Trabajo Práctico N° 3.

Repaso y definiciones

El objetivo de esta introducción es observar que los resultados vistos en el trabajo anterior cubren una gran familia de distintas ecuaciones diferenciales ordinarias puesto que todas ellas pueden ser expresadas con el formato del teorema de Picard-Lindelöf..

Ecuaciones diferenciales de orden superior

Sea $k \in \mathbb{N}$, una **EDO** de orden k en forma normal o explícita es de la forma

$$y^{(k)}(s) = g\left(s, y, y', y'', \ldots, y^{(k-1)}\right), \tag{1}$$

siendo g una función definida en $O \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a valores en $\mathbb{R}$, s la variable independiente, y la función incógnita que depende solo de s, y $y^{(i)}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ las $k-$ésimas derivadas de y respecto de s.

Una **solución** de (1) es cualquier función $\phi : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, que cumple

(I) $\exists\, \phi^{(k)}(s)$ en todo $s \in I$, donde si $s$es un extremo de I, $\phi^{(k)}(s)$ denota la correspondiente derivada lateral.

(II) $\left(s, \phi(s), \phi'(s), \ldots, \phi^{(k-1)}(s)\right) \in O$, $\forall s \in I$,

(III) $\phi^{(k)}(s) = g\left(s, \phi(s), \phi'(s), \ldots, \phi^{(k-1)}(s)\right)$, $\forall s \in I$.

Se dice que (ϕ, I) es una solución local de (1) o que ϕ es una solución en I.

Sistemas diferenciales ordinarios de primer orden

Un **SDO**, sistema diferencial ordinario, de primer orden y dimensión n en forma normal o explícita es de la forma

$$\begin{cases} y_1' &= f_1\left(s, y_1, \ldots, y_n\right), \\ y_2' &= f_2\left(s, y_1, \ldots, y_n\right), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n\left(s, y_1, \ldots, y_n\right), \end{cases} \tag{2}$$

donde f_i son funciones de dominio común $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a valores en $\mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $n \in \mathbb{N}$. A s se le llama variable independiente y f_i, n funciones incógnitas que dependen solo de s.

Una **solución local** de (2) es cualquier $(n+1)-$upla $(I, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ con $I \subset \mathbb{R}$, intervalo de interior no vacío y $\phi_i : I \to \mathbb{R}$, n funciones que verifican

(I) $\exists\, \phi_i'(s)$ en todo $s \in I$ y $i = 1, 2, \ldots, n$, donde si s es un extremo de I, $\phi_i'(s)$ denota la correspondiente derivada lateral.

(II) $(s, \phi_1(s), \phi_2(s), \ldots, \phi_n(s)) \in \Omega$, $\forall s \in I$,

(III) $\phi_i'(s) = f_i\left(s, \phi_1(s), \phi_2(s), \ldots, \phi_n(s)\right)$, $\forall s \in I$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Se llama problema de Cauchy o problema a valores iniciales para un SDO al siguiente problema: fijado un punto $(t, x_1, x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, hallar una solución local $(I, \phi_1, \ldots, \phi_n)$ de (2) tal que $t \in I$ y $\phi_i(t) = x_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Utilizando una notación vectorial,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad f(s,y) = \begin{pmatrix} f_1(s, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(s, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix},$$

el SDO (2) se puede reescribir

$$y' = f(s, y),$$

donde f es una función definida en $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a valores en $\mathbb{R}^n$. Considerando $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, un problema a valores iniciales para una ecuación de primer orden en forma normal consiste en encontrar una función $\phi : I \to \mathbb{R}^n$, definida en algún abierto $I \subset \mathbb{R}$, la cual verifique

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}(s) & = & f\left(s, y(s)\right), \; s \in I, \\ y(t) & = & x, \end{array} \right. \tag{3}$$

considerando $(t, x) \in \Omega$.

