# Trabajo Práctico Nº 5

1. Sean $f_k, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funciones globalmente Lipschitz tales que $f_k \to f$ uniformemente y sean $y_k, y_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $y_k \to y_0$ . Sean $\phi_k(t)$ y $\phi(t)$ las soluciones de

$$\begin{cases} y' &= f_k(y), \\ y(0) &= y_k. \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} y' &= f(y), \\ y(0) &= y. \end{cases}$$

   respectivamente. Probar que $\phi_k \to \phi$ uniformemente sobre compactos.

2. Consideremos la ecuación diferencial

$$y' = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|\sin y|}{y} & y \neq 0, \\ 1 & y = 0. \end{cases}$$

   -a- Estudiar si $f(x,y)$ verifica las hipótesis del teorema de Picard-Linderlöf en $(x,y) \in [0,+\infty) \times [0,\pi]$ y en $(x,y) \in [0,+\infty) \times [-\pi,\pi]$ respectivamente.

   -b- Dadas las condiciones iniciales $x_0 = 0$, $y_0 = \dfrac{\pi}{2}$, probar que existe una única solución definida en $[0,1)$.

3. Sea $\varphi$ la solución maximal del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' &= y\sin(y), \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

   definida en el intervalo maximal $(\alpha,\beta)$. Demostrar que para todo $x \in [0,\beta)$ se tiene $|\varphi(x)| \leqq e^x$ . Además, analizar si es $\beta = +\infty$.