

APLICACIONES DEL MÉTODO “*ADJOINT*” EN LA HIDROLOGÍA DEL AGUA SUBTERRÁNEA

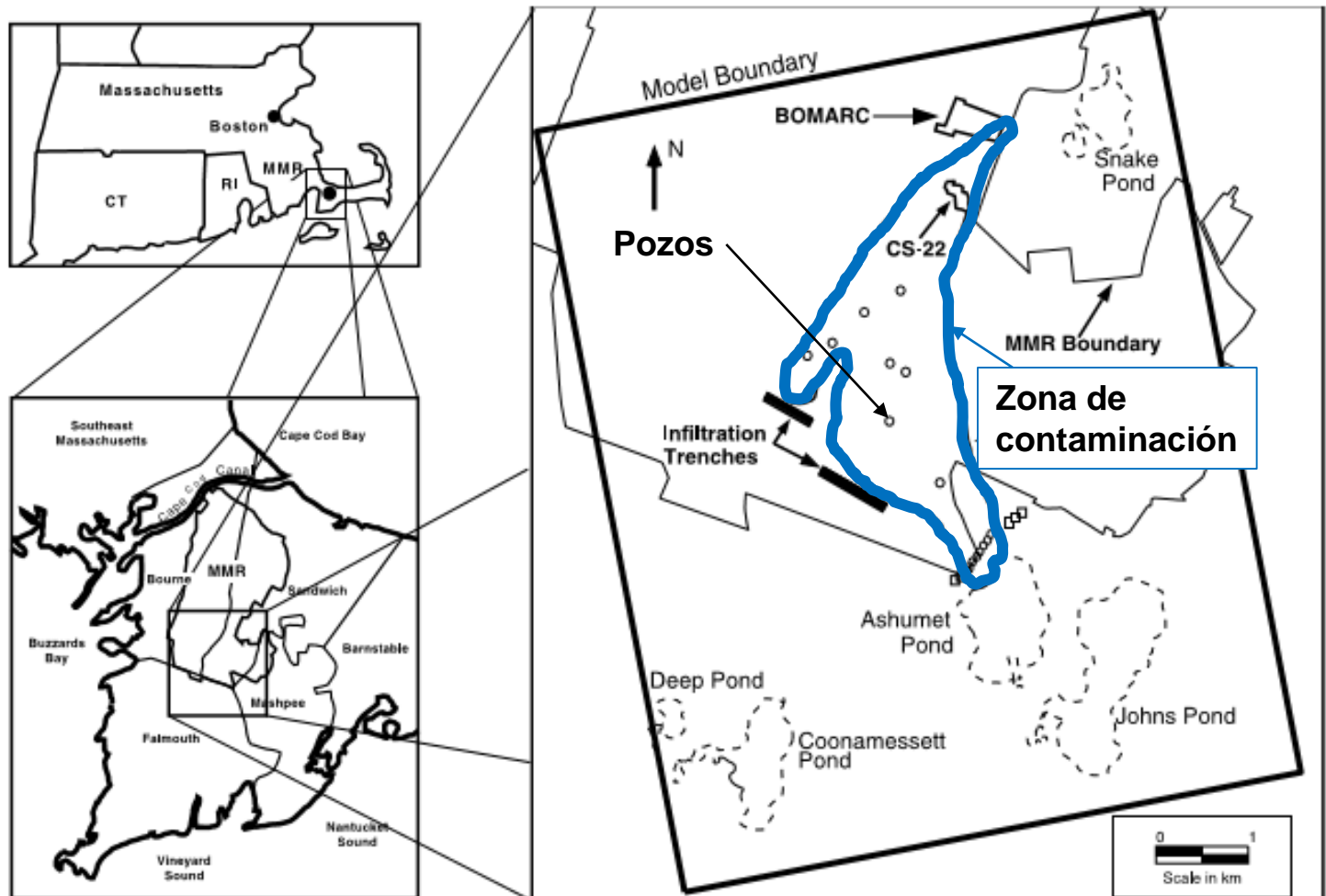
Roseanna M. Neupauer

Deptº de Ingeniería Civil, Ambiental, y Arquitectural

University of Colorado Boulder

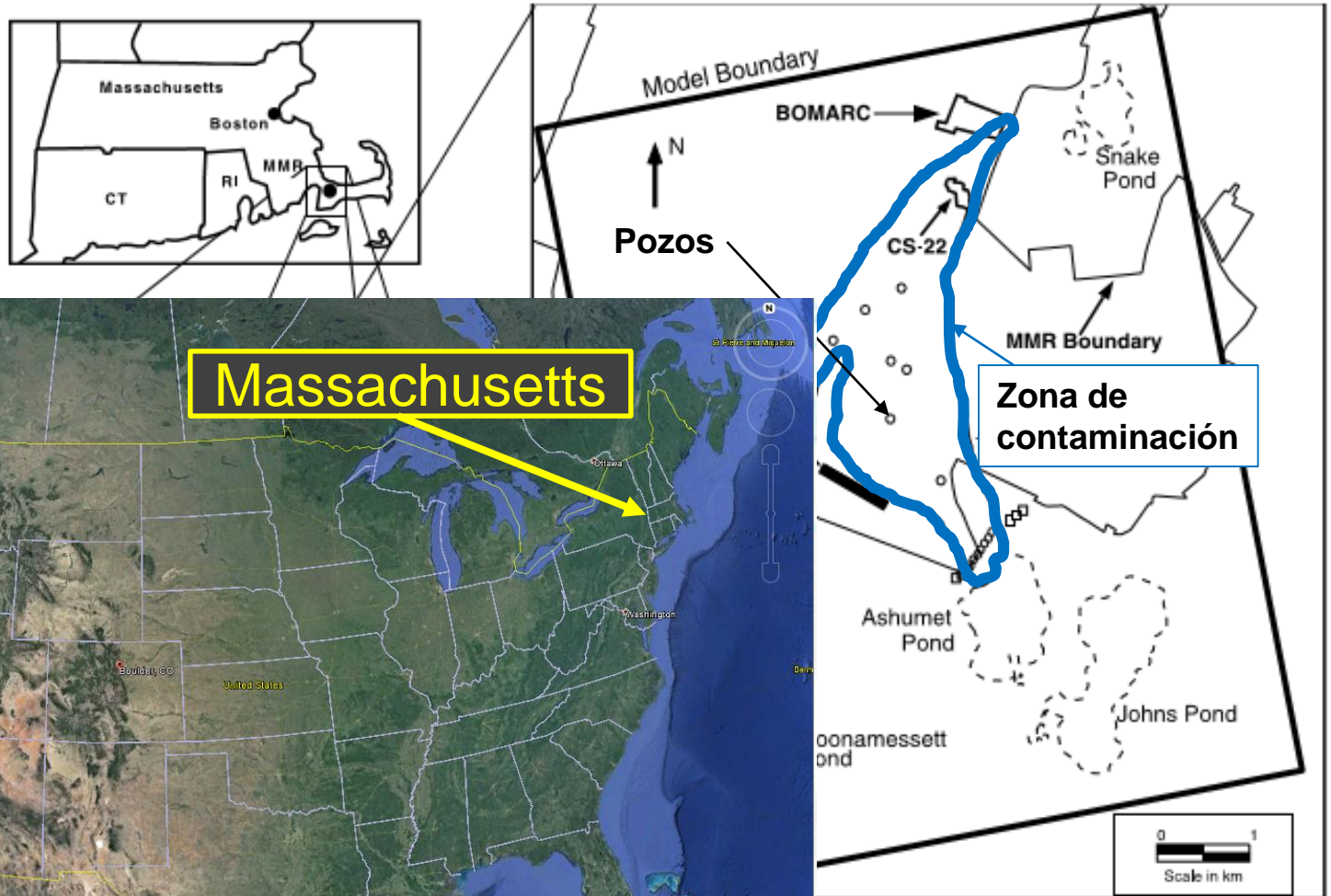
16 junio 2016

¿Cuál es el método “adjoint”?

