Trabajo Práctico Nº 6

Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

Definición 1. *Sea un* ***sistema diferencial ordinario (SDO) lineal*** *de primer orden y dimensión* n

$$y' = P(s)y + g(s), \tag{1}$$

donde P *es una función matricial* $P : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *y* g *una función vectorial* $g : I \to \mathbb{R}^n$.

Si el término independiente g *es nulo, se dice* ***SDO lineal homogéneo****. En caso contrario, al SDO* $y' = P(t)y$ *se lo llama* ***SDO lineal homogéneo asociado*** *a* (1).

Repaso

- P es una función matricial, $P(s) = [p_{ij}(s)]_{i,j=1,2,\ldots,n}$ para las cuales se tiene la continuidad si y solo si cada componente p_{ij} es una función real continua.

Ejercicio: Comprobar esta equivalencia.

- Para P, análogamente para g, se define la integral y la derivada por componentes, es decir,

$$\int_a^b P(s)ds = \left[\int_a^b p_{ij}(s)ds\right]_{i,j=1,2,\ldots,n}, \qquad P'(s) = \left[p'_{ij}(s)\right]_{i,j=1,2,\ldots,n}.$$

Ejercicio: Comprobar las propiedades de linealidad y las reglas de derivación.

Ejercicio: Comprobar que el teorema de la derivada nula y ambos teoremas fundamentales del cálculo también son válidos para funciones matriciales.

Retomando los SDO

Teorema 1. *Sea* $I \subset \mathbb{R}$ *intervalo de interior no vacío,* $P \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ *y* $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. *Para cada* $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$ *existe una y solo una función* $\phi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ *que es solución en* I *del problema lineal a valores iniciales dado por*

$$\begin{cases} y'(s) = & P(s)y(s) + g(s), \\ y(t) = & x. \end{cases} \tag{2}$$

Demostración. Considernado $f(s, y) = P(s)y + g(s)$, chequear las hipótesis de los teoremas anteriores. Se puede ver que es localmente lipschitziana considerando adecuados intervalos compactos $J \subset\subset I$ donde P tiene máximo. Luego, mostrar que I es el intervalo maximal. Completar. □

Proposición 1. *Sea* V_0 *el conjunto de todas las soluciones en* I *del SDO lineal homogéneo*

$$y' = P(s)y, \tag{3}$$

con $P \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. *Entonces* V_0 *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ *de dimensión* n.

Demostración. Analizar que la transformación $L[y] = y' - P(s)y$ definida entre adecuados espacios vectoriales es lineal. Luego V_0 sería su núcleo. Completar por Picard para mostrar la dimensión. $\square$

Definición 2. *Se denomina sistema diferencial ordinario lineal* ***matricial asociado*** *al SDO* (3) *al sistema matricial*

$$Y' = P(s) \cdot Y.$$

Una solución es cualquier $Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ tal que $Y'(s) = P(s) \cdot Y(s)$, $\forall s \in I$.

Lema 1. *$Y \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ es solución $Y' = P(s) \cdot Y$ si y solo si cada uno de los n vectores columna de Y es solución en I del SDO* (3)*.*

Demostración. Escribir. $\square$

Definición 3. *Se denomina* ***matriz fundamental*** *del SDO homogéneo* (3) *a cualquier función matricial $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ que sea solución del sistema diferencial ordinario lineal matricial asociado y tal que los n vectores columna de F sean elementos linealmente independientes de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$. Se indica con mf a tal matriz.*

Definición 4. *Sea G cualquier función matricial de dominio real. Se denomina* ***wronskiano*** *de G, $W[G]$, a la función real definida por*

$$W[G](s) = \det(G(s)), \qquad s \in \mathrm{Dom}(G).$$

Si se tienen n funciones vectoriales, $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$ con dominio real a valores en $\mathbb{R}^n$, se define su wronskiano como

$$W[\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n](s) = W[\widetilde{G}](s), \qquad s \in \bigcap_k \mathrm{Dom}(\varphi^k),$$

considerando a $\widetilde{G}$ cuyas columnas son $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$, es decir, $\widetilde{G} = \left[\varphi^1 | \varphi^2 | \cdots | \varphi^n\right]$.

Lema 2. *(a). Si $G \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ entonces $W[G] \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.*

(b). Si $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ entonces $W[\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n] \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Demostración. Escribir. $\square$

Proposición 2. *Sea $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ una solución del sistema matricial $Y' = P(s) \cdot Y$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(a). F es una mf del SDO $y' = P(s)y$.

(b). $W[F](s) \neq 0$, $\forall s \in I$.

(c). $\exists\, t \in I$ tal que $W[F](t) \neq 0$.

