Lógica

Dante Zanarini

11 de agosto de 2011

Resumen

Outline

¿Qué es lógica?

Intentemos definirla.

¿Qué es lógica?

Intentemos definirla.

1. La capacidad de poder determinar razonamientos correctos
2. El estudio del razonamiento formal
3. Una secuencia de sentencias verificadas (o verificables)
4. Razonamiento, lo opuesto a la intuición
5. Deducir conclusiones a partir de premisas

¿Qué es la lógica?

Preguntemos a los que saben:

- *"Logic is the business of evaluating arguments, sorting good ones from bad ones."*. P. D. Magnus, *forall χ, An introduction to formal logic*

¿Qué es la lógica?

Preguntemos a los que saben:

- *"Logic is the business of evaluating arguments, sorting good ones from bad ones."*. P. D. Magnus, *forall χ, An introduction to formal logic*
- *"Logic is concerned mainly with two concepts: truth and provability."* Gallier, *Logic For Computer Science, Foundations of Automatic Theorem Proving*

¿Qué es la lógica?

Preguntemos a los que saben:

- *"Logic is the business of evaluating arguments, sorting good ones from bad ones."*. P. D. Magnus, *forall* χ*, An introduction to formal logic*
- *"Logic is concerned mainly with two concepts: truth and provability."* Gallier, *Logic For Computer Science, Foundations of Automatic Theorem Proving*
- *"Symbolic logic is a mathematical model of deductive thought."* H. B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic.*

¿Qué es la lógica?

Preguntemos a los que saben:

- *" The aim of logic in computer science is to develop languages to model the situations we encounter as computer science professionals, in such a way that we can reason about them formally."* Ryan - Hutt. *Logic in computer science.*

¿Qué es la lógica?

Preguntemos a los que saben:

- *" The aim of logic in computer science is to develop languages to model the situations we encounter as computer science professionals, in such a way that we can reason about them formally."* Ryan - Hutt. *Logic in computer science.*

- *"Mathematical logic is concerned with formalizing and analyzing the kinds of reasoning used in the rest of mathematics."* Stephan Bilaniuk. *A problem course in mathematical logic.*

Outline

Grecia

"Somos filósofos, nos hemos reunido a discutir y tomar un poco de vino"

Grecia

"Somos filósofos, nos hemos reunido a discutir y tomar un poco de vino"

"Nos interesaría poder distinguir argumentos correctos de aquellos que no lo son, para así saber quién tiene razón"

Grecia

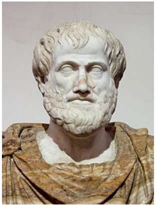
“Somos filósofos, nos hemos reunido a discutir y tomar un poco de vino”

“Nos interesaría poder distinguir argumentos correctos de aquellos que no lo son, para así saber quién tiene razón”

“Es fundamental para nosotros, pues el que pierde, paga”

Grecia

Aristóteles ($\sim$ 384AC - 322AC)



- La lógica de Aristóteles gira alrededor de un concepto fundamental: **la deducción**

> *Una deducción es un discurso en el cual, habiendo supuesto algunos hechos, algo diferente se obtiene como resultado necesario a causa de la validez de los supuestos*

- Los trabajos de Aristóteles dominaron el estudio de la lógica hasta mediados del siglo XIX

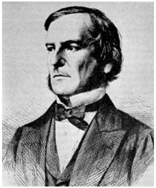
Leibniz (1646-1716), un visionario

La única manera de verificar nuestros razonamientos es que sean tan tangibles como los de la matemática, de modo que podamos encontrar nuestro error de un solo vistazo. Y cuando surgen diferencias entre las personas, podemos simplemente decir: Vamos a calcular, sin más preámbulos, a ver quién tiene la razón (The Art of Discovery, 1685)

- Los principios de la lógica para Leibniz
  1. Todas nuestras ideas están compuestas por un pequeño número de ideas simples
  2. Las ideas complejas provienen de estas simples ideas a través de una uniforme y simple combinación, similar a la aritmética
- Los trabajos de Leibniz sobre lógica no fueron publicados hasta mucho tiempo después

Lógica como álgebra

Mediados del siglo XIX - principios del siglo XX



- Los trabajos de Boole (1847, 1854) y De Morgan (1847) intentan formalizar la lógica Aristotélica de manera algebráica
- La principal regla para las demostraciones es la famosa regla de ...
- Esta forma de trabajo debería ser conocida por ustedes

Logicismo

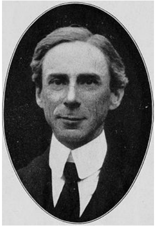
Fines del siglo XIX - Mediados del siglo XX