Proposición 1. *Toda EDO de orden n es equivalente a un SDO de primer orden y dimensión n.*

Demostración. Considerando la EDO

$$y^{(n)} = g\left(s, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{4}$$

se definen

$$y_1 = y, \; y_2 = y_1' = y', \; y_3 = y_2' = y'', \ldots, y_n = y_{n-1}' = y^{(n-1)}.$$

Así se obtiene el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = g\left(s, y_1, y_2, \ldots, y_n\right). \end{array} \right. \tag{5}$$

Se puede ver que si (I, ϕ) es solución local de (4), la $n+1-$upla $\left(I, \phi, \phi', \phi'', \ldots, \phi^{(n-1)}\right)$ es solución local de (5) y recíprocamentre. □

Proposición 2. *Todo sistema de EDOs de orden n con p incógnitas es equivalente a un SDO de primer orden y dimensión np.*

Demostración.

(Completar)

□

Resolver

Obtener un sistema normal de ecuaciones de primer orden equivalente a los siguientes sistemas:

a).- $\begin{cases} x'' - 2x + y = \operatorname{sen}(t), \\ y'' - x - 2y = \cos(t). \end{cases}$ b).- $\begin{cases} x' - 2y' + x - 3y = \exp(t), \\ 2x' + 3y' - x + 4y = 2\exp(t). \end{cases}$

Sistemas autónomos

Cuando la función f de (3) no depende explícitamente de la variable independiente s, el problema se dice autónomo.

Luego, todo sistema de primer orden de dimensión n puede reescribirse como un sistema autónomo de dimensión $n+1$ considerando a la variable independiente como otra variable dependiente.

$$\begin{cases} \dot{y}(\tau) &= f\left(s(\tau), y(s(\tau))\right), \\ \dot{s}(\tau) &= 1, \end{cases} \quad \tau \in \mathbb{R},$$

De esta forma, estudiar el problema autónomo implica estudiar todos los problemas y sistemas antes propuestos, con la dificultad (o no) del incremento dimensional.

Considerando ahora una $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, el problema autónomo queda expresado por

$$\begin{cases} \dot{y} &= f(y), \\ y(0) &= x; \end{cases} \tag{6}$$

Como ya se ha visto para el caso de ecuaciones autónomas de dimensión uno, si ϕ es una solución entonces $\psi(t) = \phi(t + \tau_0)$, con $\tau_0 \in \mathbb{R}$, también es solución de la ecuación autónoma. En parte debido a esta propiedad, los problemas a valores iniciales suelen considerarse con dato en $t = 0$.

Anteriormente, ya sea analizando la uniforme convergencia de una serie telescópica o utilizando el principio de contractibilidad de Banach, se estudió la existencia local de soluciones, llegando al teorema de Picard-Lindelöf.

Teorema 1. *Si para $x \in \mathbb{R}^n$ existe $b > 0$ tal que $f : \mathcal{B}_b(x) \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz con constante K. Entonces el PVI* (6) *tiene única solución $y : J \to \mathbb{R}^n$ para $s \in J = [t-a, t+a]$ con $a = \min\{\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\}$ siendo $M = \max\limits_{\mathcal{B}_b(x)} |f(y)|$.*

Dependencia de las condiciones iniciales

Para el problema (6), se indica con $y(s) = u\,(s; x)$ a su solución, para indicar que es una solución de la ecuación que verifica la condición inicial. El objetivo de este párrafo es analizar como varía la solución al modificarse la condición inicial x.

Lema 1. *Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe $b > 0$ tal que $f : \mathcal{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz con constante K y sea $M = \max\limits_{\mathcal{B}_b(x_0)} |f(x)|$. Entonces la familia de soluciones $u(s; x)$ de* (6) *existe para cada $x \in \mathcal{B}_{b/2}(x_0)$ y es única para $s \in [-a, a]$ con $a < \min\left\{\dfrac{1}{K}, \dfrac{b}{2M}\right\}$.*

Demostración. Considerar el espacio $V = \mathcal{C}\left(J, \mathcal{B}_b\left(x_0\right)\right)$ con la norma del supremo, donde $J = [-a, a]$.

