Trabajo Práctico Nº 8

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden n

Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n{+}1$ funciones reales continuas de dominio común $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, y sea L_n el operador diferencial

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}}{ds^{n-k}}.$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} L_n : \mathcal{C}^{j+n}(I,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^{j}(I,\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & L_n f = a_0 f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \ldots + a_n f \end{array} \qquad (j \in \mathbb{N}_0)$$

Además se supone $a_0(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Entonces la ecuación del núcleo de L_n, $L_n y = 0$, es la ecuación diferencial

$$f^{(n)} + \frac{a_1(s)}{a_0(s)} f^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_n(s)}{a_0(s)} f = 0, \quad s \in I. \tag{1}$$

la cual se llama **ecuación diferencial lineal homogénea de orden** n.

Una **solución** de (1) es cualquier función $\phi : I \to \mathbb{R}$ que verifica

(I) $\exists\ \phi^{(n)}(s)$ en todo $s \in I$, donde si s es un extremo de I, $\phi^{(n)}(s)$ denota la correspondiente derivada lateral.

(II) $\phi^{(n)} + \frac{a_1(s)}{a_0(s)}\phi^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_n(s)}{a_0(s)}\phi = 0, \forall s \in I.$

El sistema diferencial lineal asociado con esta ecuación es

$$y' = P(s)y, \tag{2}$$

donde

$$P(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \frac{-a_n}{a_0} & \frac{-a_{n-1}}{a_0} & \frac{-a_{n-2}}{a_0} & \frac{-a_{n-3}}{a_0} & \cdots & \frac{-a_1}{a_0} \end{pmatrix}.$$

Como (2) es un sistema lineal de primer orden y dimensión n con una matriz de coeficientes $P(s)$ continua en I, entonces existe una única solución φ de (2) en I que satisface

$$\varphi(t) = x,$$

donde $t \in I$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

Cada componente φ_j de la función vectorial φ es una función real diferenciable y se tiene que $\varphi_j = \varphi_1^{(j-1)}$ por ser φ solución de (2). Llamando $\phi = \varphi_1$, por ser $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$ la condición inicial, se tiene en particular que $\varphi_1(t) = \phi(t) = x^1$, $\varphi_2(t) = \phi'(t) = x^2$, $\varphi_3(t) = \phi''(t) = x^3$, $\dots$, $\varphi_n(t) = \phi^{(n-1)}(t) = x^n$, es decir, el valor en t de la función y todas su derivadas.

Considerando como la condición inicial x los elementos de una base de $\mathbb{R}^n$, se puede construir una **mf** para el sistema (2), la cual será de la forma

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \\ \phi_1' & \phi_2' & \cdots & \phi_n' \\ \phi_1'' & \phi_2'' & \cdots & \phi_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} & \phi_2^{(n-1)} & \cdots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

En este contexto, el wronskiano de la **mf** Φ se le llama *wronskiano de las funciones reales* $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ y se lo indica $W[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$.

Proposición 1. *Toda solución de* (1) *es una combinación lineal de cualesquiera* n *soluciones l.i..*

Demostración. Escribir. □

Se llama **sistema fundamental** a una base $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ del conjunto de soluciones de (1).

Proposición 2. *Una condición necesaria y suficiente para que* n *soluciones de* (1)*,* $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$*, sean l.i. es*

$$W[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n](s) \neq 0, \forall s \in I.$$

Demostración. Escribir. □

Proposición 3. *Sean* n *funciones* $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ *tales que* $W[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n](s) \neq 0$*,* $\forall s \in I$*. Entonces existe una única ecuación diferencial lineal homogénea de orden* n *(con coeficiente* 1 *para la derivada de orden mayor) para la cual estas funciones forman un sistema fundamental.*

Demostración. Escribir. □

Ejercicios

(1) Determinar cuáles de los siguientes pares de funciones f, g son linealmente independientes y cuáles son linealmente dependientes en $\mathbb{R}$.

a).- $f(s) = s$, $g(s) = e^{ks}$, $k \in \mathbb{C}$ constante,

b).- $f(s) = \cos(s)$, $g(s) = \operatorname{sen}(s)$,

c).- $f(s) = \operatorname{sen}(s)$, $g(s) = e^{is}$,

d).- $f(s) = \cos(s)$, $g(s) = 3(e^{is} + e^{-is})$,

e).- $f(s) = s$, $g(s) = |s|$.

