ENCUENTRO DE GEOMETRIA DIFERENCIAL
ROSARIO 2012
Rosario, Argentina, 31 de julio a 3 de agosto 2012

https://www.fceia.unr.edu.ar/ grosa

Introducción a las geometrías no euclideanas

Francisco Vittone

Universidad Nacional de Rosario
vittone@fceia.unr.edu.ar

Departamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Pellegrini 250, 2000 Rosario, Santa Fe - Argentina
Tel (54) 341 4802650 Interno: 116. Fax: 4802654

1. Introducción

La geometría Euclidea es un sistema deductivo de geometría que se basa en axiomas, tomados como evidentes, de los cuales se deducen teoremas o resultados más profundos. Éstos fueron propuestos por Euclides de Alejandría en una de las obras más famosas y difundidas del mundo, los *Elementos* (de hecho parece ser la obra más difundida después de La Biblia).

Euclides fue sin duda una de las figuras más influyentes de la historia de la matemática. No se conoce mucho de su vida sino a través del estudio de documentos de la antigüedad que lo mencionan. Se cree que vivió en Alejandría alrededor del año 300 a.C. enseñando matemática en la escuela recién fundada por Ptolomeo I, el Museo. Se cree que Euclides era, ante todo, un gran docente. Los *Elementos*, subdivididos en trece libros, constituían un gran manual que contenía toda la matemática considerada elemental para lo que hoy sería la formación superior: la geometría sintética del plano y el espacio, el álgebra y la teoría de números (todo en términos geométricos, para Euclídes un número era un número entero, y lo representaba como un segmento AB).

El primer libro arranca con una lista de 23 definiciones, entre las cuales encontramos:

- Un punto es lo que no tiene partes.
- Una línea es una longitud sin anchura.
- Una superficie es aquello que tiene sólo ancho y largo
- Una línea recta es una línea que yace uniformemente respecto de sus puntos.
- Un ángulo es la inclinación de una respecto a la otra de dos rectas que yacen en un plano, las cuales se encuentran pero no están en línea recta.
- Cuando una línea recta está colocada sobre otra de forma que los ángulos adyacentes son iguales, cada uno de esos ángulos iguales es recto, y de la línea recta que se apoya sobre la otra se dice que es perpendicular a ella.
- Las líneas rectas paralelas son líneas rectas que, estando en el mismo plano y prolongándose indefinidamente en ambas direcciones, no se encuentran entre sí en ninguna de las direcciones.

Hoy sabemos que las nociones de punto o recta son nociones primitivas que no se definen, de hecho estas definiciones dadas por Euclides no tienen mucho sentido. Si miramos por ejemplo la definición de ángulo, observamos que también es impresisa porque el término "inclinación" no fue previamente definido y es tan desconocido como el término ángulo.

Posteriormente Euclides enuncia cinco nociones comunes o axiomas y cinco postulados. Hoy en día no hacemos diferencia entre postulados y axiomas, sin embargo en la antigüedad las nociones comunes debían ser convincentes por si mismas, verdades comunes a todas las ciencias, mientras que los postulados se referian a algo que debía pedirse que se cumpliera. De todas maneras no sabemos si Euclides pretendía hacer esta distinción. En todo caso, en los Elementos enunció las siguientes:

Nociones comunes:

- cosas iguales a una misma cosa son iguales entre ellas;
- si cosas iguales se agregan a cosas iguales, los totales son iguales;
- si cosas iguales se sustraen de cosas iguales, los restos son iguales;
- cosas que coinciden la una a la otra son iguales entre sí;
- el todo es mayor que la parte.

