UNIVERSIDAD NACIONAL
DE ROSARIO

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Licenciatura en Matemática

Funciones Reales

Docentes:

Elina M. Mancinelli

Ma. Evangelina Alvarez

2018

Página en blanco intencional

Funciones Reales

Docentes: E.M.Mancinelli, M.E.Alvarez

1 de agosto de 2018

Índice

1. El sistema de los números reales

El sistema de los números reales está caracterizado por ser un cuerpo ordenado y completo. Veremos en esta sección de manera precisa estos conceptos.

1.1. Cuerpos

Definición 1 *Un **cuerpo** es una terna $(F, +, \dot{})$ constituida por un conjunto F dotado de dos operaciones $+$ y $\cdot$ en F, denominadas respectivamente adición y multiplicación, que verifican los siguientes axiomas:*

Axiomas de la adición

A1 *Propiedad asociativa:* $x, y, z \in F \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$.

A2 *Propiedad conmutativa:* $x, y \in F \Rightarrow x + y = y + x$.

A3 *Existencia de elemento neutro para $+$:* $\exists!$ *elemento* $\theta \in F$ *t.q.* $x \in F \Rightarrow x + \theta = \theta + x = x$.

A4 *Existencia del opuesto de un elemento:* $x \in F$, $\exists!$ *elemento* $-x \in F$ *t.q.* $x + (-x) = (-x) + x = \theta$.

Axiomas de la multiplicación

A5 *Propiedad asociativa:* $x, y, z \in F \Rightarrow (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

A6 *Propiedad conmutativa:* $x, y \in F \Rightarrow x \cdot y = y \cdot x$.

A7 *Existencia de elemento identidad para $\cdot$:* $\exists!$ *elemento* $\epsilon \in F$ *t.q.* $x \in F \Rightarrow x \cdot \epsilon = \epsilon \cdot x = x$.

A8 *Existencia del recíproco de un elemento:* $\theta \neq x \in F$, $\exists!$ *elemento* $x^{-1} \in F$ *t.q.* $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = \epsilon$.

Axiomas comunes a la adición y la multiplicación

A9 Propiedad distributiva: $x, y, z \in F \Rightarrow (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Los axiomas anteriores no son independientes unos de otros. Se puede comprobar fácilmente (hacerlo) la unicidad del elemento neutro y de la identidad y, además, al ser las operaciones asociativas, la unicidad del opuesto y del recíproco de todo elemento del conjunto.
A partir de estos axiomas se deducen todas las leyes usuales de manipulación de números reales. Veamos algunas de ellas.

Proposición 1 *Sea $(F, +, \cdot)$ un cuerpo, entonces*
i) $x \in F \Rightarrow x \cdot \theta = \theta \cdot x = \theta$.
ii) F no posee divisores del elemento neutro o cero, es decir que si $x, y \in F$, entonces $x \cdot y = \theta \Rightarrow x = \theta \vee y = \theta$.
iii) Vale la regla de los signos: $x, y \in F \Rightarrow x \cdot (-y) = (-x)y = -(x \cdot y)$, de donde se obtiene que $x, y \in F \Rightarrow (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$, y en particular $(-\epsilon)(-\epsilon) = \epsilon \cdot \epsilon = \epsilon$.
*iv) Si $x, y \in F$, entonces la suma $x + (-y)$ será simbolizada $x - y$ y denominada **diferencia entre x e y**. Si $y \neq \theta$ entonces el producto $x \cdot y^{-1}$ será simbolizado x/y y denominado **cociente entre x e y**. Las operaciones*

$$(x, y) \to x - y, \qquad (x, y) \to x/y,$$

*son denominadas **sustracción** y **división** .*
v) Si $x, y \in F$, entonces $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$.

<u>Demos</u>: *i)* $x \in F \to x \cdot \theta + x = x \cdot \theta + x \cdot \epsilon = x \cdot (\theta + \epsilon) = x \cdot \epsilon = x$.
El resultado sigue de la unicidad del elemento neutro para la suma.
ii) Si $y \neq \theta$, luego $x \cdot y = \theta \to \theta = \theta \cdot y^{-1} = (x \cdot y) \cdot y^{-1} = x \cdot (y \cdot y^{-1}) = x \cdot \epsilon \Rightarrow x \cdot \epsilon = \theta \Rightarrow x = \theta$.
iii) Siendo $x \cdot (-y) + x \cdot y = x \cdot ((-y) + y) = x \cdot \theta = \theta$ resulta $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$. En forma análoga se muestra que $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.
Usando el hecho que $z \in F \Rightarrow -(-z) = z$, se tiene que $(-x) \cdot (-y) = -(x \cdot (-y)) = x \cdot (-(-y)) = x \cdot y$.
v) Observemos que $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y) = \theta \Rightarrow x - y = \theta \vee x + y = \theta$. ■

Definición 2 *Un **subcuerpo** de un cuerpo $(F, +, \cdot)$ es un subconjunto H no vacío de F tal que munido de las restricciones de las operaciones $+$ y $\cdot$ a H, constituye un cuerpo.*

Teorema 1 *Si $(F, +, \cdot)$ es un cuerpo, un subconjunto no vacío H de F es un subcuerpo si y sólo si se verifican los axiomas siguientes:*

SC1 *H es cerrado con respecto a las operaciones es decir: $x, y \in H \Rightarrow x + y \in H \wedge x{\cdot}y \in H$.*

SC2 *H es cerrado con respecto a la oposición y a la inversión, i.e.: $x \in H \Rightarrow -x \in H$ y $\theta \neq x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$.*

Corolario 1 *Sea F un cuerpo, entonces:*
a) La intersección de cualquier familia no vacía de subcuerpos de F es un subcuerpo de F.
b) La intersección F_0 de todos los subcuerpos de F es el menor subcuerpo de F, en el sentido que si H es un subcuerpo de F entonces $F_0 \subseteq H$.

1.2. CUERPOS ORDENADOS

Definición 3 *Una relación sobre un conjunto S es una **relación de orden** si verifica las siguientes propiedades: Si $x, y, z \in S$, entonces*
(O1) Propiedad reflexiva: $x \leqslant x$;
(O2) Propiedad antisimétrica: $x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$;
(O3) Propiedad transitiva: $x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow z \leqslant z$.

*Una relación de orden sobre un conjunto S es una **relación de orden lineal** si verifica que: Si $x, y \in S$ entonces:*
(O4) Propiedad de linealidad: $x \leqslant y \vee y \leqslant x$.

Definición 4 *Un subconjunto F^+ de un cuerpo F es un **subconjunto de elementos positivos** del cuerpo F si verifica los siguientes axiomas.*
i) Es estable con respecto a la adición y a la multiplicación:

$$x, y \in F^+ \Rightarrow x + y \in F^+, \quad x{\cdot}y \in F^+.$$

ii) Se verifica el principio de tricotomía: si $x \in F$ entonces una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$x = \theta, \qquad x \in F^+, \qquad -x \in F^+.$$

Nota 1 *Se simboliza $F^- := \{x \in F : -x \in F^+\}$. De este modo el axioma ii) indica que $\{\{\theta\}, F^+, F^-\}$ es una partición del conjunto F. Se dice que F^- es el **conjunto de elementos negativos** del cuerpo F.*
Se tiene que

$$x \in F \wedge x \neq \theta \Rightarrow x^2 \in F^+.$$

En efecto pues, si $x \in F^+$, por el axioma i) se tiene que $x{\cdot}x \in F^+$ y si $x \notin F^+$, entonces al ser $x \neq \theta$, por el axioma ii) resulta $-x \in F^+$ y así $x^2 = (-x)(-x) \in F^+$. En particular se tiene que $\epsilon = \epsilon{\cdot}\epsilon = \epsilon^2 \in F^+$.

Definición 5 *Sea F^+ un subconjunto de elementos positivos del cuerpo F, se define la relación $<$ en el conjunto F de la siguiente manera*

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in F^+,$$

*en tal caso se dice que x es **menor que** y. La relación inversa se simboliza $>$, y se dice que y es **mayor que** x.*

En particular se tiene que

$$F^+ = \{x \in F : \theta < x\}, \qquad F^- = \{x \in F : x < \theta\}.$$

La relación recién definida posee propiedades de las que se deducen todas las leyes usuales del cálculo con desigualdades entre números reales. Veamos algunas.

Proposición 2 *Sea F^+ un subconjunto de elementos positivos de un cuerpo F, entonces la relación $<$ que él determina verifica las siguientes propiedades. Siendo $x, y, z \in F$ se tiene*
i) Propiedad transitiva: $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z.$
ii) Propiedad de tricotomía: una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x.$$

iii) Monotonía de la adición: $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z.$
iv) Monotonía de la multiplicación: $x < y \wedge \theta < z \Rightarrow x{\cdot}z < y{\cdot}z, \quad x < y \wedge z < \theta \Rightarrow y{\cdot}z < x{\cdot}z.$
v) $\theta < x < y \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}.$

Demos: *i*) Por la definición de $<$ y usando el axioma *i*)

$$x < y \wedge y < z \Rightarrow y - x \in F^+ \wedge z - y \in F^+ \Rightarrow z - x = (z - y) + (y - x) \in F^+ \Rightarrow x < z.$$

ii) El resultado surge de lo que sucede con las proposiciones

$$y - x \in F^+, \quad y - x = \theta, \quad x - y = -(y - x) \in F^+.$$

iii) Se tienen las siguientes equivalencias

$$x < y \Leftrightarrow y - x \in F^+ \Leftrightarrow (y + z) - (x - z) = y - x \in F^+ \Leftrightarrow x + z < y + z.$$

iv) La primera proposición sigue de usar el primer axioma, pues

$$x < y \wedge \theta < z \Rightarrow y - x \in F^+ \wedge z \in F^+ \Rightarrow y{\cdot}z - x{\cdot}z = (y - x){\cdot}z \in F^+ \Rightarrow x{\cdot}z < y{\cdot}z.$$

La segunda desigualdad es análoga.
v) Veamos primero que el recíproco de un elemento de F^+ es un elemento de dicho conjunto. En efecto pues

$$\theta < z \Rightarrow \theta = \theta{\cdot}(z^{-1})^2 < z{\cdot}(z^{-1})^2 = z^{-1}.$$

Ahora, puesto que $\theta < x^{-1}$ y $\theta < y^{-1}$ resulta $\theta < x^{-1}{\cdot}y^{-1}$ y en consecuencia

$$x < y \Rightarrow x{\cdot}(x^{-1}{\cdot}y^{-1}) < y{\cdot}(x^{-1}{\cdot}y^{-1}) \Rightarrow y^{-1} < x^{-1},$$

como queríamos demostrar. ■

La relación $<$ definida en el cuerpo F a partir del conjunto de elementos positivos F^+ no es una relación de orden, pues si bien verifica las propiedades antisimétrica y transitiva, no verifica, debido a la propiedad de tricotomía, la propiedad reflexiva.

