TRABAJOS PRÁCTICOS AÑO ACADÉMICO 2018.

Práctica N° 1: Los números reales.

1. A partir de los axiomas probar la unicidad de los elementos neutro, identidad, y del opuesto y recíproco de ¿todo? elemento de un cuerpo.

2. Verificar que los conjuntos de elementos positivos, F^+, y de elementos negativos, F^-, son efectivamente
$$F^+ = \{x \in F : \theta < x\} \qquad \text{y} \qquad F^- = \{x \in F : x < \theta\}.$$

3. Deducir, a partir de la definición de múltiplo de un elemento del cuerpo, que si $n \in \mathbb{Z}$ y $x, y \in F$ entonces

   -I- $n\theta = \theta$.
   -II- $(m+n)x = mx + nx$.
   -III- $m(-x) = (-m)x = -(mx)$.
   -IV- $m(x \cdot y) = (mx) \cdot y = x \cdot (my)$.
   -V- $m(x+y) = mx + my$.
   -VI- $n(mx) = (nm)x$.

4. Definir adecuadamente *relación de isomorfismo de cuerpos ordenados* y probar que es de equivalencia.

5. Probar que si X es un subconjunto de un cuerpo ordenado F que posee máximo m, entonces el conjunto X es acotado superiormente y su supremo es m.

6. Probar que todo intervalo abierto no vacío de $\mathbb{R}$ contiene números racionales.

7. Si $(x_\alpha, \alpha \in A)$ es una familia arbitraria (no necesariamente numerable) de valores no negativos de la recta extendida $\overline{\mathbb{R}}$, entonces se define la *suma desordenada* de dicha familia por medio de la fórmula
$$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = \sup_F \sum_{\alpha \in F} x_\alpha,$$
donde el supremo se toma sobre todos los subconjuntos finitos F de A. Probar las siguientes afirmaciones:

   -a- Si $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ es numerable, entonces
   $$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\alpha_k}.$$

   -b- Si $\sum\limits_{\alpha \in A} x_\alpha < \infty$, entonces el conjunto de todos los α tales que $x_\alpha > 0$ es numerable.

   -c- Si $(A_i, i \in I)$ es una *partición* de A, es decir, una familia disjunta cuya unión es A, entonces
   $$\sum_{\alpha \in A} x_\alpha = \sum_{i \in I} \sum_{\alpha \in A_i} x_\alpha \qquad \text{(fórmula de la asociatividad).}$$

   -d- A partir de la fórmula de la asociatividad probar que una serie doble con términos no negativos puede sumarse en cualquier orden. Es decir, si (a_{nk}) es una sucesión doble de números no negativos, entonces
   $$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}.$$

⑧. Sea p un entero mayor que 1, y x un número real con $0 < x < 1$. Mostrar que existe una sucesión (a_n) de enteros con $0 \leq a_n < p$ tales que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n},$$

y que esta sucesión es única excepto cuando x es de la forma $\frac{q}{p^n}$, en cuyo caso existen exactamente dos tales sucesiones. Mostrar que, recíprocamente, si (a_n) es una sucesión cualquiera de enteros con $0 \leq a_n < p$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$$

converge a un número real x con $0 \leq x \leq 1$. Si $p = 10$, esta sucesión es la *expansión decimal* de x. Para $p = 2$ se llama la *expansión binaria* de x y para $p = 3$, la *expansión ternaria*.

⑨. El *conjunto de Cantor ternario* $\mathcal{C}$ consiste de todos los números reales en el intervalo $[0, 1]$ que tienen expansión ternaria (a_n) con $a_n \neq 1$, donde si x tiene dos expansiones ternarias, x está en C si alguna de las expansiones no tiene términos iguales a 1. Probar que:

(a) $\mathcal{C}$ es cerrado,

(b) $\mathcal{C}$ que se obtiene primero removiendo de $[0, 1]$ el tercio del medio $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, luego de los intervalos que quedan removiendo los tercios del medio $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, y así sucesivamente.

(c) $\mathcal{C}$ puede ponerse en correspondencia uno a uno con el intervalo $[0, 1]$.

(d) El conjunto de puntos de acumulación de $\mathcal{C}$ es $\mathcal{C}$.

⑩. Demostrar que $\mathbb{Q}$ es numerable y que $\mathbb{R}$ es no numerable.

⑪. (a). Demostrar que toda familia de intervalos abiertos disjuntos es numerable.

(b). ¿Es numerable cualquier familia de conjuntos disjuntos?

(c). ¿Es numerable un conjunto de puntos aislados?

⑫. Demostrar para A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$:

-a-. A' numerable $\Rightarrow A$ numerable.

-b-. $A' \not\subseteq \left(A'\right)'$.

-c-. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$.

-d-. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

-e-. $(\bar{A})' = A'$.

⑬. Hallar A tal que $A' = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

⑭. Probar que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Mostrar que no vale la igualdad.

⑮. Probar que para todo A, A' es cerrado.

⑯. Si F cerrado y $a \notin F$ existen abiertos disjuntos A, B tales que $a \in A$ y $F \subset B$.

⑰. Hallar la clausura de cada uno de los siguientes conjuntos. En el caso en que existan, identificar el ínfimo y el supremo.

$$\begin{aligned}
A &= \left\{\pm\frac{1}{n} \pm \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}, \qquad & B &= \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \\
C &= \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}, \qquad & D &= \left\{\frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}, \\
E &= \{r \in \mathbb{Q} : r^2 \leq 5\}.
\end{aligned}$$

⑱. Si A, $B \subset \mathbb{R}$ son acotados superiormente (inf) mostrar que también lo son los conjuntos

$$A+B=\{a+b\in\mathbb{R}: a\in A, b\in B\} \quad \text{y} \quad cA=\{ca\in\mathbb{R}: a\in A\} \text{ con } c\in\mathbb{R}.$$

Valiendo además $\sup A+B=\sup A+\sup B$ y $\sup cA=c\sup A$ si $c>0$.