Sean T_x los operadores definidos por

$$T_x(u)(s) = x + \int_0^s f\left(u(t)\right) dt.$$

Si $x \in \mathcal{B}_{b/2}(x_0)$ y $u \in V$, entonces $T_x(u) \in V$ si $a \leqq \dfrac{b}{2M}$ pues ...

Además, T_x es contractivo en V si $a < \dfrac{1}{K}$ pues ...

(Completar cada paso)

□

Se puede observar que $x \in \mathcal{B}_{b/2}(x_0)$ y $a \leqq \dfrac{b}{2M}$ son dos condiciones ajustables pero mutuamente perjudiciales pues...

(Comentar esta observación)

Lema 2. *(Gronwall) Sean $g, k : [0, a] \to \mathbb{R}$ continuas, $a > 0$, $k(t) \geqq 0$ y g satisface*

$$g(t) \leqq c + \int_0^t k(s)g(s)ds, \ \forall t \in [0.a].$$

Entonces, se tiene que

$$g(t) \leqq ce^{\int_0^t k(s)ds}, \ \forall t \in [0, a].$$

Demostración. Sea $G(t) = c + \int_0^t k(s)g(s)ds$. Como k y g son continuas, $G \in \mathcal{C}^1$ y $G(0) = c$. Derivando G se tiene

$$\dot{G} = k(t)g(t) \leqq k(t)G(t),$$

es decir,

$$\dot{G} - kG \leqq 0.$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-\int_0^t k(s)ds}$, positivo,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int_0^t k(s)ds} G(t)\right) \leqq 0.$$

Integrando,

$$e^{-\int_0^t k(s)ds} G(t) \leqq G(0) \Rightarrow G(t) \leqq ce^{\int_0^t k(s)ds}.$$

Como $g \leqq G$, se obtiene el resultado.

□

Teorema 2. *Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $b > 0$ tal que $f : \mathcal{B}_b(x_0) \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz con constante K. Sea $J = [-a, a]$ el intervalo común de existencia de las soluciones $u : J \times \mathcal{B}_{b/2}(x_0) \to \mathcal{B}_b(x_0)$. Entonces $u(s; x)$ es uniformemente Lipschitz en x con constante e^{Ka}.*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
|u(s;x) - u(s;z)| &\leqq \int_0^s |f(u(t;x)) - f(u(t;z))|\, dt + |x - z| \\
&\leqq |x - z| + K \int_0^s |u(t;x) - u(t;z)|\, dt.
\end{aligned}
$$

Usando el lema de Gronwall con $g(s) = |u(s;x) - u(s;z)|$, $c = |x - z|$ y $k(s) = K$, se tiene

$$
|u(s;x) - u(s;z)| \leqq e^{Ka} |x - z| .
$$

(Completar)

□

Teorema 3. *Si $f : E \to \mathbb{R}^n$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en el abierto E, entonces existe $a > 0$ tal que la solución $u(s; x)$ de* (6) *es una función $\mathcal{C}^1$ de x para $s \in J = [-a, a]$.*

Demostración. Como f es $\mathcal{C}^1$ en un abierto, es localmente lipschitziana. (¿Por?)

Luego, para una condición inicial $x_0 \in E$ y un entorno $\mathcal{B}_b(x_0) \subset E$, f es Lipschitz en $\mathcal{B}_b(x_0)$ con constante $K = K(x_0, b)$.

Para cada $x \in \mathcal{B}_{b/2}(x_0)$, existe una única solución $u(s; x)$ del PVI, en un intervalo común J.

Sea Φ la solución del sistema matricial asociado

$$
\frac{d}{ds}\Phi = Df\,(u(s,x))\,\Phi, \;\; \Phi(0,x) = I.
$$

(Siempre tiene solución este sistema? Única? Por?)

Sea $|h| \leqq \frac{b}{2}$, y sea $g(s) = |u(s; x + h) - u(s; x) - \Phi(s; x)h|$.

