Trabajo Práctico Nº 9

Estabilidad

Definición 1. Una solución ψ del sistema

$$\frac{dy}{ds} = f(s, y),$$

la cual está definida para $s \geqq 0$ se dice **atractor** si existe $\delta > 0$ tal que cualquier solución φ del sistema que satisfaga

$$|\varphi(0) - \psi(0)| \leqq \delta,$$

verifica

$$\lim_{s \to \infty} |\varphi(s) - \psi(s)| = 0.$$

Definición 2. Una solución ψ del sistema

$$\frac{dy}{ds} = f(s, y),$$

la cual está definida para $s \geqq 0$ se dice **Liapunov estable** si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cualquier solución φ del sistema que satisfaga

$$|\varphi(0) - \psi(0)| \leqq \delta,$$

verifica

$$|\varphi(s) - \psi(s)| \leqq \delta \quad \forall s \geqq 0.$$

Definición 3. Una solución ψ del sistema

$$\frac{dy}{ds} = f(s, y),$$

la cual está definida para $s \geqq 0$ se dice **asintóticamente estable** si es un atractor Lyapunov estable.

Observaciones

- Observar que estas definiciones requieren que las soluciones del sistema que comienzan cerca de $\psi(0)$ existan para todo $s > 0$.
- En particular, esta clasificación se utiliza para los **puntos fijos** de un sistema autónomo $y' = f(y)$, es decir, x^* tales que $f(x^*) = 0$.

Ejercicio

- Buscar un ejemplo de cada caso.
- Analizar si un atractor es Lyapunov estable.

Definición 4. (Repaso)

- $g(x) = o(f(x))$ cuando $x \to a$ si $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, N_\epsilon(a)$ entorno de a tal que

$$|g(x)| < \epsilon\, |f(x)|\,, \quad \forall x \in N_\epsilon(a).$$

- $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$ cuando $x \to a$ si $\exists\, N(a)$ entorno de a y $C \geqq 0$ tales que

$$|g(x)| < C\, |f(x)|\,, \quad \forall x \in N(a).$$

Teorema 1. *Sea*

$$\frac{dy}{ds} = A\, y + f(s,y), \tag{1}$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Sea f un campo real, continuo para pequeños $|x|$ y $s \geqq 0$, y

$$f(s,x) = o(|x|) \quad (|x| \to 0) \qquad \textit{uniformemente en } s,\ s \geqq 0.$$

Entonces

-a- *si todos los autovalores de A tienen parte real negativa, la solución idénticamente cero es asintóticamente estable.*

-b- *si todos los autovalores de A tienen parte real no positiva, la solución idénticamente cero es Lyapunov estable.*

-c- *si algún autovalor de A tienen parte real positiva, la solución idénticamente cero es inestable.*

Demostración. Escribir.

□

Sistemas planos no lineales

Apuntes:

- *Nonlinear Dynamics and Chaos* - S. H. Strogatz - Páginas 145 a 180 y 196 a 209.
- *An Undergraduate's Guide to the Hartman-Grobman and Poincaré-Bendixon Theorems* - S. Zimmerman.
- *Algunas ecuaciones ecológicas*.

Ejercicios

1. Discutir la estabilidad de los puntos de equilibrio de las siguientes ecuaciones y sistemas:

(I) $y'' + 2\alpha y' + y = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(II) $y' + y\,(1-y) = 0$.

(III) $y' - \left(1 - y^2\right) = 0$.

(IV) $\begin{cases} y'(x) = -2y\,(y-1)\,(2y-1)\,, \\ z'(x) = -2z. \end{cases}$

2. Determinar las propiedades de estabilidad del punto crítico para cada uno de los siguientes sistemas autónomos:

a)- $\begin{cases} y'(x) = 2y, \\ z'(x) = 3z. \end{cases}$

b)- $\begin{cases} y'(x) = -y - 2z\,(y-1)\,(2y-1)\,, \\ z'(x) = 4y - 5z. \end{cases}$

c)- $\begin{cases} y'(x) = 4y - 2z\,(y-1)\,(2y-1)\,, \\ z'(x) = 5y + 2z. \end{cases}$

d)- $\begin{cases} y'(x) = 5y + 2z\,(y-1)\,(2y-1) \\ z'(x) = -17y - 5z. \end{cases}$

3. Demostrar que $(0,0)$ es un punto crítico asintóticamente estable para el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y'(x) &= -3y^3 - z, \\ z'(x) &= y^5 - 2z^3. \end{cases}$$

4. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x' &= -y - x^3, \\ y' &= x. \end{cases}$$

Mostrar que el origen es un espiral, si bien la linealización predice un centro.

5. Demostrar que el punto crítico $(0,0)$ del sistema

$$\begin{cases} y'(x) &= F(y,z), \\ z'(x) &= G(y,z), \end{cases}$$

es inestable si existe una función $E(y,z)$ con las siguientes propiedades:

(a) $E(y,z)$ es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas en cierta región que contiene al origen;

(b) $E(0,0) = 0$;

(c) todo círculo centrado en el origen contiene al menos un punto en el que $E(y,z)$ es positiva;

(d) $\frac{\partial E}{\partial y}F + \frac{\partial E}{\partial z}G$ es definida positiva.