(2) Si f y g son dos funciones derivables en un intervalo I, las cuales no necesariamente son soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden $L_2 y = 0$. Mostrar que:

a).- Si f y g son l.d. en I , entonces $W[f, g](x) = 0$ para todo $x \in I$,

b).- Si $W[f, g](x_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in I$, entonces f y g son l.i. en I ,

c).- $W[f, g](x) = 0$ para todo $x \in I$, no implica que f y g sean l.d. en I,

d).- $W[f, g](x) = 0$ para todo $x \in I$, y $g(x) \neq 0$ en I, no implica que f y g son l.d. en I.

(3) Sean φ_1 y φ_2 soluciones l.i. en I de la ecuación con coeficientes constantes $y'' + b_1 y' + b_0 y = 0$, y sea $W = W[\varphi_1, \varphi_2]$ su wronskiano. Mostrar que W es constante si y sólo si $b_1 = 0$.

(4) Sean $z(s)$ y $w(s)$ soluciones de $y'' + b_1(s)y' + b_0(s)y = 0$ en un intervalo I con $t \in I$. Demostrar que

$$W[z,w](s) = \exp\left(-\int_t^s b_1(t)\,dt\right) W[z,w](t), \quad s \in I.$$

Generalizar este resultado para una ecuación lineal de orden n como (1).

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales autónomas de orden n

Sean $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ con $a_0 \neq 0$. Entonces la ecuación

$$f^{(n)} + \frac{a_1}{a_0} f^{(n-1)} + \cdots + \frac{a_n}{a_0} f = 0 \quad s \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

se llama **ecuación diferencial lineal homogénea autónoma de orden** n o ecuación a coeficientes constantes de orden n.

El sistema diferencial lineal asociado con esta ecuación es

$$y' = Ay, \tag{5}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \dfrac{-a_n}{a_0} & \dfrac{-a_{n-1}}{a_0} & \dfrac{-a_{n-2}}{a_0} & \dfrac{-a_{n-3}}{a_0} & \cdots & \dfrac{-a_1}{a_0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Al utilizar el método de los autovalores y autovectores podemos ver que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor si

$$\det(A - \lambda I) = 0 \longrightarrow p(\lambda) = 0,$$

donde p es el polinomio característico que en este caso resulta ser de formato análogo a la ecuación original

$$a_0 f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \ldots + a_n f = 0 \ \leftrightarrow \ p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Caso $n = 2$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$,

$$f''(s) + af'(s) + bf(s) = 0 \quad s \in \mathbb{R}.$$

Pasando al sistema correspondiente,

$$y(s) = \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R},$$

$$y_1(s) = f(s), \quad y_2(s) = f'(s) = y_1'(s), \quad y_2'(s) = f''(s) = -af' - bf = -ay_2 - by_1.$$

Luego

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \cdot y.$$

Llamando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$, para armar una **mf** por el método de autovalores-autovectores, se necesita $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\det(A - \lambda I) = 0$, es decir,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & -a-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-a-\lambda) - 1 \cdot (-b) = \lambda^2 + a\lambda + b = p(\lambda) = 0.$$

Ahora se necesita un autovector v_λ asociado a cada autovalor λ, es decir,

$$v_\lambda = \begin{pmatrix} v_1^\lambda \\ v_2^\lambda \end{pmatrix} \neq 0 \; / \; Av_\lambda = \lambda v_\lambda \;\Rightarrow\; \begin{cases} v_2^\lambda = \lambda v_1^\lambda \\ bv_1^\lambda = -\lambda(a+\lambda)v_1^\lambda \end{cases}$$

Por lo que $v_2^\lambda = \lambda v_1^\lambda$ y $v_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ es un posible autovector.

