia isoparamétrica.

Teorema Si M es una hipersuperficie isoparamétrica de S^{n+1} con g curvaturas principales distintas entonces, $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Teorema Si M es una hipersuperficie isoparamétrica de S^{n+1} con g curvaturas principales distintas entonces, $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Observación El número g de curvaturas principales distintas de una hipersuperficie isoparamétrica coincide con los valores de g para las hipersuperficies isoparamétricas homogéneas de la lista de Takagi y Takahashi.

Teorema Si M es una hipersuperficie isoparamétrica de S^{n+1} con g curvaturas principales distintas entonces, $g \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Observación El número g de curvaturas principales distintas de una hipersuperficie isoparamétrica coincide con los valores de g para las hipersuperficies isoparamétricas homogéneas de la lista de Takagi y Takahashi. En todos los casos las subvariedades son órbitas de la representación isotrópica de ciertos espacios simétricos.

Observación El esquema a seguir para el cálculo de $P_2(X)$, esto es el polinomio que define secciones normales planas en *hipersuperficies isoparamétricas homogéneas* de la esfera unidad, es:

Observación El esquema a seguir para el cálculo de $P_2(X)$, esto es el polinomio que define secciones normales planas en *hipersuperficies isoparamétricas homogéneas* de la esfera unidad, es:

Observación El esquema a seguir para el cálculo de $P_2(X)$, esto es el polinomio que define secciones normales planas en *hipersuperficies isoparamétricas homogéneas* de la esfera unidad, es:

- Encontrar el punto base que denotamos por E.

Observación El esquema a seguir para el cálculo de $P_2(X)$, esto es el polinomio que define secciones normales planas en *hipersuperficies isoparamétricas homogéneas* de la esfera unidad, es:

- Encontrar el punto base que denotamos por E.
- Encontrar el espacio normal y tangente de M en el punto E.

Observación El esquema a seguir para el cálculo de $P_2(X)$, esto es el polinomio que define secciones normales planas en *hipersuperficies isoparamétricas homogéneas* de la esfera unidad, es:

- Encontrar el punto base que denotamos por E.
- Encontrar el espacio normal y tangente de M en el punto E.
- Calcular $P_2(X)$ por la fórmula (1).

Descripción de los casos g=1,2

g=1 En este caso M resulta un *Ecuador* de S^{n+1} y se puede definir como, sea $v \in S^{n+1}$ fijo entonces, $M = \left\{X \in S^{n+1} : \langle X, v\rangle = 0\right\}$

Descripción de los casos g=1,2

g=1 En este caso M resulta un *Ecuador* de S^{n+1} y se puede definir como, sea $v \in S^{n+1}$ fijo entonces, $M = \left\{X \in S^{n+1} : \langle X, v \rangle = 0\right\}$

g=2 *Variedades de Clifford*. Sean p, q números naturales tales que, $1 \leq p, q \leq n$, $p + q = n$, entonces,

$$M_{p,q} = \left\{ X \in S^{n+1} : \sum_{i=1}^{p+1} x_i^2 - \sum_{i=p+2}^{n+2} x_i^2 = 0 \right\}$$

Descripción de los casos g=1,2

g=1 En este caso M resulta un *Ecuador* de S^{n+1} y se puede definir como, sea $v \in S^{n+1}$ fijo entonces, $M = \{X \in S^{n+1} : \langle X, v \rangle = 0\}$

g=2 *Variedades de Clifford*. Sean p, q números naturales tales que, $1 \leq p, q \leq n$, $p + q = n$, entonces,

$$M_{p,q} = \left\{ X \in S^{n+1} : \sum_{i=1}^{p+1} x_i^2 - \sum_{i=p+2}^{n+2} x_i^2 = 0 \right\}$$

Denotamos $P_2(X)$ por, $\mathbb{P}(X)$. En los dos casos $(g = 1, 2)$ resulta,

Descripción de los casos g=1,2

g=1 En este caso M resulta un *Ecuador* de S^{n+1} y se puede definir como, sea $v \in S^{n+1}$ fijo entonces, $M = \left\{X \in S^{n+1} : \langle X, v \rangle = 0\right\}$

g=2 *Variedades de Clifford*. Sean p, q números naturales tales que, $1 \leq p, q \leq n$, $p + q = n$, entonces,

$$M_{p,q} = \left\{ X \in S^{n+1} : \sum_{i=1}^{p+1} x_i^2 - \sum_{i=p+2}^{n+2} x_i^2 = 0 \right\}$$