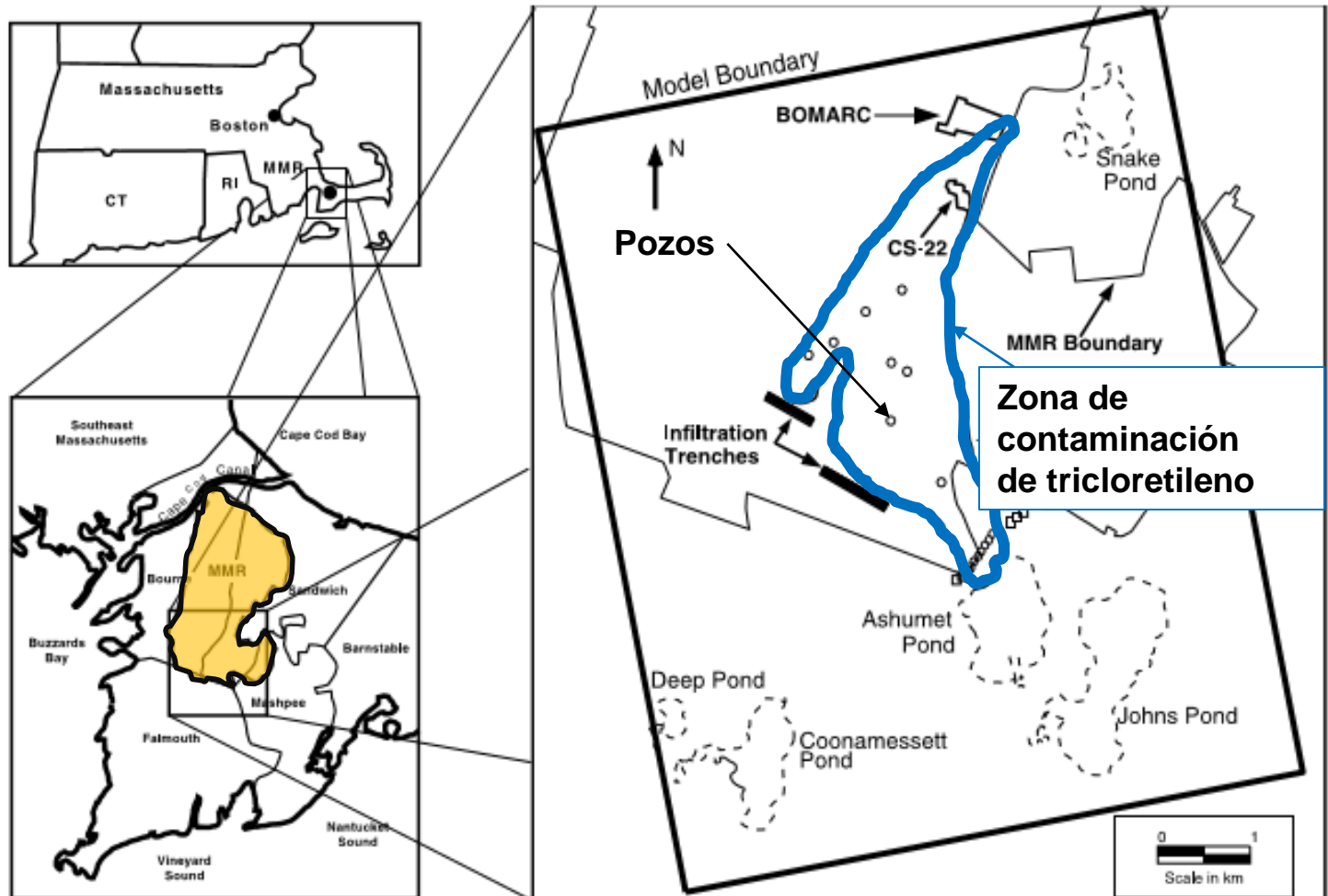


MMR – base militar

¿Cuál es el método “adjoint”?



¿Cuál es el método “adjoint”?



MMR – base militar

¿Cuál es el método “adjoint”?

- **Modelo tradicional**

- Propaga información en la dirección aguas abajo
- Unas fuentes, muchos receptores

- **Modelo “adjoint”**

- Propaga información en la dirección aguas arriba
- Unos receptores, muchas fuentes



¿Cuál es el método “adjoint”?

- **Modelo tradicional**

- Propaga información en la dirección aguas abajo
- Unas fuentes, muchos receptores

- **Modelo “adjoint”**

- Propaga información en la dirección aguas arriba
- Unos receptores, muchas fuentes



¿Cuál es el método “adjoint”?

- **Modelo tradicional**

- Propaga información en la dirección aguas abajo
- Unas fuentes, muchos receptores

- **Modelo “adjoint”**

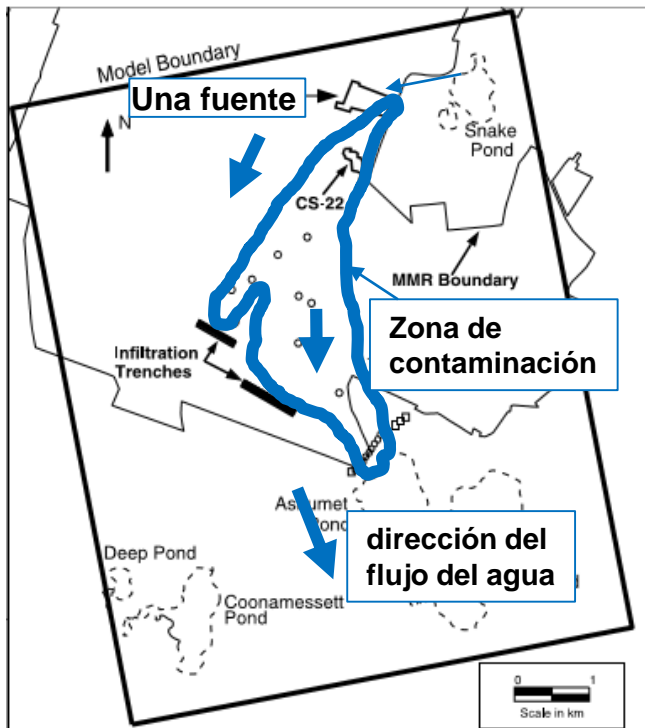
- Propaga información en la dirección aguas arriba
- Unos receptores, muchas fuentes



Resumen de método “adjoint”?

Modelo tradicional

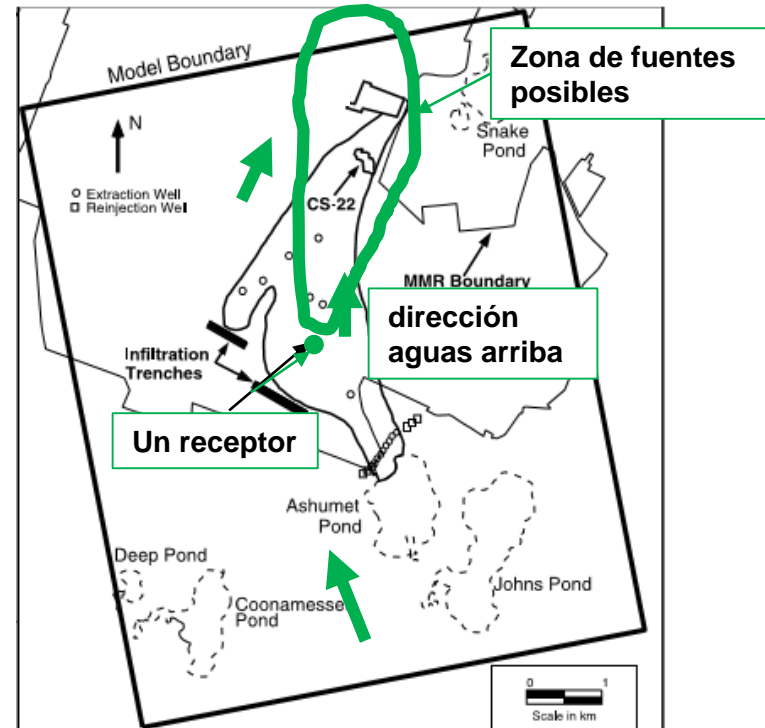
- Propaga información en la dirección aguas abajo
- Unas fuentes, muchos receptores



¿Adónde va la contaminación de una fuente?

Modelo “adjoint”

- Propaga información en la dirección aguas arriba
- Unos receptores, muchas fuentes posibles



¿Dónde estuvo la fuente de la contaminación?

Punto clave del método “adjoint”

Sensibilidad de un estado del sistema con un parámetro



C – concentración
 x – ubicación
 t – tiempo
 M – masa de la fuente
 x_f – ubicación de la fuente específica
 t_f – tiempo de descarga de la fuente

ϕ – sensibilidad
 x_r – ubicación del receptor específico
 t_r – tiempo de observación en el receptor
 ψ – sensibilidad “adjoint”

Punto clave del método “adjoint”

Sensibilidad de un estado del sistema con un parámetro

estado del sistema: concentración, $C(\mathbf{x}, t)$



C – concentración
 \mathbf{x} – ubicación
 t – tiempo
 M – masa de la fuente
 \mathbf{x}_f – ubicación de la fuente específica
 t_f – tiempo de descarga de la fuente

ϕ – sensibilidad
 \mathbf{x}_r – ubicación del receptor específico
 t_r – tiempo de observación en el receptor
 ψ – sensibilidad “adjoint”

Punto clave del método “adjoint”

Sensibilidad de un estado del sistema con un parámetro

estado del sistema: concentración, $C(\mathbf{x}, t)$

parámetro: Masa de contaminación descargada de la fuente, $M(\mathbf{x}_f, t_f)$



C – concentración
 \mathbf{x} – ubicación
 t – tiempo
 M – masa de la fuente
 \mathbf{x}_f – ubicación de la fuente específica
 t_f – tiempo de descarga de la fuente

ϕ – sensibilidad
 \mathbf{x}_r – ubicación del receptor específico
 t_r – tiempo de observación en el receptor
 ψ – sensibilidad “adjoint”

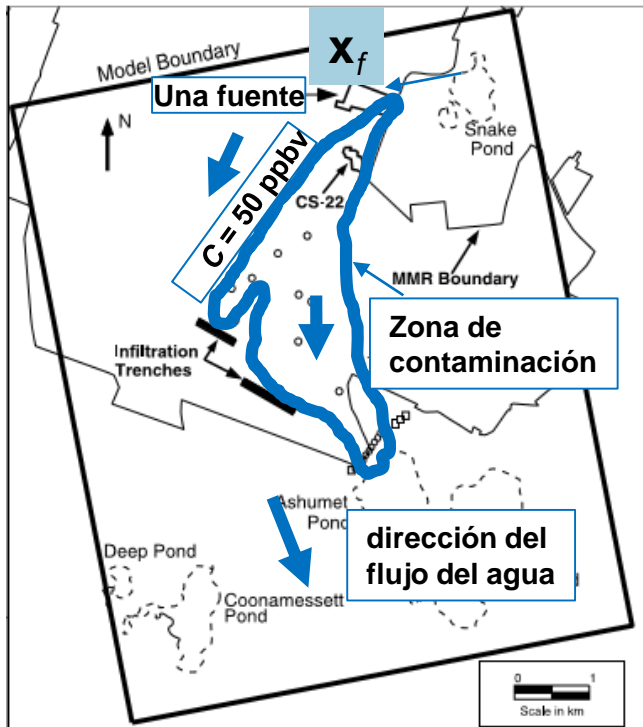
Punto clave del método “adjoint”