Definición 6 *Un **cuerpo ordenado** es un par $(F, \leq)$ constituido por un cuerpo F y una relación $\leq$ sobre el conjunto F tales que*
a) La relación $\leq$ es una relación de orden lineal sobre F, i.e. $x, y, z \in F$ entonces
(CO1) *Propiedad reflexiva:* $x \leq y,$
(CO2) *Propiedad antisimétrica:* $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y,$
(CO3) *Propiedad transitiva:* $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z,$
(CO4) *Propiedad de linealidad:* $x, y \in F \Rightarrow x \leq y \vee y \leq x.$

b) La relación $\leq$ es compatible con la estructura de cuerpo de F, en el sentido que si $x, y, z \in F$ entonces
(CO5) *Monotonía de la adición:* $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$
(CO6) *Monotonía de la multiplicación* $x \leq y \wedge \theta < z \Rightarrow x{\cdot}z \leq y{\cdot}z.$

Definición 7 *Sea F^+ un subconjunto de elementos positivos de un cuerpo F y $<$ la relación de menor que él determina sobre F. Se define la relación $\leqslant$ sobre el conjunto F del siguiente modo, para $x, y \in F$*

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x < y \vee x = y,$$

en cuyo caso se dice que x es ***menor o igual*** *que y (o bien que y es* ***mayor o igual*** *que x).*

Teorema 2 *Sea F^+ un subconjunto de elementos positivos de un cuerpo F y $\leqslant$ la relación de menor o igual que él determina sobre el conjunto F. Entonces el par $(F, \leqslant)$ constituye un cuerpo ordenado*

Puede demostrarse el resultado recíproco de este teorema es decir que si $(F, \leqslant)$ es un cuerpo ordenado entonces el subconjunto $\{x \in F : \theta \leqslant x \wedge \theta \neq x\}$ constituye un subconjunto de elementos positivos del cuerpo F. Demostrar ambos resultados.

1.3. Los múltiplos de un elemento de un cuerpo

Definición 8 *Sea F un cuerpo, siendo $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in F$ se define el elemento $nx \in F$ del siguiente modo*

$$nx = \begin{cases} \theta, & n = 0, \\ x, & n = 1, \\ (n-1)x + x, & n > 1, \\ -((-n)x, & n < 0. \end{cases}$$

De la definición anterior se obtiene que

$$n \in \mathbb{Z}, x \in F \Rightarrow -(nx) = (-n)x, \qquad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n\theta = \theta.$$

Lema 1 *Sea F un cuerpo, para $n, m \in \mathbb{Z}$ y $x, y \in F$ se tiene que*

$$\begin{array}{llllll} i) & (m+n)x = mx + nx, & iii) & m(-x) = (-m)x = -(mx), & v) & m(x \cdot y) = (mx) \cdot y \\ ii) & m(x+y) = mx + my, & iv) & n(mx) = (nm)x. & & \end{array}$$

Demos: Se ve fácilmente que los resultados son válidos para los casos $n = 0, m = 0$ o $x = \theta, y = \theta$. Veamos las demostraciones para el caso en que $m \neq 0 \neq n$.
i) En el caso que m y n sean enteros positivos el resultado se prueba por inducción. Fijado $m \in \mathbb{Z}$ probemos $(m+n)x = mx + nx$. Para $n = 1$ vale, veamos que si vale para k vale para $k+1$.

$$(m + (k+1))x = ((m+k)+1)x = (m+k)x + x = (mx + kx) + x = mx + (kx + x) = mx + (k+1)x.$$

En el caso en que $m < 0$ y $n < 0$, entonces $m + n < 0$, de donde

$$(m+n)x = -[(-(m+n))x] = -[((-m)+(-n))x] = -[(-m)x+(-n)x] = -[(-m)x]+[-((-n)x)] = mx+nx$$

En el caso en que $m < 0$ y $n > 0$ debemos analizar dos casos:
• Si $|m| \leqslant n$, se tiene

$$(m+n)x = \theta + (m+n)x = (mx + (-m)x) + (m+n)x = mx + ((-m)x + (m+n)x) = mx + nx.$$

• Si $|m| > n$ entonces

$$(m+n)x = (m+n)x + \theta = (m+n)x + ((-n)x + nx) = ((m+n)x + (-n)x) + nx = mx + nx.$$

ii) En el caso en que m sea un número entero positivo el resultado se demuestra por inducción. Si m es un número negativo, se aplica la definición y el resultado ya demostrado.

iii) A partir de las igualdades $\theta = n\theta = n(x + (-x)) = nx + n(-x)$ se obtiene que $n(-x) = -(nx)$.

iv), v) Las demostraciones son similares a lo hecho hasta acá. Hágalo. ■

1.4. Cuerpos ordenables

Hemos mencionado que una condición necesaria y suficiente para que un cuerpo F sea ordenable (es decir que exista una relación de orden lineal sobre el conjunto F compatible con su estructura de cuerpo) es que el mismo posea un subconjunto de elementos positivos. La respuesta a si esto siempre es posible de encontrar es negativa.

Teorema 3 *Si $(F, \leqslant)$ es un cuerpo ordenado entonces F es un conjunto infinito.*

Demos: Según vimos se tiene que $\theta < \epsilon$, y así por inducción se obtiene que

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n\epsilon < (n+1)\epsilon.$$

De este modo se tiene que $m \neq n \Rightarrow m\epsilon \neq n\epsilon$, entonces el conjunto $\{n\epsilon : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto infinito de F y en consecuencia resulta F un conjunto infinito. ■

Corolario 2 *Todo subcuerpo de un cuerpo ordenado F es un conjunto infinito.*

Este resultado muestra que si F es un cuerpo finito no es ordenable, i.e. no existe ninguna relación de orden sobre F que sea compatible con su estructura de cuerpo. Veamos que esto también puede suceder aun en el caso de que F sea infinito.

Proposición 3 *El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos no es ordenable.*

Demos: Supongamos que sea $\prec$ un orden cualquiera sobre el conjunto $\mathbb{C}$ compatible con su estructura algebraica, en este caso se tiene que $\theta = (0,0)$ y $\epsilon = (1,0)$. Se tiene

$$\theta = (0,0) \prec (0,-1)^2 = (0,-1)(0,-1) = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -\epsilon,$$

contradiciendo el hecho que probamos que $\theta \prec \epsilon$.
En consecuencia queda demostrado que la relación de orden no es lineal. ■

1.5. Caracterización del subcuerpo racional de un cuerpo ordenado F

Definición 9 *Sea $(F, \leqslant)$ un cuerpo ordenado, al menor subcuerpo de F se lo denomina **subcuerpo racional** del cuerpo F. Se simboliza el subcuerpo racional de un cuerpo F como F_0.*

Observemos que al ser F_0 un subcuerpo de F, entonces por ser F_0 cerrado respecto de la adición y la oposición resulta

$$\{n\epsilon : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq F_0.$$

Además si $0 \neq n, m \in \mathbb{Z}$ entonces F_0 contiene la solución de la ecuación

$$(n\epsilon)x = m\epsilon,$$

que siempre existe y es única, y que simbolizamos $m\epsilon/n\epsilon = \dfrac{m\epsilon}{n\epsilon}$. Por lo tanto se tiene que

$$\{m\epsilon/n\epsilon : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\} \subseteq F_0.$$

Propiedades 1 *Valen las siguientes propiedades*

a) $\dfrac{0\epsilon}{1\epsilon} = \theta$ *y* $\dfrac{1\epsilon}{1\epsilon} = \epsilon$.

b) Si $m, n \neq 0 \in \mathbb{Z}$, entonces $0 \neq k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{(km)\epsilon}{(kn)\epsilon} = \dfrac{m\epsilon}{n\epsilon}$.

c) *Si* $m, r, n \neq 0, s \neq 0 \in \mathbb{Z}$, *entonces* $\dfrac{m\epsilon}{n\epsilon} = \dfrac{r\epsilon}{s\epsilon} \Leftrightarrow ms = nr$.

d) *Si* $m, n \neq 0 \in \mathbb{Z}$, *entonces* $\dfrac{m\epsilon}{n\epsilon} = \theta \Leftrightarrow m = 0$.

e) *Si* $m, n \neq 0 \in \mathbb{Z}$, *entonces* $\dfrac{m\epsilon}{n\epsilon} < \theta \Leftrightarrow mn > 0$.

El siguiente teorema caracteriza el subcuerpo racional F_0 de un cuerpo ordenado $(F, \leqslant)$, mostrando que sus elementos son los recién presentados.

Teorema 4 *Sea* $(F, \leqslant)$ *un cuerpo ordenado, entonces el subcuerpo racional* F_0 *de* F *es el conjunto*

$$F_0 = \{m\epsilon/n\epsilon : m, n \neq 0 \in \mathbb{Z}\}.$$

Demos: Por las consideraciones anteriores basta ver que este conjunto es un subcuerpo de F. Para ello usemos el resultado presentado en el Teorema 1, de este modo tenemos que probar:

$$a)\quad \frac{m\epsilon}{n\epsilon} + \frac{r\epsilon}{s\epsilon} = \frac{(ms+nr)\epsilon}{(ns)\epsilon}, \qquad c)\quad \frac{-(m)\epsilon}{n\epsilon} = \frac{(-m)\epsilon}{n\epsilon},$$

$$b)\quad \frac{m\epsilon}{n\epsilon} \cdot \frac{r\epsilon}{s\epsilon} = \frac{(mr)\epsilon}{(ns)\epsilon}, \qquad d)\quad m \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}\right)^{-1} = \frac{n\epsilon}{m\epsilon}.$$

Veamos a), para ello basta considerar

$$(ns)\epsilon\cdot\left(\frac{m\epsilon}{n\epsilon} + \frac{r\epsilon}{s\epsilon}\right) = (ns)\epsilon\cdot\left(\frac{(ms)\epsilon}{(ns)\epsilon} + \frac{(nr)\epsilon}{(ns)\epsilon}\right) = (ns)\epsilon\cdot\frac{(ms)\epsilon}{(ns)\epsilon} + (ns)\epsilon\cdot\frac{(nr)\epsilon}{(ns)\epsilon} = (ms)\epsilon + (nr)\epsilon = (mx+nr)\epsilon.$$

Para el caso b) la igualdad que se debe usar es

$$(ns)\epsilon\cdot\left(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}\cdot\frac{r\epsilon}{s\epsilon}\right) = s(n\epsilon)\cdot\left(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}\cdot\frac{r\epsilon}{s\epsilon}\right) = \left(s(n\epsilon)\cdot\frac{m\epsilon}{n\epsilon}\right)\cdot\frac{r\epsilon}{s\epsilon} = s\left((n\epsilon)\cdot\frac{m\epsilon}{n\epsilon}\right)\cdot\frac{r\epsilon}{s\epsilon} = s(m\epsilon)\cdot\frac{r\epsilon}{s\epsilon} = m(s\epsilon)\cdot\frac{r\epsilon}{s\epsilon} = m(r\epsilon).$$

Para la prueba de c) y d) deben usarse

$$\frac{m\epsilon}{n\epsilon} + \frac{(-m)\epsilon}{n\epsilon} = \frac{(mn+(-m)n)\epsilon}{(nn)\epsilon} = \frac{0\epsilon}{(nn)\epsilon} = \theta,$$

$$\frac{m\epsilon}{n\epsilon}\cdot\frac{n\epsilon}{m\epsilon} = \frac{(mn)\epsilon}{(mn)\epsilon} = \frac{1\epsilon}{1\epsilon} = \epsilon.$$

Quedando así demostrado el teorema. ■

Corolario 3 *El subcuerpo racional de un cuerpo ordenado es un conjunto numberable.*

1.6. Isomorfismo entre subcuerpos racionales

A partir de la demostración del último teorema vemos que está justificado el nombre de cuerpo racional ya que el mismo actúa de manera similar al subcuerpo $\mathbb{Q}$ de los reales, cuyos elementos se expresan como un cociente de números enteros.

Definición 10 *Sean F y G dos cuerpos ordenados, una aplicación biyectiva $\varphi : F \to G$ es un **isomorfismo** si y sólo si se verifican los siguientes axiomas:*
i) $x, y \in F \Rightarrow \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$,
ii) $x, y \in F \Rightarrow \varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$,
iii) $x, y \in F, \wedge x < y \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(y)$,
*Dos cuerpos ordenados F y G se dicen **isomorfos** si existe algún isomorfismo $\varphi : F \to G$.*

Notemos que puede verificarse que dados dos cuerpos ordenados F, G una aplicación $\varphi : F \to G$ es un isomorfismo si su inversa lo es. Además se comprueba fácilmente que la composición de isomorfismos es un isomorfismo, con lo que se obtiene que, en el conjunto de todos los cuerpos ordenados, la relación de isomorfismo es una relación de equivalencia.