- Gottlob Frege publica *Begriffsschrif* en 1879, en un intento por reducir la matemática a la lógica
- Si bien los aportes de Frege son enormes, la teoría de conjuntos que usaba tenía una pequeña falla, era **inconsistente**
- Russel le escribe una carta en 1903, haciéndole notar esta situación

Logicismo

Fines del siglo XIX - Mediados del siglo XX

- Gottlob Frege publica *Begriffsschrif* en 1879, en un intento por reducir la matemática a la lógica
- Si bien los aportes de Frege son enormes, la teoría de conjuntos que usaba tenía una pequeña falla, era **inconsistente**
- Russel le escribe una carta en 1903, haciéndole notar esta situación



- A partir de 1910, Russel y Whitehead publican los *Principia Mathematica*, solucionando la paradoja mediante una **teoría de tipos**
- Los PM intenta formalizar todos los teoremas de la matemática a partir de axiomas y reglas de inferencia bien definidos

Formalismo - El programa de Hilbert

Primera mitad del siglo XX

- Acabemos con las paradojas, solucionemos la *crisis fundacional de la matemática*
- Formalicemos la matemática mediante un conjunto finito de axiomas y reglas,
- y probemos la consistencia y completitud de este sistema usando estas reglas
- De paso, cada teorema del sistema debería ser *decidible*

Inclompletitud

El programa de Hilbert se cuelga

- En 1931
  Kurt Gödel demuestra el Teorema de Incompletitud

Inclompletitud

El programa de Hilbert se cuelga

- En 1931
  Kurt Gödel demuestra el Teorema de Incompletitud

  > *En cualquier sistema consistente capaz de representar la aritmética de Peano existen proposiciones verdaderas que no pueden demostrarse a partir de los axiomas*

Inclompletitud

El programa de Hilbert se cuelga

- En 1931
  Kurt Gödel demuestra el Teorema de Incompletitud

  > *En cualquier sistema consistente capaz de representar la aritmética de Peano existen proposiciones verdaderas que no pueden demostrarse a partir de los axiomas*

- Peor aun, una de estas sentencias válidas pero no demostrables es la *consistencia* del sistema

Entscheidungsproblem

Leibniz (siglo XVII) - Hilbert (1928)

- Básicamente, pide encontrar un algoritmo, que dada una proposición sobre la matemática, devuelva "True" o "False" de acuerdo a su validez
- Formalmente, se reduce a un problema de decisión sobre la lógica de primer orden **¿Dada una fórmula de primer orden, existe una algoritmo que decida su validez?**

Entscheidungsproblem

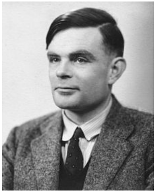
Leibniz (siglo XVII) - Hilbert (1928)

- Básicamente, pide encontrar un algoritmo, que dada una proposición sobre la matemática, devuelva "True" o "False" de acuerdo a su validez
- Formalmente, se reduce a un problema de decisión sobre la lógica de primer orden **¿Dada una fórmula de primer orden, existe una algoritmo que decida su validez?**
  - Para Hilbert, la respuesta a este problema era afirmativa

Entscheidungsproblem

Leibniz (siglo XVII) - Hilbert (1928)

- Básicamente, pide encontrar un algoritmo, que dada una proposición sobre la matemática, devuelva "True" o "False" de acuerdo a su validez
- Formalmente, se reduce a un problema de decisión sobre la lógica de primer orden **¿Dada una fórmula de primer orden, existe una algoritmo que decida su validez?**



- Para Hilbert, la respuesta a este problema era afirmativa
- Alan Turing y Alonzo Church prueban, independientemente, que no es posible construir tal algoritmo

Hay mucho más, que intentaremos ver durante el curso

- Tarski desarrolla, a partir de mediados del siglo pasado, la *Teoría de modelos*, y la *lógica relacional*

Hay mucho más, que intentaremos ver durante el curso

- Tarski desarrolla, a partir de mediados del siglo pasado, la *Teoría de modelos*, y la *lógica relacional*

- Łukasiewicz (1920), Post (1921), Gödel (1932) y Kleene (1938) utilizan lógicas multivaluadas en el contexto de sus investigaciones
- Las lógicas multivaluadas tienen múltiples aplicaciones en CC
  - Lingüística
  - Inteligencia artificial
  - Diseño de hardware

AND	True	False	Null
True	True	False	Null
False	False	False	Null
Null	Null	Null	Null

OR	True	False	Null
True	True	True	Null
False	True	False	Null
Null	Null	Null	Null

XOR	True	False	Null
True	False	True	Null
False	True	False	Null
Null	Null	Null	Null

Hay mucho más, que intentaremos ver durante el curso

- El isomorfismo de Curry - Howard nos permite relacionar estrechamente los sistemas de prueba que usamos en lógica con los modelos de programación funcional.

