Trabajo Práctico Nº 7

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales autónomas

Repaso

Definición 1. *Dada $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, la norma de A se define como el número no negativo*

$$|A| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

Proposición 1. *-a- La definición anterior es una norma en $M_{m\times n}(\mathbb{C})$.*

-b- Dadas $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times h}(\mathbb{C})$ resulta $|AB| \leqq |A||B|$.

Demostración. Escribir. □

Definición 2. *Dada una sucesión de matrices $\left\{A_k = \left[{}^k a_{ij}\right]\right\}_k \subset \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ se dice que la* ***serie de matrices*** *$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ es* ***convergente*** *si todas las $m \cdot n$ series $\sum_{k=1}^{\infty} {}^k a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ $j = 1, 2, \ldots, n$ son convergentes. Su suma está definida como la matriz $m \times n$ cuyo elemento ij es la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} {}^k a_{ij}$.*

Proposición 2. *Si $\{A_k\}_k$ es una sucesión de matrices $m \times n$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$ converge, entonces la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ también converge.*

Demostración. Repasar. □

Corolario 1. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge a una matriz cuadrada.*

Demostración. Escribir. Hint: Utilizar el ítem -b- para mostrar que $|A^k| \leqq |A|^k$. □

Definición 3. *Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se define la* ***matriz exponencial*** *e^A como la matriz dada por la suma de la serie convergente*

$$e^A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Proposición 3. *(a). Si* $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ *matriz diagonal* $n \times n$*, entonces*

$$e^D = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

Luego, si $t \in \mathbb{R}$*,* $e^{tD} = \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, e^{t\lambda_2}, \dots, e^{t\lambda_n})$*.*

(b). Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *tales que* $AB = BA$*, entonces*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Luego, si $t, s \in \mathbb{R}$*,* $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA} = e^{tA}e^{sA}$*.*

(c). Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *diagonalizable, es decir, existe* $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *no singular tal que* $C^{-1}AC = D$*, con* D *matriz diagonal, entonces*

$$e^A = Ce^DC^{-1}.$$

Luego, si $t \in \mathbb{R}$*,* $e^{tD} = Ce^{tD}C^{-1}$*.*

(d). Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *y* $t \in \mathbb{R}$ *entonces*

$$e^{tA}e^{-tA} = \mathbb{I}.$$

Luego, e^{tA} *es no singular y su inversa es* e^{-tA}*.*

Demostración. Escribir. □

Observación.

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es nilpotente, es decir, $\exists\ q \in \mathbb{N}/\ A^q = 0$, entonces su matriz exponencial se puede calcular directamente como una suma finita.

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^{q-1}}{(q-1)!}.$$

- Toda matriz cuadrada de dimensión n puede expresarse como $A = B + N$, donde B es diagonalizable, N es nilpotente Y B conmuta con N. Esta es la *descomposición de Jordan-Chevalley*. Esto significa que se puede calcular su matriz exponencial reduciendo a los casos previos ya analizados:

$$e^A = e^{B+N} = e^B e^N.$$

Ejercicio: Calcular $\exp(x\,A)$ para los siguientes casos:

a).- $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b).- $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

c).- $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

d).- $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Sistemas a coeficientes constantes

Definición 4. *Sea un **sistema diferencial ordinario (SDO) lineal autónomo** de primer orden y dimensión* n

$$y' = Ay + g(s), \tag{1}$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *y* g *una función vectorial* $g : I \to \mathbb{R}^n$*.*

Si el término independiente g *es nulo, se dice **SDO lineal homogéneo**. En caso contrario, al SDO* $y' = Ay$ *se lo llama **SDO lineal homogéneo asociado** a* (1)*.*

Definición 5. *Sea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, se denomina **función exponencial asociada** a la matriz* A *a la función*

$$F_A(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Proposición 4.

(a) $F_A \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$.

(b) $F_A'(t) = AF_A(t)$*,* $\forall t \in \mathbb{R}$.

(c) F_A *es una mf del sistema homogéneo*

$$y' = Ay. \tag{2}$$

Demostración. Escribir.
Primero mostrar que $F_A \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)$ analizando $\lim_{h\to 0} |F_A(t+h) - F_A(t)|$ y luego ver que

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{F_A(t+h) - F_A(t)}{h} - AF_A(t) \right| = 0.$$

□

Corolario 2. *Sean* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *y* $g \in \mathcal{C}\left(I, \mathbb{R}^n\right)$*. Para cada* $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$ *la solución* φ *del PVI*

$$\begin{cases} y' &= Ay + g(s), \\ y(t) &= x. \end{cases} \tag{3}$$

viene dada por

$$\varphi(s) = e^{(s-t)A}x + \int_t^s e^{(s-u)A} g(u)du, \quad \forall s \in I.$$