Proposición 4 *Sean F y $\widetilde{F}$ dos cuerpos ordenados, si F_0 y $\widetilde{F}_0$ son sus respectivos subcuerpos racionales, entonces los cuerpos F_0 y $\widetilde{F}_0$ son isomorfos.*

Demos: Sean ϵ y $\tilde{\epsilon}$ los elementos unidad de los cuerpos F y $\widetilde{F}$ respectivamente, basta demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & F_0 & \to & \widetilde{F}_0 \\ & \frac{m\epsilon}{n\epsilon} & \mapsto & \Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}) = \frac{m\tilde{\epsilon}}{n\tilde{\epsilon}}, \end{array}$$

es un isomorfismo.
La aplicación Φ es biyectiva: la sobreyectividad es inmediata y para la inyectividad se tiene que

$$\Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}) = \Phi(\frac{r\epsilon}{s\epsilon}) \Leftrightarrow \frac{m\tilde{\epsilon}}{n\tilde{\epsilon}} = \frac{r\tilde{\epsilon}}{s\tilde{\epsilon}} \Leftrightarrow ms = nr \Leftrightarrow \frac{m\epsilon}{n\epsilon} = \frac{r\epsilon}{s\epsilon}.$$

Además en lo concerniente a las operaciones se tiene que

$$\Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon} + \frac{r\epsilon}{s\epsilon}) = \Phi\left(\frac{(ms+nr)\epsilon}{(ns)\epsilon}\right) = \frac{(rn+ms)\tilde{\epsilon}}{(ns)\tilde{\epsilon}} = \frac{m\tilde{\epsilon}}{n\tilde{\epsilon}} + \frac{r\tilde{\epsilon}}{s\tilde{\epsilon}} = \Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}) + \Phi(\frac{r\epsilon}{s\epsilon}).$$

De manera análoga se tiene que

$$\Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon} \cdot \frac{r\epsilon}{s\epsilon}) = \Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}) \cdot \Phi(\frac{r\epsilon}{s\epsilon}).$$

Falta solamente verificar el axioma *iii*) de isomorfismo para ello notemos que

$$\frac{m\epsilon}{n\epsilon} < \frac{r\epsilon}{s\epsilon} \Leftrightarrow \frac{r\epsilon}{s\epsilon} - \frac{m\epsilon}{n\epsilon} = \frac{(rn-ms)\epsilon}{ns\epsilon} > \theta \Leftrightarrow (rn-ms) > 0 \Leftrightarrow \frac{m\tilde{\epsilon}}{n\tilde{\epsilon}} < \frac{r\tilde{\epsilon}}{s\tilde{\epsilon}} \Leftrightarrow \Phi(\frac{m\epsilon}{n\epsilon}) < \Phi(\frac{r\epsilon}{s\epsilon}),$$

como queríamos demostrar. ■

Corolario 4 *Sea F un cuerpo ordenado, entonces su subcuerpo racional F_0 es isomorfo al cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales.*

1.7. Cuerpos ordenados completos

Cuando se estudia la estructura de los números reales, además de los axiomas de cuerpo y de orden también se estudia el ***axioma de completitud*** , estrechamente ligado a la estructura topológica de dicho espacio.

Noción de supremo de un subconjunto de un cuerpo ordenado

Definición 11 *Sea F un cuerpo ordenado y X un subconjunto no vacío de F.*
*Se dice que X es **acotado superiormente** si existe un elemento $b \in F$ tal que* $x \in X \Rightarrow x \leqslant b.$
*Se dice que X es **acotado inferiormente** si existe un elemento $a \in F$ tal que* $x \in X \Rightarrow a \leqslant x.$
*Se dice que X es **acotado** si es acotado superior e inferiormente, i.e. si existen elementos $a, b \in F$ tales que $x \in X \Rightarrow a \leqslant x \leqslant b$.*

Un subconjunto X de un conjunto ordenado está acotado si está contenido en un intervalo $[a, b]$ o en forma equivalente si existe un elemento $k \in F$ tal que

$$x \in X \Rightarrow |x| \leqslant k.$$

Definición 12 *Sea F un cuerpo ordenado y X un subconjunto no vacío y acotado superiormente de F. Un elemento $s \in F$ es un* ***extremo superior o supremo*** *de X si es la menor de las cotas superiores de X, i.e. si se verifican los siguientes axiomas:*
i) s es cota superior del subconjunto X: $x \in X \Rightarrow x \leqslant s$.
ii) Si b es una cota superior del subconjunto X entonces $s \leqslant b$.
Se simboliza el supremo del conjunto X como $\sup(X)$.

Notemos que la condición ii) puede interpretarse como que ningún elemento menor que s puede ser cota superior de X, i.e.

$$\text{Si } c < s \text{ luego existe } x \in X \text{ tal que } c < x \leqslant s.$$

Otro modo de expresar esta última condición es la siguiente

$$\forall \rho \in F^{+} \text{ existe un } x \in X \text{ tal que } s - \rho < x \leqslant s.$$

Definición 13 *Sea F un cuerpo ordenado y X un subconjunto no vacío y acotado inferiormente de F. Un elemento $i \in F$ se denomina el* ***extremo inferior o ínfimo*** *si es la mayor de las cotas inferiores de X, i.e. se verifican las siguientes propiedades*
i) i es una cota inferior del subconjunto X: $x \in X \Rightarrow i \leqslant x$.
ii) Si a es una cota inferior del subconjunto X entonces $a \leqslant i$.
Se simboliza al ínfimo como $\operatorname{ínf}(X)$.

Análogamente a lo acotado para el supremo puede mostrarse que la segunda propiedad puede reformularse como: ningún número mayor que i puede ser cota inferior de X, i.e.

$$\text{Si } i < c \text{ luego existe } x \in X \text{ tal que } i \leqslant x < c.$$

De manera equivalente

$$\forall \rho \in F^{+} \text{ existe un } x \in X \text{ tal que } i \leqslant x < i + \rho.$$

Definición 14 *Sea F un cuerpo ordenado y X un subconjunto no vacío de F. Se dice que el elemento $m \in X$ es el* ***máximo de X*** *si es el mayor elemento, i.e.*

$$x \in X \Rightarrow x \leqslant m,$$

en otras palabras, cuando m es una cota superior de X perteneciente a dicho conjunto.

Resulta evidente que si X es un subconjunto no vacío de un cuerpo ordenado F que posee máximo m entonces el conjunto X es acotado superiormente y su supremo es m.

Ejemplo 1 *Se demuestra fácilmente que los intervalos $[a, b]$ y $[a, b)$ son subconjuntos acotados superiormente, que ambos admiten como cotas superiores los elementos del conjunto $\{x \in F : b \leqslant x\}$ y por lo tanto b es el supremo de los dos intervalos. Además $b = \operatorname{máx}([a, b])$ mientras que $[a, b)$ no tiene máximo.*

El axioma de completitud

Según mencionamos en el ejemplo anterior existen subconjuntos acotados superiormente de un conjunto ordenado que no poseen elemento máximo, pero que si poseen supremo. Nos preguntamos si todo subconjunto acotado superiormente posee un supremo. La respuesta general a esta pregunta es no. Veremos un resultado donde efectivamente esto no sucede.

Teorema 5 *El siguiente subconjunto del cuerpo de los números racionales* $\mathbb{Q}$

$$X = \{p \in \mathbb{Q} : 0 \leqslant p \wedge p^2 < 2\}$$

es acotado superiormente y no posee supremo.

Demos: Observemos que $0 \leqslant p \wedge p^2 < 2 \Rightarrow p < 2$, luego X es un conjunto acotado superiormente. Supongamos que X posea supremo $m \in \mathbb{Q}$. Por el principio de tricotomía, debe verificarse una de estas proposiciones:

$$m^2 = 2, \qquad m^2 \in X_1 = \{p \in Q : p^2 < 2\}, \qquad m^2 \in X_2 = \{p \in Q : 2 < p^2\}.$$

Veamos en primer lugar que $m^2 \neq 2$. Si sucediera esto tendríamos que $p = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ no ambos pares. Entonces se tendría que

$$m^2 = 2n^2.$$

Esto muestra que m^2 sería un número par de igual modo m sería un número par y por lo tanto que m^2 es divisible por 4. De aquí tendríamos que $2n^2$ es divisible por 4 y por lo tanto que n^2 es un número par, de donde n sería par contradiciendo nuestra hipótesis.
Para demostrar lo que falta consideremos para cada número racional $p > 0$

$$\pi = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2} \qquad \Rightarrow \qquad \pi^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}. \tag{1}$$

Si suponemos que $p \in X_1$, i.e. $p^2 - 2 < 0$, surge de la primera igualdad anterior que $p < \pi$ y de la segunda que $\pi^2 < 2$, luego p no puede ser cota superior del conjunto X. Luego toda cota superior del conjunto X debe estar en X_2. Además como

$$p \in X_2 \wedge x \in X \Rightarrow x^2 < 2 < p^2 \Rightarrow 0 < p^2 - x^2 = (p + x)(p - x) \Rightarrow p - x > 0$$

se tiene que todo $p \in X_2$ es cota superior del conjunto X.
Para terminar basta ver que el conjunto X_2 no contiene un menor elemento, esto pues si

$$p \in X_2 \Rightarrow p^2 - 2 > 0$$

y de la primera igualdad en (1) se obtiene que $\pi < p$ y de la segunda que $\pi^2 > 2$, es decir que π es una cota superior de X y por lo tanto p no puede ser el supremo de X_2. Luego de existir el supremo no satisface el principio de tricotomía, lo que es un absurdo y queda demostrado el resultado. ■

Definición 15 *El **Principio del extremo superior**. Se dice que un cuerpo ordenado F es **completo** si todo subconjunto no vacío de F acotado superiormente posee supremo.*

Lema 2 *Si F es un cuerpo ordenado completo entonces todo subconjunto no vacío del cuerpo F acotado inferiormente posee ínfimo.*

Demos: Sea $\emptyset \neq X \subset F$ acotado inferiormente, definimos el conjunto

$$-X = \{x \in F : -x \in X\}.$$

Es inmediato verificar que $-X$ es un subconjunto no vacío de F, acotado superiormente. La completitud de F asegura la existencia del supremo de dicho subconjunto. Demostrando que

$$\text{ínf}(X) = -\sup(-X),$$

la prueba queda completa. ■

Veamos a continuación algunas propiedades de los cuerpos ordenados y completos.

Teorema 6 *Sea F un conjunto ordenado y completo, entonces:*
i) El conjunto $N = \{n\epsilon : n \in \mathbb{N}\}$ no es acotado superiormente.
ii) El ínfimo del conjunto $X = \{1\epsilon/n\epsilon : n \in \mathbb{N}\}$ es θ.
iii) El ***Principio de Eudoxo-Arquímedes****: Dado $a \in F^+$ y $b \in F$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $b < na$.*

Demos: i) Siendo $\emptyset \neq N \subset F$, éste cuerpo ordenado y completo, si N fuese acotado superiormente tendría un supremo. Supongamos que sea $n = \sup(N)$, se tiene entonces que $s - 1\epsilon$ no es cota superior de N y por lo tanto existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $s - 1\epsilon < n\epsilon$, luego

$$s = (s - 1\epsilon) + 1\epsilon < n\epsilon + 1\epsilon = (n+1)\epsilon.$$

Como $(n+1)\epsilon \in N$, la desigualdad anterior indica que s no es cota superior de N por lo tanto s no puede ser el supremo del mismo.
ii) Claramente θ es una cota inferior de X, basta ver que es la mayor y para ello veremos que si $c \in F^+$ luego c no es cota inferior de X.
Como $\theta < c$ por lo visto en i) se tiene que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\theta < c^{-1} < n\epsilon = \frac{n\epsilon}{1\epsilon},$$

entonces

$$\frac{1\epsilon}{n\epsilon} = (\frac{n\epsilon}{1\epsilon})^{-1} < (c^{-1})^{-1} = c,$$

luego c no es cota inferior de X.
iii) Por lo visto en i) existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$a^{-1}.b < n\epsilon,$$

entonces se tiene que

$$b = a.(a^{-1}b) < a.(n\epsilon) = n(a\epsilon) = na.$$

De este modo queda demostrado el teorema. ■

El siguiente es un resultado debido a Georg Ferdinand Ludwing Philipp Cantor (1845 Saint Petersburgo - 1918 Halle).

