APÉNDICE A
Axiomas y Teoremas

Índice del Capítulo

A.1. Teoremas del Cálculo Proposicional

La equivalencia

(3.1) Asociatividad de $\equiv$: $((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$
(3.2) Conmutatividad (o simetría) de $\equiv$: $p \equiv q \equiv q \equiv p$
(3.3) Neutro de $\equiv$: $true \equiv p \equiv p$
(3.4) true
(3.5) Reflexividad de $\equiv$: $p \equiv p$

La negación, discrepancia, y false

(3.8) Definición de false: $false \equiv \neg\, true$
(3.9) Negación y equivalencia: $\neg\,(p \equiv q) \equiv \neg p \equiv q$
(3.10) Definición de $\not\equiv$: $p \not\equiv q \equiv \neg\,(p \equiv q)$
(3.11) $\neg p \equiv q \equiv p \equiv \neg q$
(3.12) Doble negación: $\neg\neg p \equiv p$
(3.13) Negación de $false$: $\neg false \equiv true$

(3.14) $(p \not\equiv q) \equiv \neg p \equiv q$

(3.15) $\neg p \equiv p \equiv false$

(3.16) Conmutatividad de $\not\equiv$: $(p \not\equiv q) \equiv (q \not\equiv p)$

(3.17) Asociatividad de $\not\equiv$: $((p \not\equiv q) \not\equiv r) \equiv (p \not\equiv (q \not\equiv r))$

(3.18) Asociatividad mutua: $((p \not\equiv q) \equiv r) \equiv (p \not\equiv (q \equiv r))$

(3.19) Intercambiabilidad: $p \not\equiv q \equiv r \;\equiv\; p \equiv q \not\equiv r$

La disyunción

(3.24) Asociatividad de $\vee$: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

(3.25) Conmutatividad de $\vee$: $p \vee q \equiv q \vee p$

(3.26) Idempotencia: $p \vee p \equiv p$

(3.27) Distributividad de $\vee$ respecto de $\equiv$: $p \vee (q \equiv r) \equiv (p \vee q) \equiv (p \vee r)$

(3.28) Tercero excluído: $p \vee \neg p \equiv true$

(3.29) Elemento neutro de $\vee$: $p \vee false \equiv p$

(3.30) Distributividad de $\vee$ respecto de $\vee$: $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$

(3.31) $p \vee q \equiv p \vee \neg q \equiv p$

(3.32) Elemento absorbente de $\vee$: $p \vee true \equiv true$

La conjunción

(3.35) Regla dorada: $p \wedge q \equiv p \equiv q \equiv p \vee q$

(3.36) Asociatividad de $\wedge$: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

(3.37) Conmutatividad de $\wedge$: $p \wedge q \equiv q \wedge p$

(3.38) Idempotencia de $\wedge$: $p \wedge p \equiv p$

(3.39) Neutro de $\wedge$: $p \wedge true \equiv p$

(3.40) Elemento absorbente de $\wedge$: $p \wedge false \equiv false$

(3.41) Distributividad de $\wedge$ sobre $\wedge$: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$

(3.42) Contradicción: $p \wedge \neg p \equiv false$

(3.43) Absorción: **a)** $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
b) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

(3.44) Absorción: **a)** $p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q$
b) $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$

(3.45) Distributividad de $\wedge$ con respecto a $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(3.46) Distributividad de $\vee$ con respecto a $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(3.47) Leyes de Morgan **a)** $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
b) $\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

(3.48) $p \wedge q \equiv p \wedge \neg q \equiv \neg p$

(3.49) $p \wedge (q \equiv r) \equiv p \wedge q \equiv p \wedge r \equiv p$

(3.50) $p \wedge (q \equiv p) \equiv p \wedge q$

(3.51) Reemplazo: $(p \equiv q) \wedge (r \equiv p) \equiv (p \equiv q) \wedge (r \equiv q)$

