CONICAS
ESTUDIO DE SUS FORMAS REDUCIDAS. ESTUDIO DE LA ECUACIÓN GENERAL DE 2º GRADO EN DOS VARIABLES

Lugar Geométrico:

Consideramos el plano como conjunto de puntos, llamaremos lugar geométrico en el plano a todo subconjunto de puntos del mismo definido por condiciones geométricas (distancia, paralelismo, etc.) Si en el plano introducimos un sistema de ejes de referencia, los puntos del mismo se identifican con los pares ordenados de números reales. Entonces las condiciones que definen un lugar geométrico equivalen a una ecuación o una inecuación en las variables x e y, que es verificada por las coordenadas de todos los puntos del lugar y solo por ellos. A esta Ecuación o inecuación se la llama **ecuación o inecuación del lugar geométrico.**

Ejemplo:
$C = \{P(x, y) / dist(0, P) = 2\}$

$P \in C \Leftrightarrow dist(0, P) = 2 \Leftrightarrow |\mathbf{OP}| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \quad \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ que llamamos ecuación del lugar geométrico. Luego $C = \{P(x, y) / x^2 + y^2 = 4\}$

En la geometría analítica del plano (como así también del espacio) debemos considerar dos cuestiones:

1. Definido el lugar geométrico, hallar una ecuación *f(x,y)=0* que lo represente, es decir una ecuación que verifiquen todos los puntos del lugar geométrico que se define y sólo por ellos.
2. Dada la ecuación de la forma *f(x,y)=0*, encontrar propiedades que permitan graficar el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la misma.

Una ecuación del tipo *f(x,y)=0* se llama **ecuación cartesiana** del lugar geométrico. Al que también se puede representar por otros tipos de ecuaciones, como por ejemplo:

$\begin{cases} x = f(t) \\ y = h(t) \end{cases}$ en cuyo caso denominamos a la variable t como parámetro (sin representación el los ejes cartesianos). Este tipo de ecuaciones se las denominan **ecuaciones paramétricas**. Como ejemplo podemos citar las ecuaciones paramétricas de la recta.

Estudiaremos algunos lugares geométricos cuyas ecuaciones son de segundo grado en las variables x e y, es decir ecuaciones de la forma

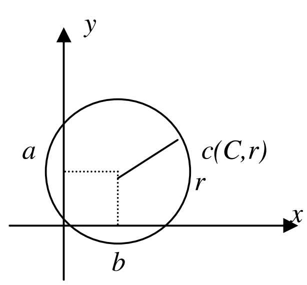
$$Ax^2+Bxy + Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

Donde A, B y C no son nulos simultáneamente.

LA CIRCUNFERENCIA

Definición: Dado un punto fijo C del plano y un número real $r>0$, llamamos **circunferencia de centro *C* y radio *r*** al lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a C es r , es decir:
c(*C*,*r*)={*P / dist(C,P)=r*}

Si consideramos el sistema de ejes de referencia cartesiano, resulta *C(a,b)* y *P(x,y)*



$P(x,y) \in c(C,r) \Leftrightarrow dist(C,P)=r \Leftrightarrow |\mathbf{CP}| = r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (2) es la **ecuación canónica de la circunferencia**

Si el punto C es el origen, es decir $C(0,0)$, la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio r es: c(O,r): $x^2+y^2=r$

Ejemplo: Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2,3)$y $B(-4,5)$. Hallar la ecuación de la curva

El centro de la circunferencia será el punto medio del segmento AB al que llamaremos M (-1,4) el cual se obtiene de calcular: (2-4)/2=-1 y (3+5)/2=4

El cálculo del radio será entonces $\dfrac{\left|\overline{AB}\right|}{2}=\dfrac{1}{2}$ $\left\{(-4-2)^2+(5-3)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=r$

La ecuación de la circunferencia será: c(M,r): $(x+1)^2+(y-4)^2=10$

Nos proponemos encontrar otra forma equivalente a la ecuación (2)

$x^2+a^2-2ax+y^2-2by+b^2=r^2$
$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$ (3)

esta ecuación es un caso particular de la ecuación (1) donde $A=C=1$; $B=0$; $D=2.a$; $F=a^2+b^2-r^2$

Se trata de averiguar si toda ecuación descripta por (1) o (3) tiene por representación gráfica una circunferencia. Si $k\in\Re-\{0\}$ la ecuación que obtenemos de (3), multiplicándola por el nº k será:

$kx^2+ky^2-2kax-2kby+ka^2+kb^2-kr^2=0$ (4)

