Existencia y Unicidad de soluciones. Soluciones maximales.

1. Considerar el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= 3y+1, \\ y(0) &= 2. \end{cases}$$

Demostrar que todas las aproximaciones sucesivas $\phi_0, \phi_1, \ldots$ existen $\forall x \in \mathbb{R}$.

Calcular las primeras cuatro aproximaciones. Calcular la solución exacta y comparar los resultados.

2. (a) Demostrar que la función $f(x,y) = y^{1/2}$ no satisface una condición de Lipschitz en $|x| \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, en cambio sí es lipschitziana en cualquier rectángulo de la forma : $|x| \leq a,\ b \leq y \leq c$, $(a, b, c > 0)$.

(b) Verificar que la función f dada por $f(x,y) = x^2\,|y|$ satisface una condición de Lipschitz en $|x| \leq 1,\ |y| \leq 1$, pero que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no existe en $(x, 0)$ cuando $x \neq 0$.

3. Sea el problema

$$y' = 1 - 2xy, \quad y(0) = 0.$$

Hallar primero la expresión de la solución.

Considerar luego el problema anterior en el rectángulo $|x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq 1$, mostrar que $|f(x,y)| \leq 2$ en dicho rectángulo, que $f(x,y) = 1 - 2xy$ satisface una condición de Lipschitz con constante $L = 1$ y que entonces las aproximaciones sucesivas existen y convergen a la solución en $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Demostrar que $|\phi(x) - \phi_3(x)| < 0{,}01$ para $|x| \leqq \frac{1}{2}$. Calcular $\phi_3(x)$.

4. En cada uno de los siguientes ejemplos encontrar una constante de Lipschitz en los dominios indicados o probar que no existe:

-a- $f(x,y) = x\ |y|\,,\ \forall\, |x| < a,\ y \in \mathbb{R}$.

-b- $f(x,y) = y^{\frac{1}{3}}, \quad \forall\, |y| < 1$.

-c- $f(x,y) = \frac{1}{y}, \quad \forall\, 1 \leq y < +\infty$.

5. Plantear hipótesis suficientes para que una función $f(x,y)$ definida en $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sea lipschitziana respecto de y, $\forall x \in I \subset \mathbb{R}$.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente lipschitziana y sea $y(x)$ una solución de $y'(x) = f(y(x))$ que verifica $y(x_0 + T) = y(x_0)$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$. Analizar si $y(x)$ es una función periódica de período T.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua localmente lipschitziana en su segunda variable y sea $y(x)$ una solución de $y'(x) = f\left(x, y(x)\right)$ que verifica $y\left(x_0 + T\right) = y(x_0)$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$. Analizar si $y(x)$ es una función periódica de período T.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

⑧. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente lipschitziana tal que $f(p_1) = f(p_2) = 0$ con $p_1 < p_2$. Probar que si $y_0 \in (p_1, p_2)$, entonces la solución de $y'(x) = f(y(x))$; $y(0) = y_0$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

⑨. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función localmente lipschitziana y sea $y(x)$ una solución de $y'(x) = f(y(x))$ tal que $y(x) \to y_0$ cuando $x \to +\infty$. Probar que $f(y_0) = 0$.

⑩. Sea

$$y' = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a).- Probar que f no es continua en $\mathbb{R}^2$ y no obstante esta ecuación admite soluciones para condiciones iniciales arbitrarias $y(x_0) = y_0$.

b).- Analizar si f satisface localmente las hipótesis del teorema de Peano.

c).- Analizar si f satisface localmente las hipótesis del teorema de Picard.

⑪. Sea el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Analizar si existe o no solución y si es única o no. En caso de no ser única, ¿hay contradicción con el Teorema de Picard?

⑫. Sea el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= f(x,y), \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

con

$$f(x,y) = \begin{cases} -2x & x^2 < y < +\infty, \\ 2x - \dfrac{4y}{x} & 0 < y \leqq x^2, \\ 2x & y \leqq 0. \end{cases}$$

Probar que f no es lipschitziana con respecto a y y que la sucesión de aproximaciones sucesivas definidas por:

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_n(x) = \int_0^x f\left(s, \varphi_{n-1}(s)\right)\, ds,$$

no es convergente.

⑬. Sean $f; g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y f lipschitziana. Probar que el sistema

$$\begin{cases} x' = f(x), & x(0) = x_0. \\ y' = g(x)y, & y(0) = y_0. \end{cases}$$

tiene solución única en cualquier intervalo donde esté definida. ¿Se puede quitar la hipótesis de que f sea lipschitziana?

⑭. Construir una solución ε-aproximada de

$$\begin{cases} y' = 2y + 1, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

en $[0, 1]$. Acotar el error respecto de la solución exacta en ese intervalo.

⑮. Comparar las soluciones de

$$\begin{cases} y' = x + \operatorname{sen}(y), \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} y' = x + \operatorname{sen}(y), \\ y(0) = 0,01. \end{cases}$$

en $[0, 1]$.

