Teoría de conjuntos: Potencia[1]

La idea de conjunto es una de las ideas matemáticas más simples y primitivas. Sin embargo, su rol como el más fundamental de los conceptos matemáticos no fue hecho explícito hasta los 1880's. Sólo entonces Georg Cantor (1845-1918) efectuó el primer descubrimiento no trivial en la teoría de los conjuntos. Cantor notó que tenía sentido hablar sobre el número de elementos de conjuntos infinitos, o al menos, decir que dos conjuntos diferentes tenían el mismo número de elementos, la misma *potencia* o *cardinalidad*, si podemos establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos de los dos conjuntos. Si esto puede ser hecho, decimos que los dos conjuntos son equivalentes.

Supongamos que A y B son dos conjuntos finitos, $|A|$ y $|B|$ denotan la cantidad de elementos de los conjuntos. Notemos que $|A| \leq |B|$ si y sólo si existe una función inyectiva de A a B. Alternativamente $|A| \leq |B|$ si y sólo si existe una función sobreyectiva de B a A. Supongamos ahora que tenemos dos conjuntos, C y D, y una biyección entre ellos. Una biyección es una aplicación inyectiva de C a D (por lo tanto, $|C| \leq |D|$) y es sobreyectiva de C a D (por lo tanto, $|C| \geq |D|$). Entonces resulta $|C| = |D|$.

Guiándonos por este resultado haremos la siguiente definición, válida tanto para conjuntos finitos como infinitos.

Definición: Dos conjuntos tienen igual potencia si existe una biyección entre ellos.

Ejemplo: Decimos que un conjunto finito A tiene potencia n, y lo escribimos $|A| = n$, si existe una biyección desde A a $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Si la biyección es $g : A \to \{1, 2, ..., n\}$ podemos escribir $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ donde $g(a_k) = k$ para $1 \leq k \leq n$. Es decir, la biyección nos permite enumerar o listar los elementos de A.

Definición: Si para un conjunto A existe una biyección entre A y $\mathbb{N}$ decimos que A es **numerable**. Para un conjunto infinito numerable escribiremos $|A| = \aleph_0$ (alef cero). Otra vez, si la biyección es $h : A \to \mathbb{N}$ entonces podemos enumerar los elementos de A como $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ donde $h(a_k) = k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

En el siguiente ejemplo veremos que existe la misma 'cantidad' de números enteros que de números naturales. Este hecho ilustra una propiedad paradójica de los conjuntos infinitos: un conjunto infinito puede tener la misma potencia que uno de sus subconjuntos propios.

Ejemplo: El conjunto de los enteros, $\mathbb{Z}$, es numerable.

Una posible biyección es

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$

$$f(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{si } n \geq 1 \\ 2 - 2n & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

Esta biyección enumera $\mathbb{Z}$ como $\{1, 0, 2, -1, 3, -2, 4, -3, ...\}$.

Ejemplo: El producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable. Se pueden listar los pares ordenados de la siguiente manera:

[1]Notas preparadas por Luis O. Manuel

$$
\begin{array}{lllll}
(1,1)^{(1)} & (1,2)^{(2)} & (1,3)^{(6)} & (1,4)^{(7)} & ..^{(15)} \\
(2,1)^{(3)} & (2,2)^{(5)} & (2,3)^{(8)} & ..^{(14)} & \\
(3,1)^{(4)} & (3,2)^{(9)} & (3,3)^{(13)} & .. & \\
(4,1)^{(10)} & (4,2)^{(12)} & .. & & \\
..^{(11)} & .. & & &
\end{array}
$$

Los superíndices indican como corresponder los elementos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con los de $\mathbb{N}$.

Otra forma de demostrar lo anterior es la siguiente: todo número natural admite una única descomposición como producto de una potencia de dos por un número impar, entonces la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(i, j) = 2^{i-1}(2j - 1)$$

es biyectiva.

Ejemplo: Si A y B son dos conjuntos numerables el producto cartesiano $A \times B$ también es numerable.

Como $A = \{a_1, a_2, ...\}$ y $B = \{b_1, b_2, ...\}$, basta reemplazar en el arreglo del ejemplo anterior (i, j) por (a_i, b_j).