Postulados:

1. puede trazarse una línea recta uniendo dos puntos cualesquiera;
2. puede prolongarse indefinidamente una línea recta;
3. se puede describir una circunferencia con un centro cualquiera y un radio cualquiera;
4. todos los ángulos rectos son iguales;
5. si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Los postulados son incompletos, el mismo Euclides utiliza en sus demostraciones postulados que no enuncia. Por ejemplo, los primeros postulados no garantizan que la recta que pasa por dos puntos sea única e infinita, hecho sin embargo asumido en las demostraciones. Tampoco garantiza que una recta que interseca el interior de un círculo, interseque a la circunferencia en dos puntos, hecho que se subsana añadiendo el denominado postulado de completitud (ver [6, pg. 32]). Uno de los primeros en tratar sistemáticamene las omisiones de Euclides fue el matemático alemán Moritz Pasch quien en 1882 publicó un libro sobre geometría Euclidea dando un tratamiento más riguroso y prestando atención a asunciones tácitas presentes en los Elementos. De él es el famoso axioma de Pasch, equivalente al postulado de separación del plano (cf. [6, Pg. 74]), que establece que si una recta corta uno de los lados de un triángulo y no pasa por un vértice, entonces debe cortar a alguno de los otros dos, axioma que no puede deducirse de los cinco postulados de Euclides como teorema.

Pese a estas pequeñas críticas, los Elementos de Euclides constituyeron por dos mil años la obra más rigurosa y racional sobre tópicos elementales de matemática, se realizaron infinidad de copias y traducciones, fue utilizada como texto de estudio y fue considerada como fundamento incuestionable de la geometría cotidiana e incluso del sentido común.

Por más de que Euclides intentó que sus postulados y nociones comunes fuesen lo más intuitivos posible, el quinto postulado suscitó polémicas desde el inicio. Por más de dos mil años matemáticos importantes intentaron dar una demostración del postulado, es decir, deducirlo como un teorema partiendo de los otros cuatro. Llegaron de esta manera a proposiciones equivalentes al quinto postulado. El más famoso es el denominado axioma de las paralelas de Playfaire (1795) que establece que *por un punto exterior a una recta puede trazarse una y sólo una paralela a dicha recta*. Pero el quinto postulado es además equivalente al teorema de Pitágoras, al hecho que la suma de los ángulos internos de un triángulo sea 180 grados, o al hecho de que existan triángulos semejantes a uno dado (Legendre, 1794). En esta búsqueda debe destacarse el trabajo de Giovanni Saccheri. Este matemático italiano, publicó en 1733 una obra en la que trataba de demostrar el quinto postulado. Para ello consideró un cuadrilátero isósceles bi-rectangulo (o sea, los dos ángulos adyacentes a la base son rectos y los lados adyacentes a la base son congruentes), conocido actualmente como *cuadrilátero de Saccheri*. Sin usar el postulado de las paralelas demostró que los otros dos ángulos debían ser congruentes, y por lo tanto había tres hipótesis: que ambos fuesen rectos, que ambos fuesen agudos o que ambos fuesen obtusos. Saccheri dedujo muchos teoremas coherente partiendo de la hipótesis del ángulo agudo, pero estaba tan convencido que la geometría euclídea era la única válida que descartó tanto la hipótesis del ángulo agudo como la del ángulo obtuso. Hoy sabemos que el argumento que usó para descartar la hipótesis del ángulo agudo es falaz, y los teoremas que dedujo son perfectamente válidos en lo que hoy conocemos como geometría hiperbólica (para un tratamiento analítico completo sobre las geometrías que se derivan del trabajo de Saccheri ver [6]).

Fue recién en la primera mitad del siglo XIX cuando los trabajos casi simultáneos e independientes de Carl Friedrich Gauss, Nikolái Lobachevski y János Bolyai sacaron a la luz el primer modelo de geometrías no euclideanas (para más detalles sobre la historia de estos personajes tan importantes, consultar [2]). Se dieron cuenta que negando el quinto postulado de Euclides podían construirse modelos perfectamente lógicos de geometría, dando lugar al nacimiento de la geometría hiperbólica. El problema de las geometrías no euclideanas terminó de resolverse e integrarse en un marco más general, el de la geometría diferencial, con los aportes de Riemann en su disertación *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría* de 1854. Riemann además mostró que la geometría de una esfera en el espacio era no euclídea: por un punto exterior a una recta no pasa ninguna paralela a ella.

