Trabajo Práctico Nº 12

Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.
El operador de Laplace.

1. Hallar las expresiones del operador de Laplace usando coordenadas polares en el plano y coordenadas esféricas y cilíndricas en el espacio.

2. Determinar las relaciones entre las constantes a, b, c y d para que las siguientes funciones resulten armónicas:

$$u_1(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad u_2(x,y) = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3.$$

3. Mostrar que si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica entonces las siguientes funciones también lo son:

$$v(x,y) = u(x-a, y-b), \quad w(x,y) = u(\lambda x, \lambda y), \quad a, b, \lambda \in \mathbb{R}.$$

4. Probar que el operador de Laplace es *invariante por transformaciones ortogonales*, esto es, si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es ortogonal, resulta $\Delta(f(T\,x)) = (\Delta f)(T\,x)$.

5. Encontrar la solución $u(x,y)$ de la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < a,\ 0 < y < b$, que satisface las siguientes condiciones de borde:

(a). (I). $u(0,y) = u(a,y) = 0$, $0 < y < b$.
(II). $u(x,0) = 0$, $u(x,b) = g(x)$, $0 \leqq x \leqq a$.

(b). Encontrar la solución si $g(x)$ es

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leqq x < \dfrac{a}{2}, \\ a-1, & \text{si } \frac{a}{2} \leqq x \leqq a. \end{cases}$$

6. Encontrar la solución $u(x,y)$ de la ecuación de Laplace en el rectángulo $0 < x < a, 0 < y < b$, que satisface las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{cases} u(0,y) = k(x), & u(a,y) = 0 & 0 < y < b, \\ u(x,0) = h(x), & u(x,b) = g(x), & 0 \leqq x \leqq a. \end{cases}$$

⑦. Encontrar la solución $u(r,\theta)$ de la ecuación de Laplace

$$u_{rr} + (\frac{1}{r})u_r + (\frac{1}{r^2})u_{\theta\theta} = 0,$$

fuera del círculo de radio $r = a$, que también satisface las siguientes condiciones de borde:

$$u(a,\theta) = f(\theta) \quad 0 \leqq \theta < 2\pi.$$

Hint: Suponer que $u(r,\theta)$ es univaluada y acotada para $r > a$.

⑧. Encontrar la solución $u(x,y)$ de la ecuación de Laplace en la franja semi-infinita $0 < x < a, 0 < y$ que satisface las siguientes condiciones de borde:

$$\begin{cases} u(0,y) = u(a,y) = 0, & 0 < y, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leqq x \leqq a, \end{cases}$$

y la condición adicional que $u(x,y) \to 0$ cuando $y \to \infty$.

⑨. Sea el problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = \dfrac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n^k} \qquad n,k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

-a- Hallar una solución de la forma $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$.

-b- Usar el ítem para probar que este problema no es un problema *bien planteado*.

⑩. Sea $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $G(x,\,\xi) = K(x,\xi) - K(x,\xi^*)$ donde $\xi = (\xi_1,\,\xi_2)$, $\xi^* = (\xi_1,\,-\xi_2)$ y $K(x,\xi) = \dfrac{1}{2\pi}\log|x-\xi|$

(a)- Probar que G es una función de Green para el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en Ω, esto es, G es una solución fundamental de la ecuación tal que $G(x,\,\xi) = 0$, $\forall x \in \partial\Omega$, $\xi \in \Omega$, y obtener para $u \in C^2(\Omega)$ la fórmula integral de Poisson

$$u(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\xi_2\,u(x,0)}{(x_1-\xi_1)^2+\xi_2^2}\right)dx_1$$

(b)- Usar el ítem (a) para obtener una solución acotada de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \forall x \in \Omega \\ u(x_1,0) = f\,(x_1) \end{cases}$$

con $f \in C^2\,(\mathbb{R}) \cap L^\infty\,(\mathbb{R})$.

(c)- Indicar si la solución obtenida satisface o no el principio de máximo.

⑪. Probar que una solución de $\Delta u - u^2 = 0$ en un dominio Ω, no puede tomar su máximo en Ω salvo que $u \equiv 0$.

12. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio acotado y sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones armónicas uniformemente acotadas, es decir,
$$\sup_{x\in\Omega} |u_n(x)| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Probar que si $K \subset \Omega$ es un compacto existe una subsucesión que converge en K.

