

Modelos de Error en Computación Cuántica

J. García-López – U.P.M.

F. García-Mazarío – U.P.M.

V. Martín – U.P.M.

(Grupo de Computación Cuántica)

TECHNICAL REPORT Nº 20

Julio 2003

Jesús García López de Lacalle

Dep. Matemática Aplicada. E.U. Informática. U.P. Madrid

Ctra. de Valencia Km.7, 28031 Madrid, España

e_mail: jglopez@eui.upm.es

Francisco García Mazarío

Dep. Matemática Aplicada. E.U. Informática. U.P. Madrid

Ctra. de Valencia Km.7, 28031 Madrid, España

e_mail: gmazario@eui.upm.es

Vicente Martín

DLSIIS-Análisis Numérico. F. Informática. U.P. Madrid

Boadilla del Monte, 28060 Madrid, España

e_mail: vicente@fi.upm.es

Departamento de Matemática Aplicada
E.U. Informática. U. Politécnica Madrid
Ctra. de Valencia Km. 7
28031 Madrid, España

Modelos de Error en Computación Cuántica¹

J. García-López², F. García-Mazarío³ y V. Martín⁴
(jglopez@eui.upm.es, gmazario@eui.upm.es y vicente@fi.upm.es)

1. Introducción

La potencia del modelo cuántico de computación se basa en la utilización de un fenómeno físico que no se utiliza en computación clásica, el paralelismo cuántico. Otra diferencia esencial entre ambos modelos de computación consiste en que el modelo clásico es digital mientras que el cuántico es analógico. Este hecho plantea mayores dificultades para la construcción de ordenadores cuánticos que las que se tuvieron que afrontar para ordenadores clásicos. En primer lugar, las superposiciones coherentes de estados se pierden rápidamente por la influencia del entorno que provoca el fenómeno denominado decoherencia que se convierte de este modo en una fuente de errores. Y, en segundo lugar, la imprecisión del propio ordenador cuántico al aplicar puertas y medidas cuánticas constituye una nueva fuente de errores. Estas son las razones fundamentales por las que la computación cuántica requiere un mecanismo para acotar la acumulación de errores durante el proceso de cálculo.

Para corregir los errores que se producen a lo largo de una computación cuántica había que superar dificultades importantes. Los errores cuánticos son continuos al estar relacionados con los coeficientes que describen los bits cuánticos (qubits). Como consecuencia del *no-cloning theorem* [34] no es posible usar el método clásico de copia para introducir redundancia durante la codificación de la información. Tampoco es posible en general usar el método de la mayoría para leer la información codificada en un estado cuántico, puesto que la lectura colapsa el estado de forma irreversible ocasionando la pérdida de la información. Estos obstáculos fueron finalmente superados, una vez que Shor [24] y Steane [27] establecieron las ideas básicas para la construcción de códigos cuánticos y se formalizase de forma consistente la teoría cuántica de códigos [2, 4, 5, 11, 14, 18]. Estos códigos permiten corregir errores en estados cuánticos sin destruir su coherencia, es decir, evitando el colapso.

Sobre la base de la teoría de códigos cuánticos se propuso un modelo de computación tolerante a fallos, para reducir la acumulación de errores durante el cálculo y hacer viable la computación cuántica [1, 3, 10, 13, 15, 21, 23]. El ingrediente fundamental de este modelo es, además del uso de los códigos cuánticos, la computación con qubits codificados [10, 15, 21, 23]. La construcción de códigos correctores cuánticos se basa en una discretización de los errores y, sobre la base de esta discretización, se define el modelo estocástico de errores independientes de este modelo de computación. El error que se produce en un paso cualquiera de la computación es discreto e independiente en cada uno de los qubits y se modeliza por $E_1 \otimes \dots \otimes E_n$, donde E_i ($1 \leq i \leq n$) es igual a I , X , Y y Z con probabilidades $1 - p$, $p/3$, $p/3$ y $p/3$ respectivamente.

¹Trabajo parcialmente subvencionado por el MCYT, proyecto TIC2002-01541.

²Dpto. Matemática Aplicada, E.U. Informática, U. Politécnica, Ctra. Valencia Km 7, 28031 Madrid.

³Dpto. Matemática Aplicada, E.U. Informática, U. Politécnica, Ctra. Valencia Km 7, 28031 Madrid.

⁴DLSIIS-Análisis Numérico, F. Informática, U. Politécnica, Boadilla del Monte, 28060 Madrid.

En este artículo consideramos un modelo de error diferente para la decoherencia del n -qubit sobre el que se realiza la computación cuántica. Modelizamos el proceso de decoherencia, a partir de los principios básicos de isotropía e independencia temporal, como un proceso estocástico análogo al movimiento browniano y estudiamos la capacidad de los códigos cuánticos para reducir este tipo de decoherencia. El resultado desafortunado que se obtiene indica que los códigos cuánticos no pueden controlar este tipo de decoherencia y, a la vista de este hecho, resulta crucial entender la relación entre el modelo de decoherencia usado y los modelos utilizados habitualmente.

El artículo está estructurado como sigue. En la sección 2 hacemos un resumen de los diferentes modelos de error que se han estudiado, incluyendo el modelo de decoherencia que proponemos. En la sección 3 recordamos la estructura general de los códigos cuánticos y en la sección 4 analizamos en detalle el modelo de decoherencia propuesto y la capacidad de los códigos cuánticos para corregir este tipo de decoherencia. Finalmente, como conclusión, comentamos las consecuencias que se derivan de los resultados obtenidos.

2. Modelos cuánticos de error

Los errores que se producen durante una computación cuántica se deben, en primer lugar, a la decoherencia del n -qubit sobre el que se realizan los cálculos y, en segundo lugar, a la imprecisión del ordenador en la aplicación de puertas y medidas cuánticas. Esta hipótesis de trabajo es habitual en los trabajos sobre tratamiento de errores cuánticos y computación tolerante a fallos. Si embargo se trata de una hipótesis demasiado genérica que es preciso concretar, para abordar el estudio de la propagación de errores.

Desde el principio se trabajó con la hipótesis de que los errores en cada qubit son independientes. Según Shor [24] simplemente por analogía con el modelo de computación clásico. Esta hipótesis es realista para los errores debidos a la imprecisión del ordenador en la aplicación de puertas y medidas cuánticas de un qubit [15]. Pero no está del todo justificada en el modelo de decoherencia del n -qubit pues, contrariamente a lo que se espera, deja invariantes las medidas de entrelazamiento del n -qubit.

La decoherencia se debe al acoplamiento del n -qubit con el entorno (ordenador cuántico). En consecuencia el n -qubit debe considerarse como un sistema abierto. El acoplamiento del n -qubit y el ordenador cuántico produce un entrelazamiento entre ambos sistemas que modifica el n -qubit de forma, a priori, incontrolable. Generalmente se asume que una vez que el n -qubit ha perdido la coherencia la computación completa falla y, en consecuencia, los resultados que se obtienen no son correctos [15, 17, 24, 28]. En el modelo de computación cuántica los cálculos se realizan aplicando transformaciones unitarias al n -qubit. Sin embargo esto sólo se cumple de forma aproximada ya que, debido al acoplamiento entre los dos sistemas, la evolución del n -qubit generalmente no es unitaria [22, 24]. Esta es la causa última de la decoherencia del n -qubit.