El aporte de Riemann (sucesor de Gauss) es el punto de partida para la geometría diferencial moderna (lo que hoy conocemos como geometría Riemanniana). Es en este espíritu que presentaremos los distintos tipos de geometría Riemanniana en este minicurso. Por cuestiones de tiempo, y con el objetivo que los contenidos sean lo más básico posible, hemos hecho un desarrollo acotado, aunque hemos tratado que sea lo más riguroso posible en el caso de la geometría hiperbólica. Para un desarrollo más detallado (sobre todo de la geometría esférica) se necesitan herramientas de la geometría diferencial de curvas y superficies o nociones básicas de geometría Riemanniana. Para los lectores que tengan nociones de estos temas, se recomiendan los libros de M. Do Carmo [4] y [3]

2. La geometría esférica

Para poder introducir los distintos modelos de geometrías no euclideanas, debemos antes que nada reconsiderar el concepto de recta. Cuando trabajamos en la geometría Euclídea, notamos que un segmento de recta tiene una propiedad muy importante: es aquella entre todas las curvas que unen dos puntos que tiene longitud mínima, es decir, realiza la distancia entre los puntos.

Si ahora pensamos que debemos deplazarnos en nuestro planeta, para distancias pequeñas la recta nos sirve perfectamente para calcular la distancia entre dos puntos (la esfera con que modelamos la Tierra tiene un radio tan grande, que localmente es perfectamente aproximable por un plano). Pero supongamos que debemos calcular la distancia "real" entre los polos, es decir, la distancia que recorreríamos yendo por la superficie de la Tierra. En ese caso, si consideramos un segemento que una los polos nos daría que la distancia, vistos como puntos del espacio, es un diámetro. Pero la distancia mínima que deberíamos recorrer si no nos despegamos de la superficie terrestre es la longitud de una semicircunferencia de radio el rádio de la Tierra.

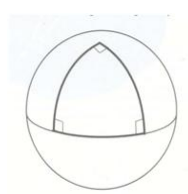
De hecho, si pensamos en la geometría de una esfera, las rectas no tienen cabida, no hay ninguna recta contenida en ella y es bastante lógico pensar que el lugar de las rectas lo ocupen ahora los denomidados *círculos máximos*. Un círculo máximo es aquella circunferencia que se obtiene de cortar a la esfera por un plano que pase por el centro de la esfera. Así, dados dos puntos cualesquiera hay un circulo máximo que pasa por ellos (único, salvo que los dos puntos sean diametralmente opuestos, en cuyo caso son infinitos), y es la curva de menor longitud que los une.

Si dos círculos máximos se cortan en un punto, sus vectores tangentes en ese punto forman un ángulo. Consideraremos como medida del ángulo entre dos circulos máximos en el punto en que se intersecan, la medida usual del ángulo que forman sus vectores tangentes en el plano que los contiene, en ese punto.

Finalmente, consideraremos como "plano" a la esfera, pero con la denominada *identificación antipodal*, es decir, consideramos que dos puntos diametralmente opuestos son el mismo.

De esta manera obtenemos un modelo donde se satisfacem los cuatro primeros postulados de Euclides, menos el último: por un punto exterior a una recta, no pasa **ninguna** paralela a la recta dada, ya que dos círculos máximos cualesquiera se cortan en un punto.

Observemos además que en la geometría esférica los ángulos interiores de un triángulo suman más de 180 grados. En efecto, un triángulo esférico se define de manera análoga a un triángulo Euclídeo: queda determinado por la intersección de tres rectas. Si consideramos el triángulo esférico que se obtiene de intersecar el eucador con dos círculos máximos perpendiculares que pasen por los polos, obtenemos un triángulo con tres ángulos rectos.



La demostración general de este hecho involucra nociones de goemetría diferencial de curvas y superficies, y se deduce del Teorema de Gauss-Bonet (cf. [4]).

Éste que acabamos de mostrar constituye un modelo de la denominada geometría esférica. Para construirlo partimos de considerar una esfera en el espacio Euclídeo tridimensional y reformular la noción de recta como las curvas sobre la esfera que minimizan la distancia. De esta manera, la distancia de dos puntos esféricos, ya no es la distancia euclídea usual.

La construcción de un modelo para la geometría hiperbólica es más complicado, ya que requiere cambiar la manera de medir en el plano. Pero es un ejemplo interesante de geometría intrínseca, el plano de Poincaré que definiremos en la sección siguiente no "vive" ni toma la forma de medir de un espacio ambiente mayor. Esta es una primera aproximación a la noción más general de variedad Riemanniana.