13. Demostrar el teorema 15 (Evans, pág. 41).

La ecuación del calor.

1. Sean $u_k(s,t),\ k = 1, 2, ..., n$ soluciones de $u_t = u_{ss}$ para todo $t > 0$, $s \in I \subset \mathbb{R}$. Probar que
$$u(x,t) = u(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \prod_{k=1}^{n} u_k(x_k, t),$$
es solución de $u_t = \Delta_x u$ para todo $t > 0$, $x \in I^n \subset \mathbb{R}^n$.

2. Verificar que:
   (I) $u(x,t)$ es solución de $u_t = a(t)\, u_{xx}$, $a(t) > 0$ si y sólo si $v(x,\tau) = u(x, \phi(\tau))$, donde $t = \phi(\tau)$ es la función inversa de $A(t) = \int_0^t a(s)\, ds$, es solución de $v_\tau = v_{xx}$.
   (II) $u(x,t)$ es solución de $u_t = u_{xx} - b(t)\, u_x$ si y sólo si $v(\xi,t) = u\left(\xi + \int\limits_0^t b(s)\, ds,\ t\right)$ es solución de $v_t = v_{\xi\xi}$.
   (III) $u(x,t)$ es solución de $a(u)\, u_t = (a(u)\, u_x)_x$, $a(u) > 0$ si y sólo si $v(x,t) = \int\limits_0^{u(x,t)} a(s)\, ds$ es solución de $v_t = v_{xx}$.
   (IV) $u(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ es solución de $u_t = u_{xx}$, $x > 0$. ($\operatorname{erfc}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_z^\infty e^{-t^2} dt$.)

3. Hallar la solución positiva del problema de Cauchy
$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
si $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$

4. Sea u solución clásica de $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$.
   a Mostrar que $u_\lambda(x,t) = u\left(\lambda x, \lambda^2 t\right)$ también es solución de la ecuación para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.
   b Usando el ítem anterior, mostrar que $v(x,t) = x \cdot Du(x,t) + 2tu_t(x,t)$ también es solución de la ecuación.

⑤. Considerando la ecuación del calor unidimensional,

a hallar todas las soluciones que satisfacen $\phi(x,t) = \phi\left(\lambda x, \lambda^2 t\right)$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

b Mostrar que el método presentado en el ítem anterior también puede aplicarse a la ecuación del calor no lineal

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad K \in \mathcal{C}^1.$$

Este método se conoce con el nombre de *Método de similaridad*.

⑥. Resolver por el método de separación de variables:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - k^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu = 0, & 0 < x < \pi,\, t > 0, \\ u(0,t) = 0, & t > 0, \\ u(\pi,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Sugerencia: Considerar la función $v(x,t) = u(x,t)\exp(ct)$.

⑦. Considerar el siguiente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0, \\ u_x(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

con $u_0(x) \in L^2(0,1)$.

(a).- Por el método de separación de variables, hallar la solución del problema y verificar que es una solución clásica en $(0,1) \times (0,1)$.

(b).- Verificar que la solución hallada en el ítem anterior satisface $u(,t) \to u_0$ en $L^2(0,1)$ cuando $t \to 0$ y que $u(x,t) \to \int_0^1 u_0(x)\,dx$ cuando $t \to 1$ uniformemente.

⑧. Aplicar el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de conducción de calor en un disco de $\mathbb{R}^N$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & |x| < 1,\, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & |x| = 1,\, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & |x| \le 1, \end{cases}$$

donde $u_0(x) = \phi(|x|)$ (y por ende $u(x,t) = w(|x|,t)$).

9. Sea u la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= g(x,t), & (x,t) \in (0,L) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) &= 0, & t > 0, \\ u(x,0) &= 0, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Probar que u puede ser representada en la forma

$$u(x,t) = \int_0^t \Phi(x,t;s)ds,$$

donde Φ es la solución del problema

$$\begin{cases} \Phi_t - \Phi_{xx} &= 0, & (x,t) \in (0,L) \times (s,+\infty), \\ \Phi(0,t;s) = \Phi(L,t;s) &= 0, & t > s, \\ \Phi(x,s;s) &= g(x,s), & x \in (0,L). \end{cases}$$

Este resultado se conoce como el *Principio de Duhamel*.

