ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS II - 2009

Práctica 1: MÓDULOS.

Módulos. Submódulos. Álgebras.

Profesora Mg. Daniela Emmanuele, Auxiliar Lic. Viviana del Barco.

Notación:

${}_RM$: $R-$módulo a izquierda M, M_R: $R-$módulo a derecha M. M un módulo: M es un $R-$módulo a izquierda (sobre un anillo R), salvo que se indique otra cosa.

Ejercicios:

1. Probar que todo anillo R, considerado como grupo abeliano, es módulo a izquierda sobre cualquier subanillo S de él mismo, usando como operación externa la operación interna que hace del anillo un semigrupo.

   Si el anillo R tiene identidad 1 y $1 \in S$, el módulo es unitario.

   En particular, todo anillo R con identidad, visto como grupo abeliano, es módulo a izquierda unitario sobre sí mismo, y lo indicamos ${}_RR$.

2. Sea R anillo como antes. Probar que $(R, +, \cdot)$, visto como grupo abeliano, es módulo a derecha con respecto a cualquier subanillo S del anillo *opuesto* de R esto es, de $(R, +, *)$ donde $*$ está definida por

$$x * y = y \cdot x, \forall x, y \in R.$$

   Si R es unitario y $1 \in S$, el módulo es unitario.

   En particular, todo anillo R con identidad, visto como grupo abeliano, es módulo a derecha con la operación externa *opuesta* a aquella que da a R estructura de semigrupo, y lo indicamos R_{R^*}.

3. Sea R un anillo y R' un subanillo. Probar que, en general, R' no es un R-módulo con la operación producto del anillo.

4. Dar un ejemplo de un anillo no conmutativo R tal que las estructuras de módulo a izquierda ${}_RR$ y de módulo a derecha R_R no coincidan.

5. Sea G un grupo abeliano, y G' un subgrupo. Probar que G' es un submódulo de ${}_{\mathbb{Z}}G$.

6. Sean R un anillo con identidad y M un $R-$módulo a izquierda unitario. Probar que:

   i) $0m = 0$ para todo $m \in M$,

   ii) $(-1)m = -m$ para todo $m \in M$,

   iii) si $rm = 0$ para algunos $r \in R$ y $m \in M$, $m \neq 0$, entonces r no tiene inverso a izquierda (esto es, no existe $s \in R$ tal que $sr = 1$).

   Concluir que en un anillo de división vale: $(rm = 0 \Rightarrow r = 0 \vee m = 0)$.

7. Sea M un módulo y $\{M_i : i \in I\}$ una familia de submódulos. Probar que:

   i) $\sum\limits_{i \in I} M_i = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} m_{i_j} : n \in \mathbb{N}_0, i_j \in I, m_{i_j} \in M_{i_j} \right\}$ es un submódulo de M;

   ii) $\bigcap\limits_{i \in I} M_i$ es un submódulo de M;

   iii) Si $I = \mathbb{N}$ y $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una cadena ascendente, entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ es un submódulo de M.

8. Leer la definición y demostrar los teoremas abajo enunciados.

   Definición.- Sea M un R-módulo y A un subconjunto de M. Se llama *submódulo generado por* A y se anota $< A >$ al mínimo submódulo de M que contiene a A. En tal caso, se dice que A es *generador* de $< A >$, y que los elementos de A *generan* a $< A >$.

   En símbolos esto es: $< A >$ es un submódulo de M tal que $A \subset < A >$, y si M' es un submódulo de M para el cual $M' \supset A$, entonces $M' \supset < A >$.