3. Un modelo para la geometría hiperbólica: el semiplano de Poincaré

Gran parte de esta sección está basada en [1]. Para poder dar un modelo analítico completo de la geometría hiperbólica, comenzaremos definiendo lo que entendemos por plano para esta geometría. Se denomina *semiplano superior de Poincaré* o *plano hiperbólico* y lo notaremos por $\mathcal{H}$, siplemente al semiplano superior de $\mathbb{R}^2$, que identificaremos por conveniencia con el semiplano superior de $\mathbb{C}$. Esto es,

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}.$$

Para poder definir lo que reemplazará a las rectas, necesitamos establecer qué entendemos por una curva en $\mathcal{H}$. Dado un intervalo abierto o cerrado J una curva en $\mathcal{H}$ es una función continuamente diferenciable $\sigma : J \to \mathcal{H}$ (si el intervalo es cerrado, le pedimos continuidad en el cerrado y continuamente diferenciable en su interior). Si $\sigma(t) = x(t) + iy(t)$, sigma es continuamente diferenciable si lo son $x(t)$ e $y(t)$.

El paso siguiente es definir una distancia.

Supongamos que tenemos un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ definido en $\mathbb{R}^2$. Recordemos que para ser un producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ debe verificar:

1. ser $\mathbb{R}$-bilineal, o sea $\langle \alpha v + \beta w, u\rangle = \alpha \langle v, u\rangle + \beta \langle w, u\rangle$, y análogamente del lado derecho;
2. ser simétrico, o sea $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$;
3. ser definido positivo, o sea $\langle v, v\rangle \geq 0$ y $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = 0$.

La norma de un vector v respecto del producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ es $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

El producto escalar usual en $\mathbb{R}^2$ es el definido por $\langle v, w\rangle^E = v_1w_1 + v_2w_2$, si $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$, y la norma que se deriva de él es $\|v\|^E = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. $\mathbb{R}^2$ con este producto escalar se denomina *espacio euclídeo*, y de él se deriva la geometría euclídea, desde el punto de vista de la geometría Riemanniana.

El punto fundamental de la geometría Riemanniana es definir un producto interno que varía punto a punto. Para nosotros los vectores serán puntuales, es decir, dados dos vectores v y w calcularemos su producto interno suponiendo que los dos vectores tienen origen en un mismo punto dado del plano hiperbólico. Si fijamos un punto $(x, y) \in \mathcal{H}$, definimos el producto interno $\langle\ ,\ \rangle_{(x,y)}$ en $\mathbb{R}^2$ por

$$\langle v, w\rangle_{(x,y)} = \frac{\langle v, w\rangle^E}{y^2}$$

La norma asociada a este producto interno será $\|v\|_{(x,y)} = \frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{|y|}$

Ahora dada la curva $\sigma : J \to \mathcal{H}$ con $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t)) = \sigma_1(t) + i\sigma_2(t)$ definimos la longitud de σ como

$$l(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)}\, dt = \int_a^b \frac{\sqrt{\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t)}}{\sigma_2(t)} dt.$$

Consideremos segmentos horizontales con la misma longitud euclídea.

Sea $\sigma_c(t) = t + ic$, $0 \leq t \leq 1$, $c \in \mathbb{R}^+$. Entonces σ_c es un segmento horizontal uniendo los puntos $(0, c)$ y $(1, c)$, de longitud euclídea c. Si calculamos su longitud con esta nueva forma de medir, resulta

$$l(\sigma_c) = \int_0^1 \frac{1}{c} dt = \frac{1}{c}$$

esto es, la longitud de σ_c aumenta a medida que el segmento está más cerca del eje x, haciéndose tan grande como queramos, basta acercarnos lo suficiente al eje x.

Consideremos ahora los segmentos $\sigma(t) = 1 + it$ con $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ y $\delta(t) = 1 + it$ con $1 \leq t \leq 2$. Entonces

$$l(\sigma) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t} dt = \ln(2); \quad l(\delta) = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln(2)$$

Luego σ y δ tienen la misma longitud “hiperbólica” pero tienen distina longitud euclídea.