(3.52) Definición alternativa de $\equiv$: $p \equiv q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

(3.53) "O" exclusivo: $p \not\equiv q \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

La implicación

(3.56) Definición de implicación: $p \Rightarrow q \equiv p \vee q \equiv q$

(3.57) Definición de consecuencia: $p \Leftarrow q \equiv p \vee q \equiv p$

(3.58) Definición alternativa de implicación: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

(3.59) Definición alternativa de implicación: $p \Rightarrow q \equiv p \wedge q \equiv p$

(3.60) Contrarrecíproco: $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

(3.61) $p \Rightarrow (q \equiv r) \equiv p \wedge q \equiv p \wedge r$

(3.62) Distributividad de $\Rightarrow$ respecto de $\equiv$: $p \Rightarrow (q \equiv r) \equiv p \Rightarrow q \equiv p \Rightarrow r$

(3.63) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

(3.64) Traslación: $p \wedge q \Rightarrow r \equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

(3.65) $p \wedge (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge q$

(3.66) $p \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p$

(3.67) $p \vee (p \Rightarrow q) \equiv true$

(3.68) $p \vee (q \Rightarrow p) \equiv q \Rightarrow p$

(3.69) $p \vee q \Rightarrow p \wedge q \equiv p \equiv q$

(3.70) Reflexividad de $\Rightarrow$: $p \Rightarrow p \equiv true$

(3.71) Elemento absorbente a derecha de $\Rightarrow$: $p \Rightarrow true \equiv true$

(3.72) Elemento neutro a izquierda de $\Rightarrow$: $true \Rightarrow p \equiv p$

(3.73) $p \Rightarrow false \equiv \neg p$

(3.74) $false \Rightarrow p \equiv true$

(3.75) Debilitamiento o fortalecimiento
a) $p \Rightarrow p \vee q$
b) $p \wedge q \Rightarrow p$
c) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
d) $p \vee (q \wedge r) \Rightarrow p \vee q$
e) $p \wedge q \Rightarrow p \wedge (q \vee r)$

(3.76) Modus Ponens: $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

(3.77) $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q \Rightarrow r)$

(3.78) $(p \Rightarrow r) \wedge (\neg p \Rightarrow r) \equiv r$

(3.79) Implicación mutua: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \equiv q$

(3.80) Antisimetría: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \equiv q)$

(3.81) Transitividad: **a)** $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
b) $(p \equiv q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \equiv r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

La Regla de leibniz como axioma

(3.82) $(e = f) \Rightarrow E[z := e] = E[z := f]$

(3.84) Reglas de Sustitución: **a)** $(e = f) \wedge E[z := e] \equiv (e = f) \wedge E[z := f]$
b) $(e = f) \Rightarrow E[z := e] \equiv (e = f) \Rightarrow E[z := f]$
c) $q \wedge (e = f) \Rightarrow E[z := e] \equiv q \wedge (e = f) \Rightarrow E[z := f]$

(3.85) Reemplazo por $true$: **a)** $p \Rightarrow E[z := p] \equiv p \Rightarrow E[z := true]$
b) $q \wedge p \Rightarrow E[z := p] \equiv q \wedge p \Rightarrow E[z := true]$

(3.86) Reemplazo por $false$ **a)** $E[z := p] \Rightarrow p \equiv E[z := false] \Rightarrow p$
b) $E[z := p] \Rightarrow q \vee p \equiv E[z := false] \Rightarrow q \vee p$

(3.87) Reemplazo por $true$: $p \wedge E[z := p] \equiv p \wedge E[z := true]$

(3.88) Reemplazo por $false$: $p \vee E[z := p] \equiv p \vee E[z := false]$

(3.89) Shannon: $E[z := p] \equiv (p \wedge E[z := true]) \vee (\neg p \wedge E[z := false])$

(4.1) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

(4.2) Monotonía del $\vee$: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q \vee r)$