Sensibilidad de un estado del sistema con un parámetro

estado del sistema: concentración, $C(\mathbf{x}, t)$

parámetro: Masa de contaminación descargada de la fuente, $M(\mathbf{x}_f, t_f)$

$$\text{sensibilidad: } \phi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_f, t_f) = \frac{C(\mathbf{x}, t)}{M(\mathbf{x}_f, t_f)}$$



C – concentración
 \mathbf{x} – ubicación
 t – tiempo
 M – masa de la fuente
 \mathbf{x}_f – ubicación de la fuente específica
 t_f – tiempo de descarga de la fuente

ϕ – sensibilidad
 \mathbf{x}_r – ubicación del receptor específico
 t_r – tiempo de observación en el receptor
 ψ – sensibilidad “adjoint”

Punto clave del método “adjoint”

Sensibilidad de un estado del sistema con un parámetro

estado del sistema: concentración, $C(\mathbf{x}, t)$

parámetro: Masa de contaminación descargada de la fuente, $M(\mathbf{x}_f, t_f)$

$$\text{sensibilidad: } \phi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_f, t_f) = \frac{C(\mathbf{x}, t)}{M(\mathbf{x}_f, t_f)}$$



C – concentración
 \mathbf{x} – ubicación
 t – tiempo
 M – masa de la fuente
 \mathbf{x}_f – ubicación de la fuente específica
 t_f – tiempo de descarga de la fuente

ϕ – sensibilidad
 \mathbf{x}_r – ubicación del receptor específico
 t_r – tiempo de observación en el receptor
 ψ – sensibilidad “adjoint”

Punto clave del método “adjoint”

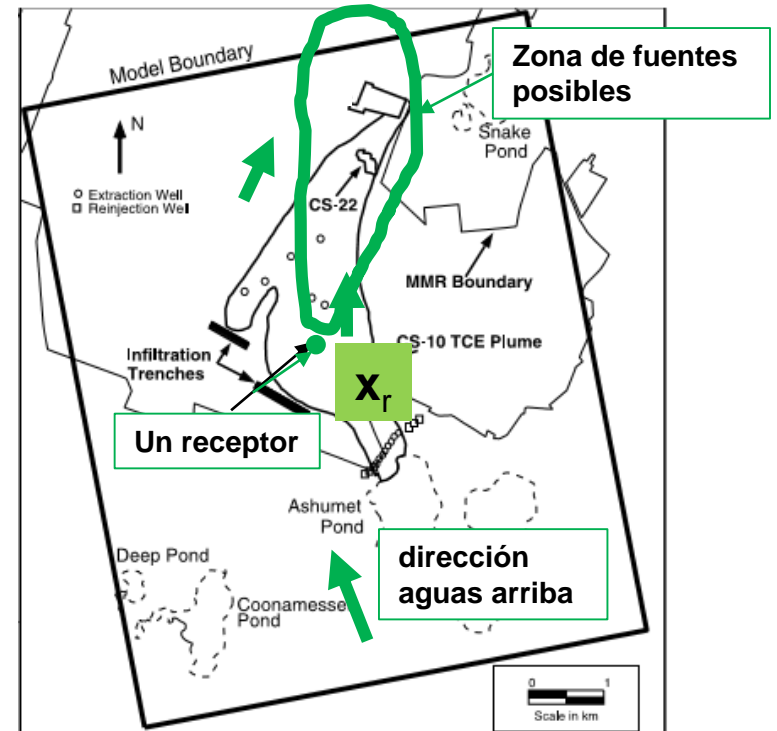
Sensibilidad de un estado del sistema con un parámetro

estado del sistema: concentración, $C(\mathbf{x}, t)$

parámetro: Masa de contaminación descargada de la fuente, $M(\mathbf{x}_f, t_f)$

sensibilidad: $\phi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_f, t_f) = \frac{C(\mathbf{x}, t)}{M(\mathbf{x}_f, t_f)}$

sensibilidad “adjoint”: $\psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_r, t_r) = \frac{C(\mathbf{x}_r, t_r)}{M(\mathbf{x}, t)}$



C – concentración
 \mathbf{x} – ubicación
 t – tiempo
 M – masa de la fuente
 \mathbf{x}_f – ubicación de la fuente específica
 t_f – tiempo de descarga de la fuente

ϕ – sensibilidad
 \mathbf{x}_r – ubicación del receptor específico
 t_r – tiempo de observación en el receptor
 ψ – sensibilidad “adjoint”

Punto clave del método “adjoint”

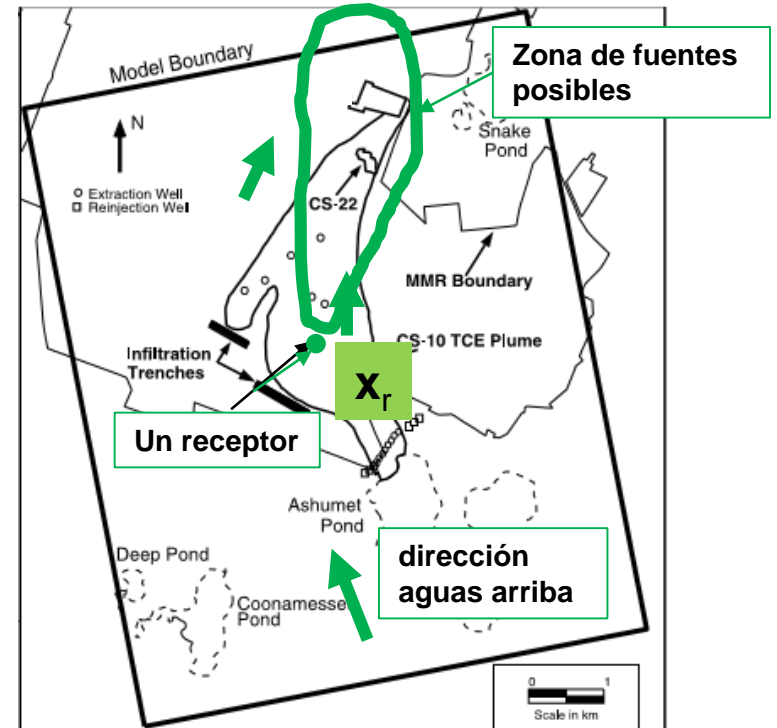
Sensibilidad de un estado del sistema con un parámetro

estado del sistema: concentración, $C(\mathbf{x}, t)$

parámetro: Masa de contaminación descargada de la fuente, $M(\mathbf{x}_f, t_f)$

sensibilidad: $\phi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_f, t_f) = \frac{dC(\mathbf{x}, t)}{dM(\mathbf{x}_f, t_f)}$

sensibilidad “adjoint”: $\psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_r, t_r) = \frac{dC(\mathbf{x}_r, t_r)}{dM(\mathbf{x}, t)}$



C – concentración
 M – masa de la fuente
 \mathbf{x} – ubicación
 \mathbf{x}_f – ubicación de la fuente específica
 t – tiempo
 t_f – tiempo de descarga de la fuente

ϕ – sensibilidad
 ψ – sensibilidad “adjoint”
 \mathbf{x}_r – ubicación del receptor específico
 t_r – tiempo de observación en el receptor

Ecuaciones



Ecuación tradicional

$$n \frac{\partial C}{\partial t} = \underbrace{\nabla \cdot (n \mathbf{D} \nabla C)}_{\text{Dispersión}} - \underbrace{\nabla \cdot (n \mathbf{v} C)}_{\text{Advección}} + \underbrace{M \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \delta(t - t_f)}_{\text{Descarga de la fuente}}$$

C – concentración

ϕ – sensibilidad

n – porosidad

\mathbf{x} – ubicación

\mathbf{D} – tensor de dispersión

t – tiempo hacia atrás

M – masa de la fuente

ψ – sensibilidad “adjoint”

\mathbf{v} – velocidad

t – tiempo

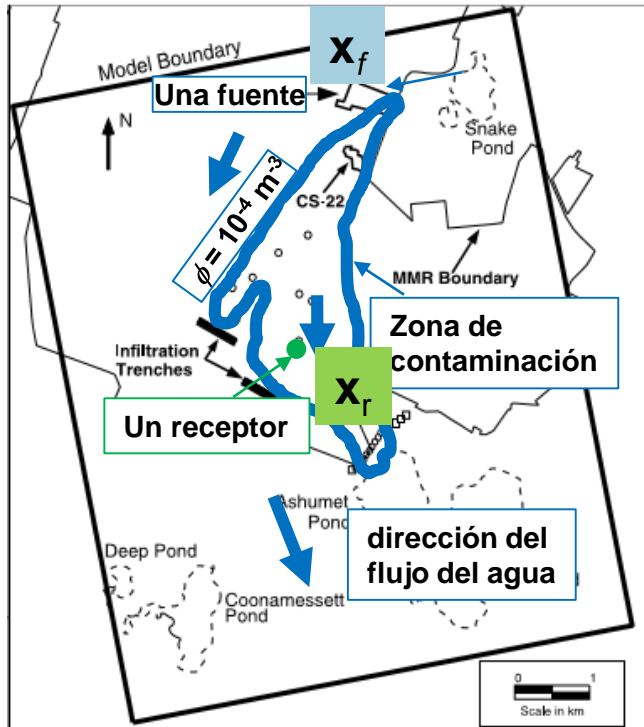
\mathbf{x}_f – ubicación de la fuente específica

t_f – tiempo de descarga de la fuente

\mathbf{x}_r – ubicación del receptor específico

t_r – tiempo de observación en el receptor

Ecuaciones



Ecuación tradicional

$$n \frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (n \mathbf{D} \nabla C) - \nabla \cdot (n \mathbf{v} C) + M \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \delta(t - t_f)$$