Definición 6. *Una solución de* (1)*, al ser una función vectorial, puede ser vista como un conjunto de ecuaciones paramétricas en un espacio de dimensión* n*. Para un valor dado de* s*, las ecuaciones de cada componente de la solución indican las coordenadas* $(x_1, \ldots, x_n)$ *de un punto del espacio. Al variar* s*, las coordenadas en general varían y la colección de los puntos correspondientes a los distintos valores de* $s \in \mathbb{R}$ *forman una curva en el espacio. A dicha curva se le llama **trayectoria**. En el caso de un problema a valores iniciales, la condición inicial determina un punto de paso de la trayectoria correspondiente a la única solución. Un **retrato o espacio de fase** es una representación geométrica de todas las trayectorias de un sistema.*

Método de los autovalores y autovectores

Para el sistema (2) se propone buscar soluciones de la forma $\varphi(s) = e^{\lambda s}v$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$.

$$\varphi'(s) = \lambda e^{\lambda s} v \ \vee \ A\varphi(s) = A\left(e^{\lambda s} v\right) = e^{\lambda s} A v.$$

Luego,

$$\lambda e^{\lambda s} v = e^{\lambda s} A v \ \Leftrightarrow \ A v = \lambda v,$$

es decir, φ será solución de (2) si y solo si λ es un autovalor de A y v un autovector correspondiente a λ.

Teorema 1. *Si la matriz A tiene n autovalores λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ (no necesariamente distintos) y le corresponden n autovectores l.i. v^k, $k = 1, 2, \ldots, n$ entonces una mf de* (2) *es*

$$F(s) = \left(v^1 | v^2 | \cdots | v^n\right)^T \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 s}, \ldots, e^{\lambda_n s}\right) = \left(v^1 e^{\lambda_1 s} | \cdots | v^n e^{\lambda_n s}\right), \ s \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Escribir pasando por su diagonalización. □

Ejercicios

.1. Resolver los siguientes sistemas homogéneos:

a).- $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$

b).- $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2. \end{cases}$

c).- $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + y_3, \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_3' = 2y_1 - y_2. \end{cases}$

.2. Hallar una solución particular del sistema no homogéneo

$$\begin{cases} y'(x) = y + z - 5x + 2, \\ z'(x) = 4y - 2z - 8x - 8, \end{cases}$$

mediante el método de *variación de las constantes*.

.3. Sea φ_i una solución del sistema lineal $y' = P(x)y + g_i(x)$, con $i = 1, 2$. Mostrar que $\psi = \varphi_1 + \varphi_2$ resulta solución del sistema $y' = P(x)y + (g_1 + g_2)(x)$.

.4. Encontrar la solución de

$$\begin{cases} y'(x) = y + 3z + x, \\ z'(x) = -z - \operatorname{sen}(x), \end{cases}$$

que verifique las siguientes condiciones iniciales:

*a- $y(1) = 2, \quad z(1) = 7.$

*b- $y(1) = 0, \quad z(1) = 0.$

Sistemas lineales planos

Los sistemas planos son un caso particular de (2), donde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Por ser un sistema lineal homogéneo, si el determinante de A es no nulo, el único punto de equilibro o punto fijo es el cero, es decir, la única solución constante es la nula.

La configuración de las curvas en el espacio de fase revela información sobre el comportamiento de las soluciones en especial cuando es sistema es autónomo. En este caso de dimensión dos, el espacio de fase es el plano. Y el origen del plano es el punto de equilibrio.

A partir del método de los autovalores para calcular una mf, se puede diferenciar tres casos.

-I- $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Según el signo de los autovalores, se caracteriza el plano de fase:

- $0 < \lambda < \mu \longrightarrow$ el origen es un nodo inestable.
- $\lambda < \mu < 0 \longrightarrow$ el origen es un nodo estable.
- $\lambda < 0 < \mu \longrightarrow$ el origen es una silla.
- $\lambda = \mu < 0$ y existen v_1, v_2 autovectores l.i. $\longrightarrow$ el origen es una estrella estable.
- $0 < \lambda = \mu$ y existen v_1, v_2 autovectores l.i. $\longrightarrow$ el origen es una estrella inestable.

-II- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$. Resultan $\lambda_1 = a + ib$ y $\lambda_2 = a - ib$. Según el signo de la parte real de los autovalores, se caracteriza el plano de fase:

- $a < 0 \longrightarrow$ el origen es una espiral estable.
- $0 < a \longrightarrow$ el origen es una espiral inestable.
- $a = 0 \longrightarrow$ el origen es un centro.

-III- $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ con $\lambda \neq 0$ tal que la dimensión de su autoespacio es uno, es decir, se tiene un único autovector v que lo genera. Según el signo de los autovalores, se caracteriza el plano de fase:

- $0 < \lambda \longrightarrow$ el origen es un nodo degenerado inestable.
- $\lambda < 0 \longrightarrow$ el origen es un nodo degenerado estable.

Recordando que en el caso de dimensión dos, los autovalores de la matriz A se pueden expresar en función de la traza, $T = \mathrm{tr}(A)$ y el determinante, $D = \det(A)$, se tiene

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(T \pm \sqrt{T^2 - 4D}\right).$$

Para ver un análisis de cada caso se puede consultar por ejemplo las secciones 7.5 y 7.6 del libro Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems de William E. Boyce, Richard C. DiPrima y Douglas B. Meade. Otra opción un poco más resumida puede ser el capítulo 3 del libro Differential Equations, Dynamical Systems and an introduction to Chaos de Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney. Para repasar sobre matrices de Jordan se puede consultar Linear Algebra Done Right de Sheldon Axler, sec. 8-D.

