Trabajo Práctico Nº 2.

❶ Sea el problema diferencial a valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{y}\,(t) = f\,(t, y(t))\,,\; t \in I, \\ y\,(s) = x. \end{cases} \tag{1}$$

Enunciar el problema integral asociado a (1) y mostrar su equivalencia.

❷ Definir el operador integral correspondiente al problema integral del ítem ❶.

❸ Identificar las propiedades del problema (1) para que el operador integral resulte **contractivo**, eligiendo un espacio métrico adecuado .

❹ Reescribir la demostración del punto fijo de Banach, con el espacio métrico completo elegido, para mostrar la existencia y unicidad de solución del problema (1).

❺ De la demostración del ítem ❹, resaltar la existencia de una sucesión convergente a la solución del problema y analizar el error.

❻ Mostrar que, para L constante positiva ,

$$\|u\|_L = \sup_{t \in J} e^{-L|t-t_0|}\,|u(t)|,$$

define una norma en $\mathcal{C}\,(J; \mathcal{B}_b\,(x_0))$, con J intervalo real tal que $t_0 \in J^o$.

❼ La norma del ítem anterior se llama norma de Bielecki. Mostrar que el espacio resulta **completo**.

❽ Reescribir el teorema de existencia y unicidad considerando la norma de Bielecki, revisando la acotación del error de las aproximaciones sucesivas. Indicar los **mínimos supuestos necesarios** sobre las propiedades de f.

❾ Debilitando las hipótesis sobre la función f utilizadas en ❸ y mediante la construcción de soluciones ε-aproximadas, mostrar la existencia de solución utilizando el resultado de Ascoli-Arzelà. (Teorema de Cauchy-Peano)

Antes de comenzar a resolver los ítems del trabajo, sería conveniente comentar el problema (1).
En este enunciado se puede considerar una ecuación diferencial que si bien es de primer orden (cantidad de órdenes de derivación) es de dimensión n, es decir, $x \in E$, con $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto de interior no vacío. Luego, $f : I \times E \to \mathbb{R}^n$ y así $y'(t)$ indica el gradiente del campo escalar y en el instante $t \in I$. Para que el problema no sea sin solución, se debe considerar un dato inicial (s, x) dentro del dominio de definición de f, es decir, $(s, x) \in I^\circ \times E \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

❶ El problema integral asociado es encontrar una función u solución de la ecuación integral

$$u(t) = x + \int_s^t f\,(r, u(r))\,dr. \tag{2}$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Sea ϕ solución de (1). Luego $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$, $t \in I$. Integrando ambos miembros entre s y t,

$$\int_s^t \phi'(r)dr = \int_s^t f(r, \phi(r))\, dr.$$

Si se supone ϕ' continua, por el 2° teorema fundamental del cálculo,

$$\phi(t) - \phi(s) = \int_s^t f(r, \phi(r))\, dr.$$

Como ϕ es solución de (1), resulta diferenciable. Para conseguir que ϕ' sea continua, se le puede pedir ciertas propiedades a f. Se le podría pedir directamente que $t \to f(t, \phi(t))$ sea continua en I aunque se suele usar una hipótesis más restrictiva pero más fácil de utilizar, pedir directamente que f sea continua en $I \times E$.

Por lo tanto, si f es continua, ϕ resulta solución de (2).

Sea ahora ψ solución de (2). Por estar definida mediante una función integral, ψ es continua con sólo ser el integrando Lebesgue medible. Para poder derivar a ambos lados, se le puede pedir condiciones a f. Nuevamente, alcanzaría con que $t \to f(t, \psi(t))$ sea continua en I pero consideremos $f \in \mathcal{C}(I \times E; \mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \frac{d}{dt}\left(x + \int\limits_s^t f(r, \psi(r))\, dr \right) = f(t, \psi(t))\, dr.$$

Considerando $t = s$, se tiene en (2) que $\psi(s) = x + \int\limits_s^s f(r, \psi(r))\, dr = x$. Por lo tanto, de ambas igualdades se tiene que ψ es solución de (1).

❷ Se puede reescribir el problema integral pensando en un operador (funcional o transformación) T:

$$u \mapsto Tu(t) = x + \int\limits_s^t f(r, u(r))\, dr.$$

Si consideramos la mínima propiedad para lograr la equivalencia de los problemas, del ítem anterior tenemos que f es continua. Luego, este operador T lo podemos pensar definido de $\mathcal{C}(I \times E; \mathbb{R}^n)$ en sí mismo, aunque la imagen sea un subespacio (¿propio?) de $\mathcal{C}^1(I \times E; \mathbb{R}^n)$.

Si se le pide más regularidad a f, por ejemplo ser de clase $\mathcal{C}^k$, entonces el operador T estaría definido de $\mathcal{C}^k(I \times E; \mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{C}^{k+1}(I \times E; \mathbb{R}^n)$.

❸ Para hablar de la contractividad del operador T debemos primero elegir adecuados espacios métricos A y B tales que $T : A \to B$.

(completar siguiendo el teorema de punto fijo de Banach)

Ayuda:

Una función l definida entre espacios métricos (A, ρ) y (B, μ) se dice localmente lipschitziana en $O \subset A$ si

$$\exists\, L > 0/ \quad \mu\left(l(x), l(y)\right) \leqq L\rho\left(x, y\right), \; \forall\, x, y \in O.$$

Se dice que L es una constante de Lipschitz para l en O. Según la bibliografía, se considera a la menor de dichas constantes como **la** constante de Lipschitz, pero no es necesario en este contexto.

Esta definición se puede usar como ayuda al momento de pensar condiciones sobre f para que T resulte contractivo. Una de las condiciones usuales es pedir que f sea lipschitziana respecto de su segunda variable. seguir ...

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119