(4.3) Monotonía del $\wedge$: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r)$

A.2. Teoremas del Cálculo de Predicados

Cuantificación Universal

(5.1) Rango $true$: $(\forall x : true : T.x) \equiv (\forall x :: T.x)$

(5.2) Rango unitario: $(\forall x : x = N : T.x) \equiv T.N$

(5.3) Rango vacío: $(\forall x : false : T.x) \equiv true$

(5.4) Distributividad de $\vee$ respecto de $\forall$: $(\forall x : R.x : P \vee T.x) \equiv P \vee (\forall x : R.x : T.x)$, donde x no aparece en P.

(5.5) Regla del término: $(\forall x : R.x : T.x \wedge G.x) \equiv (\forall x : R.x : T.x) \wedge (\forall x : R.x : G.x)$

(5.6) Intercambio de cuantificadores: $(\forall x :: (\forall y :: T.x.y)) \equiv (\forall y :: (\forall x :: T.x.y))$

(5.7) $(\forall x :: (\forall y :: T.x.y)) \equiv (\forall x, y :: T.x.y)$

(5.8) Traslación: $(\forall x : R.x : T.x) \equiv (\forall x :: R.x \Rightarrow T.x)$

(5.9) Traslación:
a) $(\forall x : R.x : P.x) \equiv (\forall x :: \neg R.x \vee P.x)$
b) $(\forall x : R.x : P.x) \equiv (\forall x :: R.x \wedge P.x \equiv R.x)$
c) $(\forall x : R.x : P.x) \equiv (\forall x :: R.x \vee P.x \equiv P.x)$

(5.10) Variantes de traslación:

a) $(\forall x : Q.x \wedge R.x : P.x) \equiv (\forall x : Q.x : R.x \Rightarrow P.x)$
b) $(\forall x : Q.x \wedge R.x : P.x) \equiv (\forall x : Q.x : \neg R.x \vee P.x)$
c) $(\forall x : Q.x \wedge R : P.x) \equiv (\forall x : Q.x : R.x \wedge P.x \equiv R.x)$
d) $(\forall x : Q.x \wedge R.x : P.x) \equiv (\forall x : Q.x : R.x \vee P.x \equiv P.x)$

(5.11) Cambio de variable: Si y no ocurre en $R.x$ ni en $T.x$ entonces $(\forall x : R.x : T.x) \equiv (\forall y : R.y : T.y)$

(5.12) Partición de rango: $(\forall i : R.i \vee S.i : T.i) \equiv (\forall i : R.i : T.i) \wedge (\forall i : S.i : T.i)$

(5.13) Instanciación: $(\forall x :: P.x) \Rightarrow P.E$

A.3. Cuantificación Existencial

(5.14) De Morgan Generalizado: $(\exists x : R.x : T.x) \equiv \neg(\forall x : R.x : \neg T.x)$

(5.15) Formas alternativas de De Morgan Generalizado:
a) $\neg(\exists x : R : \neg P) \equiv (\forall x : R : P)$
b) $\neg(\exists x : R : P) \equiv (\forall x : R : \neg P)$
c) $(\exists x : R : \neg P) \equiv \neg(\forall x : R : P)$

(5.16) Rango $true$: $(\exists x : true : T.x) \equiv (\exists x :: T.x)$

(5.17) Rango unitario: $(\exists x : x = N : T.x) \equiv T.N$, donde x no aparece en la expresión N.

(5.18) Rango vacío: $(\exists x : false : T.x) \equiv false$

(5.19) Distributividad de $\wedge$ respecto de $\exists$: $(\exists x : R.x : X \wedge T.x) \equiv X \wedge (\exists x : R.x : T.x)$, donde x no aparece en X.