Se han planteado numerosas estrategias para reducir la decoherencia de un sistema abierto como, por ejemplo, el n -qubit de una computación cuántica. En todas ellas se intenta restituir la evolución unitaria de dichos sistemas. El primer método que se propuso fue la corrección cuántica de errores [4, 5, 11, 26] que consiste en una forma de realimentación cuántica fundamentada en la codificación redundante de la información. Hasta la fecha, es el único método para el que se ha probado que es posible realizar computaciones cuánticas de longitud arbitraria (threshold theorem) [1, 10, 13, 15, 21, 23]. El segundo método introducido por Zanardi y Rasetti [3, 35] utiliza subespacios libres de

decoherencia (DFS) para representar los n -qubits. La inmunidad natural de estos subespacios frente al proceso de decoherencia se debe a la simetría especial de la interacción sistema-entorno.

En otras propuestas la decoherencia se controla mediante una realimentación activa del sistema cuántico. La primera, debida a Tombesi y otros [12, 29, 30], permite mantener la coherencia de un estado conocido durante largos periodos de tiempo. Pero este método no es aplicable en computación cuántica, ya que generalmente el estado del n -qubit es desconocido. Un refinamiento de este método, debido a Lloyd y Viola [22, 31, 32, 33], permite cancelar la interacción sistema-entorno aplicando rápidos pulsos de control. Esta técnica denominada *open-loop control* congela la decoherencia de manera análoga al efecto Zeno [8, 16].

En los trabajos sobre computación tolerante a fallos [15, 21, 23] generalmente se asume la interpretación de la decoherencia que da Zurek [36]. En esta interpretación el entorno interactúa sobre el n -qubit realizando medidas del mismo. En este artículo proponemos un modelo estocástico de decoherencia análogo al movimiento browniano [6]. Para definirlo vamos a representar el estado Ψ del n -qubit mediante un punto en la esfera de Bloch. Si la parametrizamos en coordenadas reales, el estado Ψ se corresponde con un punto en la esfera \mathcal{S}_{2d-1} , siendo $d = 2^n$. Llamamos proceso de decoherencia del n -qubit Ψ a todo proceso estocástico $D(\Psi, t)$, $t \geq 0$, sobre \mathcal{S}_{2d-1} que cumple las siguientes propiedades:

1. La distribución de probabilidad para $t = 0$ cumple $D(\Psi, 0) = \delta(\Psi)$.
2. La distribución de probabilidad en el instante t , $D(\Psi, t)$, es isótropa respecto de Ψ .
3. Si $t_1 < t_2$ y $\Psi(t_1)$ es el estado resultante del proceso de decoherencia de Ψ en el intervalo de tiempo $(0, t_1)$ entonces $D(\Psi, t_1)$ y $D(\Psi(t_1), t_2 - t_1)$ son independientes.

La definición anterior del proceso de decoherencia $D(\Psi, t)$ parte de tres hipótesis básicas. La primera establece que para $t = 0$ no existe decoherencia, es decir, que el n -qubit está en estado Ψ con probabilidad 1. La segunda afirma que la probabilidad de decoherencia de Ψ es igual en todas las direcciones. Como consecuencia de la isotropía, la probabilidad de que el estado resultante sea Φ sólo depende del ángulo θ entre Ψ y Φ o, equivalentemente, de la distancia entre ambos estados $\|\Psi - \Phi\|^2 = 2 - 2\cos(\theta)$. La última hipótesis indica que los procesos de decoherencia a lo largo de dos intervalos de tiempo disjuntos, $(0, t_1)$ y (t_1, t_2) , son independientes. Nuestro modelo estocástico de decoherencia está respaldado de forma cualitativa por algunos resultados sobre movimiento browniano cuántico (QBM). Por ejemplo, Eisert y Plenio [7] prueban que un estado puro con distribución gaussiana evoluciona instantáneamente a un estado entrelazado, independientemente de la intensidad del acoplamiento y de la temperatura del entorno.

Los errores ocasionados por la imprecisión del ordenador en la aplicación de puertas y medidas cuánticas son, en principio, más fáciles de modelizar que los errores de decoherencia. Estos errores se consideran independientes y se modelizan mediante operadores unitarios cercanos al operador identidad, que se denominan operadores de error. Se asume que el error que se produce al aplicar una puerta cuántica afecta de modo directo exclusivamente a los qubits sobre los que actúa [10, 15]. Por ejemplo, si se aplica una puerta cuántica al primer qubit el operador de error será de la forma $E \otimes I \otimes \dots \otimes I$. Para modelizar el error que se produce en una medida cuántica se sustituye formalmente la medida por la puerta cuántica I y una medida ideal [15]. Los errores, cuando se producen, están localizados sobre qubits determinados pero, a lo largo de la computación cuántica, se pueden propagar a otros qubits [21]. Esto ocurre cuando un qubit interactúa, por mediación de una puerta cuántica, con otro que está afectado por un error previo. En este caso el segundo qubit propaga el error previo al primero,

además de que ambos se ven afectados por el error originado por la puerta cuántica. Por último se supone que los errores promedio son independientes del número de qubits [21].

A partir del modelo de errores independientes se plantea de forma natural un modelo estocástico. En este modelo se sustituyen los operadores generales de error por los operadores discretos (bit-flip, phase-flip, etc). Estos operadores, además de jugar un papel crucial en la construcción de códigos cuánticos, permiten construir bases que permiten el desarrollo de los operadores generales de error. Este es el modelo de error utilizado con mayor frecuencia, tanto en los estudios teóricos como en las simulaciones numéricas [25] de la computación tolerante a fallos.

3. Códigos cuánticos

La estructura básica de los códigos cuánticos es la misma que la de los clásicos. Se codifica la información introduciendo redundancia con la finalidad de utilizar esta información adicional para detectar y corregir errores. Como ya se ha comentado en la introducción, la teoría cuántica de códigos debe abordar algunos problemas nuevos respecto a la teoría clásica de códigos: errores continuos, imposibilidad de copiar estados (*no-cloning theorem* [34]) y colapso de los estados durante su lectura. A pesar de estas dificultades las ideas propuestas por Shor [24] y Steane [27] han permitido establecer de forma consistente la teoría cuántica de códigos.

