ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
FUNCIONES REALES
ELINA M. MANCINELLI - MARÍA EVANGELINA ALVAREZ.
2018

Práctica Nº 2: Variación acotada - Absoluta continuidad - Espacios métricos

①. Analizar si las siguientes funciones son de variación acotada. Comparar los resultados con la acotación de la función derivada.

-a- $f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{\pi}{2x}\right), & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

-b- $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

-c- $f(x) = x^{1/3}$, $x \in [0,1]$.

-d- $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

-e- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

②. Mostrar que si f, g son funciones de variación acotada en $[a,b]$, entonces su suma, diferencia y producto también lo es y se tiene

$$V_{f\pm g} \leqq V_f + V_g, \qquad V_{f\cdot g} \leqq AV_f + BV_g,$$

donde A y B son constantes a identificar.

③. Mostrar que si f es una función de variación acotada en $[a,b]$ tal que existe una constante m que verifica $0 < m < |f(x)|$, $x \in [a,b]$, entonces $g = 1/f$ también es de variación acotada en $[a,b]$ y resulta $V_g \leqq V_f/m^2$.

④. Mostrar que si f es una función de variación acotada en $[a,b]$ y $c \in (a,b)$, entonces f es de variación acotada en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y se tiene $V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b)$.

⑤. Una función f definida en $[a,b]$ se dice que satisface una condición de Lipschitz de orden $\alpha > 0$ si existe una constante $M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leqq M\,|x-y|^{\alpha}, \quad x, y \in [a,b].$$

Mostrar:

a- si f satisface una condición de Lipschitz de orden $\alpha > 1$ entonces f es constante en $[a,b]$, mientras que si $\alpha = 1$ entonces f es de variación acotada en $[a,b]$.

b- un ejemplo de una función f que satisface una condición de Lipschitz de orden $\alpha < 1$ en $[a,b]$ pero que no sea de variación acotada.

c- un ejemplo de una función f que sea de variación acotada en $[a,b]$ pero que no satisface una condición de Lipschitz en dicho intervalo.

⑥. Mostrar que un polinomio p es de variación acotada en cada intervalo compacto. Describir un método para encontrar la variación total de p en $[a,b]$ si se conocen los ceros de la función p'.

⑦. a- Mostrar que el conjunto V de las funciones de variación acotada definidas sobre el $[a,b]$, es un espacio vectorial.

b- Si S es un espacio vectorial que contiene a todas las funciones monótonas definidas en el $[a,b]$, mostrar que $V \subset S$. Es decir que V es el menor subespacio vectorial que contiene a las funciones monótonas definidas en $[a,b]$.

⑧. Sea f una función real definida en $\mathbb{R}$, se dice que f es de variación acotada en $(-\infty,+\infty)$ si f es de variación acotada en cada intervalo acotado y si existe una constante positiva M tal que $V_f[a,b] < M$ para todo intervalo compacto $[a,b]$. La variación total de f en $(-\infty,+\infty)$ se define como $V_f(-\infty,+\infty) = \sup\{V_f[a,b] : [a,b] \subset \mathbb{R}\}$.
Enunciar y demostrar para este concepto resultados análogos a los vistos para $V_f[a,b]$.

⑨. Mostrar que la función $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0,1)$ es uniformemente continua pero no de variación acotada.

⑩. Sean f, g son absolutamente continuas en $[a,b]$ mostrar que cada una de las siguientes funciones también lo son: $|f|$, cf, $f+g$, fg y si existe una constante m que verifica $0 < m < |g(x)|, \forall x \in [a,b]$ también lo es f/g.

⑪. Mostrar que si f es absolutamente continua en $[a,b]$ entonces satisface una condición de Lipschitz de orden 1.

⑫. Sea g continua en $[a,b]$ y sea $H = \{x \in [a,b] : \exists \xi \in [a,b], \xi > x, g(\xi) > g(x)\}$. Mostrar que H es abierto y por lo tanto $H = \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)$ disjuntos dos a dos, con $g(\alpha_k) \leq g(\beta_k)$.