Dispersión
Advección
Descarga de la fuente

Ecuación de sensibilidad

sensibilidad: $\phi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_f, t_f) = \frac{dC(\mathbf{x}, t)}{dM(\mathbf{x}_f, t_f)}$

$$n \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (n \mathbf{D} \nabla \phi) - \nabla \cdot (n \mathbf{v} \phi) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \delta(t - t_f)$$

C – concentración

ϕ – sensibilidad

n – porosidad

\mathbf{x} – ubicación

\mathbf{D} – tensor de dispersión

t – tiempo hacia atrás

M – masa de la fuente

ψ – sensibilidad “adjoint”

\mathbf{v} – velocidad

t – tiempo

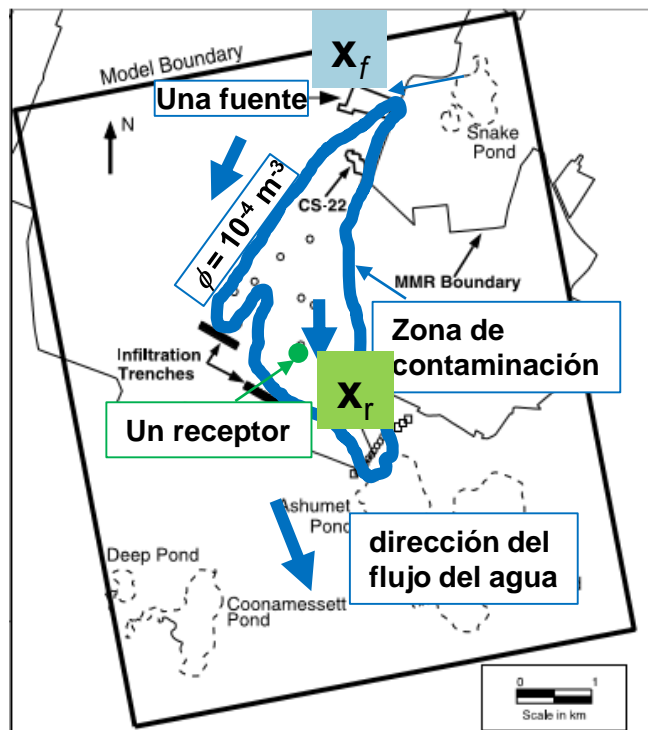
\mathbf{x}_f – ubicación de la fuente específica

t_f – tiempo de descarga de la fuente

\mathbf{x}_r – ubicación del receptor específico

t_r – tiempo de observación en el receptor

Ecuaciones



Ecuación tradicional

$$n \frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (n \mathbf{D} \nabla C) - \nabla \cdot (n \mathbf{v} C) + M \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \delta(t - t_f)$$

Dispersión Advección Descarga de la fuente

Ecuación de sensibilidad

$$\text{sensibilidad: } \phi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}_f, t_f) = \frac{dC(\mathbf{x}, t)}{dM(\mathbf{x}_f, t_f)}$$

$$n \frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (n \mathbf{D} \nabla \phi) - \nabla \cdot (n \mathbf{v} \phi) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \delta(t - t_f)$$

Ecuación "adjoint"

$$\text{sensibilidad adjoint: } \psi(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{x}_r, \tau_r=0) = \frac{dC(\mathbf{x}_r, \tau_r=0)}{dM(\mathbf{x}, \tau)}$$

$$n \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \nabla \cdot (n \mathbf{D} \nabla \psi) + \nabla \cdot (n \mathbf{v} \psi) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \delta(\tau)$$

C – concentración

ϕ – sensibilidad

n – porosidad

\mathbf{x} – ubicación

\mathbf{D} – tensor de dispersión

τ – tiempo hacia atrás

M – masa de la fuente

ψ – sensibilidad "adjoint"

\mathbf{v} – velocidad

t – tiempo

\mathbf{x}_f – ubicación de la fuente específica

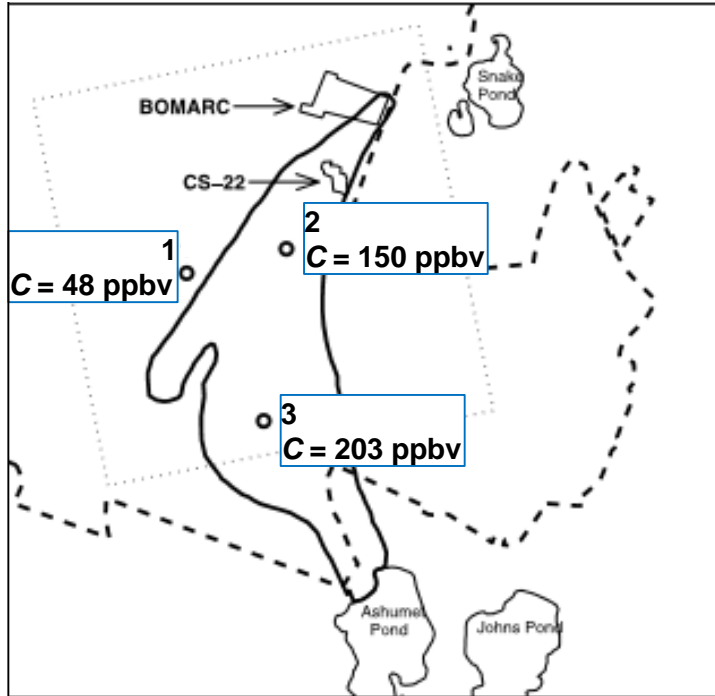
t_f – tiempo de descarga de la fuente

\mathbf{x}_r – ubicación del receptor específico

t_r – tiempo de observación en el receptor

Identificación de la fuente de contaminación

Concentración observada en 2000



¿Dónde estuvo la fuente en 1962?

$$n \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \nabla \cdot (n \mathbf{D} \nabla \psi) + \nabla \cdot (n \mathbf{v} \psi) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \delta(\tau)$$

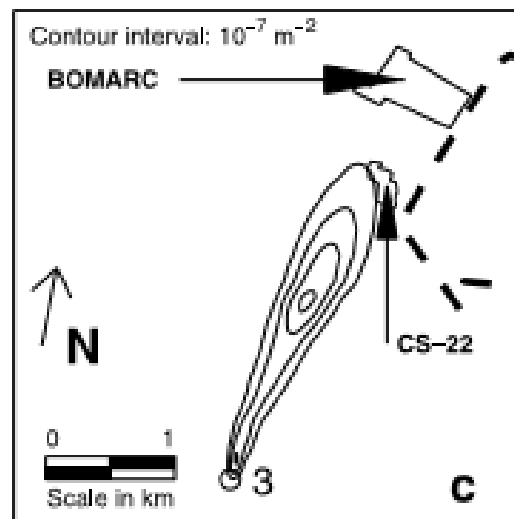
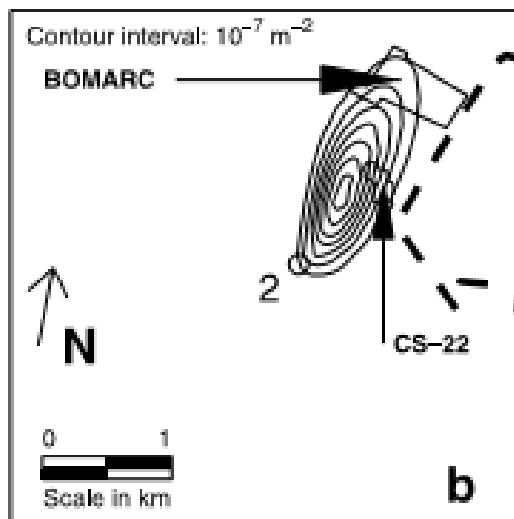
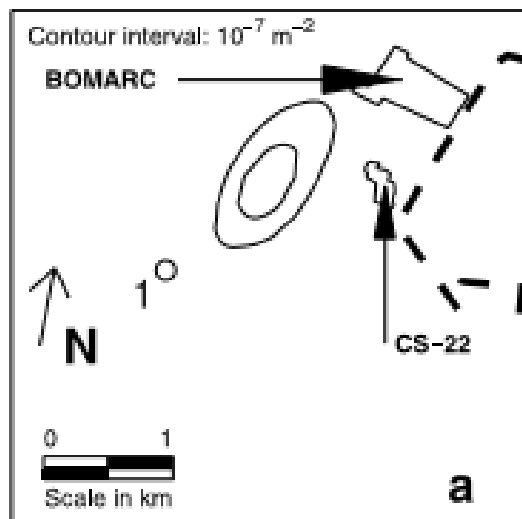
$$\text{sensibilidad adjoint: } \psi(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{x}_r, \tau_r=0) = \frac{dC(\mathbf{x}_r, \tau_r=0)}{dM(\mathbf{x}, \tau)}$$

función densidad de probabilidad (FDP)
de la ubicación de la fuente

$$f_x = n(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{x}_r, \tau_r=0)$$