Analizar los casos $c=0$ o $c<0$. Enunciar resultados análogos para el $\inf A+B$ y $\inf cA$.

⑲. Si A acotado superiormente entonces $\overline{A}$ acotado superiormente y $\sup\overline{A}=\sup A$.

⑳. Sean $A, B\subset\mathbb{R}$ tales que B es acotado superiormente, y además $\forall a\in A\ \exists\ b\in B$ tal que $a\leqq b$. Entonces A es acotado superiormente y $\sup A\leqq\sup B$.

㉑. Sea $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Demostrar que:

$$\text{i)}\ \lim_{n\to\infty} a^n=\begin{cases}0 & \text{si } a<1\\ +\infty & \text{si } a>1\end{cases}, \qquad \text{ii)}\ \lim_{n\to\infty} na^n=\begin{cases}0 & \text{si } a<1\\ +\infty & \text{si } a>1\end{cases},$$

$$\text{iii)}\ \lim_{n\to\infty} n^\alpha a^n=0 \text{ si } 0<a<1.$$

㉒. Demostrar los siguientes límites:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \text{ si } a>0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

㉓. -a- ¿Puede ser $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=0$ aunque ni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ni $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tengan lómite 0?

-b- ¿Es posible que $\{a_nb_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sean convergentes si $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge?

-c- Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ¿la sucesión $\{a_{n+1}-a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0? ¿Vale el recóproco?

㉔. Encontrar limite superior e inferior de las sucesiones:

a $\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n}\right\}_n$,

b $\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}_n$,

c $\left\{2+\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right\}_n$.

㉕. Probar que si $a_n<b_n$ $\forall n$ entonces:

(a) $\underline{\lim}\ a_n\leqq\underline{\lim}\ b_n$.

(b) $\overline{\lim}\ a_n\leqq\overline{\lim}\ b_n$.

㉖. Probar que para sucesiones acotadas $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ vale

$$\underline{\lim}\ a_n+\underline{\lim}\ b_n\leqq\underline{\lim}\,(a_n+b_n)\ \leqq\ \overline{\lim}\,(a_n+b_n)\ \leqq\ \overline{\lim}\ a_n+\overline{\lim}\ b_n.$$

Dar ejemplos donde las desigualdades sean estrictas.

㉗. Probar que si $\lim b_n=0$ entonces

$$\overline{\lim}\ \{a_n+b_n\}=\overline{\lim}\ a_n, \qquad \underline{\lim}\,(a_n+b_n)=\underline{\lim}\ a_n.$$

㉘. Demostrar que $\underline{\lim}\,(-a_n)=-\overline{\lim}\ a_n$.

㉙. Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión de números reales. Mostrar la equivalencia con las definiciones:

- a - $\overline{\text{lím}}\, x_n = l \in \mathbb{R}$ si y solo si se verifican las siguientes dos condiciones:
  (i) dado $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}, k \geqq n$ resulta $x_k < l + \varepsilon$.
  (ii) dados $\varepsilon > 0$ y un $n \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $k \geqq n$ tal que $l + \varepsilon > x_k$.
- b - $\overline{\text{lím}}\, x_n = +\infty$ si y solo si dados $M > 0$ y $n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, k \geqq n$ tal que $x_k > M$.
- c - $\overline{\text{lím}}\, x_n = -\infty$ si y solamente si $\text{lím}\, x_n = -\infty$.
- d - $\underline{\text{lím}}\, x_n = l \in \mathbb{R}$ si y solo si se verifican las siguientes dos condiciones:
  (i) dado $\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}, k \geqq n$ resulta $x_k > l - \varepsilon$.
  (ii) dados $\varepsilon > 0$ y un $n \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $k \geqq n$ tal que $l - \varepsilon < x_k$.
- e - $\underline{\text{lím}}\, x_n = -\infty$ si y solo si dados $M > 0$ y $n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, k \geqq n$ tal que $x_k < -M$.
- f - $\underline{\text{lím}}\, x_n = +\infty$ si y solamente si $\text{lím}\, x_n = +\infty$.

㉚. $\overline{\text{lím}}\, x_n$ es el mayor punto de adherencia de la sucesión real $\{x_n\}_n$ y $\underline{\text{lím}}\, x_n$, el menor.
(¿El conjunto de los puntos de adherencia de una sucesión de números reales es cerrado? ¿En cuál topología?)

㉛. Sean $\{x_n\}_n$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces,

- a - $\underline{\text{lím}}\, x_n \leqq \overline{\text{lím}}\, x_n$.
- b - $\underline{\text{lím}}\, x_n = \overline{\text{lím}}\, x_n = l \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = l$.

㉜. Analizar la veracidad del siguiente enunciado: « x es un punto de adherencia de la sucesión $\{x_n\}_n$ de números reales si y solo si x es un punto de adherencia del conjunto de las imógenes de la sucesión.»

㉝. Sea $X \subset \mathbb{R}$.

a X es cerrado si y solo si $X = X \cup X'$.

b X es abierto conexo si y solo si X es un intervalo abierto.

㉞. Mostrar que x es un punto de adherencia del conjunto $X \subset \mathbb{R}$ si y solo si $E^*_\delta(x) \cap X \neq \emptyset$, $\forall \delta > 0$.