Hay mucho más, que intentaremos ver durante el curso

- El isomorfismo de Curry - Howard nos permite relacionar estrechamente los sistemas de prueba que usamos en lógica con los modelos de programación funcional.

¡Demostrar es programar!

¡Programar es demostrar!

Hay mucho más, que intentaremos ver durante el curso

- El isomorfismo de Curry - Howard nos permite relacionar estrechamente los sistemas de prueba que usamos en lógica con los modelos de programación funcional.

¡Demostrar es programar!

¡Programar es demostrar!

- Martin-Lof desarrolla su teoría de tipos intuicionista (1972), con la intención de formalizar la matemática constructiva
- Sobre el final, comenta que esta teoría puede verse como un *lenguaje de programación*

Todavía más

Lógica Lineal

Lógica Intuicionista

Lógica Clásica

Lógica No Monótona

Lógica Posibilística

Lógica Alternante

Lógica Extensional

Lógica Probabilística

Lógica Modal

Lógica Difusa

Lógica Ecuacional

Lógica de alto orden

Lógica Temporal

Lógica Intensional

Lógica Combinatoria

Lógica Paraconsistente

Lógica de Creencias

Lógica Relacional

Lógica Multivaluada

Lógica Deóntica

Lógica Inductiva

Outline

Razonamientos

- Un **razonamiento** es una lista de proposiciones.
- La última proposición de la lista es la *conclusión* del razonamiento,
- y todas las anteriores, si las hay, son las *premisas*.

Razonamientos

- Un **razonamiento** es una lista de proposiciones.
- La última proposición de la lista es la *conclusión* del razonamiento,
- y todas las anteriores, si las hay, son las *premisas*.
- Observemos que es una definición un poco general:

  Lógica es una materia de segundo año
  El sol salió a las 7:12
  $\therefore$ A Luca Prodan le gustaba jugar al truco

Razonamientos

- Un **razonamiento** es una lista de proposiciones.
- La última proposición de la lista es la *conclusión* del razonamiento,
- y todas las anteriores, si las hay, son las *premisas*.
- Observemos que es una definición un poco general:

  Lógica es una materia de segundo año
  El sol salió a las 7:12
  $\therefore$ A Luca Prodan le gustaba jugar al truco

- A pesar de ser un muy mal razonamiento, cumple con la defínción
- Una tarea del curso será poder, formalmente, distinguir los *buenos* razonamientos de los *malos* razonamiento.

Razonamientos

- Consideremos el siguiente argumento:

  Ustedes asisten a esta clase
  Esta es una clase de lógica
  $\therefore$ Ustedes son estudiantes de lógica

Razonamientos

- Consideremos el siguiente argumento:

  Ustedes asisten a esta clase
  Esta es una clase de lógica
  $\therefore$ Ustedes son estudiantes de lógica

- Si bien parece un argumento razonable, desde el punto de vista de la lógica no es válido

Razonamientos

- Consideremos el siguiente argumento:

  Ustedes asisten a esta clase
  Esta es una clase de lógica
  $\therefore$ Ustedes son estudiantes de lógica

- Si bien parece un argumento razonable, desde el punto de vista de la lógica no es válido
- La validez de la conclusión no se desprende *necesariamente* de la validez de las premisas

Razonamientos

- Consideremos el siguiente argumento:

  Ustedes asisten a esta clase
  Esta es una clase de lógica
  $\therefore$ Ustedes son estudiantes de lógica

- Si bien parece un argumento razonable, desde el punto de vista de la lógica no es válido
- La validez de la conclusión no se desprende *necesariamente* de la validez de las premisas
- Sin embargo, hay algunos modelos lógicos que permiten analizar esta clase de argumentos

Validez deductiva

- Un razonamiento es deductivamente válido si y sólo si es imposible que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa

  Las naranjas son frutas o instrumentos musicales
  Las naranjas no son frutas
  $\therefore$ Las naranjas son instrumentos musicales

Validez deductiva

- Un razonamiento es deductivamente válido si y sólo si es imposible que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa

  Las naranjas son frutas o instrumentos musicales
  Las naranjas no son frutas
  $\therefore$ Las naranjas son instrumentos musicales

- A pesar de obtener una conclusión ridícula, observemos que la *forma lógica* del razonamiento es correcta.
- Si ambas premisas son ciertas, *necesariamente* la conclusión debe ser cierta

Validez deductiva

- La validez de las premisas y la conclusión no nos asegura la validez del razonamiento:

  Santa Rosa es la capital de La Pampa
  La Plata es la capital de Buenos Aires
  $\therefore$ Posadas es la capital de Misiones