Identificación de la fuente de contaminación

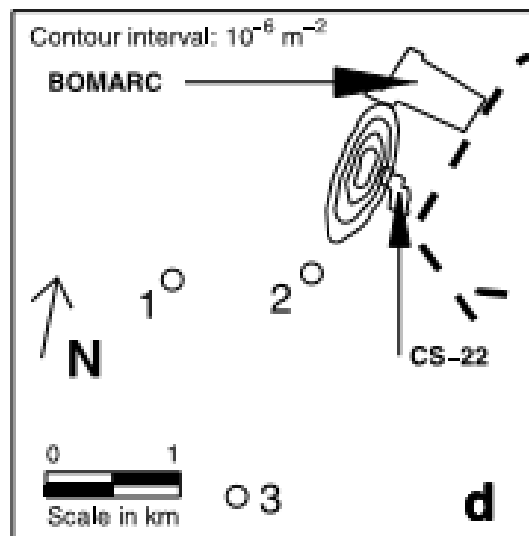
FDP de la ubicación de la fuente



De cada pozo individualmente

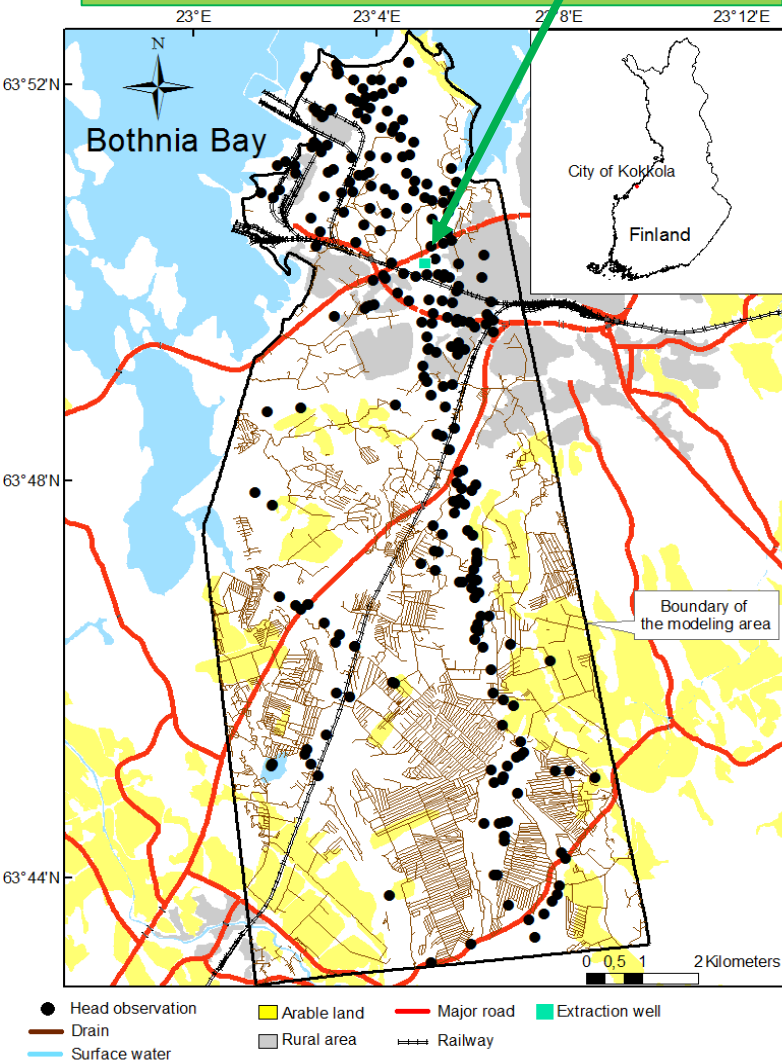
Resultados: La fuente más verosímil es CS-22

FDP conjunta



Protección de la calidad del agua en un pozo

Receptor:
Pozo de suministro del agua



Kokkola, Finlandia

- Usan intercambiadores de calor
- Quieren asegurar que la concentración en el pozo nunca excederá el umbral

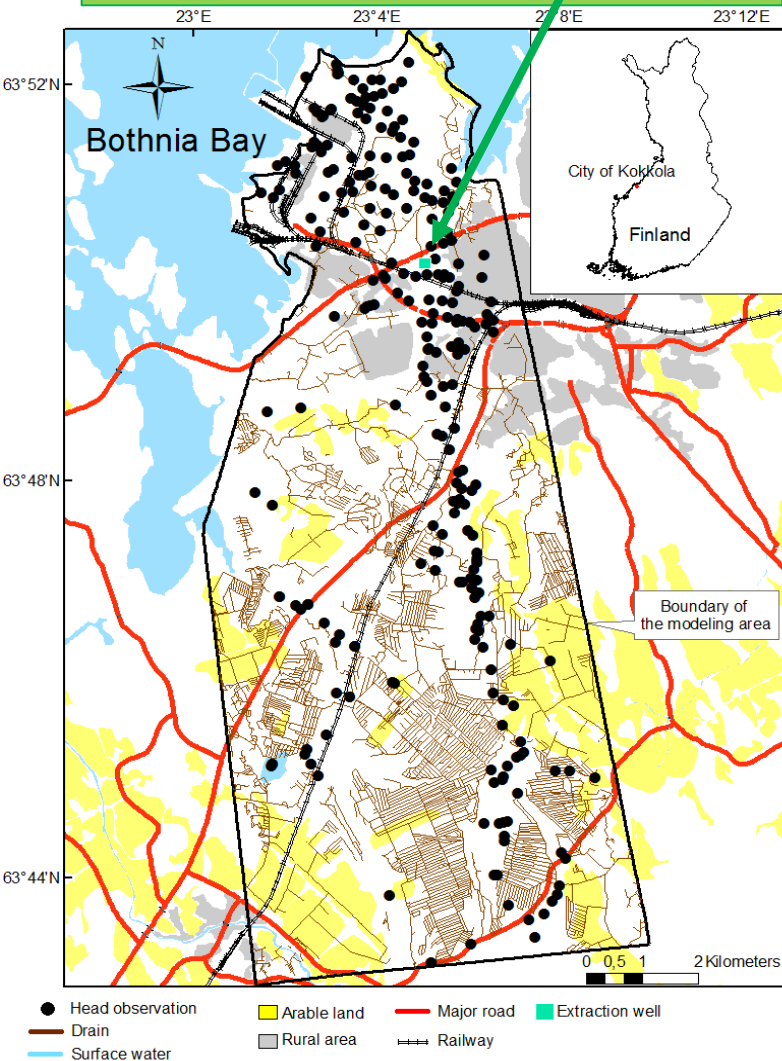
¿Dónde deben permitir el uso de intercambiadores de calor?

Zona de captura – región alrededor del pozo en que una descarga produciría una concentración en el pozo que excede un umbral

Producto químico	Vida media $t_{1/2}$ (d)	Masa de descarga (kg)		
		V =200L	400 L	16,000L
Etanol	2	44	88	3535
Formate de potasio	5	76	153	6106
Glicol de etileno	23	33	67	2672

Protección de la calidad del agua en un pozo

Receptor:
Pozo de suministro del agua



$$n \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \nabla \cdot (n \mathbf{D} \nabla \psi) + \nabla \cdot (n \mathbf{v} \psi) - n \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \psi + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \delta(\tau)$$

sensibilidad adjoint: $\psi(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}_r, \tau_r=0) = \frac{dC(\mathbf{x}_r, \tau_r=0)}{dM(\mathbf{x}, \tau)}$

$$C(\mathbf{x}_r, \tau) = M \psi(\mathbf{x}, \tau; \mathbf{x}_r, \tau_r=0)$$

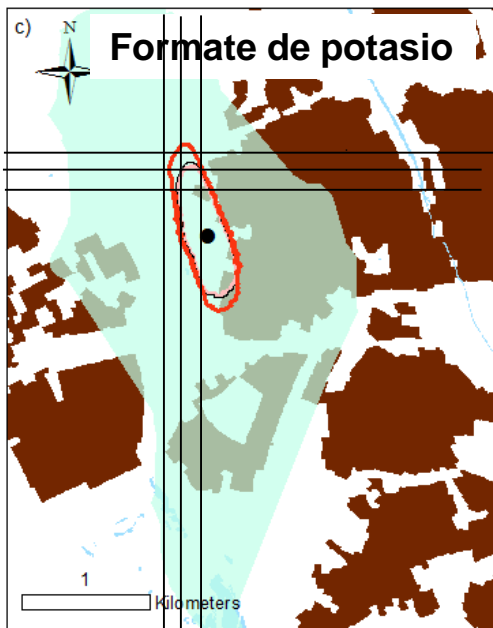
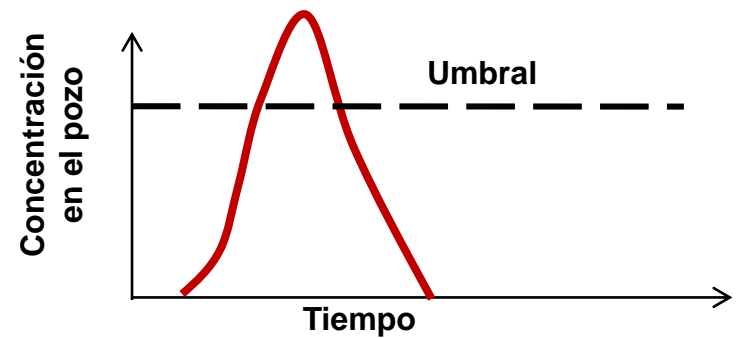
Producto químico	Vida media $t_{1/2}$ (d)	Masa de descarga (kg)		
		V =200L	400 L	16,000L
Etanol	2	44	88	3535
Formate de potasio	5	76	153	6106
Glicol de etileno	23	33	67	2672

$$C(\mathbf{x}_r, \tau) = M \psi(\mathbf{x}, \tau, \mathbf{x}_r, \tau_r=0)$$

3 simulaciones
3 masas por simulación

En cada cuadra, los resultados muestran la distribución temporal de concentración EN EL POZO

Si la concentración máxima excede el umbral, la cuadra está en la zona de captura