En esta sección vamos a recordar la estructura general de un código cuántico. Esto nos va a permitir, en la siguiente, analizar su capacidad de corrección de errores de decoherencia. Consideremos un código cuántico \mathcal{C} de longitud (n, m) , es decir, un código que codifica un m -qubit en un n -qubit. Formalmente se trata de una aplicación lineal inyectiva que conserva el producto escalar

$$\mathcal{C} : \mathcal{H}_m \rightarrow \mathcal{H}_n \quad (1)$$

donde \mathcal{H}_m y \mathcal{H}_n son los espacios de Hilbert que describen el m -qubit y el n -qubit respectivamente. La aplicación lineal \mathcal{C} se puede implementar como un operador unitario $C : \mathcal{H}_m \otimes \mathcal{H}_{n-m} \rightarrow \mathcal{H}_n$ que, restringido al subespacio $\mathcal{H}_m \otimes |0\rangle$, coincide con la aplicación lineal \mathcal{C} . El operador C es el operador de codificación del código y $W = C(\mathcal{H}_m \otimes |0\rangle)$ es el espacio código. Los estados que pertenecen al espacio código, estados código, no tienen ningún error mientras que los que no pertenecen al espacio código sí. El espacio código también se denotará W_1 , por tanto asumiremos que $W = W_1$.

Para determinar el conjunto de errores que el código corrige se eligen $d'' = 2^{n-m}$ operadores unitarios de error $E_1, E_2, \dots, E_{d''}$. Entre ellos debe estar el operador identidad que, por comodidad, supondremos que es el primero, es decir, $E_1 = I$. Para que este proceso, que se denomina discretización de errores, permita corregir cualquier combinación lineal de los mismos es preciso que los subespacios $W_h = E_h(W)$, $1 \leq h \leq d''$, (obsérvese que $W_1 = W$) determinen una descomposición ortogonal de \mathcal{H}_n , es decir,

$$\mathcal{H}_n = W_1 \perp W_2 \cdots \perp W_{d''} \quad (2)$$

Una vez introducidos los ingredientes esenciales del código vamos a describir el proceso de corrección. Supongamos que el estado código Ψ sufre una perturbación convirtiéndose en el estado Φ . El estado inicial es un estado código, es decir $\Psi \in W$, mientras que el estado perturbado en general no lo es, es decir $\Phi \notin W$. Si el estado perturbado pertenece al subespacio

$$W_\Psi = L(E_1\Psi, E_2\Psi, \dots, E_{d''}\Psi) \quad (3)$$

el código permite recuperar el estado inicial Ψ . En primer lugar medimos Φ respecto de la descomposición ortogonal de la fórmula (2). El resultado de la medida será un valor h , entre 1 y d'' , denominado síndrome y la proyección del estado Φ en el subespacio W_h . Y, a continuación, aplicamos el inverso del operador de error indicado por el síndrome. De forma esquemática el proceso es el siguiente:

$$\Phi \xrightarrow{h} \frac{\alpha_h}{|\alpha_h|} E_h \Psi \xrightarrow{E_h^{-1}} \frac{\alpha_h}{|\alpha_h|} \Psi \quad (4)$$

El estado resultante no es exactamente Ψ pero, al diferir solamente en un factor de fase, ambos estados son indistinguibles desde el punto de vista físico.

Naturalmente hay errores que el código no es capaz de corregir. Por ejemplo, cuando el estado perturbado Φ es un estado código el resultado de la corrección vuelve a ser Φ y, en este caso, no se recupera Ψ . Esta limitación en la capacidad de corrección del código también se da en los códigos clásicos. Sin embargo, para que esto se produzca en un código clásico la perturbación (distancia de Hamming entre la palabra código y la palabra perturbada) tiene que ser grande (mayor que el número de bits que corrige el código), mientras que en un código cuántico se puede producir para perturbaciones arbitrariamente pequeñas (estados Φ arbitrariamente cercanos a Ψ). Esta diferencia esencial entre códigos clásicos y cuánticos se debe al hecho de que los códigos clásicos son discretos y los cuánticos continuos.

Hemos comprobado que el código corrige de forma exacta el estado perturbado Φ si se cumple que $\Phi \in W_\Psi$. Pero, ¿cuál es el resultado de la acción del código sobre Φ si éste no pertenecen a W_Ψ ? En este caso la situación es bastante más desfavorable. Se puede probar que la probabilidad de que la corrección no sea exacta es mayor que 0. Y la codimensión de W_Ψ es mayor o igual que su dimensión ya que el cociente entre ambas, $2^m - 1$, es mayor o igual que 1.

Para hacer un análisis cuantitativo, denotamos por $\tilde{\Phi}$ al estado resultante de la corrección de Φ . En realidad $\tilde{\Phi}$ debe considerarse como una distribución de probabilidad, puesto que la corrección puede generar resultados diferentes. Para medir la bondad de la corrección, tal como se define más adelante, se compara el error inicial $\|\Psi - \Phi\|^2$ con el valor esperado del error final, es decir, con $E(\|\Psi - \tilde{\Phi}\|^2)$. Si consideramos $\Phi = \sqrt{p}\Psi + \sqrt{1-p}\varphi$ tal que $\varphi \in W_2$, $\varphi \perp E_2\Psi$ y $p \in (0, 1)$, entonces

$$\|\Psi - \Phi\|^2 = 2(1 - \sqrt{p}) < 2(1 - p) = E(\|\Psi - \tilde{\Phi}\|^2) \quad (5)$$

Con este ejemplo se demuestra que el código corrector puede amplificar el error de Φ , incluso si el error inicial es arbitrariamente pequeño (p próximo a 1).

El estado que se obtiene después de aplicar el código es un estado código, es decir, un estado que formalmente no tiene error. Esto significa que si la corrección no ha sido exacta queda un error residual que ya no es detectable. Estos errores residuales se van acumulando a lo largo de la computación y, si son suficientemente significativos, pueden hacer que ésta falle.

Por otro lado se puede controlar el subespacio W_Ψ , eligiendo adecuadamente los operadores unitarios de error. Así, por ejemplo, se puede conseguir que todos los errores que afectan a un único qubit se corrijan de forma exacta. El mejor código que se conoce con estas características para codificar un qubit, [2, 18], es un código de longitud (5, 1). Este código es óptimo en el sentido de que ningún código de longitud $(n, 1)$ con $n < 5$ es capaz de corregir todos los errores de un solo qubit.

4. Modelo estocástico de decoherencia

Para describir el proceso de decoherencia del estado Ψ de un n -qubit vamos a identificarlo como un punto en la esfera de Bloch. Se trata de un vector unitario de un espacio de Hilbert complejo \mathcal{H}_n de dimensión $d = 2^n$ en el que se considera una base ortonormal $\mathcal{B}_n = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_d]$. En esta base el estado Ψ se representa del siguiente modo

$$\Psi = \sum_{k=1}^d \alpha_k \varphi_k \quad \text{tal que} \quad \sum_{k=1}^d |\alpha_k|^2 = 1 \quad (6)$$

Sin embargo resulta más sencillo representar el estado Ψ , como punto en la esfera de Bloch, en coordenadas esféricas. Con este objetivo obtenemos en primer lugar una representación de Ψ en coordenadas cartesianas. Para ello basta expresar los coeficientes de Ψ en la fórmula (6) en forma binómica. Por ejemplo, de esta manera: $\alpha_k = x_{2k-1} + i x_{2k}$ para todo $1 \leq k \leq d$. De este modo el estado Ψ se representa por un punto en la esfera de Bloch de dimensión $2d - 1$, contenida en \mathbf{R}^{2d} , que denotaremos por \mathcal{S}_{2d-1} :

$$\Psi \equiv \mathcal{R}_\Psi = (x_1, x_2, \dots, x_{2d}) \quad \text{tal que} \quad \sum_{j=1}^{2d} x_j^2 = 1 \quad (7)$$