6. Determinar si cada una de las siguientes funciones es definida positiva, definida negativa o ninguna de ambas cosas:

*a.- $x^2 - xy - y^2$.

*b.- $-2x^2 + 3xy - y^2$.

*c.- $2x^2 - 3xy + 3y^2$.

7. Probar que $(0,0)$ es un punto crítico inestable del sistema

$$\begin{cases} y'(x) &= 2yz + y^3, \\ z'(x) &= -y^2 + z^5. \end{cases}$$

8. Mostrar que dada la ecuación
$$y'' + ky' + y = 0, \quad k > 0$$
existe un $a > 0$ tal que $V(y,z) = y^2 + z^2 + ayz$ es una función de Lyapunov para el sistema asociado. ¿Qué se puede decir del origen de coordenadas si $k < 0$?

9. Mostrar que el sistema
$$\begin{cases} x' = y - x^3, \\ y' = -x - y^3, \end{cases}$$
no tiene órbitas cerradas, construyendo una función de Liapunov $V = ax^2 + by^2$ para convenientes a, b.

10. Considerar el sistema:
$$\begin{cases} x' &= xy, \\ y' &= -x^2. \end{cases}$$

*a_ Mostrar que $E = x^2 + y^2$ es una cantidad que se conserva.

*b_ El origen es un punto fijo, pero no aislado.

*c_ Aunque E tiene un mínimo local en el origen, se podría pensar que el origen es un centro. Sin embargo este no es el caso. Mostrar que en efecto el origen no está rodeado de órbitas cerradas, y esbozar el retrato de fase. Justificar.

11. Estudiar la estabilidad en $(0,0,0)$ del sistema
$$\begin{cases} \dot{x} &= 2(z-1)\,y, \\ \dot{y} &= -(z-1)\,x, \\ \dot{z} &= -z^3. \end{cases}$$

12. *Modelo de una epidemia.* Un trabajo pionero sobre epidemias de Kermack y Mckendrick (1927) propone el siguiente sistema sobre la evolución de una epidemia:

Si $x(t) =$ número de gente sana , $y(t) =$ número de gente enferma , entonces:
$$\begin{cases} x' &= -kxy, \\ y' &= kxy - ly. \end{cases}$$
donde $k, l > 0$.

*a_ Encontrar los puntos fijos y clasificarlos.

*b_ Encontrar una cantidad que se conserva en el sistema.
(Formar una ecuación diferencial para dy/dx, separar variables e integrar.)

*c_ Esbozar el retrato de fase.¿ Qué ocurre cuando $t \to \infty$?

*d_ Sea (x_0, y_0) la condición inicial. Se dice que ocurre una epidemia si $y(t)$ crece inicialmente. ¿Bajo qué condiciones ocurre una epidemia?

⑬. Considerar los siguientes problemas de *"conejos vs. ovejas"* donde $x \geq 0$ e $y \geq 0$. En cada caso encontrar los puntos fijos, investigar su estabilidad y dibujar un posible diagrama de fase. Analizar la extinción de alguna de las especies.

-I- $x' = x(3 - x - y), \quad y' = y(2 - x - y)$. -II- $x' = x(3 - 2x - y), \quad y' = y(2 - x - y)$.

⑭. *Conejos contra zorros*:

El modelo

$$\begin{cases} R' &= aR - bFR, \\ F' &= -cF + dRF, \end{cases}$$

es el " famoso" modelo de Lotka-Volterra para predador y presa. Aquí $R(t)$ es el número de conejos y $F(t)$ es el número de zorros (rabbits and foxes) y a, b, c, d son parámetros positivos.

(a)_ Discutir el significado biológico de cada término del modelo. Comentar hipótesis no realistas.

(b)_ Mostrar que por un cambio de variables el modelo puede expresarse de la forma:

$$\begin{cases} x' &= x(1-y), \\ y' &= y(x-\mu). \end{cases}$$

(c)_ Encontrar una cantidad que se conserva. Mostrar que el modelo predice ciclos en la población de ambas especies para casi todas las condiciones iniciales.

Comentario: Aunque este modelo es muy popular en los libros de texto, los biólogos no lo creen realista, ya que no es estructuralmente estable y porque los ciclos reales de predadores y presas tienen una amplitud característica. En una palabra, un modelo más realista debería predecir una sola órbita periódica o tal vez un número finito de ellas, pero no una familia de ciclos estables neutrales.

⑮. Los siguientes sistemas son variantes de un modelo predador/presa. Analizar y clasifica los puntos de equilibrio. Describir los cambios de comportamiento al variar los parámetros:

a.- $$\begin{cases} x' &= x\,(1-x) - \dfrac{axy}{x+1}, \\ y' &= y\,(1-y)\,. \end{cases}$$

b.- $$\begin{cases} x' &= x\,(1-x) - axy, \\ y' &= y\left(1 - \frac{y}{x}\right). \end{cases}$$

⑯. *Péndulo con rozamiento.*

Encontrar y clasificar los puntos fijos de $\theta'' + b\theta' + \sin(\theta) = 0, \ \forall b > 0$.

Graficar los retratos de fase para los distintos casos. Mostrar que no hay ciclos.