Teorema: descripción interna de submódulo generado.- Sean M un $R-$ módulo (a izquierda) y $A \subset M$. Entonces:

$$< A >= \left\{ \sum_{i=1}^{s} r_i a_i + \sum_{i=1}^{t} n_i bi : s, t \in \mathbb{N}_0; a_i, b_i \in A; r_i \in R; n_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Teorema: descripción externa de submódulo generado.- Sean M un módulo y $A \subset M$. Entonces, si $\{M_k : k \in K\}$ es la familia de todos los submódulos de M que contienen a A, resulta

$$< A >= \bigcap_{k \in K} M_k.$$

9. Sean M, A y R como en el ejercicio anterior. Dar $< A >$ cuando $1 \in R$.

10. Encontrar un ejemplo de un módulo M y un subgrupo del mismo que no sea submódulo.

11. Probar que un $R-$módulo M es un $R'-$módulo para todo R' subanillo de R.

    Siendo R, R' como antes, dar ejemplos de un $R'-$módulo que no sea $R-$módulo.

    En particular, un cuerpo K visto como ${}_K K$, no tiene subespacios vectoriales no triviales.

12. Sea I ideal del anillo R; X subconjunto no vacío del módulo M. Probar que

$$I \cdot X = \left\{ \sum r_i x_i : r_i \in I, r_i = 0 \, pct \, i, x_i \in X \right\}$$

    es un submódulo de M.

    Notación: *pct* significa "'para casi todo". Decir $\sum r_i x_i$ con $r_i = 0 \, pct \, i$ es una forma de decir que la suma es finita.

13. Leer la definición. Demostrar el teorema y su corolario:

    Definición.- Sea M un módulo y X un subconjunto no vacío de él. El *anulador de* X es el conjunto

$$An(X) = \{r \in R : rm = 0 \, \forall m \in X\}.$$

    Teorema.- Sea M un módulo y X un subconjunto no vacío de él. Entonces $An(X)$ es un ideal a izquierda del anillo R.

    Corolario.- El anulador (digamos a izquierda) de cualquier subconjunto de un módulo sobre un anillo de división V es $\{0\}$ o es todo V.

14. Sea M un módulo y sea X un subconjunto no vacío. Probar que $An(X) = An(< X >)$.

15. Sea el $\mathbb{Z}-$módulo $M = \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{15} \oplus \mathbb{Z}_{50}$. Hallar $An(M)$.

    Considerar $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}-$módulo. Hallar $An(2\mathbb{Z})$.

16. Sea M un anillo con identidad 1_M que es un $R-$módulo a izquierda unitario. Si M satisface $r \cdot (ab) = (r \cdot a)b = a(r \cdot b)$ (*), para todo $r \in R$, $a, b \in M$, probar que la aplicación $f : R \to M / f(r) = r \cdot 1_M$ es un homomorfismo de anillos que lleva 1_R en 1_M y tal que $f(R)$ está contenido en el centro de M. ¿Qué se puede afirmar?

    Pruebe que si A es un R-álgebra entonces es posible definir en A una estructura de R-módulo que satisfaga (*).

17. Probar que todo anillo conmutativo es un álgebra sobre si mismo. ¿Puede ser eliminada o reemplazada la hipótesis de conmutatividad?

18. Probar que tanto el cuerpo de los complejos $\mathbb{C}$, como el anillo de los cuaterniones de Hamilton $\mathbb{H}$, son $\mathbb{R}-$álgebras, y verificar además que ambas son álgebras de división.

19. Sea R un anillo con identidad, sea M el módulo R^n y sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales a izquierda de R. Probar que los siguientes son submódulos de M:

    i) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in I_i \, \forall \, i = 1, \ldots, n\}$,

    ii) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in R, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\}$.

20. Sea M un grupo abeliano finito, considerado como $\mathbb{Z}-$módulo. ¿Puede la acción de $\mathbb{Z}$ sobre M extenderse a $\mathbb{Q}$ de modo tal que resulte M un $\mathbb{Q}-$módulo?

21. Sean $F = \mathbb{R}$ y $V = \mathbb{R}^2$ y T la transformación lineal de V en V que es la rotación de $\frac{\pi}{2}$ radianes alrededor del origen. Probar que V y 0 son los únicos $F[x]-$submódulos para esta T.

22. Sean $F = \mathbb{R}$ y $V = \mathbb{R}^2$ y T la transformación lineal de V en V que es la rotación de π radianes alrededor del origen. Probar que todo subespacio de V es un $F[x]-$submódulo para esta T.