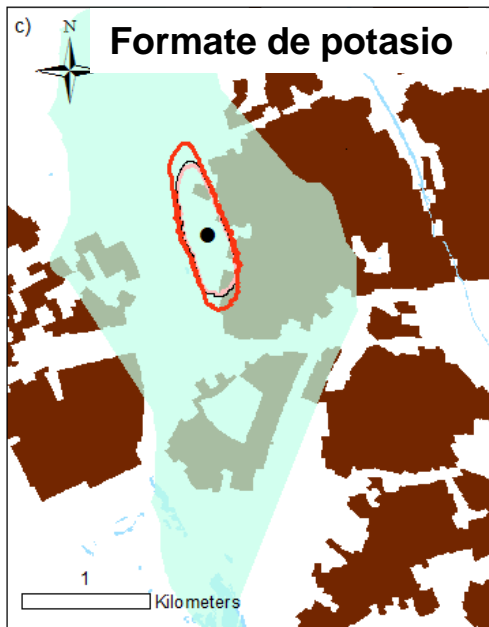
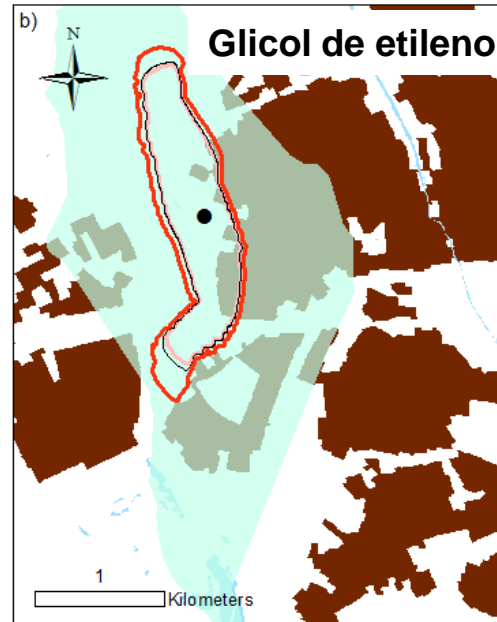
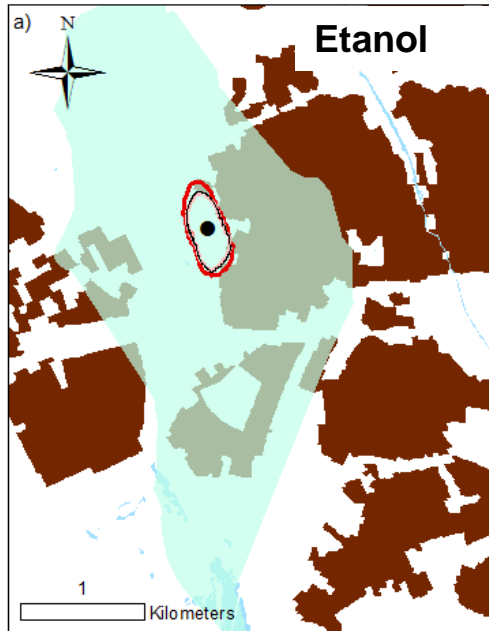
Volumen del fluido descargado

- 16000 L
- 400 L
- 200 L
- Pozo
- Steady state capt
- Rural area

Producto químico	Vida media $t_{1/2}$ (d)	Masa de descarga (kg)		
		V =200L	400 L	16,000L
Etanol	2	44	88	3535
Formate de potasio	5	76	153	6106
Glicol de etileno	23	33	67	2672

Zonas de Captura

3 simulaciones adjoint
 0
 350.000 simulaciones tradicionales



Volumen del fluido descargado

- 16000 L
- 400 L
- 200 L
- Pozo
- Steady state capt
- Rural area

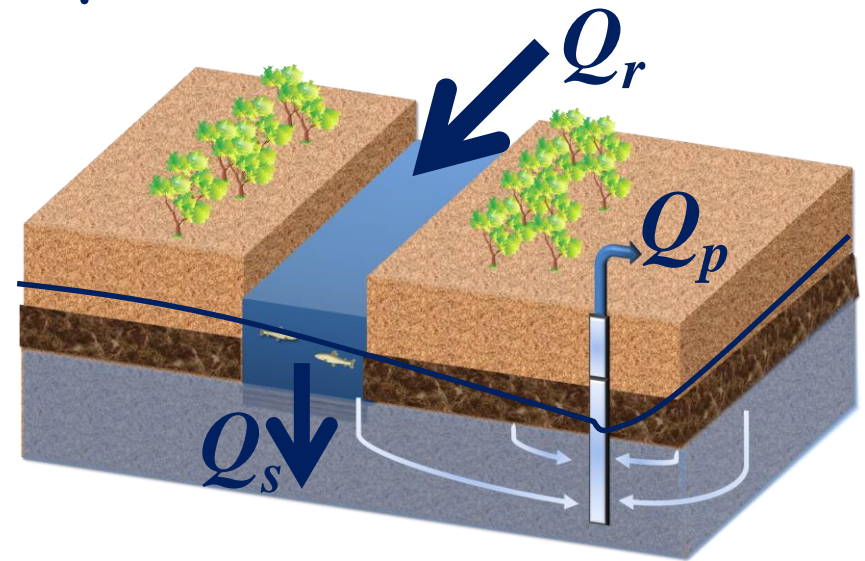
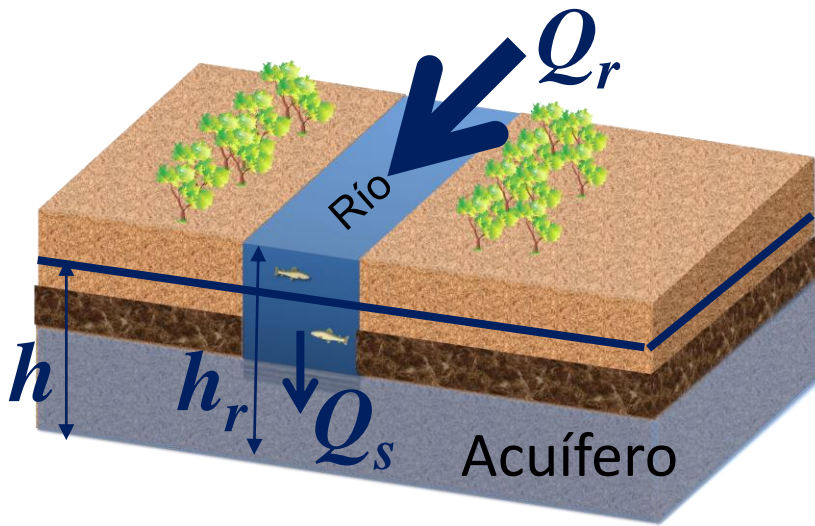
Producto químico	Vida media $t_{1/2}$ (d)	Masa de descarga (kg)		
		V =200L	400 L	16,000L
Etanol	2	44	88	3535
Formate de potasio	5	76	153	6106
Glicol de etileno	23	33	67	2672

Agotamiento de un río

Disminución del caudal del río como resultado de bombear de un acuífero adyacente al río.

$$|\Delta Q_r| = C \Delta (h_r - h)$$

$$\frac{|\Delta Q_r|}{Q_p} = ?$$



Q_r = caudal del río
 C = coeficiente

Q_s = flujo entre río y acuífero
 h = carga hidráulica en el acuífero

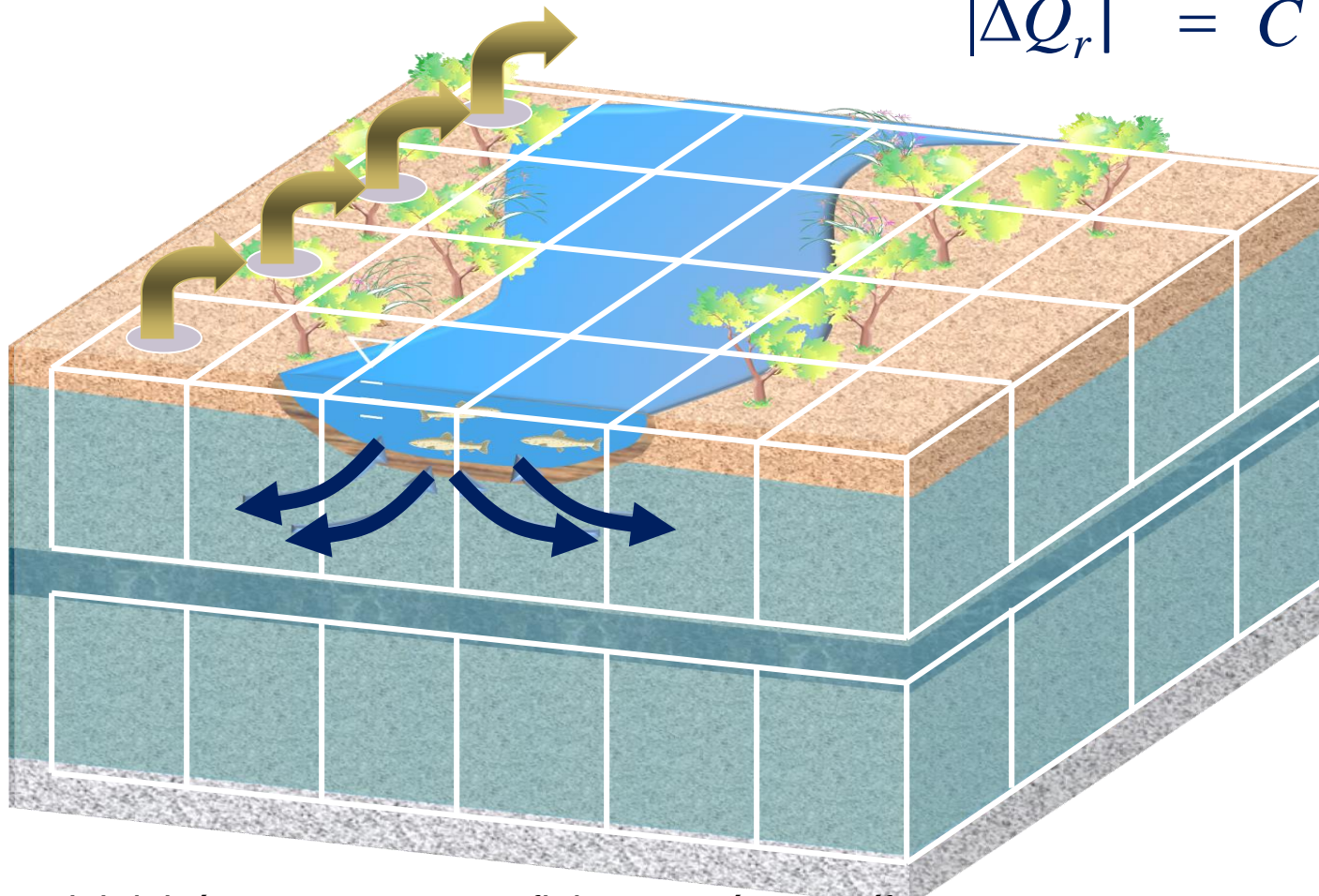
Q_p = tasa de bombeo
 h_r = carga hidráulica en el río