Cuando trabajamos el geometría euclídea, definimos la distancia entre dos puntos como la longitud del segmento que los une. Estamos asumiendo que un segmento de recta es la curva de menor longitud entre todas las curvas contenidas en el plano que une los dos puntos. Es natural entonces definir la distancia entre dos puntos z_1 y z_2 de $\mathcal{H}$ como el siguiente número:

$$d(z_1, z_2) = \text{ínf}\{l(\sigma) : \sigma : [a, b] \to \mathcal{H} \text{ es una curva con } \sigma(a) = z_1,\ \sigma(b) = z_2\}$$

Este ínfimo existe pues el conjunto está acotado inferiormente por 0. Sin embargo, a priori no podemos asumir que el ínfimo sea mínimo, es decir, que exista una curva σ tal que $d(z_1, z_2) = l(\sigma)$. Cuando esto ocurre, decimos que σ realiza la distancia entre z_1 y z_2.

Llamamos *geodésica* en $\mathcal{H}$ a una curva que realiza la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos. Las geodésicas ocuparan en $\mathcal{H}$ el rol que las rectas ocupan en el plano euclídeo.

La función d que hemos definido es efectivamente una distancia, que denominaremos *distancia hiperbólica*. Es decir, verifica:

1. $d(z_1, z_2) \geq 0$ y $d(z_1, z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$.
2. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$.
3. $d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \geq d(z_1, z_3)$.

Nuestro objetivo de ahora en más es determinar cuáles son las geodésicas del plano hiperbólico. Comenzaremos analizando un caso sencillo.

Lema 1. *Sea $\sigma : (0, \infty) \to \mathcal{H}$ la semirecta vertical dada por $\sigma(t) = x_0 + ti$. Entonces σ es una geodésica en $\mathcal{H}$.*

Demostración. Debemos ver que σ realiza la distancia entre cualesquiera dos de sus puntos. Para ello sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y sean $z_1 = \sigma(a)$, $z_2 = \sigma(b)$. Consideremos una curva $\delta : [c, d] \to \mathcal{H}$ cualquiera con $\delta(c) = z_1$, $\delta(d) = z_2$. Supongamos que $\delta(t) = x(t) + iy(t)$, entonces

$$l(\delta) = \int_c^d \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{y(t)} dt \geq \int_c^d \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln\left(\frac{y(b)}{y(a)}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Luego $d(z_1, z_2) \geq \ln\left(\frac{b}{a}\right)$. Es fácil ver que $l(\sigma_{[a,b]}) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$, con lo cual σ es una geodésica. □

Para poder encontrar todas las geodésicas, necesitaremos trabajar con las denominadas transformaciones de Möbius. Una *transformación de Möbius* es una función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde a, b, c, d son números complejos tales que $ad - bc \neq 0$.

Nos será útil agregar a $\mathbb{C}$ un punto ideal, al que llamaremos punto al infinito ∞, de manera que las transformaciones de Möbius $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sean biyectivas, definiendo $T(-\frac{d}{c}) = \infty$, $T(\infty) = \frac{a}{c}$ si $c \neq 0$ y $T(\infty) = \infty$ si $c = 0$.

Las transformaciones de Möbius más simples son:

- Inversión, $T(z) = z^{-1}$;
- Traslación, $T(z) = z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$;
- Rotación, $T(z) = e^{i\theta} z$
- Homotecia, $T(z) = kz$, con $k \in \mathbb{R}^+$.