Si comparamos las ecuaciones (1) y (4) podemos observar que si para que (1) represente el lugar geométrico de una circunferencia es necesario que: $A=C\neq 0$ y $B=0$
Condiciones que resultan insuficientes, ya que la ecuación : $x^2+y^2+1=0$ cumple tales condiciones pero no existe ningún punto del plano que la verifique.
Para que la ecuación del tipo (1) sea representativa de una circunferencia trataremos de expresarla de la forma (2)

$A.x^2+B.x.y+C.y^2+D.x+E.y+F=0$ con $A=C\neq 0$ y $B=0$

reemplazando en la ecuación: $A.x^2+A.y^2+D.x+E.y+F=0$ si dividimos por A

obtenemos: $x^2+y^2+\dfrac{D}{A}.x+\dfrac{E}{A}.y+\dfrac{F}{A}=0$

$$(x^2+\frac{D}{A}.x)+(y^2+\frac{E}{A}.y)+\frac{F}{A}=0 \text{ completando cuadrados}$$

$$(x^2+\frac{D}{A}.x+\frac{D^2}{4A^2})+(y^2+\frac{E}{A}.y+\frac{E^2}{4A^2})+\frac{F}{A}-\frac{D^2}{4A^2}-\frac{E^2}{4A^2}=0$$

$$(x+\frac{D}{2A})^2+(y+\frac{E}{2A})^2+\frac{F}{A}-\frac{D^2}{4A^2}-\frac{E^2}{4A^2}=0$$

$$(x+\frac{D}{2A})^2+(y+\frac{E}{2A})^2=-\frac{F}{A}+\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4A^2}$$

$$(x+\frac{D}{2A})^2+(y+\frac{E}{2A})^2=\frac{D^2-E^2-4AF}{4A^2} \qquad (5)$$

Comparando las ecuaciones (2) y (5) vemos que la ecuación (5) representará o no una circunferencia según el valor que asuma el segundo miembro de la igualdad. Para ello analizaremos:

1) Si $D^2+E^2-4AF>0$. La ecuación (5) representa una circunferencia de centro $\left(-\dfrac{D}{2A};-\dfrac{E}{2A}\right)$

y radio $\dfrac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}$

2) Si $D^2+E^2-4AF=0$, la ecuación (5) representa un solo punto de coordenadas $\left(-\dfrac{D}{2A};-\dfrac{E}{2A}\right)$

3) Si $D^2+E^2-4AF<0$, la ecuación (5) no representa ningún lugar geométrico.

Ejemplo: Determinar si la ecuación dada representa o no una circunferencia. En cuyo caso hallar su centro y su radio.

$$2x^2+2y^2+4x-8y=0$$

<u>Ecuaciones paramétricas de la circunferencia</u>

Consideremos la circunferencia dada por la siguiente ecuación: $c(C,r)$: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
Donde $C(a,b)$ son las coordenadas del centro y $r>0$ el radio de la misma. Para caracterizar los puntos $P(x,y)\in c(C,r) \Rightarrow (6)$ $\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ reciprocamente: sea $P(x,y)/$ $\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-a=r\cos\theta \\ y-b=r\operatorname{sen}\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2=r^2\cos^2\theta \\ (y-b)^2=r^2\operatorname{sen}^2\theta \end{cases} \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Leftrightarrow P(x,y)\in c(C,r)$$

Luego (6) son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia

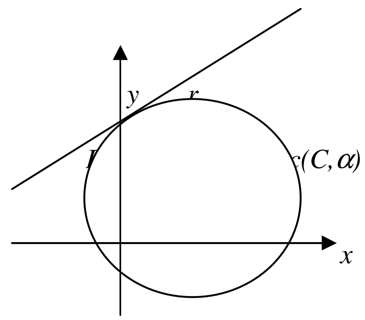
<u>Interseccion de una cónica y una recta</u>

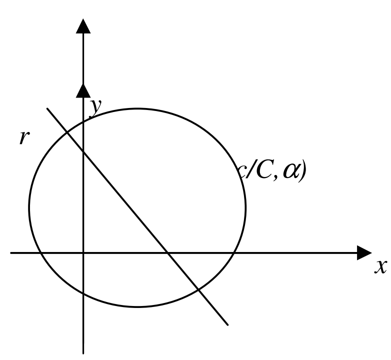
Consideremos una circunferencia de ecuación: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ y una recta de ecuación $Ax+By+C=0$

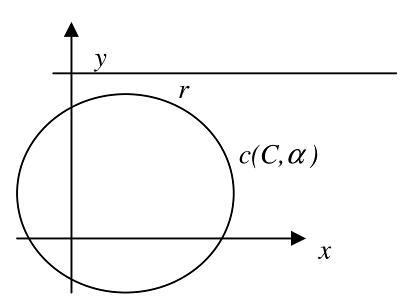
Trataremos de hallar las coordenadas de los puntos comunes a ambas. Analíticamente, significa halla la o las soluciones del sistema:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$Ax+By+C=0$$