Denotamos $P_2(X)$ por, $\mathbb{P}(X)$. En los dos casos $(g = 1, 2)$ resulta,

$$\mathbb{P}(X) = 0$$

case g=3 Hipersuperficies de Cartan

En este caso se tienen las Hipersuperficies de Cartan. Recordamos que F_R, F_C, F_H y F_O son banderas completas en los planos proyectivos RP^2, CP^2, HP^2 and OP^2(real, complejo, cuaterniónico y Cayley), respectivamente.

case g=3 Hipersuperficies de Cartan

En este caso se tienen las Hipersuperficies de Cartan. Recordamos que F_R, F_C, F_H y F_O son banderas completas en los planos proyectivos RP^2, CP^2, HP^2 and OP^2(real, complejo, cuaterniónico y Cayley), respectivamente.

Resumimos la información para las Hipersuperficies de Cartan.

Hipersuperficie	*dimM*	*g*	m_i
$F_R = SO(3)\diagup(Z_2 \times Z_2)$	3	3	1
$F_C = SU(3)\diagup T^2$	6	3	2
$F_H = Sp(3)\diagup(Sp(1))^3$	12	3	4
$F_O = F_4\diagup Spin(8)$	24	3	8

case g=3 Hipersuperficies de Cartan

Los polinomios que definen estas cuatro variedades fueron especificados por Cartan y por Ozeki y Takeuchi. Consideremos

$$f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^2,\ f = (h_1, h_2),\ h_1 = \|X\|^2 - 1$$

case g=3 Hipersuperficies de Cartan

Los polinomios que definen estas cuatro variedades fueron especificados por Cartan y por Ozeki y Takeuchi. Consideremos

$$f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^2,\ f = (h_1, h_2),\ h_1 = \|X\|^2 - 1$$

y h_2

$$\begin{aligned} h_2(u) &= z_2^3 - 3z_2 z_1^2 + \frac{3}{2} z_2 \left(n(x_1) + n(x_2) - 2n(x_3)\right) \\ &\quad + \frac{3\sqrt{3}}{2} z_1 \left(n(x_1) - n(x_2)\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2} t\left(x_1 x_2 x_3\right) \end{aligned}$$

case g=3 Hipersuperficies de Cartan

Se toma E y ϑ

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

case g=3 Hipersuperficies de Cartan

Se toma E y ϑ

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} tr \left(uv + vu \right)$ entonces,

$$\| E \| = 1, \qquad h_2(E) = 0, \qquad \langle \nabla h_2(E), E \rangle = 0$$

case g=3 Hipersuperficies de Cartan

Se toma E y ϑ

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} tr\,(uv + vu)$ entonces,

$$\|E\| = 1, \qquad h_2(E) = 0, \qquad \langle \nabla h_2(E), E \rangle = 0$$

Usando la fórmula (1), el polinomio de secciones normales resulta.

$$\mathbb{P}\,(X) = -9\sqrt{3} Re\,(x_1 x_2 x_3\ )$$

$$x_j \in F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\ ,\ j = 1, 2, 3$$

caso g=4

En este grado hay un camino para generar el polinomio h_2 usando *Sistemas de Clifford* como el definido por Ferus-Karcher-Münzner. Si embargo, hay un par de ejemplos que no pueden ser obtenidos por este camino.

caso g=4

En este grado hay un camino para generar el polinomio h_2 usando *Sistemas de Clifford* como el definido por Ferus-Karcher-Münzner. Si embargo, hay un par de ejemplos que no pueden ser obtenidos por este camino.

Se resume la información de los ejemplos que se obtienen por construcción FKM.

	m_1	m_2		
$\mathbb{R}$	1	$n-2$	$SO(n+2)/SO(n)\times SO(2)$	BDI
$\mathbb{C}$	2	$2n-3$	$SU(n+2)/S(U(n)\times U(2))$	$AIII$
$\mathbb{H}$	4	$4n-5$	$Sp(n+2)/Sp(n)\times Sp(2)$	CII