Para determinar un punto de la esfera \mathcal{S}_{2d-1} se necesitan exactamente $2d - 1$ ángulos. Por tanto, el estado Ψ se puede representar en coordenadas esféricas por una $(2d - 1)$ -tupla de ángulos que toman valores en el intervalo $[0, \pi]$ a excepción del último que los toma en el intervalo $[0, 2\pi]$:

$$\Psi \equiv \mathcal{E}_\Psi = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2d-1}) \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} 0 \leq \theta_1 \leq \pi \\ \vdots \\ 0 \leq \theta_{2d-2} \leq \pi \\ 0 \leq \theta_{2d-1} \leq 2\pi \end{cases} \quad (8)$$

Si elegimos los ángulos de forma que θ_j es el ángulo que forma el j -ésimo semieje coordenado positivo con el vector $(0, \dots, 0, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{2d})$, para todo $1 \leq j \leq 2d - 1$, el cambio de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas es el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 = \cos(\theta_1) \\ x_2 = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) \\ \vdots \\ x_j = \sin(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{j-1}) \cos(\theta_j) \\ \vdots \\ x_{2d-1} = \sin(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{2d-2}) \cos(\theta_{2d-1}) \\ x_{2d} = \sin(\theta_1) \cdots \sin(\theta_{2d-2}) \sin(\theta_{2d-1}) \end{cases} \quad (9)$$

Para que la descripción del proceso de decoherencia del estado Ψ sea más sencilla elegiremos la base \mathcal{B}_n de forma que $\Psi = \varphi_1$, es decir, que $\mathcal{R}_\Psi = (1, 0, \dots, 0)$. Supongamos que Φ es el estado resultante del proceso de decoherencia de Ψ durante un cierto tiempo. Entonces

$$\|\Psi - \Phi\|^2 = 2 - 2\cos(\theta_1) \quad (10)$$

si las coordenadas esféricas de Φ son $\mathcal{E}_\Phi = (\theta_1, \dots, \theta_{2d-1})$. Para simplificar un poco la notación denotaremos por θ a la primera coordenada esférica de Φ , es decir, asumiremos que $\theta = \theta_1$.

4.1. Definición del modelo

Seguidamente daremos una descripción precisa del proceso de decoherencia del estado Ψ del n -qubit. El punto de la esfera de Bloch que representa a Ψ comienza a moverse en el instante $t = 0$ siguiendo un camino estocástico en la esfera, análogo a un camino browniano. Para definir este proceso de decoherencia, es suficiente con conocer la distribución de probabilidad sobre la esfera de Bloch del estado resultante en cada instante de tiempo t .

Definición 1 *El proceso de decoherencia de un n -qubit Ψ es el proceso estocástico $D(\Psi, t)$, $t \geq 0$, sobre \mathcal{S}_{2d-1} ($d = 2^n$) definido por las siguientes propiedades:*

1. *La distribución de probabilidad para $t = 0$ cumple $D(\Psi, 0) = \delta(\Psi)$.*
2. *La distribución de probabilidad en el instante t , $D(\Psi, t)$, es isótropa respecto de Ψ .*
3. *Si $t_1 < t_2$ y $\Psi(t_1)$ es el estado resultante del proceso de decoherencia de Ψ en el intervalo de tiempo $(0, t_1)$ entonces $D(\Psi, t_1)$ y $D(\Psi(t_1), t_2 - t_1)$ son independientes.*
4. *La distribución de probabilidad en el instante t , $D(\Psi, t)$, tiene como función de densidad*

$$f_t(\theta) = \frac{(2d-2)!!}{(2\pi)^d} \frac{(1-\sigma^{2t})}{(1+\sigma^{2t}-2\sigma^t \cos(\theta))^d} \quad (11)$$

en los sistemas de coordenadas en los que $\mathcal{E}_\Psi = (0, \dots, 0)$, donde σ es un parámetro del sistema que toma valores en el intervalo $(0, 1)$.

A la distribución de probabilidad $D(\Psi, t)$ también la llamaremos $\Psi(t)$, considerando que describe la decoherencia temporal del estado Ψ . Teniendo en cuenta esta notación, la primera propiedad establece que para $t = 0$ se cumple $\Psi(0) = \delta(\Psi)$, es decir, que el n -qubit está en estado Ψ con probabilidad 1. Por tanto, en el instante $t = 0$ el estado Ψ no ha sufrido ninguna decoherencia. Más adelante tendremos ocasión de demostrar esta propiedad. La demostración de la segunda es tan simple como comprobar que la función de densidad f_t , en coordenadas esféricas, sólo depende del ángulo θ . La tercera afirma que los procesos de decoherencia a lo largo de dos intervalos de tiempo disjuntos, $(0, t_1)$ y (t_1, t_2) , son independientes y, de forma indirecta, que $D(\Psi, t_2)$ y $D(\Psi(t_1), t_2 - t_1)$ tienen la misma distribución de probabilidad, puesto que ambos describen el proceso de decoherencia de Ψ en el intervalo $(0, t_2)$. Esta propiedad, igual que las dos anteriores, se puede demostrar a partir de la cuarta. Por tanto, se pueden suprimir las tres primeras propiedades sin que cambie la definición de proceso de decoherencia.

Vamos a estudiar ahora el significado del parámetro σ que aparece en la función de densidad f_t . Si $\sigma^t = 0$ la función de densidad es constante, es decir, la distribución de probabilidad es uniforme y, dado que $\sigma \in (0, 1)$, esto sólo ocurre cuando $t \rightarrow \infty$. Por el contrario si $\sigma^t = 1$, es decir $t = 0$, la función de densidad es $\delta(\Psi)$. Esto indica que la parametrización de f_t obedece a la regla de que para tiempos largos la información de Ψ se pierde en el entorno, mientras que para tiempos cortos ($\sigma^t \approx 1$) el estado Ψ apenas se ha difuminado. Resumiendo, podemos definir $\Xi(\Psi(t)) = \sigma^t$ como la coherencia del estado Ψ en el instante t y el parámetro del sistema σ como la coherencia del estado Ψ al cabo de una unidad de tiempo.