10. Dada la función $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, con $g(0) = 0$, deducir la fórmula

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}} g(s)ds,$$

para la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\infty), \\ u &= 0 & (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \{t=0\}, \\ u &= g & (x,t) \in \{x=0\} \times [0,\infty). \end{cases}$$

(Hint: Considerar $v(x,t) := u(x,t) - g(x)$ y extender de forma impar v sobre $\{x < 0\}$).

La ecuación de ondas.

1. Considerando la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

(a) Demostrar que si se realiza el cambio de variables independientes $\xi = x + t, \tau = x - t$, la ecuación anterior se transforma en

$$u_{\xi\tau}(\xi,\tau) = 0 \qquad (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

(b) Calcular el conjunto de soluciones $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ de (2) y, usando el cambio de variables indicado, calcular el conjunto de soluciones de (1).

(c) Demostrar que el conjunto de soluciones de (1) y (2) es un espacio vectorial real de dimensión infinita.

(d) Extender los resultados anteriores para una ecuación de ondas de la forma

$$c^2\, u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

donde c es una constante no nula.

②. (I) Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$, demostrar que la función

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)dy \right) ds,$$

verifica

$$v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = f(x,t), \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2. \qquad (3)$$

(II) Teniendo en cuenta el ejercicio previo, encontrar una fórmula que proporcione todas las soluciones de (3).

③. Probar que toda función $u \in C^2(A)$, $A \subset \mathbb{R}^2$ es solución de la ecuación de ondas

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

si y sólo si satisface en A la ecuación en diferencias:

$$u(x-k, t-h) + u(x+k, t+h) = u(x-h, t-k) + u(x+h, t+k).$$

④. Considerar la ecuación a derivadas parciales lineal de segundo orden

$$u_{xy}(x,y) + a\, u_x(x,y) + b\, u_y(x,y) + ab\, u(x,y) = 0 \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad (4)$$

donde a y b son constantes reales y $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$.
Mediante el cambio de variable $u(x,y) = v(x,y)\, e^{-ay-bx}$ encontrar una fórmula que proporcione todas las soluciones de (4).

⑤. Obtener la solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = xt, & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = x^2, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 1, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

⑥. Estudiar la solución de los siguientes problemas por la fórmula de D´Alambert y determinar los puntos en que la solución no es C^2

$$textrm{-a-} \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases} \end{cases} \qquad \text{- b -} \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

⑦. Sea el problema

$$(P) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \max\{1 - |x|, 0\}, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = \min\{x^4 - 1, 0\}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a). Determinar el dominio de dependencia del punto $(0, \frac{1}{2})$.

(b). Determinar el conjunto de puntos $(x,4) \in \mathbb{R}^2$ tales que $u(x,4) \neq 0$.

(c). Utilizar la fórmula de D´Alambert para calcular la solución del problema, estudiando en qué puntos la solución no es C^2.

Transformada de Laplace.

Resolver los siguientes problemas con PDE utilizando la transformada de Laplace.

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = x, \;\; x > 0,\, t > 0$, con condiciones iniciales $u(x,0) = 0$, $x > 0$, y con condiciones de borde $u(0,t) = 0$, $t > 0$.

2. $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) + u(x,t) = 0, \;\; x > 0,\, t > 0$, con condiciones iniciales $u(x,0) = \sin(x)$, $x > 0$, y con condiciones de borde $u(0,t) = 0$, $t > 0$.

3. $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \;\; 0 < x < 2,\, t > 0$, con condiciones iniciales $u(x,0) = 3\sin(2\pi x)$, $0 < x < 2$, y con condiciones de borde $u(0,t) = 0$, $u(2,t) = 0$, $t > 0$.

4. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \sin(\pi x), \;\; 0 < x < 1,\, t > 0$, con condiciones iniciales $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $0 < x < 1$, y con condiciones de borde $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$, $t > 0$.

5. $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \;\; x \in \mathbb{R},\, t > 0$, con condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que $u(x,t)$ es acotada. Analizar las hipótesis mínimas necesarias sobre f. De la expresión de solución obtenida, recuperar el núcleo fundamental del calor.