Trabajo Práctico Nº 10

Clasificación de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.

①. Sea el operador lineal de segundo orden a coeficientes constantes en dos variables independientes

$$L[u] = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Hallar una transformación lineal que lo reduzca a su forma canónica.

②. Considerar las ecuaciones lineales a coeficientes constantes de tipo

-a- elíptico: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u + \delta$.

-b- hiperbólico: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u + \delta$ o $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u + \delta$.

-c- parabólico: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u + \delta,\ \beta \neq 0$ o $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma u + \delta,\ \alpha \neq 0$.

Introducir un cambio de variable dependiente $u = v\, e^{ax+by}$ con a y b convenientes de modo que las ecuaciones se reduzcan a su forma canónica (no necesariamente homogénea).

③. Reducir a forma canónica las siguientes ecuaciones y obtener **algunas** soluciones (por ejemplo aquellas que se expresan como producto o suma de funciones de dos variables elegidas convenientemente, o soluciones de tipo radial).

-a- $u_{xx} + 2\, u_{xy} - 3\, u_{yy} + 2\, u_x + 6\, u_y = 0.$

-b- $u_{xx} + 4\, u_{xy} + 5\, u_{yy} + u_x + 2\, u_y = 0.$

-c- $u_{xx} - 2\, u_{xy} + 3\, u_{yy} + \alpha\, u_x + \beta\, u_y + \gamma\, u = 0, \quad \alpha,\, \beta,\, \gamma \in \mathbb{R}.$

④. Hallar las regiones en que la ecuación es de tipo hiperbólico, elíptico o parabólico, y reducirla a su forma canónica.

-i- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$ -ii- $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$