En la figura 1 podemos ver una representación gráfica de la función de densidad para distintos valores de t . Se ha elegido un valor pequeño del parámetro del sistema, $\sigma = 0,5$, para que se aprecie

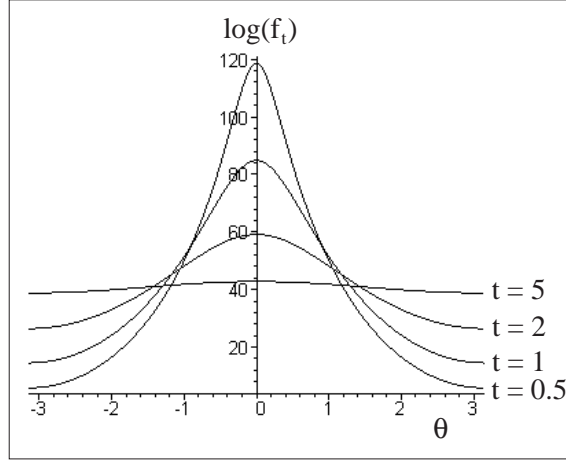


Figura 1: Función de densidad para 5 qubits con parámetro del sistema $\sigma = 0,5$

mejor la evolución temporal. Además se ha utilizado una escala logarítmica para representar los valores extremadamente altos de la función de densidad. Esto se debe al hecho de que la superficie de la esfera de Bloch decrece exponencialmente con la dimensión:

$$|\mathcal{S}_{2d-1}| = \frac{(2\pi)^d}{(2d-2)!!} \quad (12)$$

Para medir la decoherencia del estado Ψ a lo largo del tiempo utilizaremos la varianza de la distribución de probabilidad $\Psi(t)$, es decir, el valor esperado de $\|\Psi - \Psi(t)\|^2$ o, equivalentemente, de $2 - 2\cos(\theta)$. Por tanto, podemos interpretar la decoherencia del estado Ψ en el instante t como el valor de $\text{Var}(\Psi(t)) = \text{E}[2 - 2\cos(\theta)]$.

Teorema 2 *El valor de la varianza del estado $\Psi(t)$ en el instante t es*

$$\text{Var}(\Psi(t)) = 2(1 - \sigma^t) \quad (13)$$

El teorema 2 demuestra la primera de las propiedades que definen el proceso de decoherencia. En efecto, si $t = 0$ entonces se cumple $\text{Var}(\Psi(0)) = 0$ y de este hecho se deduce que la distribución de probabilidad de $\Psi(0)$ es $\delta(\Psi)$. El teorema 2 también permite obtener la coherencia del estado $\Psi(t)$ en función de la varianza:

$$\Xi(\Psi(t)) = \sigma^t = \frac{2 - \text{Var}(\Psi(t))}{2} \quad (14)$$

En la figura 2 tenemos la representación gráfica de la coherencia del estado $\Psi(t)$, para un valor $\sigma = 0,5$ del parámetro del sistema, en la que se aprecia claramente el decaimiento exponencial.

4.2. Control del error de decoherencia

Ya tenemos los elementos necesarios para abordar el estudio de la capacidad de corrección de los códigos cuánticos frente al proceso de decoherencia propuesto. Supondremos que Ψ es un estado codificado mediante un código de longitud (n, m) que en el instante $t = 0$ es coherente. Se trata de

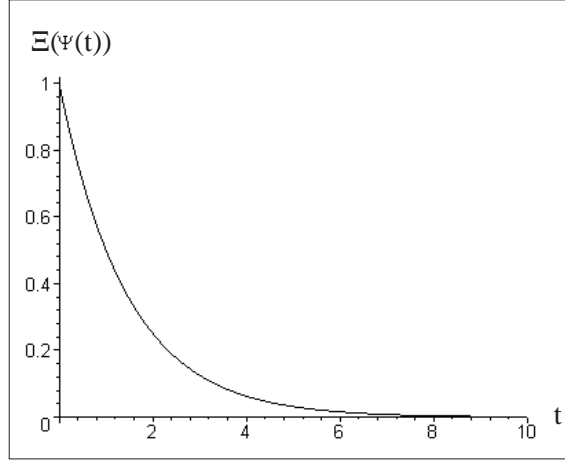


Figura 2: Coherencia del estado $\Psi(t)$ con parámetro del sistema $\sigma = 0,5$

un estado código de n qubits que está codificando a un m -qubit y que, inicialmente, no tiene ningún error. El estado Ψ sufre un proceso de decoherencia durante un tiempo t . Podemos suponer que durante ese tiempo no se realiza ninguna computación sobre Ψ . Si, por el contrario, se hubiese realizado una computación sobre Ψ equivalente a la aplicación del operador unitario U , el proceso de decoherencia afectaría exactamente del mismo modo al estado $U\Psi$, suponiendo que no se produce ningún error al aplicar el operador U .

Una vez transcurrido el tiempo t aplicamos el circuito corrector del código. Supondremos, para este análisis, que el circuito corrector es ideal, es decir, que no introduce ningún error adicional. En estas condiciones, el error del estado resultante será justamente el error de decoherencia que el código no ha sido capaz de corregir.

Tal como se ha comentado anteriormente, denotamos $d = 2^n$ a la dimensión del espacio \mathcal{H}_n y $d'' = 2^{n-m}$ al número de errores discretos que el código es capaz de corregir. A partir de este momento denotaremos por $d' = 2^m$ la dimensión de los subespacios W_h , $1 \leq h \leq d''$. Estos parámetros no son independientes entre sí pues cumplen la relación $d = d' d''$. Elegiremos la base \mathcal{B}_n de forma que se cumplan las siguientes propiedades, tomando los subíndices de los vectores de la base módulo d :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_h \varphi_k = \varphi_{(h-1)d'+k} \\ \Psi = \varphi_1 \\ W_h = L(\varphi_{(h-1)d'+1}, \varphi_{(h-1)d'+2}, \dots, \varphi_{(h-1)d'+d'}) \end{array} \right. \quad (15)$$

De forma más intuitiva, los operadores de error E_h son rotaciones cíclicas de los vectores de la base de amplitud $(h-1)d'$, el subespacio código W está generado por los d' primeros vectores de la base y los demás subespacios W_h están generados por los vectores obtenidos al rotar cíclicamente los generadores de W con amplitud también $(h-1)d'$.

Volviendo al problema que estamos tratando, el estado código Ψ ha sufrido un proceso de decoherencia durante un tiempo t y, en ese instante, hemos aplicado el circuito corrector del código. Supongamos que, durante la corrección, el síndrome que se ha obtenido es h . Esto quiere decir que $\Psi(t)$ se ha proyectado sobre W_h y a continuación se ha corregido el error asociado a dicho síndrome aplicando E_h^{-1} . Si llamamos Π_h al operador de proyección (renormalizada) sobre el subespacio W_h , el estado resultante será

$$\tilde{\Psi}(t) = E_h^{-1} \Pi_h \Psi(t) \quad (16)$$

Para determinar la capacidad de corrección del código calcularemos la varianza del error después de la corrección, es decir, el valor esperado de $\|\Psi(t) - \tilde{\Psi}(t)\|^2$. Pero antes vamos a estudiar un problema un poco más sencillo: determinar la probabilidad P_h de que el síndrome sea h o, equivalentemente, de que la proyección se produzca sobre el subespacio W_h . Usando la simetría de la distribución de probabilidad de $\Psi(t)$ se deduce que $E[|\alpha_k|^2] = E[|\alpha_{k'}|^2]$ para todo $2 \leq k, k' \leq d$. El mismo argumento permite probar que $P_h = P_{h'}$ para todo $2 \leq h, h' \leq d''$. Por tanto se cumple:

$$P_1 = E \left[\sum_{k=1}^{d'} |\alpha_k|^2 \right] = E[|\alpha_1|^2] + (d' - 1)E[|\alpha_2|^2] \quad (17)$$

$$P_h = E \left[\sum_{k=d'+1}^{2d'} |\alpha_k|^2 \right] = d'E[|\alpha_2|^2] \quad \text{para} \quad 2 \leq h \leq d'' \quad (18)$$