⑬. Obteniendo nuevas métricas:

(a). Sea $\varphi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ una función creciente tal que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ si $t > 0$ y es subaditiva, es decir,

$$t, s \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \varphi(t+s) \leqq \varphi(t) + \varphi(s).$$

Si d es una métrica sobre el conjunto E, mostrar que la aplicación

$$E \times E \ni (x,y) \to (\varphi \circ d)(x,y) = \varphi(d(x,y))$$

es una métrica sobre E.

(b). Mostrar que las siguientes funciones satisfacen las condiciones del ítem anterior:

$$\varphi_1(t) = t^r,\ 0 < r \leqq 1; \quad \varphi_2(t) = \ln(1+t);$$
$$\varphi_3(t) = \frac{t}{1+t}; \qquad \varphi_4(t) = \text{mín}\{1, t\}.$$

⑭. Distintas métricas sobre $\mathbb{R}$:

*a- Siendo $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente, mostrar que la función

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t,s) \to d(s,t) = |\phi(s) - \phi(t)|$$

es una métrica en $\mathbb{R}$.

*b- Considerando sobre $\mathbb{R}$ la métrica d del ítem anterior a partir de la función $\phi(t) = \dfrac{t}{1+|t|}$, explicitar las siguientes bolas:

$$(i).\ B(0,r),\ 0 < r \leqq 1. \qquad (ii).\ B(1,r),\ 0 < r < \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2} < r < \frac{3}{2}.$$

⑮. (a). Sea $l^1(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : x_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N} \wedge \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \right\}$. Mostrar que la función

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|, \quad x, y \in l^1,$$

es una métrica en l^1.

(b). Sea $l^2(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : x_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$. Mostrar que la función

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2}, \quad x, y \in l^2,$$

es una métrica en l^2.

(c). Sea $l^\infty(\mathbb{R}) = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) : x_k \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N} \wedge \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}$. Mostrar que la función

$$d(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k - y_k|, \quad x, y \in l^\infty,$$

es una métrica en l^∞.

(16). Considerando en $\mathcal{C}([a,b])$ la métrica del supremo mostrar que el conjunto A es abierto y el conjunto B es cerrado, siendo

$$A = \{f \in \mathcal{C}([a,b]) : f(a) > 1\} \ \wedge \quad B = \{f \in \mathcal{C}([a,b]) : f(a) = 0\}.$$

(17). Considerando en $\mathcal{C}([a,b])$ la métrica definida por

$$d(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|\, dt,$$

mostrar que el conjunto A es abierto y el conjunto B es cerrado, siendo

$$A = \left\{ f \in \mathcal{C}([a,b]) : \int_a^b f(t)dt < 1 \right\} \ \wedge \quad B = \left\{ f \in \mathcal{C}([a,b]) : f(t) = 0,\ \forall t \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \right\}.$$

(18). Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2), (E_3, d_3) tres espacios métricos. Dadas las aplicaciones $f : E_1 \to E_2$ y $g : E_2 \to E_3$ se considera la composición $h = g \circ f : E_1 \to E_3$.

Demostrar:

*a- Si la aplicación f es continua en el punto $x_0 \in E_1$ y la aplicación g es continua en $f(x_0) \in E_2$ entonces su composición h es continua en el punto x_0.

*b- Si f y g son aplicaciones uniformemente continuas en sus respectivos dominios, entonces su composición h es también una aplicación uniformemente continua.

*c- Si la aplicación f es continua en el punto $x_0 \in E_1$ y F_1 es un subconjunto de E_1 tal que $x_0 \in F_1$, la restricción de la aplicación f al conjunto F_1 es también continua en el punto x_0.

*d- La recíproca del la propiedad del ítem anterior es falsa. Para ello exhibir una aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que no sea continua en ningún punto de $\mathbb{R}$ pero que su restricción a $\mathbb{Q}$ es uniformemente continua.