Luego, la clasificación anterior se puede ilustrar en el siguiente diagrama $T - D$.

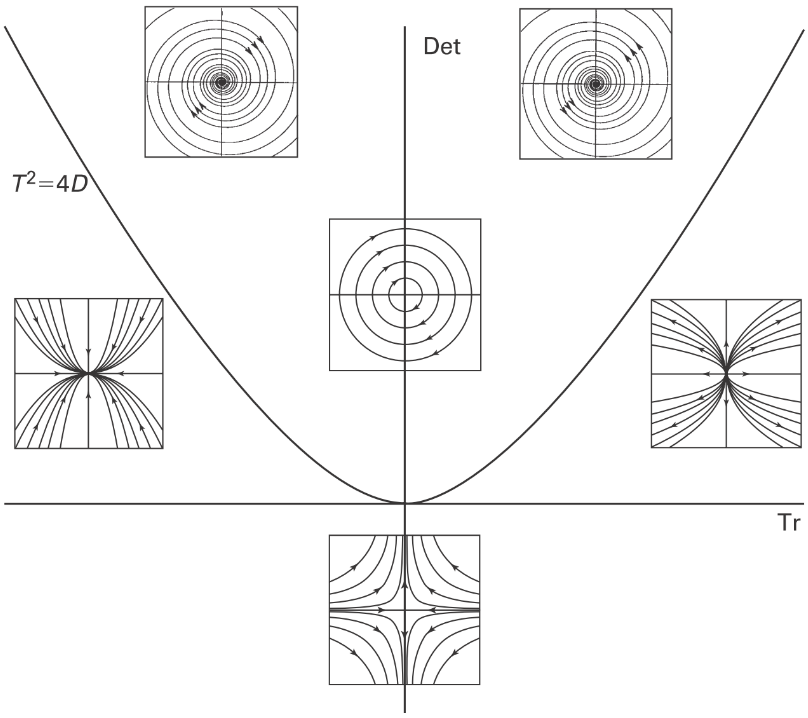

Figure 4.1 The trace-determinant plane. Any resemblance to any of the authors' faces is purely coincidental.

Este diagrama no aclara que sobre la parábola se pueden encontrar dos casos (estrella o nodo degenerado) pues, para saber cuál es de los dos, se necesitan más datos sobre la matriz A que solo su traza y su determinante.

Para completar el análisis de los sistemas lineales planos falta considerar el caso en que $D = 0$, donde el punto de equilibrio no es único ni aislado.

Ejercicios

1 Considerar el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= 4x - y, \\ \dot{y} &= 2x + y. \end{cases}$$

a)_ Escribir el sistema en forma matricial, encontrar el polinomio característico y los autovalores y autovectores de la matriz **A**.

b)_ Encontrar la solución general del sistema.

c)_ Resolver el sistema con la condición inicial $(x_0, y_0) = (3, 4)$ en $t = 0$.

d)_ Graficar $x(s)$ e $y(s)$ separadamente y también algunas trayectorias en el plano de fase.

2 Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - y, \\ \dot{y} &= x + y. \end{cases}$$

Expresar la solución usando funciones a valores reales.

3 Resolver los siguientes sistemas no homogéneos.

a- $\begin{cases} y_1' &= y_2 + 2\exp(s), \\ y_2' &= y_1 + s. \end{cases}$ b- $\begin{cases} y_1' &= y_2 + \operatorname{sen}(2s), \\ y_2' &= -4y_1 + 4y_2 + 1. \end{cases}$ c- $\begin{cases} y_1' &= 3y_1 + 2y_2 + 4e^{5s}, \\ y_2' &= y_1 + 2y_2. \end{cases}$

4 En cada caso resolver

$$\begin{cases} y' &= A(x)y + b(x), \\ y(0) &= y_0, \end{cases}$$

a.- $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b.- $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, b(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

c.- $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

5 En cada caso resolver $y'(x) = Ay + \exp(2x)\, q(x)$

(I) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $q_1(x) = \begin{pmatrix} x^4 \\ 2x^2 \\ x \end{pmatrix}.$

(II) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $q_2(x) = \begin{pmatrix} 2x^3 - x \\ -x + 3 \\ x^2 + x + 1 \end{pmatrix}.$

6 Mostrar que los autoespacios reales correspondientes a la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son conjuntos invariantes del espacio de fase, es decir, para λ autovalor de A y $E(\lambda, A)$ autoespacio correspondiente, si para algún $t \in \mathbb{R}$ se tiene $y(t) \in E(\lambda, A)$ entonces $y(s) \in E(\lambda, A)$, $\forall s > t$.

7 Mostrar que las trayectorias correspondiente al sistema $y' = Ay$ con $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ no se intersecan en el plano de fase.

8 Mostrar que los autoespacios reales correspondientes a la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se pueden expresar como unión de trayectorias rectas con el punto fijo $y \equiv 0$.