

## Trabajo Práctico Nº 11

1. Dado el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + 5y^2), \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2), \end{cases}$$

mostrar que tiene un ciclo límite estable.

Hint: Usar coordenadas polares para conseguir la región atrapadora.

2. Resolver el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x' = 3x - 9t + 13 - 2y, \\ y' = 7t - x + 3y - 2z - 15, \\ z' = 3z - y - 6t + 7. \end{cases}$$

3. Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Encontrar  $e^{At}$  para la matriz  $A$  dada.  
 (b) Demostrar que  $e^{At} = \mathbf{I} \cosh(2t) + \frac{1}{2}A \sinh(2t)$ .  
 (c) Utilizando el ítem anterior, dar la solución general de  $x' = Ax$ .

4. Romeo y Julieta, la obra escrita por William Shakespeare en el 1597, trata sobre dos enamorados cuyas familias están enfrentadas. Su amor es imposible debido a la rivalidad entre sus familias, pero de una u otra manera quieren lograr estar juntos, porque el amor siempre triunfa.

En el caso de que se amen mutuamente y nada influya, van a poder estar juntos. Esta situación se puede representar mediante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales básico. La variable  $x$  representa el amor/odio de Romeo hacia Julieta en el tiempo  $t$ , mientras que  $y(t)$  es el amor/odio de Julieta hacia Romeo.

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases}$$

Según los signos de las constantes  $a, b, c$  y  $d$  se tienen distintos estilos de relación. Interpretando el modelo, poner un título a cada caso que describa cada situación.

El problema surge cuando Julieta siente que Romeo se obsesiona con ella y eso la ahoga o la hace perturbarse, por lo que pierde un poco de interés en él. Para modelizar esta nueva situación se podría agregar un término cuadrático al problema modificando la variación del amor que siente Julieta hacia Romeo. Se tendría un problema de la forma:

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx(1 - x^2) + dy, \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Analizar la estabilidad del sistema (1) para los siguientes parámetros:  $a = 1, b = -2, c = 2$  y  $d = 1$ . Realizar un esbozo y sacar conclusiones de los resultados obtenidos.  
 (b) A partir de un boceto del campo vectorial obtenido, dar 3 puntos iniciales -que no sean puntos críticos- para que el amor entre Romeo y Julieta llegue a "buen puerto", justificando adecuadamente.