Para resolverlo, despejamos una de las incógnitas de la ecuación lineal y la reemplazamos en la ecuación de segundo grado. De acuerdo con las soluciones obtenidas podemos concluir :
1.- Si es única, es decir que existe un único punto común a ambas, la recta en cuestión es tangente a la circunferencia
2.- Si obtenemos dos valores en la ecuación cuadrática, podremos afirmar entonces que existen dos puntos intersección entre ambos espacios geométricos , a saber $P_1(x_1\,,\,y_1)$; $P_2(x_2\,,\,y_2)$ de donde concluimos que la recta es secante a la circunferencia.
3.- En el caso de no existir solución diremos que la recta y la circunferencia no se interceptan.







α: radio de la circunferencia

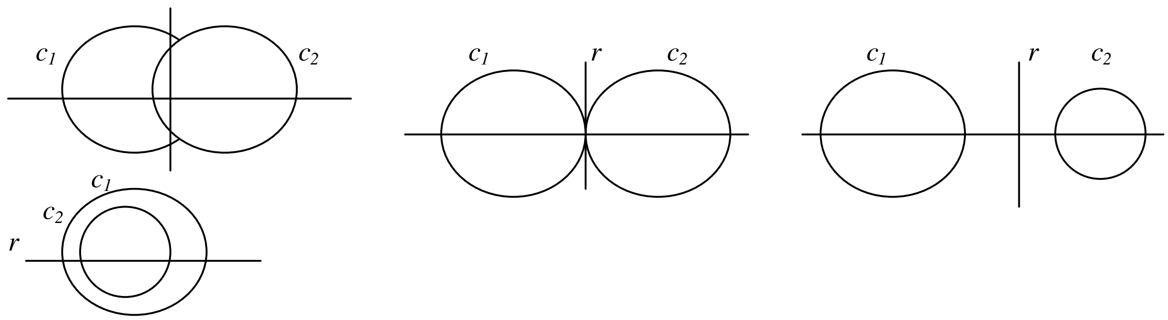
Interseccion entre dos circunferencias:

Sean las circunferencias $\begin{array}{l} c_1 : x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y - a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 = 0 \\ c_2 : x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y - a_2^2 + b_2^2 - r_2^2 = 0 \end{array}$

Hallar los puntos comunes a ambas significa resolver el sistema formado por las ecuaciones o equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y - a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 = 0 \\ 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + a_1^2 + b_1^2 + r_1^2 = 0 \end{cases}$$

Si $(a_1 - a_2, b_1 - b_2) \neq (0,0)$, la segunda ecuación representa una recta r .Entonces : $c_1 \cap c_2 = c_1 \cap r$. En cuyo caso tendremos, como ya hemos podido comprobar, dos, uno o ningún punto común a ambas.



Si $(a_1 - a_2, b_1 - b_2) = (0,0) \Rightarrow a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2 \Rightarrow$ ambas circunferencias son concéntricas

Si $r_1 \neq r_2 \Rightarrow c_1 \cap c_2 = \Phi$. Pero si $r_1 = r_2 \Rightarrow c_1 \cap c_2 = c_1$

A la recta r cuando existe se la llama eje radical, luego cuando las circunferencias son secantes, el eje radical está determinado por los puntos de intersección de ambas circunferencias y cuando son tangentes es la tangente común a ambas circunferencias.

<u>Tangentes a una circunferencia desde un punto no perteneciente a ella.</u>

El problema es el de hallar la ecuación de las rectas tangentes a una circunferencias, cuando ellas existen, desde un punto dado.

Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto , planteamos:

$$(S)\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a\ \ x - 2b_1 y - a^2 + b^2 - r^2 = 0 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

Nos proponemos encontrar la o las soluciones del sistema (S), en donde la pendiente m no está determinada. Intentamos encontrar la solución única del sistema, que obviamente dependerá de m Para ello, una propuesta es despejar la variable y en la ecuación de la recta y reemplazarla en la ecuación de la circunferencia . Obtenemos:

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

$$x^2 + (y_0 + m(x - x_0))^2 - 2ax - 2b(y_0 + m(x - x_0)) + a^2 + b^2 - r^2 = 0 \quad (*)$$

Entonces (S) tiene solución única cuando (*) tiene solución única, o sea cuando el discriminante que se obtiene de la resolución de la ecuación de 2do grado en x es igual a cero. Esto genera una ecuación de 2do agrado en m. Entonces tendrá dos, una o ninguna solución, por lo tanto pueden existir dos, una o ninguna recta con estas características.