Simulaciones Tradicional

Sensibilidad de un estado del sistema (h) con un parámetro (ubicación del pozo)

$$|\Delta Q_r| = C \Delta (h_r - h)$$

$$\frac{|\Delta Q_r|}{Q_p} = ?$$



Q_r = caudal del río

C = coeficiente

Q_s = flujo entre río y acuífero

h = carga hidráulica en el acuífero

Q_p = tasa de bombeo

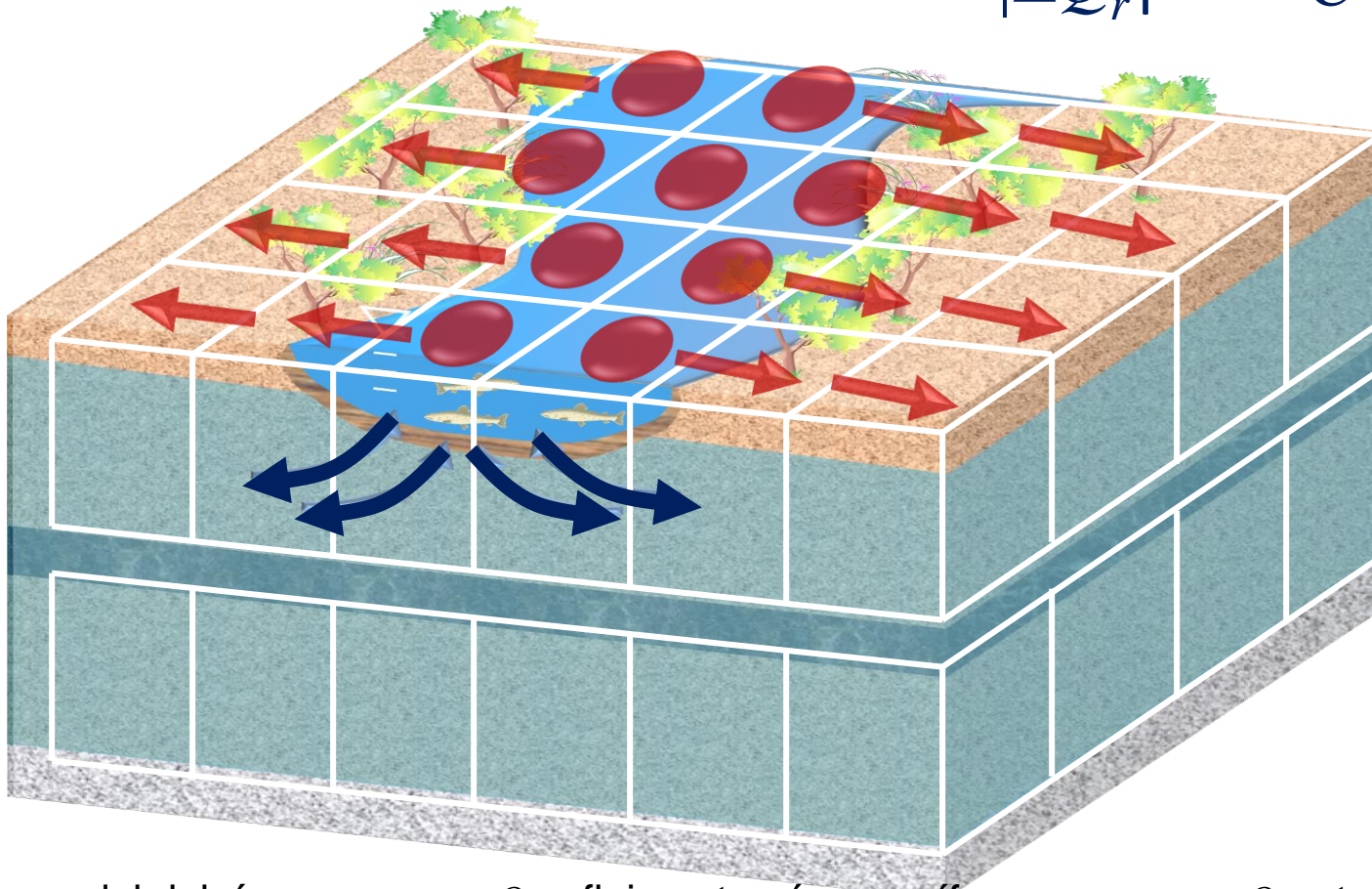
h_r = carga hidráulica en el río

Simulaciones “Adjoint”

Sensibilidad de un estado del sistema (h) con un parámetro (ubicación del pozo)

$$|\Delta Q_r| = C \Delta (h_r - h)$$

$$\frac{|\Delta Q_r|}{Q_p} = ?$$



Q_r = caudal del río

Q_s = flujo entre río y acuífero

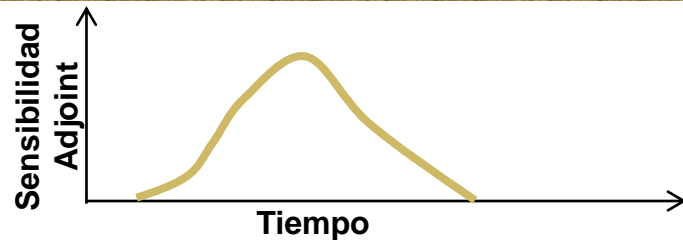
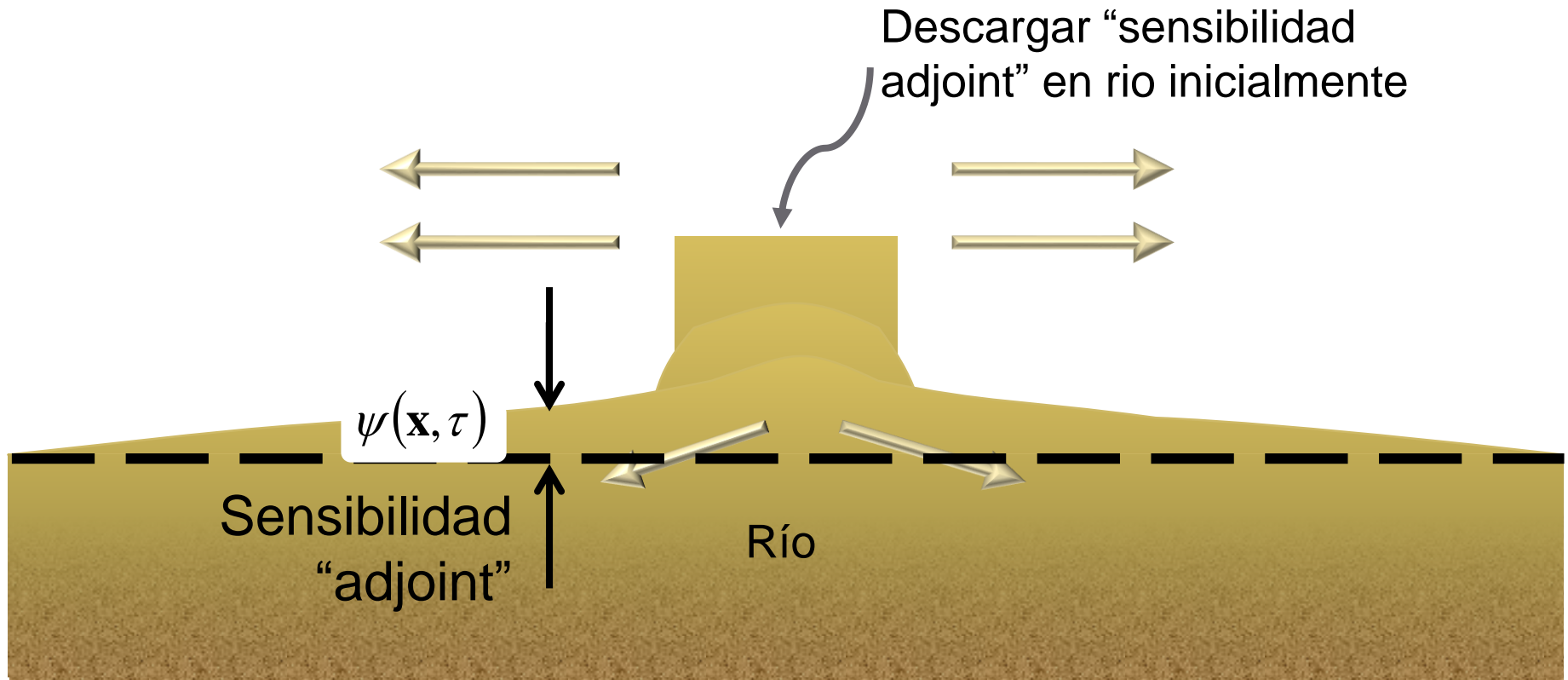
Q_p = tasa de bombeo