Las transformaciones de Möbius cumplen las siguientes propiedades básicas. La prueba se deja como ejercicio (puede consultarse en [1])

Lema 2.
1. *La composición de transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius, y toda transformación de Möbius es composición de traslaciones, inversiones, rotaciones y homotecias.*
2. *Las transformaciones de Möbius transforman rectas y circunferencias en rectas o circunferencias.*

Definimos por G al conjunto de transformaciones de Möbius con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$. Denotaremos por $E = \{z = (t, 0) = t : t \in \mathbb{R}\}$ la recta real en $\mathbb{C}$. Entonces tenemos:

Lema 3. *Si $T \in G$, entonces $T(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ y $T(E \cup \{\infty\}) = E \cup \{\infty\}$.*

Demostración. $T(E \cup \{\infty\}) = E \cup \{\infty\}$ es inmediato del hecho que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y por como definimos $T(\infty)$.
Si ahora $z =\in \mathcal{H}$, entonces

$$T(z) = \frac{az+b}{cd+d}\frac{c\overline{z}+d}{c\overline{z}+d} = \frac{ac|z|^2 + bd + adz + bc\overline{z}}{|cz+d|^2}$$

Luego $Im(T(z)) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2} > 0$, con lo cual $T(z) \in \mathcal{H}$. □

Veremos ahora que las transformaciones de G son isometrías de $\mathcal{H}$.

Lema 4. *Si $T \in G$ y $\sigma : J \to \mathcal{H}$ es una curva en $\mathcal{H}$, entonces $l(T \circ \sigma) = l(\sigma)$.*

Demostración. Dejamos como ejercicio probar que $\|(T \circ \sigma)'(t)\|^2 = \|\sigma'(t)\|^2$. Se deduce entonces inmediatamente que

$$l(T \circ \sigma) = \int_a^b \|(T \circ \sigma)'(t)\|\, dt = \int_a^b \|\sigma'(t)\|\, dt = l(\sigma).$$

□

Corolario 5. *Si $T \in G$, entonces:*

1. *para cada $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$, $d(T(z_1), T(z_2)) = d(z_1, z_2)$;*
2. *T transforma geodésicas en $\mathcal{H}$ en geodésicas en $\mathcal{H}$.*

Ya estamos prácticamente en condiciones de determinar todas las geodésicas en $\mathcal{H}$. Necesitamos definir qué entendemos por ángulo entre dos curvas. Si σ y δ son curvas que se cortan en z_0, es decir, existen t_1, t_2 tales que $\sigma(t_1) = \delta(t_2) = z_0$, llamaremos ángulo formado por estas curvas en z_0 al ángulo formado por los vectores tangentes $\sigma'(t_1)$ y $\delta'(t_2)$ en z_0. Así, si vemos a $\sigma'(t_1)$ y $\delta'(t_2)$ como números complejos y θ es el ángulo que forma, resulta

$$\theta = arg(\delta'(t_2)) - arg(\sigma'(t_1)) = arg\frac{\delta'(t_2)}{\sigma'(t_1)}.$$

Entonces tenemos:

Lema 6. *Las transformaciones de Möbius preservan ángulos entre curvas.*

La demostración se deja como ejercicio. Es importante observar que, a partir del Lema 2, basta probar que las inversiones, rotaciones, traslaciones y homotecias preservan ángulos entre curvas.
Enunciaremos a continuación un lema técnico, cuya prueba puede consultarse en [1]:

Lema 7. *Sea $I^+ = \{ti : t \in \mathbb{R}\}$. Si $z_0, z_1 \in \mathcal{H}$, existe una transformación $T \in G$ tal que $T(z_0), T(z_1) \in I^+$.*

Ahora sí estamos en condiciones de determinar todas las geodésicas de $\mathcal{H}$.

Teorema 8. *Las geodésicas en $\mathcal{H}$ son (los segmentos de) semirectas verticales y (los segmentos de) semicircunferencias con centro en E. Más aún, por dos puntos de $\mathcal{H}$ pasa una única geodésica.*