Ejemplo.

LA ELIPSE

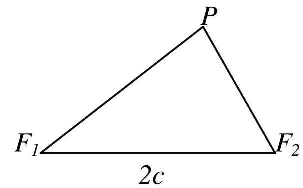
Definición: Dados dos puntos fijos y distintos del plano, sean estos F_1,y F_2, ,llamamos **elipse** al lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a F_1,y F_2 es constante, a la que le daremos el valor $2a$

$e = \{P / d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a\}$

a los puntos F_1,y F_2 se los llaman **focos de la elipse** y por supuesto la constante $a>0$. La distancia $d(F_1,F_2)$ es la llamada distancia focal, y también es constante: $2c$ ($c>0$)

consideremos el triángulo F_1PF_2, se puede observar (y probar) que

$d(P,F_1)+d(P,F_2)>d(F_1,F_2) \quad \Rightarrow 2a>2c \quad \Rightarrow \quad a>c$



Si consideramos estos puntos sobre un sistema de referencia De manera que el eje x contenga a los focos, por lo cual se Llama **eje focal** y el origen equidiste de los mismos. Entonces $F_1(-c,0)$b y $F_2(c,0)$ y sea $P(x,y)$ un punto de la elipse

$$P \in e \Leftrightarrow d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=-\sqrt{(x-c)^2+y^2}+2a \Leftrightarrow \text{(elevo al cuadrado)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$\Leftrightarrow c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -c^2x^2+a^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \quad \text{como} \quad a \neq c$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \qquad \text{como } a>c>0 \Rightarrow a^2>c^2 \Rightarrow a^2-c^2>0 \Rightarrow \exists \mathrm{b}>0/\, a^2-c^2=\mathrm{b}^2$$

$$\therefore P(x,y) \in \text{elipse} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ es la **ecuación canónica de la elipse**

<u>Gráfica de la elipse</u>

Analizamos la ecuación de la misma:

1) Simetrías:

   $(x,y)\in e \Leftrightarrow (-x,y)\in e$: es simétrica respecto al eje y

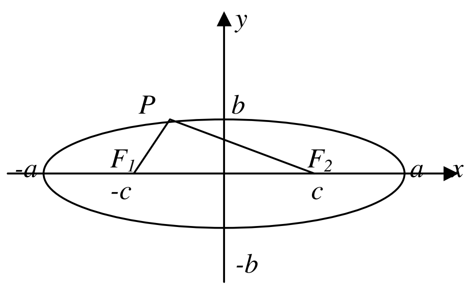
   $(x,y)\in e \Leftrightarrow (x,-y)\in e$: es simétrica respecto al eje x

   $(x,y)\in e \Leftrightarrow (-x,-y)\in e$: es simétrica respecto al origen de coordenadas

2) Intersección con los ejes:

   $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x=\pm a$ A los puntos $A_1(-a,0)$ y $A_2(a,0)$ que son los de la intersección de la elipse con el eje x se llaman **vértices de la elipse** y al segmento $\overrightarrow{A_1A_2}$ cuya longitud es $2a$ se lo llama **eje mayor**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=\pm b$$ A los puntos $B_1(0,-b)$ y $B_2(0,b)$ que son los de la intersección de la elipse con el eje *y* se llaman **vértices de la elipse** y al segmento $\overrightarrow{B_1B_2}$ cuya longitud es $2b$ se lo llama **eje menor**



Por razones de simetría basta hacer el estudio en el primer cuadrante donde *x>0 ; y>0*
De la ecuación deducimos que
$\dfrac{x^2}{a^2}<1 \qquad \dfrac{y^2}{b^2}<1 \Rightarrow x<a\,;\,y<b$
además cuando
$x \to a \Leftrightarrow y \to 0$
$x \to 0 \Leftrightarrow y \to b$

<u>Exentricidad de la elipse</u>

Se llama exentricidad de la elipse y se no nota con la letra *e* al número

$$e=\frac{\text{longitud del eje focal}}{\text{longitud del eje mayor}}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}<1 \text{ ya que } \quad a>c$$

Si $a=b$, la ecuación representa una circunferencia de radio *a* y su exentricidad es 0

Ecuación de la elipse no centrada en el origen:

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2}+\frac{(y-c_2)^2}{b^2}=1 \qquad \text{donde el centro de simetría es el punto } c(c_1,c_2)$$

<u>Ecuaciones paramétricas de la elipse</u>

Consideremos la elipse dada por la siguiente ecuación: $\dfrac{(x-c_1)^2}{a^2}+\dfrac{(y-c_2)^2}{b^2}=1$