Teorema 3 *La probabilidad de que en el instante t el síndrome sea h , es decir, de que la proyección se produzca sobre el subespacio W_h es*

$$P_1 = 1 - \frac{d'' - 1}{d''} (1 - \sigma^{2t}) \quad (19)$$

$$P_h = \frac{1 - \sigma^{2t}}{d''} \quad \text{para} \quad 2 \leq h \leq d'' \quad (20)$$

Retomamos el problema principal que consiste en calcular $E[\|\Psi(t) - \tilde{\Psi}(t)\|^2]$, con el objetivo de determinar la capacidad de corrección del código. Este valor esperado mide la varianza del estado que resulta después de la corrección y se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E[\|\Psi(t) - \tilde{\Psi}(t)\|^2] &= E \left[\sum_{h=1}^{d''} \left(\sum_{k=(h-1)d'+1}^{(h-1)d'+d'} |\alpha_k|^2 \right) \|\Psi - E_h^{-1} \Pi_h \Psi(t)\|^2 \right] \\ &= \sum_{h=1}^{d''} E \left[\left(\sum_{k=(h-1)d'+1}^{(h-1)d'+d'} |\alpha_k|^2 \right) \|E_h \Psi - \Pi_h \Psi(t)\|^2 \right] \end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que E_h es una transformación unitaria y, por tanto, conserva la norma. Además, por la simetría de la distribución de error, los valores esperados que aparecen como sumandos en la última expresión son iguales para todo $2 \leq h \leq d''$. Utilizando esta propiedad y el hecho de que $E_1 = I$ la expresión anterior queda del siguiente modo:

$$\begin{aligned} E[\|\Psi(t) - \tilde{\Psi}(t)\|^2] &= E \left[\left(\sum_{k=1}^{d'} |\alpha_k|^2 \right) \|\Psi - \Pi_1 \Psi(t)\|^2 \right] + \\ &\quad (d'' - 1) E \left[\left(\sum_{k=d'+1}^{d'+d'} |\alpha_k|^2 \right) \|E_2 \Psi - \Pi_2 \Psi(t)\|^2 \right] \end{aligned}$$

El proceso seguido para obtener $E[\|\Psi(t) - \tilde{\Psi}(t)\|^2]$ a partir de esta expresión incluye largos desarrollos y, aunque no se obtiene una expresión matemática cerrada para $\text{Var}(\tilde{\Psi}(t))$, se ha determinado su valor en función de una serie de potencias.

Teorema 4 La varianza del estado $\tilde{\Psi}(t)$ que se obtiene al aplicar a $\Psi(t)$ el código corrector en el instante t es

$$\text{Var}(\tilde{\Psi}(t)) = 2 - 2\sigma^t \frac{(1 - \sigma^{2t})2^{2(d-d')}}{(1 + \sigma^{2t})^{d+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+d)!(2j+d)!(2j+2d'+1)!}{j!(j+d')!(j+d')!(2j+2d+1)!} \left(\frac{\sigma^t}{1 + \sigma^{2t}} \right)^{2j} \quad (21)$$

Para interpretar mejor los resultados del teorema 4 vamos a representar gráficamente la coherencia del estado $\Psi(t)$, $\Xi(\Psi(t))$, frente a la coherencia del estado $\tilde{\Psi}(t)$ que, en función de la varianza $\text{Var}(\tilde{\Psi}(t))$, se define como

$$\Xi(\tilde{\Psi}(t)) = \frac{2 - \text{Var}(\tilde{\Psi}(t))}{2} \quad (22)$$

No debemos perder de vista que $\Psi(t)$ es el estado resultante del proceso de decoherencia de Ψ a lo largo de un intervalo de tiempo t y que $\tilde{\Psi}(t)$ es el estado que se obtiene al aplicar a $\Psi(t)$ el código corrector en el instante t .

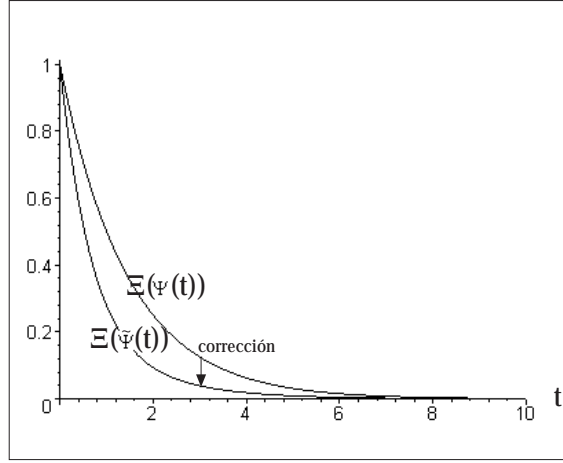


Figura 3: Coherencia de los estados $\Psi(t)$ y $\tilde{\Psi}(t)$ con parámetro del sistema $\sigma = 0,5$

En la figura 3 se muestra la evolución temporal de la coherencia del estado $\Psi(t)$ y la del estado $\tilde{\Psi}(t)$, para un valor $\sigma = 0,5$ del parámetro del sistema. La figura no deja lugar a dudas, el código corrector no es capaz de controlar la decoherencia del estado Ψ . Es más, la aplicación de dicho código provoca un aumento de la decoherencia.

Los resultados que refleja la figura 3 se han obtenido numéricamente, aproximando tanto el valor de $\Xi(\Psi(t))$, dado en la fórmula (14), como el de $\Xi(\tilde{\Psi}(t))$, obtenido al sustituir el valor de $\text{Var}(\tilde{\Psi}(t))$ de la fórmula (21) en la fórmula (22). Para que no quede ninguna duda, estos resultados se han demostrado analíticamente acotando la serie que aparece en la fórmula (21).

Teorema 5 El estado $\tilde{\Psi}(t)$ que se obtiene al aplicar a $\Psi(t)$ el código corrector en el instante t verifica:

$$\text{Var}(\tilde{\Psi}(t)) \geq \text{Var}(\Psi(t)) + \frac{d-d'}{d} \frac{1 - \sigma^{2t}}{1 + \sigma^{2t}} \sigma^t \quad (23)$$

$$\Xi(\tilde{\Psi}(t)) \leq \Xi(\Psi(t)) - \frac{d-d'}{2d} \frac{1 - \sigma^{2t}}{1 + \sigma^{2t}} \sigma^t \quad (24)$$

En ningún momento hemos tenido en cuenta que dos estados que difieren en un factor de fase son, desde el punto de vista físico, indistinguibles. Esto significa que hemos sobreestimado el error, tanto para el estado $\Psi(t)$ como para el estado resultante del circuito corrector $\tilde{\Psi}(t)$. No obstante esta circunstancia no invalida los resultados obtenidos. En efecto, el estudio realizado plantea la propagación de la decoherencia a lo largo de una computación cuántica de forma exacta, determinando la distribución de probabilidad del estado final. Sólo se estaría sobreestimando el error al interpretar el estado resultante de la computación.

