Trabajo Práctico Nº 4.

Repaso

Para el problema

$$\begin{cases} \dot{y} &= f(y), \\ y(t) &= x; \end{cases} \tag{1}$$

se indica con $y(s) = u\,(s\,; t, x)$ a su solución, para indicar que es una solución de la ecuación que verifica la condición inicial. En el trabajo práctico anterior se estudió como varía la solución al modificarse la condición inicial x.

Anteriormente, ya sea analizando la uniforme convergencia de una serie telescópica o utilizando el principio de contractibilidad de Banach, se estudió la existencia local de soluciones, llegando al teorema de Picard-Lindelöf.

Teorema 1. *Si para $x \in \mathbb{R}^n$ existe $b > 0$ tal que $f : \mathcal{B}_b(x) \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz con constante K. Entonces el PVI* (1) *tiene única solución $y : J \to \mathbb{R}^n$ para $s \in J = [t-a, t+a]$ con $a = \min\{\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\}$ siendo $M = \max\limits_{\mathcal{B}_b(x)} |f(y)|$.*

Intervalo de existencia maximal

Teorema 2. *Sea E abierto y sea $f : E \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz. Entonces existe un intervalo maximal $J = (\alpha, \beta)$, que contiene a t, tal que el PVI* (1) *tiene solución única $y : J \to \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Indicando $y(s) = u\,(s\,; t, x)$, por la existencia local de solución, para cada bola $\mathcal{B}_b(x) \subset E$ existe una única solución definida en un intervalo $J_0 = [t - a_0, t + a_0]$.

Además, $u(s; t, x) \in \mathcal{B}_b(x) \subset E$ y es de clase $\mathcal{C}^1$, por lo que

$$\lim_{s \to t + a_0} u(s; t, x) = x_1 \in \mathcal{B}_b(x) \subset E \text{ abierto.}$$

Tomando $t_1 = t + a_0$ y $y(t_1) = x_1$ como condición inicial, se tiene $J_1 = [t_1 - a_1, t_1 + a_1]$ y $u(s; t_1, x_1)$ única solución en J_1. Por la unicidad, $u(s\,; t, x) = u\,(s\,; t_1, x_1)$, $\forall s \in J_0 \cap J_1$.

(comentar para completar)

Luego, $J = \bigcup\limits_k J_k$ es abierto pues si no lo fuera y, por ejemplo, fuera $J = (\alpha, \beta]$, se tendría $y(\beta) \in E$ y la solución se podría extender a un intervalo mayor.

(comentar para terminar la demostración, ¿queda claro por qué es maximal?)

$\square$

Ejemplo

Sea el PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y} & = & y^2, \\ y(0) & = & x > 0. \end{array} \right. \tag{2}$$

-a- Analizar si este problema se puede encuadrar en las hipótesis de el teorema 2.

-b- Mostrar que la solución es $y(s) = \dfrac{x}{1 - sx}$ para $|s| \leqq \dfrac{1}{4x} = a_0$, habiendo considerando $b = x$. Así, $J_0 = [-a_0, a_0]$.

-c- Considerar un nuevo PVI con condición inicial $(t_1, x_1) = (a_0, y(a_0))$ para obtener $a_1 = \dfrac{3}{16x}$ y definir J_2.

-d- Encontrar la expresión general para (t_n, x_n), así como para J_n y calcular cuál es el intervalo maximal J. (Armar otra sucesión adecuada para conseguir determinar α).

Teorema 3. *Sea E abierto y sea $f : E \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz. Sea $J = (\alpha, \beta)$ el intervalo maximal de existencia de solución del PVI* (1)*. Si $\beta < \infty$ entonces para todo compacto $K \subset E$ existe un $\hat{s} \in [t, \beta)$ tal que $y(\hat{s}) \notin K$. Análogamente, si α es finito, para todo compacto $K \subset E$ existe un $\hat{s} \in (\alpha, t]$ tal que $y(\hat{s}) \notin K$.*

Demostración. Considerando el caso en el que β es finito, suponer que la tesis es falsa. Entonces existe un compacto $K \subset E$ tal que $y(s) \in K$, $\forall s \in [t, \beta)$. Como f es continua y K compacto, f es acotada en K. Sea $M = \max\limits_{x \in K} |f(x)|$.

La ecuación integral equivalente,

$$u(s) = x + \int_t^s f(u(r))\, dr. \tag{3}$$

implica que para cualesquiera $s_1 \leqq s_2 < \beta$, se tiene $|y(s_1) - y(s_2)| \leqq M|s_1 - s_2|$.

Esto significa que si una sucesión de tiempos $s_j \to \beta$, entonces la sucesión $y(s_j)$ es de Cauchy en el compacto K y luego convergente. Más aún, como esto es válido para cualquier sucesión $s_k \to \beta$ y $y(s)$ es continua $s \in [t, \beta)$, entonces

$$\exists \lim_{s \to \beta} y(s) = x_1.$$

Si se define $y(\beta) = x_1$, la función $y(s)$ es continua para $s \in [t, \beta]$. Se puede ahora utilizar el teorema 1 nuevamente con la condición inicial $y(\beta) = x_1$ para mostrar que hay una solución del PVI definida en algún intervalo alrededor de β. Por la unicidad, dicha solución coincide con $y(s)$ en las cercanías de β. Por lo que β no es la cota superior del intervalo de existencia y se tiene una contradicción. La demostración para α es similar. □

Corolario 1. *Si β es finito, entonces o bien $\nexists \lim\limits_{s \to \beta} y(s)$, o bien $\lim\limits_{s \to \beta} y(s) \in \partial E$.*

Demostración.

... escribir...

□

Ejemplo

Sea el PVI

$$\begin{cases} \dot{y_1} &= \dfrac{1}{1-y_2}, \\ \dot{y_2} &= y_2, \\ y_1(0) &= x_1 \in \mathbb{R}, \\ y_2(0) &= x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

-a- Analizar si este problema se puede encuadrar en las hipótesis del teorema 2.

-b- Mostrar que la solución es $y(s) = u(s; 0, x_1, x_2) = (y_1(s), y_2(s)) = \left(x_1 + \ln\left|\dfrac{1-x_2}{e^{-s}-x_2}\right|, x_2e^s\right)$.

-c- Mostrar que si $x_2 > 1$, entonces $J = (-\ln x_2, \infty)$ y cuando $0 < x_2 < 1$, $J = (-\infty, -\ln x_2)$. Además, resulta $\lim\limits_{s \to -\ln x_2} u(s; 0, x_1, x_2) = (\infty, 1)$.

-d- Mostrar que si $0 \geqq x_2$, entonces $J = \mathbb{R}$.

Ejemplo

Sea el PVI

$$\begin{cases} \dot{y} &= \dfrac{1}{y}, \\ y(0) &= x > 0. \end{cases} \tag{5}$$

-a- Analizar si este problema se puede encuadrar en las hipótesis del teorema 2, eligiendo un adecuado espacio E.

-b- Encontrar la solución.

-c- Mostrar el intervalo maximal de existencia J.

-d- Si J es acotado, analizar el límite de la solución.