Ecuaciones diferenciales de primer orden - Repaso.

1. En los siguientes apartados, hallar las trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada:

   a).- $x^2 = Cy$.
   b).- $2x^2 - y^2 = C$.
   c).- $y = C\exp(x)$.
   d).- $x^2 + y^2 = c$, $(c > 0)$.

   Nota: Se denomina **trayectorias ortogonales** de una familia dada de curvas a las curvas que cortan en ángulo recto las curvas de dicha familia.

2. Hallar la ecuación diferencial de cada una de las siguientes familias de curvas:

   a).- $y^2 - 2cx = 0$.
   b).- $(x - c)^2 + y^2 = 1$.

3. La ecuación
$$y' + \alpha(x)y = \beta(x)y^k \quad k = \text{constante},$$
se llama ecuación de Bernoulli. (Si k es 0 ó 1 el problema es fácil, se está en un caso conocido). Probar que haciendo el cambio de $z = y^{1-k}$ la ecuación se transforma en la siguiente ecuación lineal:
$$z' + (1 - k)\alpha(x)z = (1 - k)\beta(x)$$
Encontrar todas las soluciones de $y' - 2xy = xy^2$.

4. Considerar la ecuación $y' + \cos(x)y = e^{-\operatorname{sen}(x)}$.

   (a). Encontrar la solución ϕ que satisfaga la condición $\phi(\pi) = \pi$.
   (b). Demostrar que cualquier solución ϕ tiene la siguiente propiedad:
$$\phi(k\pi) - \phi(0) = k\pi,$$
   donde k es un entero cualquiera.

5. Encontrar una función continua f que verifique la ecuación
$$f(x) = 2 + \int_1^x sf(s)ds.$$

6. Mostrar que si las normales a una curva pasan todas por un mismo punto P_0, dicha curva es una circunferencia (o parte de ella) con centro P_0.

⑦. Considerar la ecuación lineal homogénea $y' + a(x)y = 0$, donde a es una función continua en $-\infty < x < \infty$, periódica , con período $\xi > 0$, es decir, $a(x+\xi) = a(x),\ \forall x$.

*a. Si ϕ es una solución no trivial y $\psi(x) = \phi(x+\xi)$, probar que ψ es también solución.

*b. Demostrar que existe una constante c tal que $\phi(x+\xi) = c\phi(x)\ \forall x$. Demostrar también que

$$c = e^{-\int_0^{\xi} a(t)dt}.$$

*c. Indicar la condición que debe satisfacer a para que exista una solución diferente de la trivial, con periodo ξ.

⑧. Determinar cual de las siguientes ecuaciones es exactas. Si lo es, encontrar las soluciones y graficar.

a- $(e^x \operatorname{sen} y + 3y)\, dx - (3x - e^x \operatorname{sen} y)\, dy = 0.$

b- $\dfrac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \dfrac{ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0.$

c- $\left(2xy^2 + 2y\right) + \left(2x^2y + 2x\right) y' = 0.$

⑨. Resolver los PVI y determinar aproximadamente donde es válida la solución.

(a) $(2x - y)\, dx + (2y - x)\, dy = 0 \qquad y(1) = 3$

(b) $\left(9x^2 + y - 1\right) dx - (4y - x)\, dy = 0 \quad y(1) = 0$

⑩. Encontrar un factor integrante para las siguientes ecuaciones y resolverlas:

a- $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0.$

b- $dx + (x/y - \sin(y))dy = 0.$

⑪. Mostrar que si $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$, donde R depende sólo de xy entonces la ecuación diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tiene un factor integrante de la forma $\mu(xy)$. ¿Cuál es la forma general para este factor integrante?

Usando esto encontrar un factor integrante y resolver la ecuación

$$(3x + \frac{6}{y}) + (\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x})\frac{dy}{dx} = 0.$$

⑫. Probar que la ecuación $y - xy' = 0$ admite factores integrantes que

a).- dependen sólo de x,
b).- dependen sólo de y,
c).- dependen sólo de xy.

⑬. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales realizando un adecuado cambio de variable:

a).- $y' = (x+y+1)^2$.
b).- $y' = \tan^2(x+y)$.
c).- $y' = 2 + \sqrt{y-2x+3}$.
d).- $y' = \operatorname{sen}(x+y)$.
e).- $y' = 1 + \exp(y-x+5)$.

⑭. Hacer un esbozo del campo de direcciones de las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden.

(Está permitido usar la computadora!!)

En base a lo obtenido estudiar el comportamiento de las soluciones para $x \to \infty$.

-I- $y' = -1 - 2y$.
-II- $y' = y(4-y)$.
-III- $y' = -y(5-y)$.

⑮. Esbozar el campo de direcciones de la ecuación $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+y^2}$.

Ayuda: Hallar previamente el lugar geométrico de los puntos en los cuales las tangentes a las curvas integrales buscadas conservan una dirección constante, es decir $\dfrac{dy}{dx} = k$ donde k es constante; tales líneas se denominan **isoclinas**.

