Trabajo Práctico Nº 1: Funciones reales. Continuidad A

1. Sea $f : D \to \mathbb{R}$, se define las funciones **parte positiva de** f, $f^+ : D \to \mathbb{R}$ y **parte negativa de** f, $f^- : D \to \mathbb{R}$, por

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) < 0. \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

Demostrar:

-a- $**$ $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$. -b- $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$. -c- $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

2. Sean $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : D \to \mathbb{R}$, se define **máximo** y **mínimo entre** f y g como

$$\max(f,g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in D, \qquad \min(f,g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in D.$$

Mostrar:

-a- $f^+ = \max(f, 0)$.
-b- $f^- = \max(-f, 0)$.
-c- $\max(f,g) + \min(f,g) = f + g$.
-d- $**$ $\max(f,g) - \min(f,g) = |f - g|$.
-e- $**$ $\max(f,g) = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$.
-f- $\min(f,g) = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$.

3. $**$ Mostrar que que si f, g son continuas en D entonces las funciones $|f|$, f^+, f^-, $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ son continuas en D.

4. Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$ y $x_0 \notin F$, probar que existe una función f continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ y $f(x) = 1$ $\forall x \in F$.

5. Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$ y $F \neq \mathbb{R}$, sea $f : F \to \mathbb{R}$ continua. Mostrar que existe una función continua g definida en $\mathbb{R}$ que es extensión de f. Además, si f tiene máximo, g puede ser construida de modo que alcance el mismo máximo que f.

6. Sea f definida en $[0,1]$ por

$$f^+(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ (p,q) = 1, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Mostrar que f es continua en todo punto irracional y discontinua en todo punto racional, ¿ de qué tipo son las discontinuidades?

7. Si f es monótona en $[a,b]$, mostrar que las únicas posibles discontinuidades de f son saltos finitos y que el número de las mismas es finito o numerable.

8. $**$ Hallar $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\forall \eta \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in [0,1] : f(x) = \eta\}$ es vacío o bien consta de dos puntos. Mostrar que esta f no puede ser continua.

9. Sea f uniformemente continua en su dominio D, mostrar que f puede ser extendida a $\bar{D}$ por una función g continua.

10. Demostrar que f si es uniformemente continua sobre S acotado entonces f es acotada sobre S.

11. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $p \in D$, se dice que f es **semicontinua superiormente (inferiormente) en** p sii $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $x \in D \cap E_\delta(p) \Rightarrow f(x) < f(p) + \varepsilon$ (o $f(x) > f(p) - \varepsilon$). Se indica **scs** en p (o **sci** en p).

Mostrar que:

-a- $**$ si f, g **scs** en p (**sci** en p) $\Rightarrow$ $(f+g)$ **scs** en p (**sci** en p).
-b- si f **scs** en p (**sci** en p) $\Rightarrow$ $-f$ **sci** en p (**scs**).
-c- si f, g **scs** en p $\not\Rightarrow$ (fg) **scs** en p.

12. $**$ Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **sci** (**scs**) en cada punto, mostrar que $\{x : f(x) > \eta\}$ es abierto para todo $\eta \in \mathbb{R}$ ($\{x : f(x) < \eta\}$ abierto).

Trabajo Práctico Nº 1: Funciones reales. Continuidad B

1. Sea $f : D \to \mathbb{R}$, se define las funciones **parte positiva de** f, $f^+ : D \to \mathbb{R}$ y **parte negativa de** f, $f^- : D \to \mathbb{R}$, por

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) < 0. \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

Demostrar:

-a- $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$.

-b- ** $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$.

-c- $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

2. Sean $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : D \to \mathbb{R}$, se define **máximo** y **mínimo entre** f y g como

$$\max(f, g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in D, \qquad \min(f, g)(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in D.$$

Mostrar:

-a- ** $f^+ = \max(f, 0)$.

-b- $f^- = \max(-f, 0)$.

-c- $\max(f, g) + \min(f, g) = f + g$.

-d- $\max(f, g) - \min(f, g) = |f - g|$.

-e- $\max(f, g) = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$.

-f- ** $\min(f, g) = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$.

3. Mostrar que que si f, g son continuas en D entonces las funciones $|f|$, f^+, f^-, $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ son continuas en D.

4. ** Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$ y $x_0 \notin F$, probar que existe una función f continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ y $f(x) = 1$ $\forall x \in F$.

5. Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$ y $F \neq \mathbb{R}$, sea $f : F \to \mathbb{R}$ continua. Mostrar que existe una función continua g definida en $\mathbb{R}$ que es extensión de f. Además, si f tiene máximo, g puede ser construida de modo que alcance el mismo máximo que f.

6. ** Sea f definida en $[0, 1]$ por

$$f^+(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ (p, q) = 1, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Mostrar que f es continua en todo punto irracional y discontinua en todo punto racional, ¿ de qué tipo son las discontinuidades?