Donde $C(c_1,c_2)$ son las coordenadas del centro de simetría. Para caracterizar los puntos $P(x,y)\in e$

$\Rightarrow$ (7) $\begin{cases} x=c_1+a\cos\theta \\ y=c_2+b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ con $0\le\theta\le\pi$ reciprocamente: sea *P(x,y)/*

$$\begin{cases} x=c_1+a\cos\theta \\ y=c_2+b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \text{con } 0\le\theta\le\pi \iff \begin{cases} x-c_1=a\cos\theta \\ y-c_2=b\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \text{con } 0\le\theta\le\pi \iff$$

$$\begin{cases} (x-c_1)^2=a^2\cos^2\theta \\ (y-c_2)^2=b^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \end{cases} \iff \frac{(x-c_1)^2}{a^2}+\frac{(y-c_2)^2}{b^2}=1$$

Luego (7) son las ecuaciones paramétricas de una elipse

Observación:
En el caso en que el eje focal de la elipse es el eje y, las coordenadas de los focos serán $F_1(0,-c)$ $F_2(0,c)$ y la ecuación que obtendremos será:

$$a^2 - c^2 = b^2 \qquad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ejemplo: Hallar la ecuación canónica de la elipse cuyos focos son los puntos (-2,0) y (2,0) y su exentricidad igual a 2/3

$a^2 - c^2 = \mathrm{b}^2 \qquad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ y su eje focal es el eje x. Como $c = 2$ y $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow a = 3 \Rightarrow b^2 = 5$

entonces la ecuación buscada es: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

LA HIPERBOLA

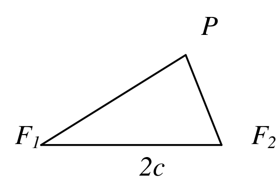
Definición: Dados dos puntos fijos y distintos del plano, sean estos F_1,y F_2,,llamamos **hipérbola** al lugar geométrico de los puntos del plano cuyo valor absoluto de la diferencia de distancias a F_1,y F_2 es constante, a la que le daremos el valor $2a$

$$h = \{P / |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a\}$$

a los puntos F_1,y F_2 se los llaman **focos de la hipérbola** y por supuesto la constante a>0. La distancia $d(F_1, F_2)$ es la llamada distancia focal, y también es constante: $2c$ (c>0)

consideremos el triángulo F_1PF_2, se puede observar (y probar) que

$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| < d(F_1,F_2) \quad \Rightarrow \; 2c > 2a \quad \Rightarrow \quad c > a$



Si consideramos estos puntos sobre un sistema de referencia
De manera que el eje x contenga a los focos, por lo cual se
Llama **eje focal** y el origen equidiste de los mismos. Entonces
$F_1(-c,0)$b y $F_2(c,0)$ y sea $P(x,y)$ un punto de la hipérbola

$P(x,y) \in h \Leftrightarrow |d(P,F_1) - d((P,F_2)| = 2a$

$$\Leftrightarrow d(P,F_1) - d(P,F_2) = \pm 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

desarrollando analíticamente estas ecuaciones al igual que en la ecuación de la elipse se obtiene:

$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$ donde $a \neq c$ es más $c > a > 0 \Rightarrow c^2 > a^2 > 0 \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2$
donde $b > 0$

$\therefore P(x,y) \in h \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **ecuación canónica de la hipérbola**

<u>Gráfica de la hipérbola</u>
Analizamos la ecuación de la misma:
1.- Simetrías:

$(x,y) \in e \Leftrightarrow (-x,y) \in e$: es simétrica respecto al eje y

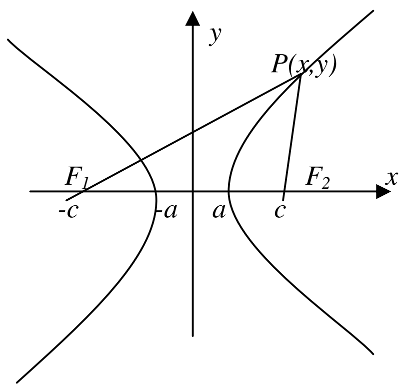
$(x,y) \in e \Leftrightarrow (x,-y) \in e$: es simétrica respecto al eje x

$(x,y) \in e \Leftrightarrow (-x,-y) \in e$: es simétrica respecto al origen de coordenadas

2.- Intersección con los ejes:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a$$ A los puntos $A_1(-a,0)$ y $A_2(a,0)$ que son los de la intersección de la elipse con el eje x se llaman **vértices de la hipérbola** y al segmento $\overrightarrow{A_1A_2}$ cuya longitud es $2a$ se lo llama **eje real de la hipérbola**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} = 1$$ la solución es Φ por lo tanto no existe intersección con el eje y