⑯. *a). Construir una solución ε-aproximada de

$$\begin{cases} y' &= -y + z + 1, \\ z' &= 2y + z, \\ y(0) = 1,\ z(0) = -1. \end{cases}$$

*b). Aplicar el método de Picard para obtener la solución del problema de Cauchy dado en *a).

*c). Comparar la solución ε-aproximada con la solución exacta en $[0, 1]$.

⑰. Sean $f \in \mathcal{C}(\Omega) \cap \textit{Lip}_{loc}(y, \Omega)$, con constante de lipschitzianidad L y

$$R = \{(x, y) \in \Omega : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}.$$

Si ϕ_1 y ϕ_2 son respectivamente soluciones ε_1 y ε_2 aproximadas de $y' = f(x, y)$ tales que $|\phi_i(x_0) - y_0| < b$, $\forall i = 1, 2$ y $|\phi_1(x_0) - \phi_2(x_0)| \leq \delta$, probar que

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leqq \delta e^{L|x - x_0|} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{L}\left(e^{L|x - x_0|} - 1\right).$$

⑱. Probar la siguiente generalización del lema de Gronwall:

Sean φ, ψ y χ funciones continuas a valores reales en un intervalo real $I = [a, b]$. Sea $\chi(t) > 0$, para todo $t \in I$, y

$$\varphi(t) \leqq \psi + \int_a^t \chi(s)\, \varphi(s)\, ds \qquad \forall t \in I.$$

Probar que

$$\varphi(t) \leqq \psi + \int_a^t \chi(s)\, \psi(s)\, e^{\int_a^s \chi(u) du}\, ds \qquad \forall t \in I.$$

⑲. Probar que el resultado del problema 17 puede generalizarse a regiones R de la forma $R = \{(t, x) : a \leqq t \leqq b,\ \ g(t) \leqq x \leqq h(t)\}$, donde g y h son funciones dadas.

⑳. Sea D un abierto en el plano $t-x$ y $f \in (C, Lip)$ en D. Sea ψ una solución del siguiente (PVI) en el intervalo $[a,b]$:

$$(PVI)\begin{cases} \psi'(t) &= f\left(t, \psi(t)\right), \quad \forall t \in (a,b), \\ \psi'(\tau) &= \xi. \end{cases}$$

Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $\tilde{\xi}$ satisface que $\left|\xi - \tilde{\xi}\right| < \delta$, entonces la solución φ que pasa por $\left(\tau, \tilde{\xi}\right)$ existe en todo el intervalo $[a,b]$.

㉑. Sea D un abierto convexo en el plano xy, y supongamos que $f \in (C, Lip)$ en D. Sean φ_1 y φ_2 dos soluciones de la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ que satisfacen las condiciones iniciales $\varphi_1(x_0) = \xi_1$, $\varphi_2(x_0) = \xi_2$.

Si además ambas soluciones existen en un intervalo $[a,b]$, demostrar que para todo ξ entre ξ_1 y ξ_2 la solución al (PVI)

$$(PVI)\begin{cases} y' &= f(x,y), \\ y(x_0) &= \xi, \end{cases}$$

tiene solución en todo el intervalo $[a,b]$.

㉒. *a- La función nula es solución de

$$y' = \sqrt[3]{y}, \quad y(0) = 0, \quad \forall x < 0.$$

Definir dos prolongaciones distintas a toda la recta real que sean solución del sistema.

*b- ¿Contradice (a) el teorema de unicidad de solución?

*c- Encontrar otra ecuación de primer orden cuya solución no sea única.

㉓. (a) Probar que el problema

$$\begin{cases} y' &= 1 + y^2, \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

tiene solución en el intervalo maximal $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) Hallar el intervalo maximal de existencia de

$$\begin{cases} y' &= y^p, \\ y(0) &= y_0 > 0. \end{cases}$$

(c) Probar que el intervalo maximal de existencia de

$$\begin{cases} y' &= f(y), \\ y(x_0) &= y_0, \end{cases}$$

es finito si y sólo si $\int\limits_{y_0}^{+\infty} \frac{1}{f(s)}\, ds < K$.

24. Sean $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $f \in C(\Omega) \cap Lip_{loc}(y; \Omega)$ tal que $0 \leq f(x; y) \leq M$ en Ω.
Dado $(x_0; y_0) \in \Omega$, se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

a).- Determinar las formas posibles de la semitrayectoria izquierda de la solución maximal de dicho problema.

b).- ¿Puede ser $\sup\{I(x_0; y_0)\} < +\infty$? Razonarlo.

25. Dado $(x_0; y_0) \in \Omega = (0; 2) \times \mathbb{R}$, se considera el problema

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{\cos\left(y^2 \ln(x)\right)}{x - 2}, \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

Probar que posee una única solución maximal y determinar el intervalo $I(x_0; y_0)$ donde está definida.