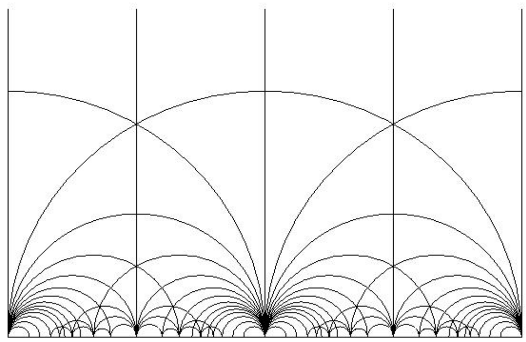
Demostración. Ya hemos probado que las semirectas verticales son geodésicas en $\mathcal{H}$. Además hemos visto que si σ es una curva en $\mathcal{H}$ y $T \in G$, entonces σ es una geodésica si y sólo si $T \circ \sigma$ es una geodésica. Además $T(E) = E$, T transforma rectas en rectas o circunferencias y T preserva ángulos entre curvas. Luego si consideramos cualquier recta vertical σ, entonces $T \circ \sigma$ debe ser una recta vertical o una circunferencia que corte a E perpendicularmente, es decir, con centro en E. Luego si σ es una semirrecta vertical en $\mathcal{H}$, $T(\sigma)$ es una semirrecta vertical en $\mathcal{H}$ o una semicircunferencia en $\mathcal{H}$ con centro en E.
Sea entonces C una circunferencia con centro en E. Supongamos que C corta a E en puntos x_0 y x_1, con $x_0 < x_1$. Pongamos $d = (x_1 - x_0)^{-1/2}$ y definamos

$$T(z) = \frac{dx_1 z + dx_0}{dz + d}.$$

Entonces $T \in G$ y $T(0) = x_0$, $T(\infty) = x_1$. Sea σ la recta $\sigma(t) = it$, $t \in \mathbb{R}$. Sabemos que $\sigma_{\mathbb{R}^+}$ es una geodésica en $\mathcal{H}$. Ahora, $T(\sigma)$ debe ser una recta o una circunferencia perpendicular a E por $T(0) = x_0$ y $T(\infty) = x_1$. Luego $T(\sigma)$ no puede ser una recta, y por lo tanto debe ser una circunferencia con centro E que pase por x_0 y x_1, o sea $T(\sigma) = C$. Como T preserva $\mathcal{H}$, $T(\sigma_{\mathbb{R}^+})$ es la semicircunferencia $C \cap \mathcal{H}$. Concluimos que las semicircunferencias con centro en E son geodésicas en $\mathcal{H}$.

Recíprocamente, debemos mostrar que toda geodésica es uno de estos tipos de curva. Sea $\delta : J \to \mathcal{H}$ una geodésica en $\mathcal{H}$. Sean $a < b \in J$ y definamos $z_0 = \delta(a)$, $z_1 = \delta(b)$. Por el Lema 7, existe una transformación $T \in G$ tal que $T(z_0), T(z_1)$ son puntos de la semirrecta $\sigma(t) = ti$, $t \in \mathbb{R}^+$. Luego $T \circ \delta_{[a,b]}$ es una geodésica uniendo puntos de σ. Como $T \circ \delta$ debe minimizar la distancia entre cualquiera de sus puntos, $T \circ \delta(t)$ debe coincidir con σ entre a y b (ejercicio!). Como $\delta_{[a,b]} = T^{-1} \circ T \circ \sigma_[c, d]$ (para c y d elejidos adecuadamente), por el razonamiento anterior deducimos que $\delta_{[a,b]}$ es un arco de circunferencia con centro en E o un segmento de recta vertical en $\mathcal{H}$. Como a y b son arbitrarios, δ debe ser un arco de circunferencia con centro en E o un segmento de recta vertical en $\mathcal{H}$. La unicidad de la geodésica por dos puntos es inmediata. $\square$

Si ahora consideramos como plano el plano hiperbólico, y como rectas las geodésicas en $\mathcal{H}$, es fácil verificar que se cumplen los cuatro primeros postulados de Euclides, salvo el último: por un punto exterior a una geodésica, pasan infinitas geodésicas que no la intersecan, y por lo tanto son paralelas a ella.



Referencias

[1] J.C. Boggino y R. Miatello, Geometría Hiperbólica I, Movimientos rígidos y rectas hiperbólicas, Revista de Educación Matemática 3. Nro. 1, 33-52.
[2] Carl B. Boyer, Historia de la Matemática, Alianza Editorial, 1999
[3] Manfredo P. Do Carmo, Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, Impa, 2007.
[4] Manfredo P. Do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall, 1976.
[5] Beppo Levi, Leyendo a Euclides, Libros del Zorzal, 2000
[6] Edwin E. Moise, Elementary Geometry from an Advanced Standpoint, 3. Edición, Adison Wesley, 1990