Teorema: *Si A es numerable y $B \subset A$ entonces B es numerable.*

Demostración: Si B es finito no hay nada que probar, asumamos entonces que B es infinito. Sea $f : \mathbb{N} \to A$ una biyección que permite escribir A como $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$. Buscaremos entre los elementos de A aquellos que pertenecen a B. Debido al ordenamiento de A obtenemos un ordenamiento en B y podemos reescribir los elementos de $B = \{b_1, b_2, b_3, ...\}$ donde b_1 es el primer elemento de A que está en B; es decir, $b_1 = a_{n_1}$ donde $n_1 = \text{mín}\{n : a_n \in B\}$, y en general, $b_{r+1} = a_{n_{r+1}}$ donde $n_{r+1} = \text{mín}\{n : a_n \in B - \{b_1, b_2, ..., b_r\}\}$. Notemos que los b_i son todos distintos y cada elemento de B aparece en la lista $b_1, b_2, ...$ Para ver esto último tomemos un elemento cualquiera b de B. Como $B \subset A$ tenemos que $b = a_m$ para algún m. La lista $n_1 < n_2 < ...$ es infinita y por lo tanto en algun punto debemos tener $n_t \leq m < n_{t+1}$. Si valiese $n_t < m < n_{t+1}$ tendríamos la existencia de $a_m = b \in B$ tal que

$$\text{mín}\{n : a_n \in B - \{b_1, b_2, ..., b_t\}\} > m > \text{mín}\{n : a_n \in B - \{b_1, b_2, ..., b_{t-1}\}\}.$$

La primera desigualdad nos dice que $b \notin B - \{b_1, b_2, ..., b_t\}$ mientras que la segunda nos dice que $b \in B - \{b_1, b_2, ..., b_{t-1}\}$, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, debemos tener $m = n_t$ de forma tal que b debe aparecer en nuestro listado como b_t.

Ya que cada elemento de B ocurre en la lista $b_1, b_2, ...$ tenemos que la aplicación $g : \mathbb{N} \to B, n \to b_n$ es sobreyectiva. Podemos ver que es inyectiva si asumimos $g(s) = g(t)$ tal que $b_s = b_t$, es decir, $a_{n_s} = a_{n_t}$. Pero entonces $n_s = n_t$ porque los elementos etiquetados de A son distintos. Igualmente los n_j son distintos por lo que vale $s = t$. Resulta entonces que g es una biyección y B es numerable. ♣

Ejemplo: el conjunto de los racionales, $\mathbb{Q}$, es numerable.
Escribamos cada elemento como r/s, con $s \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$, s y r coprimos (es decir, la fracción está reducida a sus más pequeños términos). Luego podemos corresponder $\mathbb{Q}$ con un subconjunto del arreglo del producto cartesiano $A \times B$, mediante la identificación $r/s \to (r, s)$ La imagen de esta aplicación es un subconjunto de un arreglo del que sabemos que es numerable y por lo tanto el subconjunto es numerable, y la aplicación es una biyección.

Ejemplo: Una unión numerable de conjuntos numerables es numerable.
Que la unión sea numerable implica que los conjuntos pueden ser listados como $S_1, S_2, S_3, ...$ Cada S_i es numerable y por lo tanto resulta $S_i = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ...\}$. Entonces $\cup_{i=1}^{\infty} S_i$ está contenida en el siguiente arreglo (se dice que está contenida porque puede ocurrir que en el arreglo hayan elementos repetidos los cuales se cuentan una sola vez en el unión).

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(6)} & a_{14}^{(7)} & ..^{(15)} \\
a_{21}^{(3)} & a_{22}^{(5)} & a_{23}^{(8)} & ..^{(14)} & \\
a_{31}^{(4)} & a_{32}^{(9)} & a_{33}^{(13)} & .. & \\
a_{41}^{(10)} & a_{42}^{(12)} & .. & & \\
..^{(11)} & .. & & &
\end{array}
$$

Como en los ejemplos anteriores este arreglo es numerable y entonces $\cup_{i=1}^{\infty} S_i$ es numerable.