case g=4 FKM Cuaterniones

Se toma $X \in T_E(M)$ y E el punto base,

$$
\begin{aligned}
X &= ((\alpha, B), (C, \delta)) \;\; B, C \in \mathbb{H}^{n-1} \alpha, \delta \textit{ cuaterniones puros} \\
\alpha &= a_1 i + a_2 j + a_3 k \\
\delta &= d_1 i + d_2 j + d_3 k \\
B &= (u_2, \ldots, u_n), \qquad C = (v_1, \ldots, v_{n-1}) \\
u_s &= b_{s,0} + b_{s,1} i + b_{s,2} j + b_{s,3} k, \qquad s = 2, \ldots, n \\
v_r &= c_{r,0} + c_{r,1} i + c_{r,2} j + c_{r,3} k, \qquad r = 1, \ldots, n-1 \\
E &= (A_0, B_0) = ((t_1, \ldots, 0), (0, \ldots, t_2))
\end{aligned}
$$

case g=4 FKM Cuaterniones

Se toma $X \in T_E(M)$ y E el punto base,

$$
\begin{aligned}
X &= ((\alpha, B), (C, \delta)) \;\; B, C \in \mathbb{H}^{n-1} \alpha, \delta \; \textit{cuaterniones puros} \\
\alpha &= a_1 i + a_2 j + a_3 k \\
\delta &= d_1 i + d_2 j + d_3 k \\
B &= (u_2, \dots, u_n), \qquad C = (v_1, \dots, v_{n-1}) \\
u_s &= b_{s,0} + b_{s,1} i + b_{s,2} j + b_{s,3} k, \qquad s = 2, \dots, n \\
v_r &= c_{r,0} + c_{r,1} i + c_{r,2} j + c_{r,3} k, \qquad r = 1, \dots, n-1 \\
E &= (A_0, B_0) = ((t_1, \dots, 0), (0, \dots, t_2))
\end{aligned}
$$

Con la precedente notación $g = 4$ $F = \mathbb{H}$ $m_1 = 4$ $m_2 = 4n - 5$ resulta,

case g=4 FKM Cuaternión

$\frac{1}{96}\mathbb{P}(X) =$

case g=4 FKM Cuaternión

$$\frac{1}{96}\mathbb{P}(X) =$$

$$(t_1 c_{1,0} + t_2 b_{n,0})(a_1 c_{1,1} + a_2 c_{1,2} + a_3 c_{1,3} + d_1 b_{n,1} + d_2 b_{n,2} + d_3 b_{n,3})$$

$$+ (t_1 c_{1,0} + t_2 b_{n,0}) \sum_{r=2}^{n-1} (b_{r,0} c_{r,0} + b_{r,1} c_{r,1} + b_{r,2} c_{r,2} + b_{r,3} c_{r,3}) +$$

$$(-t_1 c_{1,1} + t_2 b_{n,1})(a_1 c_{1,0} - a_2 c_{1,3} + a_3 c_{1,2} - d_1 b_{n,0} + d_2 b_{n,3} - d_3 b_{n,2})$$

$$+ (-t_1 c_{1,1} + t_2 b_{n,1}) \sum_{r=2}^{n-1} (-b_{r,0} c_{r,1} + b_{r,1} c_{r,0} - b_{r,2} c_{r,3} + b_{r,3} c_{r,2}) +$$

$$(-t_1 c_{1,2} + t_2 b_{n,2})(a_1 c_{1,3} + a_2 c_{1,0} - a_3 c_{1,1} - d_1 b_{n,3} - d_2 b_{n,0} + d_3 b_{n,1})$$

$$+ (-t_1 c_{1,2} + t_2 b_{n,2}) \sum_{r=2}^{n-1} (-b_{r,0} c_{r,2} + b_{r,1} c_{r,3} + b_{r,2} c_{r,0} - b_{r,3} c_{r,1}) +$$

$$(-t_1 c_{1,3} + t_2 b_{n,3})(-a_1 c_{1,2} + a_2 c_{1,1} + a_3 c_{1,0} + d_1 b_{n,2} - d_2 b_{n,1} - d_3 b_{n,0})$$

case g=4 FKM Complejo

En este caso $g = 4$ $F = \mathbb{C}$ $m_1 = 2$ $m_2 = 2n - 3$ y reduciendo las variables necesarias, se obtiene,