⑯. Repetir el ejercicio anterior para las siguientes ecuaciones:

a) $y' = 3 - 2y,$ b) $y' = -y(1+y^2).$

⑰. Interpretando $x' = \cos(x)$ como un flujo en la recta,

a- Encontrar los puntos fijos y clasificarlos. ¿Cuáles de los puntos del flujo tienen mayor velocidad a la derecha en la recta?
b- Encontrar la aceleración del flujo, x'', en función de x y hallar el punto donde el flujo tiene aceleración máxima positiva.

⑱. Analizar las siguientes ecuaciones gráficamente:

a- $x' = x - x^3$.

b- $x' = 1 - 2\cos x$.

c- $x' = e^x - \cos x$.

⑲. En cada uno de los siguientes problemas, esbozar dN/dt en función de N y determine los puntos críticos (o puntos de equilibrio). Clasificar estos puntos de equilibrio en *estables*, *inestables* ó *semiestables*.

- I - $dN/dt = -k(N-1)^2$, $k > 0,\ -\infty < N_0 < \infty$.
- II - $dN/dt = N^2(N^2-1)$, $\quad -\infty < N_0 < \infty$.
- III - $dN/dt = N^2(1-N)^2$, $\quad -\infty < N_0 < \infty$.

⑳. Una población animal está formada por 35.228 individuos. De éstos en un año mueren 25.128 y nacen 26.737. Calcular las tasa de mortalidad y natalidad anuales cada 100 individuos (en porcentaje).

㉑. *Escherichia coli (E. Coli)* es una bacteria que se multiplica por bipartición cada 20 minutos si las condiciones ambientales son favorables. Si partimos de un cultivo bacteriano formado por 1.000 individuos:

a).- ¿Cuál será la población teórica si no hay mortalidad y se mantienen las mismas condiciones, al cabo de 6 horas?.

b).- Representar la curva de crecimiento.

㉒. En una población aislada en la que no hay migraciones, formada por 5.000 individuos, anualmente nacen 2.000 ejemplares y mueren 1.800. Calcular estos parámetros:

a).- La tasa de aumento de la población o potencial biótico por individuo y por año. Indícalo también en %.

b).- El tiempo de duplicación. (tiempo de duplicación = $70/$tasa de crecimiento en % o bien tiempo de duplicación = $0,7/r$).

㉓. Considerar la ecuación $\dfrac{dN}{dt} = F(N)$, y suponer que N_1 es un punto crítico, es decir $F(N_1) = 0$. Mostrar que la solución constante $\phi(t) = N_1$ es estable si $F'(N_1) < 0$, e inestable si $F'(N_1) > 0$.

24. El crecimiento de una cierta población sigue la ecuación logística

$$\frac{dN}{dt} = rN\left[1 - \frac{N}{K}\right].$$

a) Si $N_0 = K/3$, encontrar el tiempo τ en el cual la población se ha duplicado. Encontrar el valor de τ correspondiente a $r = 0{,}025$ por año

b) Si $N_0/K = \alpha$, encontrar el tiempo T en el que $N(T)/K = \beta$, donde $0 < \alpha, \beta < 1$.Observe que $T \to \infty$ cuando $\alpha \to 0$ o cuando $\beta \to 1$ Encuentre el valor de T si $r = 0{,}025$ por año, $\alpha = 0{,}1$ y $\beta = 0{,}9$

25. Otra ecuación que se ha usado para modelar crecimiento de población es la ecuación de Gompertz:

$$\frac{dN}{dt} = rN \ln\left(\frac{K}{N}\right),$$

donde r y K son constantes positivas.

a Hacer un gráfico de dN/dt versus N , encontrar los puntos críticos y determinar si son estables o inestables.

b Para $0 \leq N \leq K$, determinar donde el gráfico de $N(t)$ es cóncavo hacia arriba y dónde cóncavo hacia abajo.

c Para cada N en el intervalo $0 < N \leq K$ mostrar que el dN/dt dado por la ecuación de Gompertz nunca es menor que el dN/dt dado por la ecuación logística.

d Resolver la ecuación con la condición inicial $N(0) = N_0$ (Hacer la sustitución $u = \ln(K/N)$)

26. El cadáver de la víctima fue encontrado una noche a las 23:00hs. El médico forense de turno llegó media hora después e inmediatamente tomó la temperatura del cuerpo, la cual era de $34,78$º C. Al cabo de una hora, le volvió a tomar la temperatura, la cual era $34,11$º C. También verificó que la temperatura del cuarto era constante. Usar la ley de enfriamiento $\dot{T} = -k \cdot T$ para estimar el tiempo de la muerte.

27. En un experimento de ayuno, el peso de un voluntario decreció de $81,65$kg. a $70,31$kg. en 30 días. Se observó que la pérdida de peso por día era proporcional al peso del voluntario. Determinar una ecuación diferencial que describa este comportamiento y estimar cuántos días le llevará llegar a los 60 kilos.