Para el caso de conseguir λ_1 y λ_2 dos raíces reales de p distintas, $\{e^{\lambda_1 s}v_{\lambda_1},\, e^{\lambda_2 s}v_{\lambda_2}\}$ forma un sistema fundamental y se tiene la siguiente **mf**,

$$F(s) = \left(e^{\lambda_1 s}v_{\lambda_1} \mid e^{\lambda_2 s}v_{\lambda_2}\right).$$

Luego, para $c \in \mathbb{R}^2$,

$$y(s) = F(s) \cdot c = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 s}1 & e^{\lambda_2 s}1 \\ e^{\lambda_1 s}\lambda_1 & e^{\lambda_2 s}\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 s} + c_2 e^{\lambda_2 s} \\ c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 s} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 s} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$\phi(s) = y_1(s) = c_1 e^{\lambda_1 s} + c_2 e^{\lambda_2 s}, \quad s \in \mathbb{R},\; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(Analizar los otros casos: raíces complejas conjugadas y raíces dobles).

Ejercicios

(1) Hallar todas las soluciones reales de

a).- $y'' + 4y = 0,$
b).- $y'' - 4y = 0,$
c).- $y'' - 4y' = 0,$
d).- $y'' - 2y' + y = 0,$
e).- $y'' + 2y' + y = 0.$

(2) Hallar las soluciones que satisfagan las condiciones dadas:

a).- $2y'' + 3y' = 0$ con $y(0) = y'(0) = 1,$
b).- $y'' + 4y' + 5y = 0$ con $y(0) = 2y'(0) = y''(0).$

(3) Hallar valores de k tales que la ecuación $y'' + ky = 0$ tenga soluciones no triviales, con $y(0) = y(1) = 0$, y encontrar dicha solución.

(4) Si (a, b) es un punto del plano y $m \in \mathbb{R}$, probar que la ecuación $u'' + ku = 0$ tiene exactamente una solución cuya recta tangente en el punto (a, b) tiene por ecuación $y = m(x - a) + b$.
Estudiar además el caso $k = 0$.

(5) a).- Sean (a_1, b_1) y (a_2, b_2) dos puntos del plano tales que $a_1 - a_2 \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Mostrar que existe exactamente una solución de $y'' + y = 0$ que pasa por esos dos puntos.

b).- ¿Es cierto lo anterior si $a_1 - a_2$ es un múltiplo de π?

c).- Generalizar lo anterior para la ecuación $y'' + k^2 y = 0$.

d).- Analizar el caso $k = 0$.

(6) Encontrar todas las soluciones de las siguientes ecuaciones

a).- $y''' - 8\,y = 0$,

b).- $y''' - 5\,y'' + 6\,y' = 0$,

c).- $y^{(4)} - 16\,y = 0$,

d).- $y^{(4)} + 16\,y = 0$,

e).- $y^{(4)} + 5\,y'' + 4\,y = 0$,

f).- $y''' - 3\,y' - 2\,y = 0$.

(7) Considerar la ecuación $y''' + 2y' - 2y = 0$.

a).- Hallar 3 soluciones linealmente independientes y calcular el Wronskiano de las mismas.

b).- Hallar la solución z que verifica $z(0) = 0$, $z'(0) = 1$, $z''(0) = 0$.

c).- Hallar la solución del PVI $y''' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

(8) Considerar la ecuación $y'' + \lambda y = 0$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Encontrar los valores de λ para los cuales existen soluciones no triviales de los siguientes problemas de contorno (a diferencia de los PVI, se conocen datos de la función incógnita en los extremos de un intervalo):

a).- $y(0) = y(\pi) = 0$,

b).- $y'(0) = y'(\pi) = 0$,

c).- $y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi)$,

d).- $y(0) = -y(\pi), y'(0) = -y'(\pi)$.

Encontrar en cada caso todas las soluciones.

(9) Sea la ecuación $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$, donde todos los coeficientes son constantes reales.

a).- Mostrar que si todas las raíces del polinomio característico tienen parte real negativa, entonces toda solución tiende a 0 cuando $x \to \infty$.

b).- Para el caso $n = 2$, mostrar que toda solución no trivial toma valores arbitrariamente grandes cuando $x \to \infty$, si $a_1 < 0$ y $a_0 > 0$.

(10) Sea la ecuación $y'' + c(s)y = 0$, donde $c(s)$ es una función real continua en (a, b).

a).- Si z es una solución no trivial que tiene un cero en $t \in (a,\, b)$, mostrar que $z'(t) \neq 0$.

b).- Mostrar que si z es una solución no trivial, los ceros de z son aislados.