Teorema 7 ***El principio del encaje de intervalos cerrados***
Sea F un cuerpo ordenado completo, si $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de intervalos cerrados encajados, i.e. tales que

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \cdots,$$

Entonces

a)
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

b) Además, si $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = \theta$*, entonces existe* $\xi \in F$ *tal que*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{\xi\}.$$

Demos: *a*) A partir de la sucesión de intervalos podemos obtener las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \cdots \qquad \cdots \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1.$$

Veamos que para $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n \leqslant b_m$. De no se así existen $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$, supongamos que $n_0 \leqslant m_0$ tales que $b_{m_0} < a_{n_0}$, luego $a_{m_0} < b_{m_0} < a_{n_0}$ lo que es una contradicción con el hecho que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente.
El conjunto $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado superiormente, luego como F es un cuerpo ordenado completo existe $s_a = \sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ siendo $a_n \leqslant s_a, \forall n \in \mathbb{N}$. Además por ser cada b_m cota superior de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ resulta $s_a \leqslant b_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
Por otro lado $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado inferiormente, tiene ínfimo y se verifica $a_n \leqslant s_b \leqslant b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Resumiendo se tienen las siguientes desigualdades

$$a_n \leqslant s_a \leqslant s_b \leqslant b_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

con lo cual resulta $[s_a, s_b] \subset [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}$ y así

$$\varnothing \neq [s_a, s_b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n].$$

Se tiene entonces que $\theta \leqslant s_b - s_a \leqslant b_n - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, luego $s_b - s_a$ es cota inferior de $\{b_n - a_n\}_{n=1}^{\infty}$, con lo cual es menor que ínfimo, de donde si éste es θ se tiene

$$\theta \leqslant s_x - s_a \leqslant \theta \Rightarrow s_b - s_a = \theta \Rightarrow s_b = s_a = \xi,$$

como queríamos probar. ■

Teorema 8 *Sea F un cuerpo ordenado que verifica el ppio. de Eudoxo-Arquímedes y el ppio. del encaje de intervalos cerrados, entonces F es un cuerpo ordenado completo.*

Demos: Sea $\varnothing \neq X \subset F$ acotado superiormente, queremos ver que existe $\xi \in F : \xi = \sup(X)$. Sea

$$M = \{m \in F : m \text{ es cota superior de } X\} = \{m \in F : m \geqslant x, \forall x \in X\}.$$

Sea $b \in M$ y $a \in X$ fijos. Consideremos la siguiente sucesión de intervalos cerrados en F. Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} > \theta$ y además $b - a \leqslant \theta$, luego por el ppio. de Eudoxo-Arquímedes, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$b - a < m\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} \Rightarrow b < a + m\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon},$$

de donde resulta $a + m\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon}$ cota superior de X, pues b lo era.
Para n fijo elegimos

$$p_n := \min\{m \in \mathbb{N} : a + m\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} \text{ es cota superior de } X\},$$

entonces

$$a + p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} \geqslant x, \forall x \in X,$$

y $a+(p_n-1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon}$ no es cota superior de X, luego existe $x_0 \in X$ tal que $a+(p_n-1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} < x_0$.
Consideremos los intervalos

$$I_n = [a_n, b_n] = [a+(p_n-1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon}, a+p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon}], n = 1, 2, ...$$

$I_n \cap X \neq \emptyset$, pues para cada n está el x_0 que mencionamos recién.
Se observemos que $p_{n+1} = 2p_n$ o bien $p_{n+1} = 2p_n - 1$. Esto pues

$$p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} = 2p_n\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon},$$

luego $a+2p_n\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon}$ es cota superior de X y $p_{n+1} \leqslant 2pn$. Por otro lado

$$(p_n-1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} = (2p_n-2)\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon},$$

con lo cual $a+(2p_n-2)\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon}$ no es cota superior de X, y resulta $2p_n - 1 \leqslant p_{n+1}$.
Si se tiene que $p_{n+1} = 2p_n$ resulta

$$a+p_{n+1}\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} = a+2p_n\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} = a+p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon},$$

es decir que $b_{n+1} = b_n$, i.e. los extremos derechos de I_n y de I_{n+1} coinciden. Además

$$a_n = a+(p_n-1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} = a+p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} - 1\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} < a+p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} - \frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} = a_{n+1}.$$

Si se tiene que $p_{n+1} = 2p_n - 1$ resulta

$$a+(p_{n+1}-1)\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} = a+(2p_n-1-1)\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} = a+(p_n-1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon},$$

es decir que $a_{n+1} = a_n$ i.e. los extremos izquierdos de I_n y de I_{n+1} coinciden. Además

$$b_{n+1} = a+p_{n+1}\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} = a+p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} - 1\frac{1\epsilon}{2^{n+1}\epsilon} < a+p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} = b_n.$$

En consecuencia en ambos casos resulta $I_{n+1} \subset I_n$, siendo $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ un encaje de intervalos cerrados en F. Además se tiene que

$$b_n - a_n = a+p_n\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} - a+(p_n-1)\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} = \frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} < \frac{1\epsilon}{n\epsilon},$$

con lo cual $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{b_n - a_n\} = \theta$. Luego por el ppio. del encaje de intervalos cerrados se obtiene que existe un único elemento $\xi \in F$ tal que $\{\xi\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$.
Falta por demostrar que efectivamente ξ es supremo del conjunto X. Veamos primero que es una cota superior, de no serlo existiría un elemento $x_0 \in X$ tal que $\theta < x_0 - \xi$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} < \frac{1\epsilon}{n\epsilon} < x - \xi,$$

y en consecuencia

$$a+\frac{p_n\epsilon}{2^n\epsilon} = a+\frac{(p_n-1)\epsilon}{2^n\epsilon} + \frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} < (a+\frac{(p_n-1)\epsilon}{2^n\epsilon} - \xi) + x < x,$$

en cuyo caso el elemento $a + \frac{p_n)\epsilon}{2^n\epsilon}$ no sería una cota superior del conjunto X, lo que es una contradicción por construcción.
Finalmente para ver que ξ es supremo de X, supongamos que no lo es. Luego existe un elemento $y \in M$ tal que $y < \xi$, con lo que existiría un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} < \xi - y$, y como $\xi \in I_n$ resultaría

$$a + \frac{(p_n - 1)\epsilon}{2^n\epsilon} = a + \frac{p_n\epsilon}{2^n\epsilon} - \frac{1\epsilon}{2^n\epsilon} > (a + \frac{p_n\epsilon}{2^n\epsilon} - \xi) + y > y,$$

en cuyo caso el elemento $a + \frac{(p_n-1)\epsilon}{2^n\epsilon}$ sería una cota superior de X contradiciendo una vez su construcción. ■

Densidad del subcuerpo racional en un cuerpo ordenado y completo

Es muy importante el siguiente resultado que presentamos sin demostración, la misma puede verse en [5]

Teorema 9 *Un cuerpo ordenado y completo es un conjunto infinito no numerable.*

Proposición 5 *Sea F un cuerpo ordenado completo y sea F_0 su subcuerpo racional. Si $x, y \in F$ son tales que $x < y$ entonces existe un $r \in F_0$ tal que $x < r < y$.*

Demos: Se tiene que $\theta < y - x$, además como $\theta < \epsilon$ por el axioma de Eudoxo-Arquímedes se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon < n_0(y - x)$ o lo que equivalente que

$$\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} < y - x. \tag{2}$$

Supongamos que $y > \theta$. Por Eudoxo-Arquímedes, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$y < m\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}.$$

Sea entonces $\tilde{m} = \min\{m \in \mathbb{N} : y \leqslant m\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}\}$. Vale entonces que $(\tilde{m} - 1)\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} < y < \tilde{m}\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}$ y por (2), resulta

$$x < y - \frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} \leqslant \tilde{m}\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} - \frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} = (\tilde{m} - 1)\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} < y.$$

En el caso $\theta > y$ sería $\theta < -x$ y por Eudoxo-Arquímedes podemos asegurar que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$-x < m\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}.$$

Sea ahora $\tilde{m} = \min\{m \in \mathbb{N} : -x \leqslant m\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}\}$. Vale que $(\tilde{m} - 1)\min\{m \in \mathbb{N} : y \leqslant m\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}\} < -x \leqslant \tilde{m}\min\{m \in \mathbb{N} : y \leqslant m\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon}\}$ y usando nuevamente (2) se obtiene que

$$-y < -x - \frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} \leqslant \tilde{m}\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} - \frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} = (\tilde{m} - 1)\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} < -x,$$

es decir $x < (1 - \tilde{m})\frac{1\epsilon}{n_0\epsilon} < y$ como queríamos probar. ■

Recuperamos para los cuerpos ordenados completos la propiedad que ya conocíamos para el subcuerpo racional de los reales. Veamos ahora un resultado que muestra que los elementos no racionales también son densos en el cuerpo.

Corolario 5 *Sea F un cuerpo ordenado y completo y F_0 su subcuerpo racional, si $x, y \in F$ tales que $x < y$ entonces existe $z \in F \backslash F_0$ tal que $x < z < y$.*

Demos: Sean $p, q \in F_0$ tales que $x < p < q < y$, esto es posible debido al teorema precedente. Como F es un conjunto no numerable y F_0 lo es resulta $F \backslash F_0 \neq \emptyset$, luego sea $\theta < w \in F \backslash F_0$. Por el axioma de E-A existe un $n \in \mathbb{N}$, tal que $w < n(q - p)$, entonces, simbolizando $z = p + \frac{1\epsilon}{n\epsilon} \cdot w$ resulta $x \in F \backslash F_0$ y además $q < z < q$. ■

El resultado fue enunciado para cuerpos ordenados completos pero es válido para cualquier cuerpo arquimediano (cuerpo ordenado que verifique E-A), en cuyo caso para el corolario debe agregarse la hipótesis $F \backslash F_0 \neq \emptyset$.

UNICIDAD Y EXISTENCIA DE LOS CUERPOS ORDENADOS Y COMPLETOS

Teorema 10 *Si F y G son dos cuerpos ordenados y completos luego son isomorfos.*

Este resultado, si bien no establece la unicidad de los cuerpos ordenados y completos, nos permite considerarlos como idénticos a través de la existencia de un isomorfismo que los vincula.
La demostración, que omitimos, sigue el siguiente esquema:

a) Se construye un isomorfismo entre los subcuerpos racionales respectivos F_0 y G_0, la existencia de este isomorfismo fue establecida en la Proposición 4.

b) Se extiende dicho isomorfismo a todo el cuerpo F utilizando argumentos de densidad, haciendo uso de la densidad del subcuerpo racional F_0 en F.