28. En un modelo de epidemias, un solo individuo afectado es introducido en una comunidad que contiene n individuos susceptibles a la enfermedad. Se define $x(t)$ como el número de individuos sin infectar en la población en el tiempo t. Si se asume que la infección se transmite a todos aquellos susceptibles, entonces $x(t)$ disminuye desde su valor inicial $x(0)$ hasta cero. Una ecuación posible para $x(t)$ es

$$\frac{dx}{dt} = -rx(n + 1 - x),$$

donde r es una constante positiva que mide la tasa de infección. Determinar la solución de esta ecuación de primer orden. ¿Cuándo la tasa de infección es un máximo?

㉙. Dado el operador diferencial $L(x) = \dot{x} + a(t)x$,

a).- Probar que si $a(t)$ es una función a valores reales y $\varphi(t)$ es solución de $Lx = b(t)$, entonces *Re*$(\varphi(t))$ y *Im*$(\varphi(t))$ son soluciones de $Lx =$ *Re*$(b(t))$ y $Lx =$ *Im*$(b(t))$ respectivamente.

b).- Aplicando esto obtener soluciones particulares de las ecuaciones $x' + ax = b\cos(\omega t)$, $x' + ax = b\,\mathrm{sen}(\omega t)$, $a, b, \omega \in \mathbb{R}^+$.

c).- Hallar la solución general de la ecuación $x' + 4x = 3\,\mathrm{sen}(t) - 5\cos(t)$.

㉚. La velocidad $v(t)$ de un paracaidista cayendo al suelo es gobernada por

$$mv' = mg - kv^2$$

donde m es la masa del paracaidista, g es la aceleración de la gravedad y k una constante positiva relacionada con la resistencia del aire.

a- Obtener la solución en forma analítica para $v(t)$, asumiendo que $v(0) = 0$.

b- Hallar el límite de $v(t)$ cuando $t \to \infty$. (Este límite es llamado *velocidad terminal*).

c- Hacer un análisis gráfico del problema y encontrar una fórmula para la velocidad terminal.

㉛. (**Teoría de bifurcaciones.**)

Analizar los siguientes sistemas y graficar en el plano $r - x^*$ el diagrama de bifurcación.

(a) $\dot{x} = x\,(r - e^x)\,,\ r \in \mathbb{R}.$

(b) $\dot{x} = r - \cosh x,\ r \in \mathbb{R}.$

㉜. Considerar la siguiente ecuación diferencial, que modela una sola población bajo una cosecha o extracción constante:

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha,$$

donde x es el tamaño de la población; r y K son la tasa de crecimiento intrínseco y la capacidad de carga de la población, respectivamente, y α es la tasa de extracción, que es un parámetro a determinar. Encontrar un valor de parámetro α_0 en el que el sistema tenga una bifurcación. Con base en el análisis, explicar cuál podría ser el resultado de la sobreexplotación en la dinámica del ecosistema. ¿Es la bifurcación catastrófica en este ejemplo?

㉝. En muchos problemas físicos, una cantidad observable depende de un parámetro que describe el estado del sistema. Al variar el parámetro se puede alcanzar un valor crítico, en el cual el sistema se comporta de manera diferente.

Por ejemplo, la siguiente ecuación diferencial que depende de un parámetro R que puede asumir distintos valores:

$$\frac{dx}{dt} = (R - R_c)x - ax^3$$

donde a y R_c son constantes positivas.

(a) Si $R < R_c$, mostrar que hay sólo una solución de equilibrio, $x = 0$, la cual es estable.

(b) Si $R > R_c$, mostrar que las soluciones de equilibrio son 3: $x = 0$, y $x = \pm\sqrt{\dfrac{(R - R_c)}{a}}$, siendo la primera inestable, y estables las otras.

(c) Graficar en el plano $R{-}x$ las soluciones de equilibrio marcando las estables y las inestables.

El punto $R = R_c$ es un *punto de bifurcación*. Por la forma del gráfico esta bifurcación suele llamarse "*bifurcación pitchfork*"[1].

34. (Subcritical pitchfork) En el caso anterior, el término cúbico del sistema actúa como estabilizante, el sistema adquiere puntos de equilibrio estables. Si en cambio el término cúbico fuera desestabilizante se tendría una bifurcación horquilla subcrítica. Analizar esta situación en el flujo:

$$\dot{x} = rx + x^3, \; r \in \mathbb{R}.$$

35. En algunos sistemas físicos, una inestabilidad tan explosiva como en el caso anterior es usualmente disipada por la influencia estabilizadora de términos de orden superior.

    Considerar el sistema

$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5.$$

    (a) Encontrar la expresión de los puntos fijos al variar r.
    (b) Analizar la estabilidad de los puntos fijos.
    (c) Calcular el punto de bifurcación al cual nacen los puntos fijos no nulos.
    (d) Hacer el diagrama de bifurcación.

[1] n.t. : horquilla, con forma de tenedor.