Validez deductiva

- La validez de las premisas y la conclusión no nos asegura la validez del razonamiento:

  Santa Rosa es la capital de La Pampa
  La Plata es la capital de Buenos Aires
  $\therefore$ Posadas es la capital de Misiones

- ¿Qué sucede si Brasil invade Misiones y la anexa a un estado ya existente?
- Es *lógicamente* posible que las premisas sean ciertas y la conclusión falsa.
- Existe un *modelo* que hace inválido el razonamiento

Valores de verdad

- En el lenguaje que utilizaremos, siempre trabajaremos con proposiciones.
- Es decir, oraciones a las que se les puede asignar un valor de verdad.
- Estos valores de verdad serán en este curso *true* y *false*
- Sin embargo, hay modelos lógicos que permiten asignar más de dos (a veces infinitos) valores de verdad a una proposición
- Muy probablemente estudien estos modelos en IAA

Validez lógica

- Consideremos las siguientes proposiciones:
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo, o no
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo, y además no lleva puesto un buzo rojo

Validez lógica

- Consideremos las siguientes proposiciones:
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo, o no
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo, y además no lleva puesto un buzo rojo
- Observemos que, independientemente de cuándo analizemos estas proposiciones (y de si le regalamos o no un buzo a Eugenia) obtenemos diferentes resultados para la validez de las frases

Validez lógica

- Consideremos las siguientes proposiciones:
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo

Contingencia

  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo, o no
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo, y además no lleva puesto un buzo rojo
- Observemos que, independientemente de cuándo analizemos estas proposiciones (y de si le regalamos o no un buzo a Eugenia) obtenemos diferentes resultados para la validez de las frases

Validez lógica

- Consideremos las siguientes proposiciones:
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo, o no

    Tautología

  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo, y además no lleva puesto un buzo rojo
- Observemos que, independientemente de cuándo analizemos estas proposiciones (y de si le regalamos o no un buzo a Eugenia) obtenemos diferentes resultados para la validez de las frases

Validez lógica

- Consideremos las siguientes proposiciones:
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo, o no
  - Eugenia lleva puesto un buzo rojo, y además no lleva puesto un buzo rojo

Contradicción

- Observemos que, independientemente de cuándo analizemos estas proposiciones (y de si le regalamos o no un buzo a Eugenia) obtenemos diferentes resultados para la validez de las frases

Equivalencia lógica

- Consideremos las siguientes frases
  - Si llueve el domingo me quedaré en casa
  - Si salgo el domingo es porque no llueve
- Observemos que ambas frases son contingencias
- La validez de una implica necesariamente la validez de la otra
- Diremos que ambas proposiciones son **lógicamente equivalentes**

Consistencia

- Analicemos las siguientes frases:
  - *Más de la mitad de los estudiantes de lógica son más altos que yo*
  - *Soy más alto que más de la mitad de los estudiante de lógica*

Consistencia

- Analicemos las siguientes frases:
  - *Más de la mitad de los estudiantes de lógica son más altos que yo*
  - *Soy más alto que más de la mitad de los estudiante de lógica*
- No sabemos, ni nos importa, el valor de verdad de las proposiciones
- Lo que sí sabemos es que ambas no pueden ser ciertas a la vez

Consistencia

- Analicemos las siguientes frases:
  - *Más de la mitad de los estudiantes de lógica son más altos que yo*
  - *Soy más alto que más de la mitad de los estudiante de lógica*
- No sabemos, ni nos importa, el valor de verdad de las proposiciones
- Lo que sí sabemos es que ambas no pueden ser ciertas a la vez
- **Un conjunto de fórmulas con esta característica se dice inconsistente**

Outline

Áreas de CC donde la lógica juega un papel fundamental

- Ingeniería del software
- Bases de datos
- Complejidad
- Verificación de modelos
- Semántica de lenguajes de programación
- Verificación de programas

Para terminar, un juego

Wason Selection Task (Wason, 1966)

- Se ponen sobre la mesa cuatro cartas
- Cada carta tiene un número de un lado y una letra del otro
- Se realiza una proposición P concerniente a las cartas
- Se invita a responder la siguiente pregunta:

¿Cuál o cuáles cartas debo dar vuelta para verificar si la propiedad P es cierta?

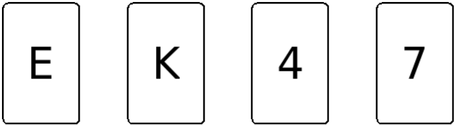
Para terminar, un juego

Wason Selection Task (Wason, 1966)

- Acá están la propiedad P:

  Si una carta tiene una vocal de un lado, entonces tiene un número par del otro lado

- Acá están las cartas sobre la mesa:



- ¿Qué carta(s) debe(n) darse vuelta?