5. Conclusiones

En el presente trabajo hemos analizado el comportamiento de los códigos correctores de errores cuánticos bajo suposiciones razonables, pero que se salen de las aceptadas convencionalmente. Los errores en computación cuántica son continuos y su corrección no siempre es perfecta. La motivación básica de este trabajo es intentar comprender hasta qué punto estas imperfecciones en la corrección pueden acabar afectando al resultado final.

El punto de partida es un modelo de decoherencia visto como un proceso estocástico que se construye sobre dos principios generales a priori aceptables: isotropía e independencia temporal. Consideramos la función de onda como una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad dependiente de dos parámetros, el tiempo y la intensidad de la decoherencia por unidad de tiempo. Las propiedades analíticas de esta distribución nos permiten estudiar su evolución exacta bajo la aplicación de códigos correctores. El modelo reproduce el decaimiento exponencial de la coherencia de los estados cuánticos y concuerda cualitativamente con resultados teóricos sobre el modelo browniano cuántico (QBM). Por ejemplo Eisert y Plenio [7] establecen que un estado puro con distribución gaussiana evoluciona instantáneamente a un estado entrelazado, independientemente de la intensidad del acoplamiento y de la temperatura del entorno. Por el contrario, otros resultados indican que el modelo browniano cuántico no tiene por qué ser siempre un proceso caótico o desordenado. En este sentido Eisert y Plenio [7] también prueban que, para cualquier intensidad del acoplamiento, existe una temperatura por debajo de la cual hay estados puros con distribución gaussiana que no se entrelazan con el entorno. De igual modo la coherencia de un estado cuántico puede evolucionar de forma periódica, apareciendo las denominadas recurrencias de Poincaré [9]. En cualquier caso, estos fenómenos de movimiento browniano cuántico ordenado son extremadamente improbables en sistemas grandes.

Para cuantificar la proximidad de dos estados hemos utilizado la distancia en norma, aunque en Información Cuántica existen otras posibilidades como la distancia en traza y la fidelidad [20]. En cuanto a la cuantificación de la decoherencia de un estado, sólo recientemente se está teniendo acceso experimental al control y, por tanto, al estudio directo de la decoherencia en sistemas mesoscópicos. En estos sistemas es habitual caracterizar el grado de decoherencia como el contraste entre los picos y los valles en un experimento de interferencia adecuado [19]. Nosotros hemos modelizado el proceso de decoherencia como la evolución temporal de una variable aleatoria y hemos utilizado la medida estadística más representativa, la varianza, como indicador de decoherencia.

La elección adecuada de la distribución de probabilidad nos ha permitido obtener resultados exactos para la evolución temporal de la varianza bajo la aplicación de un código corrector. El resultado obtenido es que los códigos correctores no sólo no reducen la varianza sino que la aumentan. Aunque esto no sea un resultado alentador hay que tener en cuenta que la varianza, aun siendo una magnitud estadísticamente significativa, no es una caracterización completa de la decoherencia o de la pérdida

de información. Hasta qué punto hay que considerar este efecto en el diseño de circuitos correctores y circuitos tolerantes a fallos está todavía por determinar. Para ello es preciso estudiar el comportamiento detallado de otras magnitudes, tales como la fidelidad, bajo modelos de decoherencia concretos.

El modelo de decoherencia que hemos estudiado está determinado por la función de densidad asociada al proceso. Sin embargo, los resultados cualitativos obtenidos pueden ser significativos para otros modelos más generales como, por ejemplo, para los modelos de decoherencia que, manteniendo la independencia temporal y la isotropía, vengan descritos por otras funciones de densidad e incluso para determinados modelos que mantienen solamente la independencia temporal. Así, los resultados obtenidos se pueden aplicar a la componente isótropa de todo proceso de decoherencia temporalmente independiente D que admite una descomposición en dos procesos independientes D_1 y D_2 , tales que D_1 es isótropo y $D(\Psi, t) = D_1(D_2(\Psi, t), t)$.

Finalmente queremos poner de relieve que los errores debidos a las imprecisiones en las puertas cuánticas pueden generar errores de decoherencia, por efecto de la propagación de errores locales durante la computación [21]. En el esquema de una computación tolerante a fallos los qubits se codifican por bloques y el circuito corrector correspondiente a cada bloque se aplica después de cada una de las puertas cuánticas que involucran a alguno de sus qubits. Las puertas del circuito corrector relacionan entre sí a todos los qubits del bloque, propagando los errores que se producen por la imprecisión de dichas puertas a todos los qubits. En resumen, la imprecisión de las puertas del circuito corrector genera un error que no cumple la hipótesis de independencia. Este error puede interpretarse como un error de decoherencia del bloque y el circuito corrector no será capaz de controlar la varianza de su componente isótropa.

Referencias

- [1] Aharonov, D. and Ben-Or, M., *Fault-Tolerant Quantum Computation with Constant Error Rate*, SIAM J. Comp., to appear, (arXiv:quant-ph/9906129).
- [2] Bennet, C. H.; DiVincenzo, D. P.; Smolin J. A. and Wootters W. K., *Mixed State Entanglement and Quantum Error Correction*. arXiv:quant-ph/9909058, (1999).
- [3] Bacon, D.; Kempe, J.; Lidar, D. A. and Whaley, K. B., *Universal Fault-Tolerant Computation on Decoherence Free Subspaces*, Phys. Rev. A, **54**, 3824, (1996), (arXiv: quant-ph/9604024).
- [4] Calderbank, A. R.; Rains, E. M.; Shor, P. W. and Sloane, N. J., *Quantum Error Correction and Orthogonal Geometry*, Phys. Rev. Lett., **78**, 405–408, (1997).
- [5] Calderbank, A. R. y Shor, P. W., *Good Quantum Error-Correcting Codes Exist*, Phys. Rev. A, **54**, 1098–1105, (1996), (arXiv:quant-ph/9512032).
- [6] Durrett, R., *Brownian Motion and Martingales in Analysis*, Wadsworth, 1984.
- [7] Eisert, J. and Plenio, M. B., *Quantum and Classical Correlations in Quantum Brownian Motion*, Phys. Rev. Lett., **89**, 137902, (2002).
- [8] Facchi, P.; Lidar, D. A. and Pascazio, S., *Generalized Dynamical Decoupling from the Quantum Zeno Effect*, arXiv:quant-ph/0303132, (2003).
- [9] Gaioli, F. and García-Álvarez, E. T., *Quantum Brownian Motion*, arXiv:quant-ph/9807062, (1998).