(19). Sea $X \subset (E_1, d_1)$. Si las funciones $f : X \to (E_2, d_2)$ y $g : X \to (E_2, d_2)$ son continuas en X demostrar que

*a- si el conjunto X es abierto en (E_1, d_1) entonces el conjunto $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto en (E_1, d_1).

*b- si el conjunto X es cerrado en (E_1, d_1) entonces el conjunto $B = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en (E_1, d_1).

⑳. Sea $X \subset (E_1, d_1)$ y sean $f : X \to (E_2, d_2)$ y $g : X \to (E_2, d_2)$ continuas en el punto $a \in X$. El conjunto E_2 está dotado de un orden total $\prec$. Analizar si la función

$$\begin{aligned} &\varphi : X \to E_2, \\ &x \mapsto \varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \end{aligned}$$

es continua en a.

㉑. Sean A y B dos subconjutos no vacíos de un espacio métrico (E, d).

-a- Mostrar que la aplicación

$$x \in E \to d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

es uniformemente continua. Obtener de ello que

$$V(a, r) = \{x \in E : d(x, A) \leqq r\} \text{ es un conjunto cerrado en } E.$$

-b- Suponiendo que $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$, mostrar que existen dos subconjuntos U y V abiertos disjuntos de E tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

㉒. Demostrar que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en el espacio métrico (E, d) entonces

$$\exists \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n).$$

㉓. Sea $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en (E, d). Mostrar que si $\{x_{2k}\}_k$, $\{x_{2k+1}\}_k$ y $\{x_{3k}\}_k$ son convergentes, entonces $\{x_k\}_k$ es convergente.

㉔. -a- Caracterizando sus sucesiones de Cauchy demostrar la completitud de todo espacio métrico discreto.

-b- Utilizando el ítem anterior, demostrar que si E y E' son dos espacios métricos discretos entonces toda aplicación $f : E \to E'$ es continua.

㉕. (a). Demostrar que la función $f : [1, +\infty) \to E$, donde $x \in \mathbb{R} \to f(x) = x + x^{-1}$ verifica que

$$x \in E \wedge y \in E \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

Tiene puntos fijos? ¿Hay alguna contradicción con el teorema de Banach ?

(b). Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $x \in \mathbb{R} \to f(x) = \frac{x + \sin(x)x}{2}$, verifica que

$$x \in E \wedge y \in E \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqq |x - y|.$$

Hallar sus posibles puntos fijos. ¿Verifica las condiciones del teorema?

(c). Sea $E = \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ y la función $f : E \to E$, donde $f(x_1, x_2) = (x_1, \lambda x_2)$. Verificar que

$$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E \wedge 0 < \lambda < 1 \Rightarrow d_2(f(x_1, x_2), f(y_1, y_2)) < d_2((x_1, x_2), (y_1, y_2)).$$

y que posee infinitos puntos fijos.

㉖. Considerar la situación de (a). del ejercicio anterior. Dado $x_1 \in E$ se define, por recurrencia, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $x_n = f(x_{n-1})$ si $n \geq 2$. Verificar que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente y analizar si se trata de una sucesión acotada.

㉗. Demostrar que toda contracción en un espacio métrico E es una aplicación continua.

Observar, sin embargo que si $T : E \to E$ no es una contracción pero sí lo es T^n, para algún $n \in \mathbb{N}$, no es necesariamente T continua. Por ejemplo, si $E = [0,1]$, la aplicación:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad \frac{3}{4} < x \leqq 1. \end{cases}$$

verifica que $T^2 = T \circ T$ es una contracción. Verificarlo.

㉘. Probar esta generalización del teorema de punto fijo de Banach:

Si E es un espacio métrico completo y $T : E \to E$ es tal que para algún $m \in \mathbb{N}$ resulta que la T^m es contracción, entonces

a- existe un único punto fijo $\bar{x}$ de la aplicación T.

b- cualquiera que sea $x_1 \in E$ la sucesión $x_{n+1} = Tx_n$ converge a $\bar{x}$.