(5.20) Regla del término: $(\exists x : R.x : T.x \vee G.x) \equiv (\exists x : R.x : T.x) \vee (\exists x : R.x : G.x)$

(5.21) Intercambio de cuantificadores: $(\exists x :: (\exists y :: T.x.y)) \equiv (\exists y :: (\exists x :: T.x.y))$

(5.22) $(\exists x :: (\exists y :: T.x.y)) \equiv (\exists x, y :: T.x.y)$

(5.23) Traslación: $(\exists x : R.x : T.x) \equiv (\exists x :: R.x \wedge T.x)$

(5.24) Traslación: $(\exists x : R.x \wedge Q.x : T.x) \equiv (\exists x : R.x : Q.x \wedge T.x)$

(5.25) Intercambio entre rango y término: $(\exists x : R.x : T.x) \equiv (\exists x : T.x : R.x)$

(5.26) Partición de rango: $(\exists i : R.i \vee S.i : T.i) \equiv (\exists i : R.i : T.i) \vee (\exists i : S.i : T.i)$

(5.27) Introducción de $\exists$: $P.E \Rightarrow (\exists x :: P.x)$

(5.28) Cambio de variable: Si y no ocurre en R o en T entonces,
$(\exists x : R.x : T.x) \equiv (\exists y : R.y : T.y)$

A.4. Propiedades de las cuantificaciones universal y existencial

(5.29) Fortalecimiento de rango: $(\forall x : Q.x \vee R.x : P.x) \Rightarrow (\forall x : Q.x : P.x)$

(5.30) Fortalecimiento de término: $(\forall x : R.x : P.x \land Q.x) \Rightarrow (\forall x : R.x : P.x)$

(5.7) Monotonía de $\forall$: $(\forall x : R.x : Q.x \Rightarrow P.x) \Rightarrow ((\forall x : R.x : Q.x) \Rightarrow (\forall x : R.x : P.x))$

(5.32) Distributividad de $\land$ respecto de $\forall$: Si x no ocurre en P y el rango de especificación es no vacío, es decir $(\exists x :: R.x)$, entonces $(\forall x : R.x : P \land Q.x) \equiv P \land (\forall x : R.x : Q.x))$

(5.33) $(\forall x : R.x : true) \equiv true$

(5.34) $(\forall x : R.x : P.x \equiv Q.x) \Rightarrow ((\forall x : R.x : P.x) \equiv (\forall x : R.x : Q.x))$

(5.35) Debilitamiento de rango: $(\exists x : R.x : P.x) \Rightarrow (\exists x : R.x \lor Q.x : P.x)$

(5.36) Debilitamiento de término: $(\exists x : R.x : P.x) \Rightarrow (\exists x : R.x : P.x \lor Q.x)$

(5.37) Monotonía de $\exists$: $(\forall x : R.x : Q.x \Rightarrow P.x) \Rightarrow ((\exists x : R.x : Q.x) \Rightarrow (\exists x : R.x : P.x))$

(5.38) Distributividad de $\lor$ respecto de $\exists$: Si x no ocurre en P y el rango de especificación es no vacío, es decir $(\exists x :: R.x)$, entonces $(\exists x : R.x : P \lor Q.x) \equiv P \lor (\exists x : R.x : Q.x))$

(5.39) $(\exists x : R.x : false) \equiv false$

(5.40) Intercambio de cuantificadores: $(\exists x : R.x : (\forall y : Q.y : P.x.y)) \Rightarrow (\forall y : Q.y : (\exists x : R.x : P.x.y))$

A.5. Metatoremas

(5.41) Testigo: Si k no ocurre en P ni en Q, entonces, $(\exists x :: P.x) \Rightarrow Q$ es un teorema si y solo si $P.k \Rightarrow Q$ es un teorema.

A.6. Leyes Generales de la Cuantificación

Para un operador $\oplus$ simétrico y asociativo, con elemento neutro u.