Demostración. Escribir. $\square$

Ejercicio: Analizar si las siguientes funciones contradicen la proposición anterior chequeando cuáles ítem verifican y si sus columnas son o no L.I..

$$Y_1(s) = \begin{pmatrix} s & s^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y_2(s) = \begin{pmatrix} s & s^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición 3. *Sea $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ una solución del sistema matricial $Y' = P(s) \cdot Y$. Entonces, en I, $W[F]$ es idénticamente cero o no se anula nunca.*

Demostración. Escribir.
Hint: mostrar que $W[F]$ es solución de la ecuación $\dfrac{d\,W[F]}{ds} = \mathrm{tr}(P)(s)W[F]$. Al resolver la ecuación se consigue una "fórmula" para $W[F]$. □

Corolario 1. *Sean $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n$ soluciones del SDO (3) en $I \subset \mathbb{R}$. Entonces, en I, $W[\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n]$ es idénticamente cero o no se anula nunca.*

Demostración. Escribir? □

Proposición 4. *Sea $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ una mf del SDO (3). Entonces*

1. $V_0 = \{F(s)c \ : \ c \in \mathbb{R}^n\}$.
2. *Sea $\widetilde{F} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. $\widetilde{F}$ es una solución del sistema matricial asociado $Y' = P(s) \cdot Y$ si y solo si existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\widetilde{F}(s) = F(s) \cdot C$, $\forall s \in I$.*
   Además, $\widetilde{F}$ es una mf del SDO (3) si y solo si $\det(C) \neq 0$.
3. *Para todo $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$, la solución del PVI*
$$\begin{cases} y' = & P(s)y, \\ y(t) = & x, \end{cases}$$
   viene dada por
$$\varphi(s) = F(s)F^{-1}(t)x, \ \forall s \in I.$$

Demostración. Escribir. □

Proposición 5. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío y $P \in \mathcal{C}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Si $z(s) = u(s) + \text{ß}v(s)$ es solución del SDO homogéneo (3), entonces su parte real u y su parte imaginaria v también son soluciones de dicha ecuación.*

Demostración. Escribir. □

Proposición 6. *Sea V_g la solución general del sistema diferencial ordinario lineal no homogéneo (1), es decir,*
$$V_g = \left\{\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) : \ \varphi \text{ solución de } (1)\right\}.$$

(I) *Si φ, $\psi \in V_g$ entonces $\varphi - \psi \in V_0$.*

(II) *Si $\varphi \in V_g$ y $\phi \in V_0$ entonces $\varphi + \phi \in V_g$.*

(III) *$V_g = \varphi_p + V_0$ con $\varphi_p \in V_g$, solución particular de (1). Resulta entonces V_g un espacio afín.*

Demostración. Escribir. □

Método de Lagrange

Como para tener la solución general de (1), V_g, basta con conocer el espacio V_0 y una solución particular de (1), el objetivo de este método es construir una solución particular.

Sea $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ una *mf* del SDO homogéneo asociado $y' = P(s)y$. Como la solución general, V_0, es $\varphi_h(s) = F(s)c$, $c \in \mathbb{R}^n$, entonces se propone buscar una solución particular de (1) de la forma $\varphi_p(s) = F(s)c(s)$ donde ahora $c \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ es una función a determinar para que φ_p sea realmente una solución particular de (1).

Por un lado se tiene que

$$\varphi'(s) = F'(s)c(s) + F(s)c'(s)\ \forall s \in I.$$

Por otro se quiere que

$$\varphi'(s) = P(s)\varphi_p(s) + g(s),\ \forall s \in I.$$

Como $F'(s)c(s) = P(s)F(s)c(s) = P(s)\varphi_p(s)$, $s \in I$, se puede entonces buscar que

$$F(s)c'(s) = g(s),\ s \in I,$$

lo que conduce a

$$c'(s) = F^{-1}(s)g(s),\ s \in I.$$

Fijando $t \in I$, se obtiene

$$\int_t^s c'(u)du = \int_t^s F^{-1}(u)g(u)du \ \Rightarrow\ c(s) = \hat{c} + \int_t^s F^{-1}(u)g(u)du,\ s \in I,$$

con $\hat{c} \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Por lo tanto,

$$\varphi_p(s) = F(s)c(s) = F(s)\hat{c} + \int_t^s F(s)F^{-1}(u)g(u)du,\ s \in I,$$

es la expresión de la solución general de (1).

Teorema 2. *Sea $F \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ una mf del SDO homogéneo asociado $y' = P(s)y$. Entonces para cada $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$, la solución del PVI*

$$\begin{cases} y'(s) = & P(s)y(s) + g(s), \\ y(t) = & x. \end{cases}$$

viene dada por

$$\varphi(s) = F(s)F^{-1}(t)x + \int_t^s F(s)F^{-1}(u)g(u)du,\ \forall s \in I.$$