Esta noción de unicidad nos permite introducir la siguiente:

Definición 16 *Se denomina **cuerpo de los números reales** y se simboliza $\mathbb{R}$, al cuerpo ordenado y completo, cuyos elementos son denominados números reales.*

Para demostrar la existencia de un cuerpo ordenado y completo es necesario describir explícitamente uno de ellos a partir de elementos ya definidos, por ejemplo los números racionales. En dicho caso, los elementos del cuerpo ordenado y completo serán ciertos subconjuntos de números racionales y en él se definirán operaciones de adición y multiplicación y una relación de orden que verifique los axiomas correspondientes.
Existen diferentes construcciones basadas en estas ideas aparecidas de modo independiente en la segunda mitad del siglo XIX, por Weierstrass (1869), Dedekind (1872) y Cantor (1872). Nosotros consideraremos la construcción de cortaduras de Dedekind.

1.8. Representación decimal de los números reales

Recordemos

Definición 17 *Dado $x \in \mathbb{R}$ se define como* **parte entera** *de x como el único entero tal que $[x] \leqslant x < [x]+1$*

Para la representación decimal de un número real podemos reducir el análisis a $0 \leqslant x < 1$ pues $0 \leqslant x - [x] < 1$ y $x = [x] + (x - [x])$. Simbolizamos con $D = \{0, 1, \cdots, 9\}$ el conjunto de los dígitos.

Proposición 6 *Dado $x \in [0,1)$ existe una sucesión $\{x_n\} \subset D$, tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}.$$

Demos: Probamos que existe una sucesión $\{x_n\} \subset D$ que verifica

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{10^n} \leqslant x < \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{x_n + 1}{10^m}.$$

En este caso, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 \leqslant x - \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{10^n} < \frac{1}{10^m}$ y luego resulta que

$$x = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}.$$

La sucesión se obtiene por recurrencia.

Paso 1): Sea $x_1 = [10x]$, se tiene que al ser $0 \leqslant 10x < 10 \to x_1 \in D$. Además

$$x_1 \leqslant 10x < x_1 + 1 \Rightarrow \frac{x_1}{10} \leqslant x < \frac{x_1 + 1}{10}.$$

Paso 2) Habiendo obtenido $x_1 \in D$ que verifica la última desigualdad, i.e. $0 \leqslant 10(x - \frac{x_1}{10}) < 1$, se define

$$x_2 = [10^2(x - \frac{x_1}{10})].$$

Resulta $x_2 \in D$ y además

$$x_2 \leqslant 10^2(x - \frac{x_1}{10}) < x_2 + 1 \Rightarrow \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} \leqslant x_2 < \frac{x_1}{10} + \frac{x_2 + 1}{10^2}.$$

Paso m): En general, una vez obtenidos $\{x_1, x_2 \cdots, x_{m-1}\} \subset D$ tales que verifican

$$0 \leqslant x - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{10^n} < \frac{1}{10^{m-1}},$$

se define

$$x_m = [10^m(x - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{10^n})].$$

Resulta $x_m \in D$ y además

$$x_m \leqslant 10^m(x - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{10^n}) < x_m + 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{10^n} \leqslant x < \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{x_m + 1}{10^m},$$

como queríamos demostrar. ■

Definición 18 *Dado un número real $x \in [0,1]$ se denomina* **representación decimal** *de x a toda sucesión $\{x_n \subset D\}$ tal que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}.$$

Usualmente se nota $0, x_1 x_2 x_3 \cdots x_m \cdots$.

UNICIDAD DE LA REPRESENTACIÓN DECIMAL?

Si modificamos ligeramente la definición de parte entera de un número real x y lo tomamos como el único número entero $[x]$ tal que $[x] < x \leqslant [x] + 1$ puede probarse siguiendo los pasos de la demostración anterior, la existencia de una sucesión $\{\xi_n\} \subset D$ tal que $\forall m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\xi_n}{10^n} < x \leqslant \sum_{n=1}^{m-1} \frac{\xi_n}{10^n} + \frac{\xi_n + 1}{10^n}.$$

Resulta entonces que $0, \xi_1\xi_2 \cdots$ es una nueva representación decimal del número x, la cual en principio no tiene por qué ser igual a la ya obtenida. Por lo tanto, en principio, podemos afirmar que la representación decimal de un número real no es necesariamente única. Para analizar esta situación veremos si existen números reales con más de una representación decimal y dicho caso que características tienen dichas representaciones.
Supongamos que existe $x \in [0,1]$ que admite 2 representaciones decimales diferentes $\{x_n\}$ y $\{\xi_n\}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_n = x_n, \forall n = 1, \cdots, m-1$ y que $\xi_m < x_m$.
Por la definición de representación decimal de x se tiene que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{10^n},$$

de donde resulta que

$$x_m - \xi_m = 10^m \Big(\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\xi_n}{10^n} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n} \Big) = 10^m \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\xi_n - x_n}{10^n}.$$

Como los $x_n, \xi_n \in D$ se tiene que $1 \leqslant (x)_m - \xi_m$ y que $|\xi_n - x_n| \leqslant 9$ si $n > m$, en consecuencia

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\xi_n - x_n}{10^n} \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|\xi_n - x_n|}{10^n} \leqslant 9 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^m}.$$

Se ha obtenido entonces que

$$1 \leqslant x_m - \xi_m = 10^m \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\xi_n - x_n}{10^n} \leqslant 1$$

y esto ocurre si y sólo si se verifican simultáneamente las condiciones siguientes:

- $x_m - \xi_m = 1$
- $m < n \Rightarrow \xi_n - x_n = 9 \Rightarrow x_n = 0 \wedge \xi_n = 9.$

En conclusión probamos que si $x \in [0,1]$ tiene dos representaciones decimales entonces se tiene que para algún $m \in \mathbb{N}$ es

$$x = \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{10^n} = \frac{1}{10^m} \sum_{n=1}^{m} 10^{m-n} x_n.$$

Como $\sum\limits_{n=1}^{m} 10^{m-n} x_n \in \mathbb{N}$, resulta que debe ser x un número racional cuya representación irreducible posea denominador con únicos factores primos a lo sumo 2 y 5. Además dichos números aceptan únicamente dos representaciones decimales diferentes dadas por

$$0, x_1x_2 \cdots x_m 0000 \cdots, \qquad y \qquad 0, x_1x_2 \cdots (x_m - 1)9999 \cdots$$

Notemos que la primera representación es la obtenida a partir del procedimiento utilizado en la Proposición 6, mientras que la segunda se obtiene a partir de la definición de $[x]$. Luego dichos procedimientos pueden considerarse los únicos para la obtención de la representación decimal de los números reales del intervalo $[0,1)$, salvo para los números racionales cuya representación irreducible posee un denominador cuyos únicos factores primos son, a lo sumo, 2 y 5, en cuyo caso estos 2 métodos dan las 2 únicas posibles representaciones decimales.

Una vez seleccionado uno de los procedimientos para la obtención de la representación decimal de los números reales del intervalo '$[0,1)$, queda determinada una aplicación entre dichos números y las sucesiones de dígitos. La definición de representación decimal de un número real muestra que esta aplicación de inyectiva. Notemos además que, fijado un procedimiento quedan sucesiones fuera del recorrido de la aplicación, a saber las sucesiones tales que a partir de un cierto término son todos 0 o 9, dependiendo del procedimiento elegido. Eligiendo cualquiera de los 2 procedimientos el complemento del conjunto recorrido de esta aplicación es un conjunto numerable.
Cabe destacar que la elección del conjunto D formado por 10 dígitos no es esencial y que puede ser reemplazado por subconjuntos de tipo $\{1,2,\cdots,m\}$ para un $1 < m \in \mathbb{N}$ cualquiera.
Basta entonces repetir el razonamiento reemplazando el número 10 por el número m, siendo de particular interés el caso $m = 2$, con el que se obtiene la representación binaria de los números reales.

A partir de la representación decimal de los números reales puede obtenerse otra prueba de la no numerabilidad de tal conjunto, la misma está basada en el método de diagonalización utilizado en la demostración original obtenida por Georg Cantor.

1.9. El conjunto de los números reales extendidos

Para facilitar el tratamiento de algunos temas es conveniente extender el conjunto de los números reales mediante la incorporación de dos nuevos elementos, que simbolizaremos $-\infty$ y $+\infty$. Al conjunto así obtenido se lo llama conjunto de los números reales extendidos y se simboliza $\bar{\mathbb{R}}$.

Extenderemos a $\bar{\mathbb{R}}$ las operaciones algebraicas y la relación de orden definidas en el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Para ello introducimos las siguientes definiciones. Sea $x \in \mathbb{R}$

a)

$$x + (\pm\infty) = \pm\infty + x = (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$

$$x\cdot(\pm\infty) = \pm\infty\cdot x = \begin{cases} \pm\infty, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \mp\infty, & x < 0, \end{cases}$$

$$\pm\infty\cdot(\pm\infty) = +\infty, \qquad \pm\infty\cdot(\mp\infty) = -\infty,$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0.$$

b)

$$-\infty < x < +\infty.$$

Observemos que no se define $(\pm\infty) + (\mp\infty)$, por lo tanto la extensión de la adición no resulta ser una operación en $\bar{\mathbb{R}}$. Tampoco están definidos los cocientes $\frac{+\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, ni $\frac{-\infty}{-\infty}$.
Las propiedades algebraicas importantes de la adición y de la multiplicación, como son la asociatividad, la conmutatividad y la distributiva se mantienen en los casos en que dichas operaciones estén definidas.
La extensión del orden sigue siendo un orden lineal.

Una primera aplicación del conjunto de los números reales extendidos es la generalización del concepto de extremo superior o supremo de un subconjunto de números reales.
Sabemos que si $S \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto no vació y acotado superiormente, entonces su supremo, $\sup(S)$, es la menor de las cotas superiores cuya existencia está asegurada por el axioma del

extremo superior.
Definiendo $\sup(S) = +\infty$ si S es un conjunto no acotado superiormente, y $\sup(\emptyset) = -\infty$, logramos que quede definido el supremo para todo subconjunto de S de $\mathbb{R}$ y en todos los casos $\sup(S)$ resulta ser el menor número real extendido que es mayor o igual que todo elemento de S, es decir la menor cota superior "extendida".
Se consideran convenciones similares para el caso del ínfimo de un conjunto S de números reales, resultando entonces

$$\inf(S) = -\sup(-S),$$

donde $-S = \{x \in \mathbb{R} : -x \in S\}$.

1.10. Sucesiones de números reales

Recordemos que una sucesión $\{x_n\}$ de números reales es una aplicación del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, tal que la imagen del número natural n es el número real x_n. Supondremos conocidas las propiedades elementales de estas sucesiones.