case g=4 FKM Complejo

En este caso $g = 4$ $F = \mathbb{C}$ $m_1 = 2$ $m_2 = 2n - 3$ y reduciendo las variables necesarias, se obtiene,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{96}\mathbb{P}(X) &= (t_1 c_{1,0} + t_2 b_{n,0})(a_1 c_{1,1} + d_1 b_{n,1}) \\
&+ (t_1 c_{1,0} + t_2 b_{n,0}) \sum_{r=2}^{n-1} (b_{r,0} c_{r,0} + b_{r,1} c_{r,1}) \\
&+ (-t_1 c_{1,1} + t_2 b_{n,1})(a_1 c_{1,0} - d_1 b_{n,0}) \\
&+ (-t_1 c_{1,1} + t_2 b_{n,1}) \sum_{r=2}^{n-1} (-b_{r,0} c_{r,1} + b_{r,1} c_{r,0})
\end{aligned}$$

case g=4 FKM Real

Caso $g = 4$ $F = \mathbb{R}$ $m_1 = 1$ $m_2 = n - 2$,

case g=4 FKM Real

Caso $g = 4$ $F = \mathbb{R}$ $m_1 = 1$ $m_2 = n - 2$,

$$\frac{1}{96}\mathbb{P}(X) = (t_1 c_{1,0} + t_2 b_{n,0}) \sum_{r=2}^{n-1} b_{r,0} c_{r,0}$$

caso g=4 $m_1 = 9$ $m_2 = 6$ construcción FKM

Esta es una subvariedad homogénea como lo indica en sus notas Ferus.

caso g=4 $m_1 = 9$ $m_2 = 6$ construcción FKM

Esta es una subvariedad homogénea como lo indica en sus notas Ferus.
Para este ejemplo se tiene,

$$\begin{array}{ccc} dimM = 30 & g = 4 & m_1 = m_3 = 9 \\ m_2 = m_4 = 6 & & m_1 + m_2 + 1 = 16 \end{array}$$

caso g=4 $m_1 = 9$ $m_2 = 6$ construcción FKM

Esta es una subvariedad homogénea como lo indica en sus notas Ferus.
Para este ejemplo se tiene,

$$\begin{array}{ccc} dim M = 30 & g = 4 & m_1 = m_3 = 9 \\ m_2 = m_4 = 6 & & m_1 + m_2 + 1 = 16 \end{array}$$

Punto base

$$E = (A_0, B_0) = \left(\begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & t_6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

caso g=4 $m_1 = 9$ $m_2 = 6$ construcción FKM

Esta es una subvariedad homogénea como lo indica en sus notas Ferus.

Para este ejemplo se tiene,

$$\begin{array}{ccc} dimM = 30 & g = 4 & m_1 = m_3 = 9 \\ m_2 = m_4 = 6 & & m_1 + m_2 + 1 = 16 \end{array}$$

Punto base

$$E = (A_0, B_0) = \left(\begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & t_6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

Espacio tangente

$$T_E(M) = \left\{ \left(\begin{bmatrix} \alpha & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_5 & \beta \\ b_7 & b_8 \end{bmatrix} \right) : a_s, b_s \in \mathbb{H} \right\}$$

caso g=4 $m_1 = 9$ $m_2 = 6$ el polinomio

El polinomio en este caso es:

$$\frac{1}{96}\mathbb{P}(X) =$$
$$(t_1 v_{5,0} + t_6 u_{2,0})\left[\langle \alpha, b_5\rangle + \langle a_2, \beta\rangle + \langle a_3, b_7\rangle + \langle a_4, b_8\rangle\right]$$
$$+(-t_1 v_{5,1} + t_6 u_{2,1})\left[\langle \alpha, ib_5\rangle + \langle a_2, i\beta\rangle - \langle a_3, ib_7\rangle - \langle a_4, ib_8\rangle\right]$$
$$+(-t_1 v_{5,2} + t_6 u_{2,2})\left[\langle \alpha, jb_5\rangle + \langle a_2, j\beta\rangle - \langle a_3, jb_7\rangle - \langle a_4, jb_8\rangle\right]$$
$$+(-t_1 v_{5,3} + t_6 u_{2,3})\left[\langle \alpha, kb_5\rangle + \langle a_2, k\beta\rangle - \langle a_3, kb_7\rangle - \langle a_4, kb_8\rangle\right]$$
$$+(t_1 v_{8,0} - t_6 u_{3,0})\left[\langle \alpha, b_8\rangle + \langle a_2, b_7\rangle - \langle a_3, \beta\rangle - \langle a_4, b_5\rangle\right]$$
$$+(-t_1 v_{7,1} + t_6 u_{4,1})\left[\langle \alpha, b_7 i\rangle + \langle a_2, b_8 i\rangle + \langle a_3, b_5 i\rangle + \langle a_4, \beta i\rangle\right]$$
$$+(-t_1 v_{7,2} + t_6 u_{4,2})\left[\langle \alpha, b_7 j\rangle + \langle a_2, b_8 j\rangle + \langle a_3, b_5 j\rangle + \langle a_4, \beta j\rangle\right]$$
$$+(-t_1 v_{7,3} + t_6 u_{4,3})\left[\langle \alpha, b_7 k\rangle + \langle a_2, b_8 k\rangle + \langle a_3, b_5 k\rangle + \langle a_4, \beta k\rangle\right]$$
$$+(-t_1 v_{7,0} - t_6 u_{4,0})\left[-\langle \alpha, b_7\rangle + \langle a_2, b_8\rangle + \langle a_3, b_5\rangle - \langle a_4, \beta\rangle\right]$$