(11) Hallar soluciones particulares de las siguientes ecuaciones:

a).- $y'' + 4y = \cos(s)$,

b).- $y'' + 4y = \operatorname{sen}(2s)$,

c).- $y'' - y' - 2y = s^2 + \cos(s)$,

d).- $y''' + 3y'' + y = s^2 e^{-s}$.

(12) Sea φ_1 una solución de la ecuación homogénea: $L_n y = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$ en un intervalo I y supongamos que $\varphi_1(x) \neq 0$ en I. Vamos a efectuar la *reducción del orden de esta ecuación homogénea*:

(a) Cambiando la incógnita $y(x)$ por $u(x)$, tal que $y = \varphi_1 u$, hallar la ecuación que debe satisfacer u y comprobar que, poniendo $v = u'$, se obtiene una ecuación de orden $n-1$ en v, $L_{n-1}v = 0$.

(b) Mostrar que si $v_1, \ldots, v_n$ es una base de soluciones de $L_{n-1}v = 0$ en I y si $v_k = u_k'$, $k = 2, \ldots, n$, entonces $\varphi_1, u_2\varphi_1, \ldots, u_n\varphi_1$ forman una base de soluciones de $L_n y = 0$.

(c) Para cada una de las siguientes ecuaciones se da una solución en un intervalo que se indica. Encontrar una base de soluciones sobre dicho intervalo:

(I) $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0,\ \varphi_1(x) = x^3,\ x > 0,$

(II) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0,\ \varphi_1(x) = x,\ x > 0.$

(d) Una solución de $x^2y'' - xy' + y = 0,\ x > 0$, es $\varphi_1(x) = x$. Encontrar la solución ψ de la ecuación $x^2y'' - xy' + y = x^2$ que satisface además las condiciones $\psi(1) = 1,\ \psi'(1) = 0$.

(13) -a- Sean $z(x)$ y $w(x)$ soluciones reales no triviales en (a, b) de $y'' + a(x)y = 0$ y $y'' + b(x)y = 0$, respectivamente, donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones reales continuas. Supongamos que $b(x) > a(x)$ en (a, b). Demostrar que si s y t son dos ceros consecutivos de z en (a, b), entonces w debe anularse en algún ξ del intervalo (s, t).

Sugerencia: Suponer que $z > 0$ en (s, t). Se tiene entonces $(wz' - w'z)' = (b - a)zw.\ (*)$

Si fuera $w > 0$ en (s, t) , integrar entre s y t en $(*)$ para obtener una contradicción.

-b- Demostrar que cualquier solución de la ecuación de Airy (o ecuación de Stokes) $y'' + xy = 0$ tiene infinitos ceros en $(0, +\infty)$.

-c- Sea la ecuación $y''+a(x)y = 0$, donde $a(x)$ es una función real continua en $(0, +\infty)$. Si $a(x) \geq \varepsilon > 0$, para todo $x > 0$, concluir que toda solución de la ecuación tiene infinitos ceros en $(0, +\infty)$.

(14) La ecuación diferencial $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 xy + a_0 y = 0$, $a_1, \ldots, a_n$ constantes, se denomina ecuación de Euler de orden n.

(a) Mostrar que si φ es una solución de esta ecuación, para $x > 0$, entonces $\psi(x) = \varphi(e^x)$ es solución de una ecuación diferencial lineal a coeficientes constantes. Esto da un método de resolución de la ecuación de Euler, que consiste en el cambio de la función incógnita, poniendo $z(x) = y(e^x)$, lo que lleva a una ecuación con coeficientes constantes.

(b) Resolver las siguientes ecuaciones de Euler en el intervalo $x > 0$:

I. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0,$

II. $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0.$

(15) (a) Hallar una condición necesaria y suficiente para que la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

tenga dos soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ linealmente independientes tales que

$$y_1(t)y_2(t) = 1.$$

(b) Resolver la ecuación para el caso $p(x) = -\dfrac{1}{x}$.

(16) Hallar todas las soluciones de $y'' + y = |x|$ e $y'' - y = |x|$.