La teoría de la potencia no sería interesante si todos los conjuntos infinitos tuviesen igual cardinalidad. Mediante su famosa prueba de la diagonal, Cantor demostró que el conjunto de los números naturales no es equivalente al conjunto de los puntos en un segmento de línea.

Ejemplo: El conjunto de los números reales no es numerable.

Prueba: Basta demostrar que $(0, 1)$ no es numerable. La función $f(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$ establece una biyección entre $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$ y, por lo tanto, ambos conjuntos son equivalentes.

Asumamos que $[0, 1]$ es numerable y hagamos una lista de los elementos escribiéndolos en forma decimal. La lista empezará así

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}... \\
a_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}... \\
a_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}... \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Consideremos ahora el número $b = 0.b_1b_2b_3b_4... \in [0, 1)$ definido mediante

$$
b_j = \begin{cases} a_{jj} + 1 & \text{si } 0 \leq a_{jj} \leq 8 \\ 1 & \text{si } a_{jj} = 9. \end{cases}
$$

Obviamente, para cada $j \geq 1$ el número difiere del elemento j en el listado en el decimal ubicado en el lugar j. Por lo tanto, b no puede pertenecer al listado. Esto contradice la afirmación de que la lista contiene todos los números en el intervalo $[0, 1)$. Por lo tanto, tal afirmación es falsa y $\mathbb{R}$ no es numerable.

Definición: Si un conjunto, A, tiene la misma potencia que $\mathbb{R}$ escribimos $|A| = c$ y decimos que A tiene la potencia del continuo.

Nota: Si A es un conjunto finito, el número de sus subconjuntos está dado por $2^{|A|}$. Usaremos esta observación para asignarle un símbolo a la potencia de una colección de subconjuntos de un conjunto infinito.

Definición: Si A es un conjunto (posiblemente infinito), la colección de todos los subconjuntos de A será denotada 2^A y su potencia mediante $2^{|A|}$.

Ejemplo: El conjunto $2^{\mathbb{N}}$ es no numerable.

Prueba: La prueba es muy similar a la utilizada para demostrar que $\mathbb{R}$ no es numerable. Supongamos que $2^{\mathbb{N}}$ es numerable y enumeremos sus elementos como $\{v_1, v_2, ...\}$. Definamos un nuevo conjunto v diciendo que $k \in v$ sí y sólo si $k \notin v_k$. Luego, para todo $k \geq 1$, uno y solo uno del par v y v_k contiene a k, y por lo tanto v difiere de v_k. Es decir, v no aparece en el listado y contradice nuestra suposición de que $2^{\mathbb{N}}$ es numerable.

Definición: Decimos que un conjunto A tiene una potencia (o cardinalidad) mayor a la de un conjunto B si A no puede ponerse en correspondencia biunívoca con B, pero un subconjunto propio de A sí puede ser puesto en correspondencia biunívoca con B.

Entonces la potencia de $2^{\mathbb{N}}$ es mayor que la de $\mathbb{N}$. La pregunta es si existe un conjunto A cuya potencia sea mayor a la de $\mathbb{N}$ pero menor a la de $2^{\mathbb{N}}$. Cantor estableció en su hipótesis del continuo que tal conjunto no existe. En particular, esto significa que todo subconjunto infinito de $2^{\mathbb{N}}$ está en una correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$ o con $2^{\mathbb{N}}$. Alternativamente, todo conjunto no numerable, A, satisface $|A| \geq c$. Extrañamente, no se espera que alguna vez sepamos si la hipótesis del continuo es verdadera o falsa.

Ejemplo: No es muy difícil demostrar que $2^{\aleph_0} = c$. Sugerencia: para cada $x \in [0, 1]$, escrito en base 2 como una expansión $x = 0.a_1a_2a_3a_4....$, defina un subconjunto V de $\mathbb{N}$ mediante $k \in V$ sí y sólo si $a_k = 1$.

Lecturas adicionales

- Primer capítulo de *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, A. N. Kolmogórov y S. V. Fomín.
- *Medida e integral de Lebesgue*, N. Fava y F. Zo, páginas 11 y siguientes.
- Una breve historia de la teoría de conjuntos puede encontrarse en la página web http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Beginnings_of_set_theory.html