caso g=4 El ejemplo $SO(5)$

Como se mencionó antes hay dos hipersuperficies isoparamétricas en la esfera las cuales son de grado $g = 4$ pero que no se pueden describir por *Sistemas de Clifford*.

caso g=4 El ejemplo $SO(5)$

Como se mencionó antes hay dos hipersuperficies isoparamétricas en la esfera las cuales son de grado $g = 4$ pero que no se pueden describir por *Sistemas de Clifford*.

$$M = SO(5)\diagup T^2 \quad ; \; dimM = 8 \quad ; \; g = 4, \quad ; \; m_i = 2, \forall i$$

caso g=4 El ejemplo $SO(5)$

Como se mencionó antes hay dos hipersuperficies isoparamétricas en la esfera las cuales son de grado $g = 4$ pero que no se pueden describir por *Sistemas de Clifford*.

$$M = SO(5) \diagup T^2 \quad ; \; dimM = 8 \quad ; \; g = 4, \quad ; \; m_i = 2, \forall i$$

Sea $X = (0, 0, x_3, ..., x_{10})$ el vector tangente, entonces,

caso g=4 El ejemplo $SO(5)$

Como se mencionó antes hay dos hipersuperficies isoparamétricas en la esfera las cuales son de grado $g = 4$ pero que no se pueden describir por *Sistemas de Clifford*.

$$M = SO(5) \diagup T^2 \quad ; \; dimM = 8 \quad ; \; g = 4, \quad ; \; m_i = 2, \forall i$$

Sea $X = (0, 0, x_3, ..., x_{10})$ el vector tangente, entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X) &= 96t_1 \left(x_7x_9x_4 + x_7x_{10}x_6 - x_8x_3x_9 - x_8x_5x_{10} \right) \\ &\quad +96t_2 \left(-x_7x_9x_5 - x_8x_9x_6 + x_{10}x_3x_7 + x_{10}x_4x_8 \right) \end{aligned}$$

caso g=4 El ejemplo $SO(5)$

Como se mencionó antes hay dos hipersuperficies isoparamétricas en la esfera las cuales son de grado $g = 4$ pero que no se pueden describir por *Sistemas de Clifford*.

$$M = SO(5) \diagup T^2 \quad ; \ dimM = 8 \quad ; \ g = 4, \quad ; \ m_i = 2, \forall i$$

Sea $X = (0, 0, x_3, ..., x_{10})$ el vector tangente, entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X) \quad &= \quad 96t_1 \left(x_7x_9x_4 + x_7x_{10}x_6 - x_8x_3x_9 - x_8x_5x_{10}\right) \\ & \quad\quad +96t_2 \left(-x_7x_9x_5 - x_8x_9x_6 + x_{10}x_3x_7 + x_{10}x_4x_8\right) \end{aligned}$$