Convergencia de sucesiones

Definición 19 *Diremos que un número $l \in \mathbb{R}$ es el* ***límite de la sucesión $\{x_n\}$*** *si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \in \mathbb{N} \wedge n \geqslant \nu \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon,$$

en cuyo caso diremos que la sucesión $\{x_n\}$ es ***convergente*** *, o más precisamente converge al número l.*

Es fácil ver que si la sucesión de números reales $\{x_n\}$ es convergente, entonces posee un único límite l, al que se simboliza como

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad\qquad x_n \to l$$

Definición 20 *Una sucesión $\{x_n\}$ de números reales se denomina una* ***sucesión de Cauchy*** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\nu \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, \nu \leqslant m, \nu \leqslant n \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Este concepto es muy importante pues permite caracterizar a las sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$ sin necesidad de conocer su límite. Esto surge ya que se tiene el siguiente resultado

Proposición 7 *Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

Demos: $\Rightarrow$)La demostración de la necesidad es evidente y queda como ejercicio.
$\Leftarrow$) Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy, veamos que es convergente. Podemos definir, por recurrencia, una sucesión de números naturales $\{n_k\}$ del siguiente modo: $n_1 = 1$, y suponiendo que se ha obtenido el n_{k-1}, definimos

$$n_k = \min\{n > n_{k-1} : |x_p - x_q| < \frac{1}{2^{k+1}}, p \geqslant n \wedge q \geqslant n\}.$$

Consideremos los intervalos cerrados

$$I_k = \left[x_{n_k} - \tfrac{1}{2^k}, x_{n_k} + \tfrac{1}{2^k}\right]$$

y observemos que, como $|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < \frac{1}{2^{k+1}}$ resulta $I_{k+1} \subset I_k$ ya que

$$x \in I_{k+1} \Rightarrow |x - x_{n_k}| \leqslant |x - x_{n_{k+1}}| + |x_{n_{k+1}} x_{n_k}| < \tfrac{1}{2^{k+1}} + \tfrac{1}{2^{k+1}} = \tfrac{1}{2^k}.$$

Aplicando el axioma de encaje de intervalos, podemos afirmar que $\cap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \varnothing$.
Sea entonces $l \in \cap_{k=1}^{\infty} I_k$. Si $\mu \geqslant n_k$ se tiene que $|x_\mu - x_{n_k}| < \frac{1}{2^{k+1}}$, es decir que $x_\mu \in I_{k+1}$, y por lo tanto se tiene que

$$\mu \in \mathbb{N} \wedge \mu \geqslant n_k \Rightarrow |x_\mu - l| < \frac{1}{2^k},$$

es decir que la sucesión $\{x_n\}$ converge al número l. ■

Existe una noción más débil que la de ser el límite de una sucesión de número reales

Definición 21 *Un número real l es un **punto de adherencia** se la sucesión de números reales $\{x_n\}$, si para todo $\varepsilon > 0$, el conjunto*

$$\{n \in \mathbb{N} : |x_n - l| < \varepsilon\}$$

es infinito o, lo que equivalente, si dado $\varepsilon > 0$, y $\nu \in \mathbb{N}$ existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \nu$ y $|x_n - l| < \varepsilon$.

Claramente si l es el límite de la sucesión $\{x_n\}$, entonces l es un punto de adherencia de la misma, la recíproca no es, en general cierta. Por ejemplo la sucesión $\{(-1)^n + \frac{1}{n}\}$ tiene a 1 y -1 como puntos de adherencia pero no tiene límite.

Puede extenderse las nociones de límite y punto de adherencia a una sucesión de números reales extendidos

Definición 22 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales.*
*a) Se dice que la sucesión **diverge a $+\infty$** , y lo simbolizamos cmo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, si para cada $M > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

*b) Se dice que $+\infty$ **es un punto de adherencia** de la sucesión, si $\forall M > 0$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > M\}$ es infinito, o lo que es equivalente, si para $M > 0$ y para cada $\nu \in \mathbb{N}$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \nu$ y $x_n > M$.*

Nota 2 *Análogamente se tienen definiciones de límite y punto de adherencia para el el caso del número real extendido $-\infty$.*

Definición 23 *Si $\{x_n\}$ es una sucesión de números reales, definimos su **límite superior** y su **límite inferior** , que simbolizaremos $\overline{\lim}\, x_n$ y $\underline{\lim}\, x_n$ respectivamente, a los números reales extendidos:*

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_n \sup_{n \leqslant k} x_k = \inf\{\sup\{x_k : n \leqslant k\} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\underline{\lim}\, x_n = \sup_n \inf_{n \leqslant k} x_k = \sup\{\inf\{x_k : n \leqslant k\} : n \in \mathbb{N}\}$$

Como todo subconjunto de $\mathbb{R}$ posee supremo e ínfimo en el conjunto de los reales extendidos, resulta que toda sucesión posee límite superior y límite inferior. Caractericemos los tres casos posibles

Proposición 8 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales. Entonces:*

1. $\overline{\lim}\, x_n = l \in \mathbb{R}$ *si y sólo si se verifican las siguientes dos condiciones:*
   i) dado $\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant n$ resulta $x_k < l + \varepsilon$.
   ii) dados $\varepsilon > 0$ y un $n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n$ tal que $l - \varepsilon < x_k$.
2. $\overline{\lim}\, x_n = +\infty$ *si y sólo si dados $M > 0$ y $n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, k \geqslant n$ tal que $x_k > M$.*
3. $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$ *si y solamente si $\lim x_n = -\infty$.*

Demos: Notemos que $\sup\{x_k : k \geqslant n\}$ forma una sucesión monótona decreciente, mientras que $\inf\{x_k : k \geqslant n\}$ es una sucesión monótona creciente. El resto queda como ejercicio. ■

Proposición 9 *Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales, entonces*

1. $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}(-x_n)$,
2. $\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n$,
3. $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = l \Rightarrow \lim x_n = l$,
4. $\underline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leqslant \underline{\lim}(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \underline{\lim}\, y_n \leqslant \overline{\lim}(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim}\, x_n + \overline{\lim}\, y_n$, *siempre que las sumas estén definidas.*

Demos: : Ejercicio. ■

1.11. La topología del cuerpo de los números reales

El objetivo de este parágrafo es considerar las principales propiedades topológicas de los subconjuntos de números reales. Estas propiedades son aquellas basadas en las nociones de proximidad y de límite y, que están estrechamente relacionadas con el comportamiento de funciones continuas.
Usaremos frecuentemente el lenguaje geométrico, por lo cual nos referiremos al cuerpo $\mathbb{R}$ como la recta real, hablaremos de punto en lugar de número real, traduciremos la relación $a < b$ por la expresión a está a la izquierda de b, el valor absoluto $|b-a|$ será interpretado como la distancia del punto b al punto a, etc.

Subconjuntos abiertos de números reales

Los subconjuntos más sencillos de la recta real son los ***intervalos*** . Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, consideraremos los ***intervalos abiertos*** :

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad (a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \quad (-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \quad (-\infty,+\infty) = \mathbb{R},$$

y los ***intervalos cerrados*** :

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}, \quad [a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}, \quad (-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}.$$

También consideraremos los ***intervalos semiabiertos*** :

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}, \qquad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant< x < b\}.$$

Queremos generalizar la idea de intervalo, en el caso de los intervalos abiertos, la generalización está dada por los subconjuntos abiertos de la recta real.

Definición 24 *Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es* ***abierto*** *si para cada $x \in A$ existe un número $\delta > 0$ tal que*

$$(x-\delta, x+\delta) = \{y \in \mathbb{R} : |y-x| < \delta\} \subseteq A.$$

De manera equivalente podemos decir que un subconjunto A es abierto si para cada $x \in A$ existe un intervalo abierto I_x tal que $x \in I_x \subseteq A$.
Resulta inmediato que los intervalos abiertos son un ejemplo de subconjuntos abiertos de la recta, como así también el espacio $\mathbb{R}$ y el conjunto vacío. El siguiente resultado establece propiedades de los subconjuntos abiertos de números reales.

Proposición 10 *La familia $\mathcal{G}$ de los subconjuntos abiertos de números reales es una topología en $\mathbb{R}$, es decir que:*

T1 $\mathbb{R} \in \mathcal{G}$ *y* $\varnothing \in \mathcal{G}$,

T2 $A_1 \in \mathcal{G} \wedge A_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{G}$,

T3 *Si Λ es un conjunto arbitrario de índices, entonces*

$$A_\lambda \in \mathcal{G}\, \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{G}$$

Demos: Ejercicio. ■

La propiedad $[T2]$ de la proposición anterior asegura que la familia $\mathcal{G}$ es cerrada con respecto a intersecciones finitas, no ocurre lo mismo con intersecciones infinitas. Por ejemplo sea para $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, luego $A_n \in \mathcal{G} \forall n \in \mathbb{N}$ pero $\bigcap_n A_n = \{0\} \notin \mathcal{G}$.

La propiedad $[T3]$ muestra que la unión de una familia arbitraria de intervalos abiertos es un subconjunto abierto de la recta, el siguiente resultado es una forma fuerte de la recíproca de ese resultado.

Proposición 11 ***Caracterización de los subconjuntos abiertos en $\mathbb{R}$***
Todo subconjunto abierto y no vacío de números reales es la unión de una familia a lo sumo numerable de intervalos abiertos, disjuntos dos a dos.

Demos: Sea A un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}$. Para $x \in A$ se tiene que los subconjuntos

$$\{y \in \mathbb{R} : y < x \wedge (y, x) \subset A\} \qquad \{z \in \mathbb{R} : x < z \wedge (x, z) \subset A\}$$

son no vacíos. Definimos

$$a = \inf\{y \in \mathbb{R} : y < x \wedge (y, x) \subset A\} \qquad b = \sup\{z \in \mathbb{R} : x < z \wedge (x, z) \subset A\}.$$

Resulta entonces que a y b son números reales extendidos tales que $a < x < b$ e $I_x = (a, b)$ es un intervalo abierto que contiene a x.
Se tiene que $I_x \subset A$. Pues, sea w tal que $x < w < b$. Entonces por la definición de b, existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que $w < y$ y $(x, y) \subset A$. Por lo tanto $w \in A$. De modo similar se ve que si $a < w < x$, se obtiene el mismo resultado.

Veamos ahora que $a \notin A$ y $b \notin A$. Consideramos sólo el caso en que a, b son números reales. Si suponemos que $b \in A$, por ser éste un conjunto abierto, existe $\delta > 0$ tal que $(b - \delta, b + \delta) \subset A$. De aquí se tiene que $(x, b + \delta) \subset A$, lo que contradice la definición de b. De manera análoga para a.

Como se tiene que

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} I_x \subseteq A \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} I_x$$

luego A es la unión de una familia de intervalos abiertos.

Veamos que la familia $\{I_x : x \in A\}$ es disjunta dos a dos, es decir que

$$I_x \cap I_y \neq \varnothing \Rightarrow I_x = I_y.$$

Si $I_x = (a_x, b_x)$ e $I_y = (a_y, b_y)$ tenemos que

$$I_x \cap I_y \neq \varnothing \rightarrow a_y < b_x \vee a_x < b_y,$$

y como $a_y \notin A \rightarrow a_y \leqslant a_x$ y como $a_x \notin A \rightarrow a_x \leqslant a_y$ luego $a_y = a_x$. De manera análoga se tiene que $b_x = b_y$, de donde $I_x = I_y$.

Hemos visto que la familia $\{I_x : x \in A\}$ está constituida por intervalos abiertos disjuntos dos a dos y que su unión es A. Veamos que tal familia es a lo sumo numerable. Consideremos una ordenación $Q = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, de los números racionales. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rlcl} \Psi : & \{I_x : x \in A\} & \to & \mathbb{N} \\ & I_x & \mapsto & \Psi(I_x) = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : q_n \in I_x\}, \end{array}$$

esto es posible debido a la densidad de los números racionales en el cuerpo de los números reales y al principio de la buena ordenación. La aplicación Ψ es inyectiva, puesto que

$$\Psi(I_x) = \Psi(I_y) = r \Rightarrow q_r \in I_x \cap I_y \Rightarrow I_x = I_y \Rightarrow x = y.$$

Se obtiene así que Ψ establece una correspondencia biyectiva entre el conjunto $\{I_x : x \in A\}$ y un subconjunto de $\mathbb{N}$. ■

Proposición 12 *Teorema de Lindelöff*
Sea $\Gamma = \{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ una familia de subconjuntos abiertos de números reales, entonces existe una subfamilia $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$, a lo sumo numerable de Γ tal que

$$\bigcup_{G \in \Gamma} G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n.$$

Demos: Sea $H = \bigcup\limits_{G \in \Gamma} G$ y $x \in H$. Entonces existe un $G \in \Gamma$ tal que $x \in G$. Además puesto que G es un subconjunto abierto, existe un intervalo abierto I_x, tal que $x \in I_x \subset G$. Más aun, por la densidad de los números racionales en $\mathbb{R}$, podemos encontrar un intervalo J_x de extremos racionales tal que $x \in J_x \subset I_x$.