Por razones de simetría basta hacer el estudio en el primer cuadrante donde $x>0$; $y>0$
De la ecuación deducimos que

$\dfrac{x^2}{a^2} \geq 1$ $\quad \dfrac{y^2}{b^2}$ cualquiera $\Rightarrow x \geq a$; y cualquiera

además cuando

$x \to +\infty \Leftrightarrow y \to +\infty$

$x \to a \Leftrightarrow y \to 0$

<u>Exentricidad de la Hipérbola</u>

Se llama exentricidad de la hipérbola y se no nota con la letra e al número

$$e = \frac{\text{longitud del eje focal}}{\text{longitud del eje mayor}} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} > 1 \text{ ya que } a < c$$

Ecuación de la hipérbola no centrada en el origen:

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2} - \frac{(y-c_2)^2}{b^2} = 1$$ si su centro de simetría es el punto $C(c_1, c_2)$

<u>Asíntotas de una hiérbola</u>

Para encontrar las ecuaciones de las asíntotas de una hipébola, plantearemos el problema de encontrar las condiciones que debe cumplir una recta que contiene al origen para interceptarse con una hipérbola también centrada en el origen de coordenadas.
Es necesario entonces resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{b^2x^2 - a^2m^2x^2}{a^2b^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(b^2 - a^2m^2) = a^2b^2 \Leftrightarrow (b^2 - a^2m^2) > 0 \Leftrightarrow m^2 < \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow -\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$$

Es decir, hemos encontrado la condición para que una recta intercepte a una hipérbola. Luego aquellas rectas de ecuación $y = \pm \dfrac{b}{a} x$ delimitan un ángulo donde en su interior se encuentran puntos de la hipérbola. Estas rectas reciben el nombre de **asíntotas de la hipérbola**
Definición:

Una hipérbola se llama **equilátera** cuando $a = b$. Luego su ecuación será $x^2 - y^2 = a^2$ y sus asíntotas las rectas $y = \pm x$

Ecuación Paramétrica de la hipérbola:

$$\begin{cases} x = c_1 + a\sec\theta \\ y = c_2 + b.tang\,\theta \end{cases} \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

Observación:
En el caso en que el eje focal de la hipérbola es el eje *y*, las coordenadas de los focos serán $F_1(0,-c)$ $F_2(0,c)$ y la ecuación que obtendremos será:

$$c^2 - a^2 = b^2 \qquad -\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Ejemplo:
Hallar la ecuación canónica de una hipérbola de eje focal el eje *x*, cuya distancia entre los focos es 20 y sus asíntotas son las rectas de ecuación $y = \pm\frac{1}{2}x$

$$c^2 - a^2 = b^2 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$2\text{c} = 20 \Rightarrow \text{c} = 10 \text{ además } \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b$$

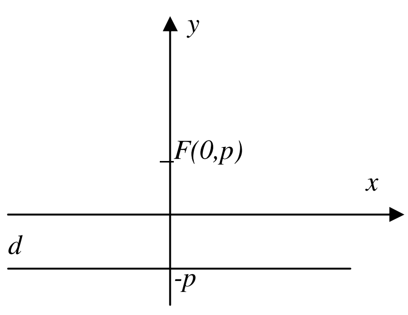
$$b^2 = 100 - 4b^2 \Rightarrow b^2 = 20, \text{ luego } a = 2\sqrt{20} = 80$$

$$\text{obtenemos así la ecuación solicitada : } \frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$$

LA PARABOLA

Definición: Dada una recta fija del plano *d* (denominada **directriz**) y un punto fijo *F* (denominado **foco**) tal que $F \notin d$, llamamos **parábola** al lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de *d* y de *F*, es decir:

$$P_a = \{P \,/\, d(P,F) = d(P,d)\}$$



Si ubicamos los puntos en el sistema de referencias cartesiano, de manera tal que el foco esté sobre el eje *y*, y la recta directriz sea paralela al eje *x*, de esta manera el foco tiene coordenadas $F(0,p)$ y la recta directriz tiene por ecuación: d: $y+p=0$
De esta manera podemos observar que:

$$d(P,F)=d(P,d)$$

de esta manera $d(F,d)=2p$

$$P(x,y) \in P_a \Leftrightarrow d(P,F) = d(P,d) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p| \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \Leftrightarrow x^2 = 4py$$

$$\text{P} \in P_a \Leftrightarrow x^2 = 4py \ \textbf{ ecuación canónica de la parábola}$$

$$P_a = \{P(x,y) \,/\, x^2 = 4py \quad p > 0\}$$

<u>Gráfica de la parabola</u>
Analizamos la ecuación de la misma:

1.- Simetrías:

$(x, y) \in e \Leftrightarrow (-x, y) \in e$: es simétrica respecto al eje y

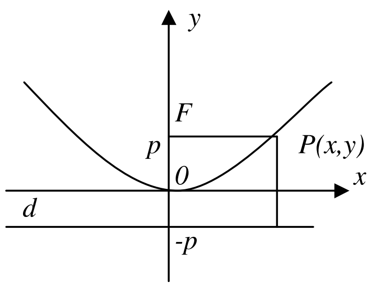
Para valores de p > 0 como la variable x está elevada al cuadrado, entonces la variable y, solo puede asumir valores positivos.

2.- Intersección con los ejes:

$$\begin{cases} x^2 = 4py \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \ \mathrm{x}^2 = 0 \ \Rightarrow \ x = 0$$

$$\begin{cases} x^2 = 4py \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{y} = 0$$

Al origen de coordenadas le llamamos **vértice** de la parábola



Por razones de simetría basta hacer el estudio en el primer cuadrante donde *x>0 ; y>0*

De la ecuación deducimos que para *p>0*

$y \geq 0$; x cualquiera

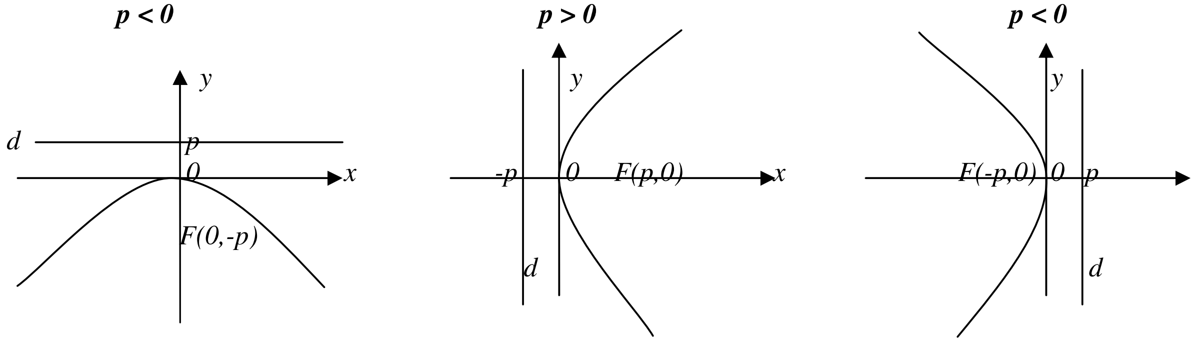
además cuando

$x \to +\infty \Leftrightarrow y \to +\infty$

$x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$

Observación:

p < 0 ***p > 0*** ***p < 0***



$\boldsymbol{x^2 = -4py}$ $\boldsymbol{y^2 = 4px}$ $\boldsymbol{y^2 = -4px}$

Ejemplo:

Hallar la ecuación canónica de la parábola cuyo vértice es el origen, el eje focal es el eje de las ordenadas y la ecuación de la directriz *d: y = -1*

$$y = -1 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow x^2 = 4y \quad \text{siendo el foco } F(0,1)$$

<u>Ecuación de la parábola no centrada en el origen:</u>

Si el vértice de la parábola es el punto $C(c_1, c_2) \Rightarrow \ (x - c_1)^2 = 4p(y - c_2)$

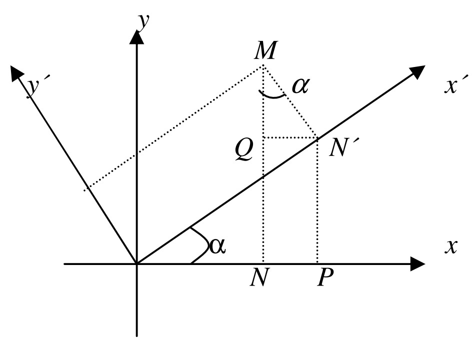
<u>Ecuación Paramétrica de la parábola:</u>

$$(x-c_1)^2 = 4p(y-c_2) \rightarrow \begin{cases} x = c_1 + t \\ y = c_2 + (t - c_1)^2 \dfrac{1}{4p} \end{cases} \quad t \in \Re$$

$$(y-c_2)^2 = 4p(x-c_1) \rightarrow \begin{cases} x = c_1 + (t - c_2)^2 \dfrac{1}{4p} \\ y = t \end{cases} \quad t \in \Re$$