(6.7) Sustitución para expresiones cuantificadas. $V.y \cap (V.x \cup FV.E) = \emptyset \Rightarrow (\oplus\, y : R : T)\,[x := E] = (\oplus\, y : R\,[x := E] : T\,[x := E])$

(6.9) Rango vacío: $(\oplus\, i : false : T) = u$

(6.10) Rango unitario:

Si i no es una variable libre en la expresión N, entonces $(\oplus\, i : i = N : T.i) = T.N$

(6.12) Distributividad:

Si el operador $\otimes$ es distributivo a izquierda con respecto a $\oplus$, $i \notin FV.E$ y se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

a) el rango de especificación es no vacío,

b) el elemento neutro del operador $\oplus$ existe y es absorbente para $\otimes$

entonces $(\oplus\, i : R : E \otimes T) = E \otimes (\oplus\, i : R : T)$

(6.13) Partición de rango:

Si alguna de las siguientes condiciones es cierta:

a) el operador $\oplus$ es idempotente

b) $R \land S = false$

se cumple que $(\oplus\, i : R \vee S : T) = (\oplus\, i : R : T) \oplus (\oplus\, i : S : T)$.

(6.15) Partición de Rango: $(\oplus\, i : R \vee S : P) \oplus (\oplus\, i : R \wedge S : P) = (\oplus\, i : R : P) \oplus (\oplus\, i : S : P)$.

(6.16) Partición de Rango generalizada: Si el operador operador $\oplus$ es idempotente, entonces, $(\oplus\, i : (\exists\, j : S.i.j : R.i.j) : T.i) = (\oplus\, i, j : S.i.j \wedge R.i.j : T.i)$

(6.18) Regla del término constante: Si el término de la cuantificación es igual a una constante C, el operador $\oplus$ es idempotente y el rango de especificación es no vacío, entonces
$(\oplus\, i : R : C) = C$

(6.19) Regla de anidado: $(\oplus\, i, j : R.i \wedge S.i.j : T.i.j) = (\oplus\, i : R.i : (\oplus j : S.i.j : T.i.j))$

(6.20) Regla de intercambio de variables: Si $V.j \cap FV.R = \emptyset$ y $V.i \cap FV.Q = \emptyset$, entonces $(\oplus\, i : R : (\oplus j : Q : T)) = (\oplus j : Q : (\oplus\, i : R : T))$

(:) Regla de cambio de variable[6.21 Si $V.j \cap (FV.R \cup FV.T) = \emptyset$ entonces,
$(\oplus\, i : R : T) = (\oplus j : R[i := j\; T[i := j])$

(6.23) Regla del cambio de variable:
Sea f una función biyectiva definida sobre R y j una variable que no aparece libre en R ni en T, entonces, $(\oplus\, i : R.i : T.i) = (\oplus j : R.(f.j) : T.(f.j))$

(6.24) Separación de un término: Sea $n < m$,
a) $(\oplus\, i : n \leq i < m : T.i) = T.n \oplus (\oplus\, i : n < i < m : T.i)$
b) $(\oplus\, i : n < i \leq m : T.i) = (\oplus\, i : n < i < m : T.i) \oplus T.m$

A.7. Cuantificador max

(6.26) Rango vacío: $(max\ i : false : T.i) = -\infty$

(6.27) Distributividad de min sobre max:
Suponiendo que i no es variable libre en E,
$min.(E, (max\ i : R : T)) = (max\ i : R : min.(E, T))$

(6.28) Distributividad de $+$ sobre max:
Suponiendo que i no es variable libre en E y que $R \neq false$,
$E + (max\ i : R : T) = (max\ i : R : E + T)$

(6.29) Partición de rango: $(max\ i : R \vee S : F) = max.((max\ i : R : F), (max\ i : S : F))$

(6.30) $$\begin{aligned} T.x = (max\ i : R.i : T.i) \equiv R.x \wedge (\forall\, i : R.i : T.i \leq T.x) \\ T.x = (min\ i : R.i : T.i) \equiv R.x \wedge (\forall\, i : R.i : T.i \geq T.x) \end{aligned}$$