La colección $\{J_x : x \in H\}$ es a lo sumo numerable y además $H = \bigcup\limits_{x \in H} J_x$. Para cada uno de los intervalos J_x elegimos un conjunto $G \in \Gamma$ que lo contenga. Obtenemos así una subfamilia a lo sumo numerable $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ de Γ tal que $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. ■

SUBCONJUNTOS CERRADOS DE NÚMEROS REALES

Definición 25 *Sea $E \subset \mathbb{R}$, entonces*
*a) Un punto $x \in \mathbb{R}$ es un **punto de adherencia** de E si para todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in E$ tal que $|x - y| < \varepsilon$.*
*b) El conjunto de los puntos de adherencia de E se denomina **clausura de E** , y se simboliza $\overline{E}$.*
*c) Se dice que un conjunto E es **cerrado** si $E = \overline{E}$.*

Lema 3 *Sea E un conjunto de números reales.*
a) Un número $x \in \mathbb{R}$ es un punto de adherencia de E si y sólo si todo intervalo abierto que contiene a x también contiene un punto de E.
b) Todo punto de E es un punto de adherencia de E, i.e. $E \subset \overline{E}$, en consecuencia E es cerrado si y sólo si $\overline{E} \subset E$.

Demos: : Ejercicio ■

Ejemplo 2 *Los intervalos cerrados, el espacio $\mathbb{R}$ y el conjunto vacío son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$.*

Proposición 13 *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, entonces*
a) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, y por lo tanto, la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, i.e. la clausura de todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es un subconjunto cerrado.

Demos: a) Es inmediata.
b) Como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, se tiene que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ y por lo tanto resulta que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
Recíprocamente, supongamos que $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$, luego existe $\delta_1 > 0$, tal que $A \cap \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \delta_1\} = \varnothing$ y existe $\delta_2 > 0$ tal que $B \cap \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \delta_2\} = \varnothing$. Por lo tanto si $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ tendremos que

$$(A \cup B) \cap \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \delta\} = \varnothing,$$

y en consecuencia $x \notin \overline{A \cup B}$.
c) Basta probar que $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Sea $x \in \overline{\overline{A}}$, entonces dado $\delta > 0$, existe $y \in \overline{A}$ tal que $|y - x| < \delta/2$ y siendo $y \in \overline{A}$ existe $z \in A$ tal que $|z - y| < \delta/2$. Por lo tanto, al ser $z \in A$ y $|z - x| < |z - y| + |y - x1 < \delta$, resulta $x \in \overline{A}$. ■

Proposición 14 *Un subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ es cerrado si y sólo si su complemento $\complement E$ es abierto.*

Demos: Probemos primero la necesidad. Supongamos que E es cerrado y sea $x \notin \overline{E} = E$. Entonces x no es un punto de adherencia de E y por lo tanto existe un $\delta > 0$ tal que

$$E \cap \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \delta\} \subset \complement E,$$

es decir que $\complement E$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$.
Veamos ahora la suficiencia. Supongamos que $\complement E$ sea abierto y que $x \in \complement E$, luego existe $\delta > 0$ tal que $\{y \in \mathbb{R} : |y - x| < \delta\} \subset \complement E$, es decir que x no es un punto de acumulación de E. Entonces E contiene a todos sus puntos de acumulación y resulta así un subconjunto cerrado. ■

Nota 3 *El resultado anterior sugiere que las nociones de abierto o cerrado son excluyentes, esto no es cierto pues tanto el espacio $\mathbb{R}$ y el $\varnothing$ son abiertos y cerrados a la vez.*
Tampoco debe pensarse que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ es abierto o cerrado, por ejemplo el intervalo $[a, b)$ no es ni abierto ni cerrado.

El teorema de Heine-Borel

Veremos en este parágrafo una propiedad fundamental que verifican los subconjuntos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$. Para ello introduciremos algunas definiciones.

Definición 26 a) *Una familia $\Lambda = \{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ es un* ***cubrimiento*** *de un subconjunto $E \subset \mathbb{R}$ si $E \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$.*
b) *Si además, A_γ es abierto $\forall \gamma \in \Gamma$, entonces se dice que Λ es un* ***cubrimiento abierto*** *de E.*
c) *Si en particular Λ es una familia finita, se dice que es un* ***cubrimiento finito*** *de E.*

Teorema 11 ***de Heine-Borel***
Si F es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ entonces todo cubrimiento abierto de F admite un subcubrimiento finito de F. Es decir que si $\Lambda = \{G_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es un cubrimiento de F entonces existe un subconjunto finito $\{G_k : k = 1, \cdots, n\}$ tal que

$$F \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_k.$$

Demos: i) Veamos primero el resultado para el caso en que $F = [a, b]$. Definimos el conjunto

$$E = \{x \in [a, b] : [a, x] \; puede \; ser \; cubierto \; por \; una \; subflia \; finita \; de \; \Gamma\}.$$

Se tiene que E es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ (puesto que $a \in E$), acotado superiormente (puesto que b es una cota superior de E), por lo tanto E posee supremo $c \in [a, b]$. Veamos que $c = b$.
Si $c < b$ existe un $\gamma \in \Gamma$ tal que $c \in G_\gamma$, entonces como G_γ es abierto, existe $0 < \varepsilon_{\bar{c}}a$, tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset G_\gamma$. Por definición de c, se tiene que $c - \varepsilon \in E$, luego existe una subfamilia finita $\{G_k : k = 1, \cdots, m\} \subset \Lambda$ tal que

$$[a, c - \varepsilon] \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_k.$$

De este modo resulta que $\{G_1, G_2, \cdots, G_m, G_\gamma\}$ un subcubrimiento finito de $[a, c + \varepsilon]$, de donde $c + \varepsilon \in E$ contradiciendo la definición de c.
Resulta entonces que $c = b$ y en forma completamente similar, se muestra que $b \in E$, con lo que el teorema queda demostrado en el caso particular analizado.

ii) Sea ahora $F \subset \mathbb{R}$ cerrado y acotado, por lo tanto existe un intervalo cerrado tal que $F \subset [a, b]$. La familia $\tilde{\Lambda} = \Lambda \cup \{\complement F\}$ constituye un cubrimiento abierto del intervalo cerrado $[a, b]$.
Por lo visto en *i*) sabemos que existe una subfamilia finita de $\tilde{\Lambda}$ que es un cubrimiento abierto de $[a, b]$ y por lo tanto de F, claramente si $\complement F$ forma parte de dicha familia se puede eliminar. ■

Corolario 6 *Sea $\Lambda = \{F_\gamma : \gamma \in I\}$ una familia de subconjuntos cerrados de números reales tales que la intersección de toda subfamilia de conjuntos de Λ tiene intersección no vacía. Si al menos uno de los elementos de Λ es acotado, entonces*

$$\bigcap_{\gamma \in I} F_\gamma =\neq \emptyset.$$

Demos: : Queda como ejercicio. ■

Teorema 12 *Sea $F \subset \mathbb{R}$, entonces son equivalentes:*
i) F es cerrado y acotado.
ii) Todo cubrimiento abierto de F contiene un subcubrimiento finito.
iii) Toda sucesión de puntos de F contiene una subsucesión convergente a un punto de F.

Demos: *i*) $\Leftrightarrow$ *iii*) Es el teorema de Bolzano-Weierstrass.
i) $\Rightarrow$ *ii*) Es el teorema de Heine-Borel.
ii) $\Rightarrow$ *i*) Sea F un conjunto que verifica *ii*), veamos que es acotado y cerrado.
Sea $\Gamma = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de abiertos que cubre $\mathbb{R}$, por lo tanto también lo hace con F, luego existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} (-n, n) = (-n_0, n_0)$ entonces F es acotado.
Supongamos que existe un $\psi \in F'$ tal que $\psi \notin F$. Consideremos la familia creciente de abiertos $O_n = \{x \in \mathbb{R} : |x - \psi| > 1/n\}$. Dicha familia resulta un cubrimiento abierto de F, luego existirá una subfamilia finita que cubra F, luego

$$F \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} O_n = \{x \in \mathbb{R} : |x - \psi| > 1/n_0\}.$$

De donde en el entorno $E_{1/n_0}(\psi)$ no contiene puntos de F, lo que contradice el hecho que $\psi \in F'$.
Por lo tanto F es cerrado. ■

.

Definición 27 *Diremos que un conjunto $F \subset \mathbb{R}$ es **compacto** si tiene alguna de las propiedades del teorema anterior.*

1.12. Conjuntos perfectos. Conjuntos de Cantor

Definición 28 *Diremos que un conjunto P es **perfecto** si coincide con P'.*

Nota 4 *Un conjunto perfecto es cerrado pues contiene a sus puntos de acumulación y no tiene puntos aislados.*

Teorema 13 *Todo conjunto perfecto no vacío es no numerable.*

Demos: Sea $P \neq \emptyset$ perfecto, supongamos que es numerable. Sea $P = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, esto es posible pues si fuese P finito, sería $P' = \emptyset$ y por tanto no sería perfecto. Construimos una sucesión de puntos en P, tomando $x_1 = x_{n_1}$ y sea E_1 un entorno de x_{n_1} (contiene un intervalo abierto centrado en x_{n_1}). Como $x_{n_1} \in P'$ existen infinitos $x_n \in E_1$. Sea $x_{n_2} \in P$ tal que $n_1 < n_2$ y n_2 es el menor índice tal que $x_{n_2} \in E_1$, i.e. $n_1 < j < n_2$ luego $x_j \notin E_1$.
Sea ahora E_2 un entorno abierto de x_{n_2} tal que $x_{n_1} \notin \overline{E}_2$ y $\overline{E} \subset E_1$. Repitiendo este proceso con $x_{n_2} \in P'$ encontramos un $x_{n_3} \in E_2$ tal que $n_1 < n_2 < j < n_3$ y $x_j \notin E_2$ (n_3 primer índice mayor que n_2 tal que $x_{n_3} \in E_2$). Así siguiendo, se obtiene una sucesión de elementos (x_{n_i}) de P y una sucesión de entornos abiertos E_i de estos puntos tales que

$$n_i < n_{i+1} \Rightarrow x_{n_{i+1}} \in E_i, \quad n_i < j < n_{i+1} \Rightarrow x_j \notin E_i, \quad x_{n_i} \notin \overline{E}_{i+1}, \quad \overline{E}_{i+1} \subset E_i.$$

Observemos que siendo (x_{n_i}) una sucesión acotada, pues $\{x_{n_i}\} \subset E_1$, contiene una subsucesión $(x_{n_{i_k}})_k$ convergente a cierto x. Además $x \in P' = P$.
Ahora si fijamos $i \in \mathbb{N}$, entonces $\forall j > i \Rightarrow x_{n_j} \in E_j \subset E_{i+1} \subset \overline{E}_{i+1}$, en consecuencia $x = \text{lím}\, k \to \infty x_{n_{i_k}} \in \overline{E}_{i+1}$ y como $x_{n_i} \notin \overline{E}_{i+1}$ sigue que $x \neq x_{n_i}, \forall i$.
Ahora, para cierto $i_0 \in \mathbb{N}$ tendremos que

$$n_{i_0} < m < n_{i_0+1}, x = x_n \in P,$$

tendríamos que $x_m = x \in \overline{E}_{i_0+1} \subset E_{i_0}$ siendo $m < n_{i_0+1}$, esto contradice el hecho de que n_{i_0+1} es el primer índice mayor que n_{i_0} tal que $x_{n_{i_0+1}} \in E_{i_0}$. Luego P no es numerable. ■

El conjunto de Cantor

Hay conjuntos perfectos con cardinal igual a la potencia del continuo de medida cero. Consideremos los conjuntos $F_0 = [0,1]$ (es $1 = 2^0$ intervalo cerrado de longitud $1/3^0$), $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ (son $2 = 2^1$ intervalos cerrados de longitud $1/3^1$), $F_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ (son $4 = 2^2$ intervalos cerrados de longitud $1/3^2$). Continuamos con este procedimiento, en la etapa n a cada uno de los 2^{n-1} intervalos cerrados de la etapa anterior los subdividimos en 3 intervalos de igual longitud $1/3^n$ y eliminamos el intervalo abierto central, resulta que F_n tiene 2^n intervalos cerrados de longitud $1/3^n$.