- [10] Gottesman, D., *A Theory of Fault-Tolerant Quantum Computation*, arXiv:quant-ph/9702029, (1997).
- [11] Gottesman, D., *Stabilizer Codes and Quantum Error Correction*, Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1997.
- [12] Goetsch, P.; Tombesi, P. and Vitali, D., *Effect of Feedback on the Decoherence of a Schrödinger-cat State: A Quantum Trajectory Description*, Phys. Rev. A, **54**, 4527, (1996).
- [13] Kitaev, A. Y., *Fault-Tolerant Quantum Computation by Anyons*, arXiv:quant-ph/9707021, (1997).
- [14] Knill, E. and Laflamme, R., *A Theory of Quantum-Correcting Codes*, Phys. Rev. A, **55**, 900, (1997), (arXiv:quant-ph/9604034).
- [15] Knill, E.; Laflamme, R. and Zurek, W. H., *Resilient Quantum Computation: Error Models and Thresholds*, arXiv:quant-ph/9702058, (1997).
- [16] Kwiat, P. G.; White, A. G.; Mitchell, J. R.; Nairz, O.; Weihs, G.; Weinfurter, H. and Zeilinger, A., *High-Efficiency Quantum Interrogation Measurements via the Quantum Zeno Effect*, Phys. Rev. Lett., **83** (23), 4725–4728, (1999).
- [17] Landauer, R., *Is Quantum Mechanics Useful?*, Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, **353**, 367–376, (1995).
- [18] Laflamme, R.; Miquel, C.; Paz, J. P. and Zurek W. H., *Perfect Quantum Error Correction Codes*, Phys. Rev. Lett., **77**, 198, (1996), (arXiv:quant-ph/9602019).
- [19] Myatt et al., *Decoherence of Quantum Superpositions through Coupling to Engineered Reservoirs*, Nature, **403**, 269, (2000).
- [20] Nielsen, M. A. and Chuang, L. I., *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [21] Preskill, J., *Fault-Tolerant Quantum Computation*, arXiv:quant-ph/9712048, (1997).
- [22] Protopopescu, V.; Perez, R.; D’Helon, C. and Schmulen, J., *Robust Control of Decoherence in Realistic One-Qubit Quantum Gates*, arXiv:quant-ph/0202141, (2003).
- [23] Shor, P. W., *Fault-Tolerant Quantum Computation*, arXiv:quant-ph/9508027, (1997).
- [24] Shor, P. W., *Scheme for Reducing Decoherence in Quantum Computer Memory*, Phys. Rev. A, **52**, 2493–2496, (1995).
- [25] Salas, P. J. and Sanz, A. L., *Numerical Simulation of Information Recovery in Quantum Computers*, Phys. Rev. A, **66**, 022302, (2002).
- [26] Steane, A. M., *Error Correcting Codes in Quantum Theory*, Phys. Rev. Lett., **77**, 793–797, (1996).
- [27] Steane, A. M., *Multiple Particle Interference and Quantum Error Correction*. Proc. R. Soc. London A, **452**, 2551–2576, (1996).
- [28] Unruh, W. G., *Maintaining Coherence in Quantum Computers*, Phys. Rev. A, **51**, 992–997, (1995).

- [29] Tombesi, P. and Vitali, D., *Macroscopic Coherence Via Quantum Feedback*, Phys. Rev. A, **51**, 4917, (1995).
- [30] Tombesi, P. and Vitali, D., Appl. Phys. B, **60**, S69, (1995).
- [31] Viola, L. and Lloyd, S., *Dynamical Suppression of Decoherence in Two-State Quantum System*, Phys. Rev. A, **58** (4), 2744, (1998).
- [32] Viola, L.; Knill, E. and Lloyd, S., *Dynamical Decoupling of Open Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett., **82** (12), 2421, (1999).
- [33] Viola, L.; Lloyd, S. and Knill, E., *Universal Control of Decoupled Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett., **83** (23), 4891, (1999).
- [34] Wootters, W. K. and Zurek, W. H., *A Single Quantum Cannot be Cloned*, Nature, **299**, 802, (1982).
- [35] Zanardi, P. and Rasetti M., *Noisless Quantum Codes*, Phys. Rev. Lett., **79** (17), 3306–3309, (1998).
- [36] Zurek, W. H., *Decoherence and the Transition from Quantum to Classical*, Physics Today, **44** (10), 36–44, (1991).

TRABAJOS PUBLICADOS

Nº	AUTOR(ES)	TITULO	FECHA
1 (I)	F. Gómez; S. Ramaswami; G. Toussaint	<i>On Removing Non-degeneracy Assumptions in Computational Geometry</i>	Abril 1996
2 (I)	P. Bose; F. Gómez; P. Ramos; G. Toussaint	<i>Drawing Nice Projections of Objects in Space</i>	Abril 1996
3 (I)	J. García	<i>A Counter-Example to a Theorem of Sendov</i>	Abril 1996
4 (I)	J. García; P.A. Ramos	<i>Circularity of a set of points</i>	Abril 1996
5 (I)	F. Gómez; F. Hurtado, G. Toussaint	<i>Proyecciones de Calidad y Reconstrucción de Conjuntos</i>	Octubre 1996
6 (D)	O.F. Soto; E. Osejo	<i>Una numeración biyectiva de los racionales</i>	Octubre 1996
7 (I)	M. Villén; J. Villén	<i>RESTART: An efficient and general method for fast simulation of rare events.</i>	Julio 1997
8 (I)	F. García	<i>Convergence Theorems for Topological Group Valued Measures on Effect Algebras.</i>	Septiembre 1997
9 (D)	A. García	<i>Informática y Matemáticas (Historia de un matrimonio de conveniencia).</i>	Diciembre 1997
10 (D)	J. García	<i>Algoritmos eficientes de enumeración I.</i>	Junio 1998
11 (I)	J.M. Díaz-Báñez; F. Gómez; F. Hurtado	<i>Some Problems on Approximation of Set of Points by Polygonal Curves.</i>	Abril 1999
12 (I)	A. García	<i>Maple and the z-transform.</i>	Noviembre 1999
13 (D)	F. Alonso; A. García; F. García; S. Hoya; G. Rodríguez; A. de la Villa	<i>Some unexpected results using Computer Algebra Systems.</i>	Julio 2000
14 (D)	A. Franco; P. Franco; A. García; F. García; F.J. González; S. Hoya; G. Rodríguez; A. de la Villa	<i>Learning Calculus of several variables with new technologies.</i>	Julio 2000
15 (I)	J. García	<i>Demostración en Lógica Proposicional</i>	Marzo 2001
16 (D)	J. García	<i>Analizador léxico del lenguaje Ahmes</i>	Junio 2001
17 (I)	M. Villén; J. Villén	<i>Analysis of RESTART Simulation: Theoretical Basis and Sensitivity Study</i>	Noviembre 2001
18 (D)	A. García López	<i>Algoritmo de búsqueda de Grover</i>	Junio 2003
19 (D)	Grupo de Computación Cuántica	<i>Introducción al modelo cuántico de computación</i>	Junio 2003
20 (I)	J. García-López; F. García-Mazarío; V. Martín	<i>Modelos de Error en Computación Cuántica</i>	Julio 2003