7. Si f es monótona en $[a, b]$, mostrar que las únicas posibles discontinuidades de f son saltos finitos y que el número de las mismas es finito o numerable.

8. Hallar $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $\forall \eta \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in [0, 1] : f(x) = \eta\}$ es vacío o bien consta de dos puntos. Mostrar que esta f no puede ser continua.

9. ** Sea f uniformemente continua en su dominio D, mostrar que f puede ser extendida a $\bar{D}$ por una función g continua.

10. Demostrar que si f es uniformemente continua sobre S acotado entonces f es acotada sobre S.

11. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $p \in D$, se dice que f es **semicontinua superiormente (inferiormente) en** p sii $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $x \in D \cap E_\delta(p) \Rightarrow f(x) < f(p) + \varepsilon$ (o $f(x) > f(p) - \varepsilon$). Se indica **scs** en p (o **sci** en p).

Mostrar que:

-a- si f, g **scs** en p (**sci** en p) $\Rightarrow (f + g)$ **scs** en p (**sci** en p).

-b- ** si f **scs** en p (**sci** en p) $\Rightarrow -f$ **sci** en p (**scs**).

-c- si f, g **scs** en p $\not\Rightarrow$ (fg) **scs** en p.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **sci** (**scs**) en cada punto, mostrar que $\{x : f(x) > \eta\}$ es abierto para todo $\eta \in \mathbb{R}$ ($\{x : f(x) < \eta\}$ abierto).

Trabajo Práctico Nº 1: Funciones reales. Continuidad C

1. Sea $f : D \to \mathbb{R}$, se define las funciones **parte positiva de** f, $f^+ : D \to \mathbb{R}$ y **parte negativa de** f, $f^- : D \to \mathbb{R}$, por

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{si } f(x) < 0. \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

Demostrar:

-a- $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$.

-b- $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$.

-c- $**$ $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

2. Sean $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : D \to \mathbb{R}$, se define **máximo** y **mínimo entre** f y g como

$$\text{máx}(f,g)(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in D, \qquad \text{mín}(f,g)(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in D.$$

Mostrar:

-a- $f^+ = \text{máx}(f, 0)$.

-b- $**$ $f^- = \text{máx}(-f, 0)$.

-c- $**$ $\text{máx}(f,g) + \text{mín}(f,g) = f + g$.

-d- $\text{máx}(f,g) - \text{mín}(f,g) = |f - g|$.

-e- $\text{máx}(f,g) = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$.

-f- $\text{mín}(f,g) = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$.

3. Mostrar que que si f, g son continuas en D entonces las funciones $|f|$, f^+, f^-, $\text{máx}(f,g)$ y $\text{mín}(f,g)$ son continuas en D.

4. Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$ y $x_0 \notin F$, probar que existe una función f continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$ y $f(x) = 1$ $\forall x \in F$.

5. $**$ Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$ y $F \neq \mathbb{R}$, sea $f : F \to \mathbb{R}$ continua. Mostrar que existe una función continua g definida en $\mathbb{R}$ que es extensión de f. Además, si f tiene máximo, g puede ser construida de modo que alcance el mismo máximo que f.

6. Sea f definida en $[0,1]$ por

$$f^+(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \ (p,q) = 1, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Mostrar que f es continua en todo punto irracional y discontinua en todo punto racional, ¿ de qué tipo son las discontinuidades?

7. $**$ Si f es monótona en $[a,b]$, mostrar que las únicas posibles discontinuidades de f son saltos finitos y que el número de las mismas es finito o numerable.

8. Hallar $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\forall \eta \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in [0,1] : f(x) = \eta\}$ es vacío o bien consta de dos puntos. Mostrar que esta f no puede ser continua.

9. Sea f uniformemente continua en su dominio D, mostrar que f puede ser extendida a $\bar{D}$ por una función g continua.

10. $**$ Demostrar que si f es uniformemente continua sobre S acotado entonces f es acotada sobre S.

11. Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $p \in D$, se dice que f es **semicontinua superiormente (inferiormente) en** p sii $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $x \in D \cap E_\delta(p) \Rightarrow f(x) < f(p) + \varepsilon$ (o $f(x) > f(p) - \varepsilon$). Se indica **scs** en p (o **sci** en p).

Mostrar que:

-a- si f, g **scs** en p (**sci** en p) $\Rightarrow (f + g)$ **scs** en p (**sci** en p).

-b- si f **scs** en p (**sci** en p) $\Rightarrow -f$ **sci** en p (**scs**).

-c- $**$ si f, g **scs** en p $\not\Rightarrow$ (fg) **scs** en p.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **sci** (**scs**) en cada punto, mostrar que $\{x : f(x) > \eta\}$ es abierto para todo $\eta \in \mathbb{R}$ ($\{x : f(x) < \eta\}$ abierto).