Rotación de ejes

Suponemos que giramos los ejes coordenados en un ángulo α , Nuestro interés es encontrar las coordenadas de un punto *M(x´,y´)* en los ejes rotados siendo que en los originales (no rotados) eran *M(x,y)*



De la igualdad de triángulos podemos deducir que el triángulo QMN´=α, deducimos además que si:
$x = ON = OP - NP = OP - QN´$
observemos el triángulo OPN´, entonces:
$OP = ON´ \cos\alpha = x´\cos\alpha$
Observando el triángulo N´QM:
$QN´= MN´ \operatorname{sen}\alpha = y´\operatorname{sen}\alpha$

Concluimos que: $x = x´\cos\alpha - y´\operatorname{sen}\alpha$

Analogamente si:
$y = NM = NQ + QN = PN´ + QM$
como triángulo *OPN´* es semejante al triángulo *N´QM* , entonces:
$PN´ = ON´ \operatorname{sen}\alpha = x´ \operatorname{sen}\alpha$
$QM = N´M \cos\alpha = y´. \cos\alpha$

Concluimos que: $y = x´ \operatorname{sen}\alpha + y´\cos\alpha$
Luego entonces, para cambiar las variables del sistema de referencia *x,y* al sistema de referencia rotado un ángulo α con los ejes *x´, y´* debemos hacer la siguiente transformación:

$$\begin{cases} x = x´\cos\alpha - y´\operatorname{sen}\alpha \\ y = x´\operatorname{sen}\alpha + y´\cos\alpha \end{cases}$$

Este cambio de variables elimina de la ecuación de 2do grado en dos variables el término rectangular, a saber:
Sea la ecuación genérica: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ utilizamos el cambio de variables:

$$x^2 = x´^2\cos^2\alpha - 2x´y´\cos\alpha.\operatorname{sen}\alpha + y´^2\operatorname{sen}^2\alpha$$
$$xy = x´^2\cos\alpha.\operatorname{sen}\alpha - y´^2\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha + x´y´(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)$$
$$y^2 = x´^2\operatorname{sen}^2\alpha + 2x´y´\cos\alpha.\operatorname{sen}\alpha + y´^2\cos^2\alpha$$
$$x = x´\cos\alpha - y´\operatorname{sen}\alpha$$
$$y = x´\operatorname{sen}\alpha + y´\cos\alpha$$

Reemplazando en la ecuación de 2do grado, obtenemos:

$$x'^2(A\cos^2\alpha+2B\cos\alpha.\mathrm{sen}\,\alpha+C\,\mathrm{sen}^2\,\alpha)+x'y'\left[(A-C)2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\,\alpha)\right]+$$

$$+y'^2(A\,\mathrm{sen}^2\,\alpha+2B\,\mathrm{sen}\,\alpha.\cos\alpha+C\cos^2\alpha)+x'(D\cos\alpha+E\,\mathrm{sen}\,\alpha)+y'(-D\,\mathrm{sen}\,\alpha+E\cos\alpha)+F=0$$

para que desaparezca el término rectangular debemos considerar que:

$(A-C)2.\mathrm{sen}\,\alpha.\cos\alpha+B\cos 2\alpha=0$ o de otra forma expresado:

$$(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,\mathrm{sen}2\alpha+\mathrm{B}\cos2\alpha=0 \;\Rightarrow\; (A-C)\,\mathrm{sen}\,2\alpha=-B\cos2\alpha \;\Rightarrow\; tag\,2\alpha=\frac{B}{A-C}$$

o bien $\quad \cot g\,2\alpha=\dfrac{A-C}{B} \quad$ para $\quad 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

Recordemos algunas identidades trigonométricas de mucha utilidad:

$$\cos 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+tag^2\,2\alpha}} \qquad \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}} \qquad sen\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}$$

Se puede demostrar que cuando una cónica (no degenerada) posee una rotación en sus ejes existen algunos coeficientes invariantes a tal rotación , a saber:

Si la ecuación es: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ y una vez realizada la rotación de ejes obtenemos una ecuación del tipo: $A'x^2+C'y^2+D'x+E'y+F'=0$ observaremos las siguientes invariantes:

1.- $F=F'$ 2.- $A+C=A'+C'$ 3.-$B^2-4AC=B'^2-4A'C'$ (es de notar que $B'=0$)

al número B^2-4AC se lo denomina discriminante de la ecuación y determinará qué tipo de gráfica obtendremos luego de la rotación (en el caso de no ser una cónica degenerada). Entonces:

Si $B^2-4AC<0\Rightarrow$ la cónica resultante será una **elipse**

Si $B^2-4AC=0\Rightarrow$ la cónica resultante será una **parábola**

Si $B^2-4AC>0\Rightarrow$ cónica resultante será una **hipérbola**