㉙. Demostrar que la ecuación $x - \cos(x) = 0$ admite una única raíz real.

㉚. Resolver numéricamente la ecuación

$$x - \exp(-x) = 0,$$

utilizando el teorema de punto fijo en un espacio adecuado.

Solución : 0,5671432904...

㉛. Demostrar que la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ admite una raíz entre 1 y 2.

32. Considerar el problema

$$\begin{cases} y'(x) &= 1-2xy(x), \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

a. Encontrar la solución de este PVI.

b. Considerar el problema en el rectángulo, $R = \{(x,y):\ |x| < \frac{1}{2},\ |y| \leqq 1\}$. Llamando $f(x,y) = 1-2xy$, demostrar que $|f(x,y)| \leqq 2,$ si (x,y) en R, y que todas las aproximaciones sucesivas a la solución existen en $|x| \leqq 1/2$, resultando todas sus gráficas dentro de R.

c. Demostrar que f satisface una condición de Lipschitz en R , con constante de Lipschitz $L=1$, y que por consiguiente las aproximaciones sucesivas convergen a una solución φ del problema de valor inicial, definido en el intervalo $|x| \leq 1/2$.

d. Demostrar que la aproximación φ_3 satisface la siguiente condición: $|\varphi(x) - \varphi_3(x)| < 0{,}01$ en $|x| < 1/2$. Calcular φ_3.

Compacidad. Subconjuntos densos. Espacios métricos separables.

1. (a) Demostrar la separabilidad del espacio $l^1 = l^1(\mathbb{R})$.

   (b) Mostrar que el espacio $l^\infty = l^\infty(\mathbb{R})$ no es separable.

2. Sea $f:(E,d) \to (E',d')$ una función continua. Demostrar que si A es denso en E, entonces $f(A)$ es denso en $f(E)$.

3. Sean f y g funciones continuas de (E,d) en (E',d'). Probar que si f y g coinciden en un conjunto denso en E, entonces coinciden en todo E.

4. Considerar el espacio $X = (0,1)$ y sea $\epsilon > 0$. A cada racional $\dfrac{p}{q}$ (en forma irreducible) de X, se le asigna el entorno $\mathcal{N}\left(\dfrac{p}{q}\right) = \left(\dfrac{p}{q} - \dfrac{\epsilon}{q^3}, \dfrac{p}{q} + \dfrac{\epsilon}{q^3}\right)$.

   ¿Se puede afirmar que la colección $\{\mathcal{N}\left(\dfrac{p}{q}\right)\}_{\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\cap(0,1)}$ es un cubrimiento de X?

5. Sean (X,d_X) e (Y,d_Y) dos espacios métricos, el segundo completo. Sea D un subconjunto denso en X y $f: D \to Y$ una función uniformemente continua.

   I. Mostrar que hay una única extensión F de f, continua en X.
   II. Analizar si el resultado es válido cuando Y no es completo.
   III. Analizar si el resultado es válido cuando f es continua.

6. Considerar la sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ donde

$$P_0(x) = 0, \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x^2 - P_n^2(x)\right) \quad n \geqq 1.$$

   Mostrar que la sucesión converge uniformemente a $|x|$ en $[0,1]$.

   Ideas: Mostrar la identidad

$$|x| - P_{n+1}(x) = (|x| - P_n(x))\left(1 - \frac{|x| + P_n(x)}{2}\right) \quad n = 0,1,2,\ldots$$

   Concluir por inducción que

$$0 \leqq P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leqq |x| \text{ en } [-1,1].$$

   Finalmente mostrar que

$$|x| - P_n(x) \leqq (|x| - P_{n-1}(x))\left(1 - \frac{|x|}{2}\right) \leqq \ldots \leqq |x|\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)^n.$$