Como $\Phi(0; x) = I$ se tiene que $h = \Phi(0; x)h$, entonces, reescribiendo en la forma integral,

$$
g(s) = \left| \int_0^s [f(u(t; x + h)) - f(u(t;x)) - Df(u(t;x))\, h]\, dt \right| .
$$

Como f es $\mathcal{C}^1$, por el desarrollo de Taylor se tiene

$$
f(w) = f(u) + Df(u)(w - u) + R(u, w),
$$

donde, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, u) > 0$ tal que

$$
|R(u, w)| \leqq \epsilon\, |w - u| \quad \text{si } \; |w - u| < \delta.
$$

Luego,

$$
|f(w) - f(u)| \leqq \|Df(u)\|\, |u - w| + |R|.
$$

Usando esto, para $s \in [0, a]$, se tiene

$$
\begin{aligned}
g(s) \leqq & \int_0^s |f(u(t; x+h)) - f(u(t; x)) - Df(u(t; x))\, h|\, dt \\
\leqq & \int_0^s \|Df\|\, |u(t; x+h) - u(t; x) - \Phi(t; x)h|\, dt + \\
& + \int_0^s |R(u(t; x+h), u(t; x))|\, dt.
\end{aligned}
$$

Por la dependencia Lipschitz continua de la condición inicial, se tiene que

$$|u(t; x+h) - u(t; x)| \leqq |h| e^{Ka},$$

si se toma $|h| \leqq \delta(\epsilon, b) e^{-Ka} = r$.

Esta restricción indica, para cada $\epsilon > 0$, un entorno $\mathcal{B}_r(x)$ aceptable para la condición inicial, aunque $|h|$ sea arbitrariamente pequeño.

Por el lema de Gronwall y como $\|Df\| \leqq K$ (¿Por?), resulta

$$g(s) \leqq \epsilon |h| a e^{Ka} e^{Ks}.$$

Por la arbitrariedad del $\epsilon > 0$, se tiene que $g(s)/|h| \to 0$ cuando $h \to 0$, siendo así $u \in \mathcal{C}^1$ y su derivada Φ.

□

Resolver

-a- Probar la siguiente generalización del lema de Gronwall:

Sean φ, ψ y χ funciones continuas a valores reales en un intervalo real $I = [a, b]$. Sea $\chi(t) > 0$, para todo $t \in I$, y

$$\varphi(t) \leqq \psi + \int_a^t \chi(s)\, \varphi(s)\, ds \qquad \forall t \in I.$$

Probar que

$$\varphi(t) \leqq \psi + \int_a^t \chi(s)\, \psi(s)\, e^{\int_a^s \chi(u) du}\, ds \qquad \forall t \in I.$$

-b- Sean $f \in \mathcal{C}(\Omega) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$, con constante de lipschitzianidad L y

$$R = \{(x, y) \in \Omega : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}.$$

Si ϕ_1 y ϕ_2 son respectivamente soluciones ε_1 y ε_2 aproximadas de $y' = f(x, y)$ tales que $|\phi_i(x_0) - y_0| < b$, $\forall i = 1, 2$ y $|\phi_1(x_0) - \phi_2(x_0)| \leq \delta$, probar que

$$|\phi_1(x) - \phi_2(x)| \leqq \delta e^{L|x - x_0|} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{L}\left(e^{L|x - x_0|} - 1\right).$$

-c- Probar que el resultado del ítem anterior puede generalizarse a regiones R de la forma $R = \{(t, x) : a \leqq t \leqq b,\ \ g(t) \leqq x \leqq h(t)\}$, donde g y h son funciones dadas.

-d- Sea D un abierto en el plano $t-x$ y $f \in (C, Lip)$ en D. Sea ψ una solución del siguiente (PVI) en el intervalo $[a,b]$:

$$(PVI)\begin{cases} \psi'(t) &= f\left(t, \psi(t)\right), \ \ \forall t \in (a,b), \\ \psi'(\tau) &= \xi. \end{cases}$$

Demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $\tilde{\xi}$ satisface que $\left|\xi - \tilde{\xi}\right| < \delta$, entonces la solución φ que pasa por $\left(\tau, \tilde{\xi}\right)$ existe en todo el intervalo $[a,b]$.