Se obtiene así una sucesión $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de cerrados no vacíos tales que $F_n \supset F_{n+1}$, por lo tanto el conjunto $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ es no vacío y cerrado. Este conjunto se denomina ***conjunto de Cantor*** .
Veamos que es perfecto. Como K es cerrado $K' \subset K$. Para establecer la otra contención sea $x \in K$

luego $x \in F_n, \forall n$ y cada uno de los F_n consta de 2^n intervalos cerrados de longitud $1/3^n$. Sean $\varepsilon > 0$ y $E_\varepsilon(x)$ entorno de x. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/3^{n_0} < \varepsilon$, entonces $x \in I^j_{n_0}$ intervalo cerrado de longitud $1/3^{n_0}$ componente de F_{n_0} y se tiene que $I^j_{n_0} \subset E_\varepsilon(x)$. Este intervalo será $I^j_{n_0} = [a^j_{n_0}, b^j_{n_0}]$ tal que $x_\varepsilon < a^j_{n_0} < x < b^j_{n_0} < x + \varepsilon$. Además $a^j_{n_0}, b^j_{n_0} \in F_n \forall n$, luego $a^j_{n_0}, b^j_{n_0} \in K$ y al menos uno de ellos es distinto de x (por qué?), llamémoslo z. Entonces, en todo entorno $E_\varepsilon(x)$ existe un punto $z \in K$ tal que $z \neq x$, luego $x \in K'$.
Por lo tanto K es perfecto, no vacío y por lo tanto no numerable. Por otra parte $K \subset [0, 1]$, siendo la potencia del $[0, 1]$ la del continuo, luego K tiene la potencia del continuo. Los subconjuntos que fuimos sacando en cada paso, son disjuntos y la suma de sus longitudes es

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \cdots = \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \cdots) = \frac{1}{3}\ \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

O sea que K tiene medida (de Lebesgue) nula.

1.13. Funciones reales. Continuidad

Funciones reales

Definición 29 *Sean $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in D'$. Se dice que un número* ***L es límite de f en a*** *sii*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in E^*_\delta(a) \cap D \to f(x) \in E_\varepsilon(L).$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in D, 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Se nota $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Proposición 15 *Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a \in D'$ existe a lo sumo un límite de f en a.*

Proposición 16 *Sean $f : D \to \mathbb{R}$ y $a \in D'$, entonces son equivalentes:*
i) $\lim_{x \to a} f(x) = L$.
ii) Toda sucesión $(\{x_n\} \subset D$ tal que $x_n \to a$, entonces $f(x_n) \to L$.

Demos: *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Supongamos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, como $a \in D'$, sea $x_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \to a$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x_n - a| < \delta$ luego $|f(x_n) - L| < \varepsilon$.
Para ese δ existe $N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $0 < |x_n - a|, \forall n \geqslant N_\delta$ y así $|f(x_n) - L| < \varepsilon \forall n \geqslant N_\delta$. En consecuencia $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.
ii) $\Rightarrow$ *i)* Supongamos que para toda sucesión $\{x_n\} \subset D, x_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \to a$ se tiene que $f(x_n) \to L$. Supongamos que $\lim_{x \to a} f(x) \neq L$ luego existirá un $\varepsilon > 0$ tal que para $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$, existe $x_n \in D$ tal que $0 < |x_n - a| < \delta$ y $|f(x_n) - L| \geqslant \varepsilon$. Esta sucesión $x_n \to a$ y $f(x_n) \nrightarrow L$ lo que contradice la hipótesis. ■

Teorema 14 *(**Condición de Cauchy**)*
Sea $f : D\mathbb{R}$ y $a \in D'$. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ \Leftrightarrow\ (CC) \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x, y \in D \cap E^*_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Demos: $\Rightarrow$) Muy fácil.
$\Leftarrow$) Supongamos que se cumple (CC) en a. Veamos que existe $\lim_{x \to a} f(x)$. Hagámoslo por sucesiones. Sea $(x_n) \subset D$, $x_n \neq a, \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \to a$, veamos que es $(f(x_n))$ convergente probando que es de Cauchy.
Dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ que existe por la (CC). Como $x_n \to a$, para dicho δ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si

$n \geqslant N \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta$. Luego para $n, m \geqslant N$ se tiene que $x_n, x_m \in E^*_\delta(a)$ y por (CC) resulta $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.
De este modo $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por lo tanto convergente a un $L \in \mathbb{R}$, esto para cualquier sucesión de elementos distintos de a en D tal que $x_n \to a$.
El valor límite L es independiente de la sucesión (x_n) considerada. Si consideramos dos sucesiones de elementos distintos de a en D (x_n) y (z_n) tales que $x_n \to a$ y $z_n \to a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L_1 \neq L_2 = \lim\limits_{n\to\infty a} f(z_n)$. Si formamos la sucesión $(y_n) = (x_1, z_1, x_2, z_2, \cdots) \subset D$, con $y_n \neq a$ y $y_n \to a$ pero no existe $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$, lo que contradice lo recién probado.
Es decir que para toda sucesión de elementos distintos de a en D, (x_n) tal que $x_n \to a$ se tiene que $f(x_n) \to L$, luego se tiene que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, como queríamos demostrar. ■

Ya se han estudiados en cursos anteriores la noción y algunas propiedades de la continuidad de funciones reales.

Definición 30 *Sea $E \subset \mathbb{R}$, dada una función $f : E \to \mathbb{R}$, diremos que:*
*a) **f es continua en $x \in E$** si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$y \in E \wedge |y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

*b) **f es continua en $A \subset E$** si es continua en todo punto de A.*

Proposición 17 ***Teorema de Weierstrass 1***
Sea $F \subset \mathbb{R}$ cerrado y acotado, si $f : F \to \mathbb{R}$ es una función continua en F, entonces:
a) f es acotada sobre F,
b) f asume su máximo y su mínimo en F, o sea existen puntos $\psi_1, \psi_2 \in F$ tales que

$$x \in F \Rightarrow f(\psi_1) \leqslant f(x) \leqslant f(\psi_2).$$

Demos: $a)$ Sea $\varepsilon = 1$, por la continuidad de la función f, para cada $x \in F$, existe un intervalo abierto I_x tal que $x \in I_x$, y además

$$u \in F \cap I_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| < 1,$$

es decir que

$$y \in F \cap I_x \Rightarrow |f(y)| < f(x) + 1,$$

luego la función f es acotada en el conjunto $F \cap I_x$.
La familia $\{I_x : x \in F\}$ constituye un cubrimiento abierto de F, conjunto cerrado y acotado, en consecuencia por el teorema de Heine-Borel, existe un subcubrimiento finito de F, sea $\{I_{x_1}, I_{x_2}, \cdots, I_{x_r}\}$.
Sea $M = \text{máx}\{|f(x_1)|, |f(x_2)|, \cdots, |f(x_r)|\}$. Entonces si $y \in F$, resulta que y pertenece a algún I_{x_j} de la subfamilia finita, de donde se tiene que

$$|f(y)| < |f(x_j)| + 1 \leqslant M + 1,$$

de donde se tiene que f es acotada en F.

$b)$ Esta demostración puede verse en los libros de cálculo elemental. ■

Proposición 18 *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si para cada subconjunto abierto G de $\mathbb{R}$ se tiene que $f^{-1}(G)$ es un abierto.*

Demos: $\Leftarrow$). Supongamos que $f^{-1}(G) \subset \mathbb{R}$ es abierto para todo subconjunto abierto $G \subset \mathbb{R}$. Entonces dado $x \in \mathbb{R}$, para cada $\varepsilon > 0$ el intervalo $I_x = (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ es abierto, y por lo tanto su imagen inversa $f^{-1}(I_x)$ es también un abierto de $\mathbb{R}$. Observemos que $x \in f^{-1}(I_x)$, por lo tanto debe existir un $\delta > 0$, tal que $(x - \delta, x + \delta) \subset f^{-1}(I_x)$. Esto implica que

$$|y - x| < \delta \Rightarrow f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Por lo tanto f es continua en el punto x, de la arbitrariedad de dicho punto resulta f continua en $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $G \subset \mathbb{R}$ abierto.Si $x \in f^{-1}(G)$ entonces $f(x) \in G$ y, por ser este abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset G$. Por la continuidad de la función f en el punto x existe un $\delta > 0$ que verifica:

$$|y - x| < \delta \Rightarrow f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon),$$

es decir que $(x - \delta, x + \delta) \subset f^{-1}(G)$, y de ahí que $f^{-1}(G)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$. ■

Proposición 19 ***Teorema del valor intermedio***
Sea $f : [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Dado un número $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \leqslant \gamma \leqslant f(b)$ (o bien $f(b) \leqslant \gamma \leqslant f(a)$) existe un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.

Demos: Puede verse en cualquier libro de cálculo elemental, por ejemplo en [1]

Definición 31 *Sea $E \subset \mathbb{R}$, una función $f : E \to \mathbb{R}$ se dice **uniformemente continua** , si dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$x \in E \wedge y \in E \wedge |y - x! < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Evidentemente si la función $F : E \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua, entonces es continua. La proposición siguiente muestra que la recíproca de esta afirmación es válida en el caso que E sea un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$.

Proposición 20 ***Teorema de Heine - Cantor***
Sea $F \subset \mathbb{R}$ cerrado y acotado, una función $f : F \to \mathbb{R}$ continua es uniformemente continua.

Demos: Dado $\varepsilon > 0$, para cada $x \in F$ existe un $\delta_x > 0$ tal que

$$y \in F \wedge |y - x| < \delta_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Simbolizando $G_x = (x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2})$, se tiene que $\{G_x : x \in F\}$, es un cubrimiento abierto del conjunto F, y como consecuencia del teorema de Heine-Borel, existe una subfamilia finita $\{G_{x_1}, \cdots, G_{x_r}\}$ que sigue siendo un cubrimiento de F. Sea $\delta = \text{mín}(\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_r})$, resulta $\delta < 0$ y además, si $y \in F$ y $z \in F$ son tales que $|y - z| < \frac{\delta}{2}$, y como $y \in G_{x_i}$ para algún $i \in \{1, \cdots, r\}$, se tiene que $|y - x_i| < \dfrac{\delta_{x_i}}{2}$ de donde

$$|z - x_i| \leqslant |z + y| + |y - x_i| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \leqslant \delta_{x_i},$$

y en consecuencia

$$|f(z) - f(y)| \leqslant |f(z) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

como queríamos probar. ■

Referencias

[1] Apostol T., *Calculus*, Tomo 1 (2da edición, Reverté S.A., Barcelona. 1979.

[2] Aranda P.J., *Notas de clases*.

[3] Berberian S.K., *A first course in real analysis*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[4] Bloch E.D., *The Real Numbers and Real Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2011.

[5] Dieudonne, Jean, *Fundamentos del análisis moderno*, Reverté S.A., 1966.

[6] Jeifetz N.G., *Notas de clases*.

[7] Royden, H.L., *Real analysis*, (3era Edición), McGraw Hill, México, 1980.

[8] Spivak, M., *Cálculo infinitesimal*, Reverté S.A., 2003.

[9] Trench W.F., *Introduction to real analysis*, Free Edition, 2011.

[10] Verdes R.V., *Notas de clases*.

Índice alfabético