El caso $SU(5)$. Sea $X = (0, 0, x_3, ..., x_{10}, y_1, ..., y_{10})$ entonces,

caso g=4 El ejemplo $SU(5)$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{96}\mathbb{P}(X) \quad = \quad & t_1\left(-y_2x_3y_6 - y_2x_6y_3 + y_2x_5y_4 + y_2x_4y_5\right) \\
& +t_2\left(-y_1x_3y_6 - y_1x_6y_3 + y_1x_5y_4 + y_1x_4y_5\right) \\
& +t_1\left(x_4x_7x_9 + x_4y_7y_9 + y_4x_7y_9 - y_4x_9y_7\right) \\
& +t_1\left(-x_3x_8x_9 - x_3y_8y_9 - y_3x_8y_9 + y_3x_9y_8\right) \\
& +t_1\left(x_6x_7x_{10} + x_6y_7y_{10} + y_6x_7y_{10} - y_6x_{10}y_7\right) \\
& +t_1\left(-x_5x_8x_{10} - x_5y_8y_{10} - y_5x_8y_{10} + y_5x_{10}y_8\right) \\
& +t_2\left(-x_5x_7x_9 - x_5y_7y_9 - y_5x_9y_7 + y_5x_7y_9\right) \\
& +t_2\left(x_3x_7x_{10} + x_3y_7y_{10} + y_3x_{10}y_7 - y_3x_7y_{10}\right) \\
& +t_2\left(-x_6x_8x_9 - x_6y_8y_9 - y_6x_9y_8 + y_6x_8y_9\right) \\
& +t_2\left(x_4x_8x_{10} + x_4y_8y_{10} + y_4x_{10}y_8 - y_4x_8y_{10}\right)
\end{aligned}
$$

Caso g=6

En el caso $g = 6$ hay dos hipersuperficies isoparamétricas homogéneas sobre la esfera las cuales tienen dimensión 6 y 12 respectivamente.

Caso g=6

En el caso $g = 6$ hay dos hipersuperficies isoparamétricas homogéneas sobre la esfera las cuales tienen dimensión 6 y 12 respectivamente.

El polinomio $g = 6$ $dimM = 6$

Caso g=6

En el caso $g = 6$ hay dos hipersuperficies isoparamétricas homogéneas sobre la esfera las cuales tienen dimensión 6 y 12 respectivamente.
El polinomio $g = 6$ $dimM = 6$

$$\mathbb{P}(X) = 0$$

El caso g=6 $dimM = 12$

El polinomio $g = 6$ $dimM = 12$

El caso g=6 $dimM = 12$

El polinomio $g = 6$ $dimM = 12$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2160}\mathbb{P}(X) \quad = \quad & T\left(t_6 t_8 t_9 + t_3 t_7 t_{11} + t_3 t_6 t_{14} + t_6 t_7 t_{10}\right) \\
& + T\left(t_9 t_{12} t_{14} + 3 t_4 t_5 t_{14} + 3 t_4 t_8 t_{11} + 3 t_{10} t_{11} t_{14}\right) \\
& - T\left(t_5 t_7 t_9 + t_3 t_5 t_{13} + t_3 t_8 t_{12} + t_4 t_6 t_{13}\right) \\
& - T\left(t_4 t_7 t_{12} + t_9 t_{11} t_{13} + t_{10} t_{12} t_{13} + 3 t_5 t_8 t_{10}\right)
\end{aligned}$$

El caso g=6 $dimM = 12$

El polinomio $g = 6$ $dimM = 12$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2160}\mathbb{P}(X) \quad = \quad & T\left(t_6 t_8 t_9 + t_3 t_7 t_{11} + t_3 t_6 t_{14} + t_6 t_7 t_{10}\right) \\
& + T\left(t_9 t_{12} t_{14} + 3t_4 t_5 t_{14} + 3t_4 t_8 t_{11} + 3t_{10} t_{11} t_{14}\right) \\
& - T\left(t_5 t_7 t_9 + t_3 t_5 t_{13} + t_3 t_8 t_{12} + t_4 t_6 t_{13}\right) \\
& - T\left(t_4 t_7 t_{12} + t_9 t_{11} t_{13} + t_{10} t_{12} t_{13} + 3t_5 t_8 t_{10}\right)
\end{aligned}
$$

Donde el coeficiente

$$T = \frac{1}{18}\sqrt{6}$$

Bibliografía

- Adams J. F., *Lectures on Exceptional Lie Groups*, The University of Chicago Press, (1996).
- Ferus D. Notes on Isoparametric Hypersurfaces. Escola de Geometria Diferencial. Univ. Estadual de Campinas. (1980)
- Ozeki H., Takeuchi M. On some types of isoparametric hypersurfaces on spheres II. Tohoku Math. Journal 28 (1976) 7-55.
- Sánchez C. U., *Algebraic sets associated to isoparametric submanifolds*, American Mathematical Society. Contemporary Mathematics, Vol.491 (2009) 37-56.
- Sánchez, C. U. Normal sections of $\mathbb{R}$-spaces I. Preprint. 2010.

Muchas gracias por su atención