C = coeficiente

h = carga hidráulica en el acuífero

h_r = carga hidráulica en el río

Agotamiento de un río de método “adjoint”



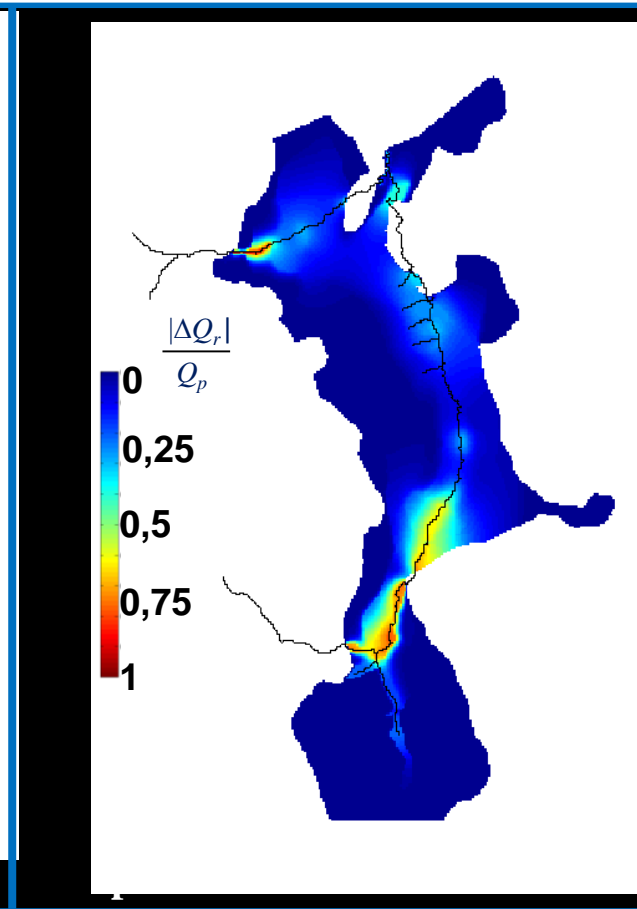
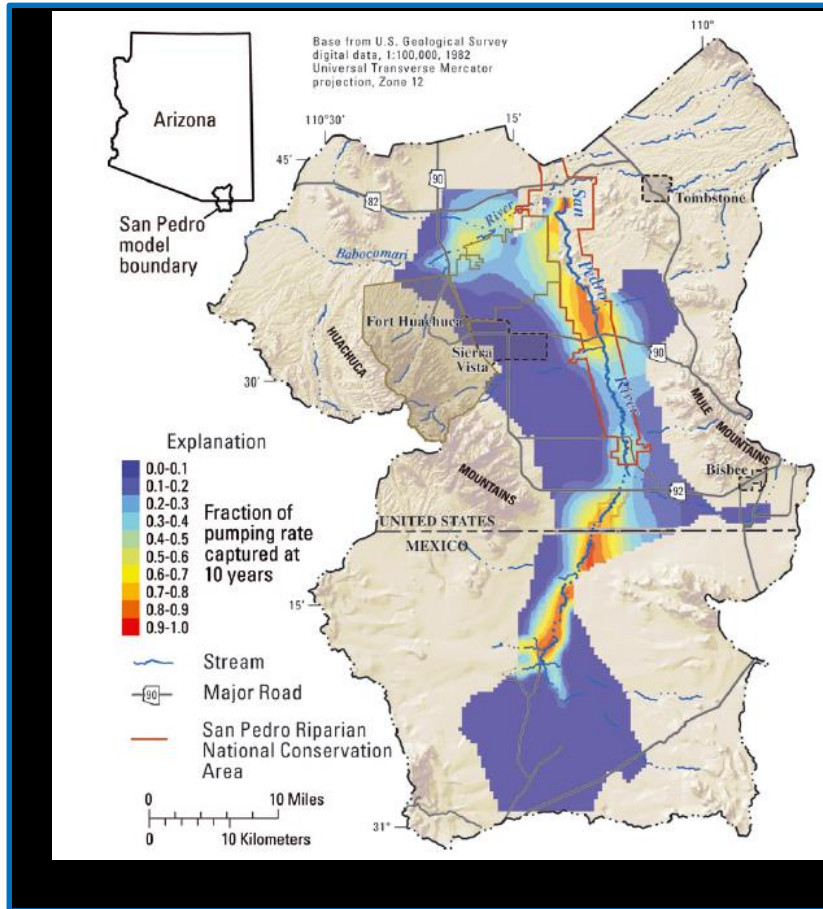
$$\frac{\Delta Q_r}{Q_p(\mathbf{x})} = \int \psi(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

Q_r = caudal del río
 C = coeficiente

Q_s = flujo entre río y acuífero
 h = carga hidráulica en el acuífero

Q_p = tasa de bombeo
 h_r = carga hidráulica en el río

Cuenca San Pedro



$$\frac{|\Delta Q_r|}{Q_p}$$

Simulaciones tradicionales (Leake et al., 2010).

- 1530 simulaciones
- Resultados para 1 km x 1 km cuadrícula y 1 capa (de 5)

Simulación "adjoint"

- 1 simulación
- Resultados para 0,25 km x 0,25 km cuadrícula y 5 capas

Resumen

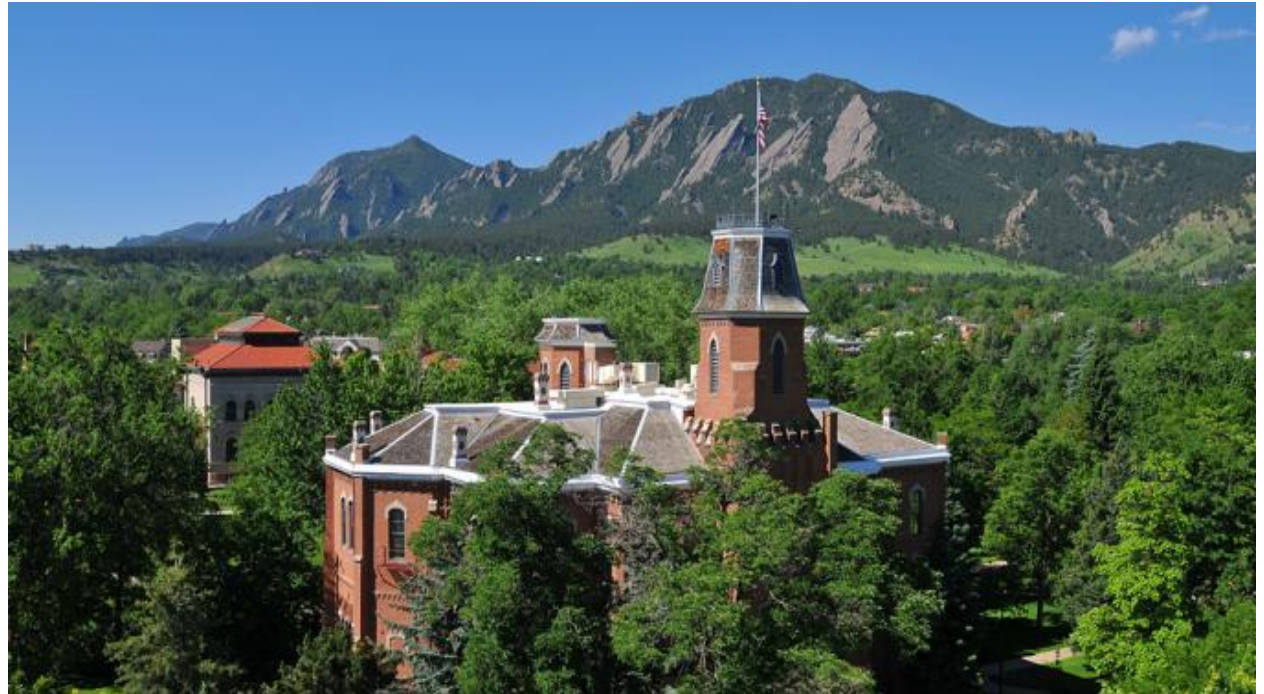
- El método “adjoint” es eficiente para situaciones en que tenemos información sobre un receptor, y necesitamos información sobre muchas fuentes posibles.
- El método “adjoint” es basado en el análisis de sensibilidad.
- Los resultados de las simulaciones son sensibilidades de un estado del sistema a un parámetro
- Estas sensibilidades pueden ser usado en muchas aplicaciones
 - Identificación de la fuente de contaminación
 - Identificación de la zona de captura alrededor de un pozo
 - Estimación del agotamiento de un río.

¿Preguntas?

(hablen lentamente, por favor)

- Colaboradores

- Scott Griebing
- Jarkko Okkonen
- John Wilson



Forward and Adjoint Equations

Forward Equations

$$S_y \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K} (h - \xi) \nabla h] - Q_p \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_w) + \frac{K_r}{b_r} (h_r - h) B(\mathbf{x})$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial s} = -\frac{K_r w}{b_r} (h_r - h) \quad Q_r = \frac{1}{n} (h_r - z_r)^{5/3} S_o^{1/2} w$$

Adjoint Equations

$$S_y \frac{\partial \psi^*}{\partial \tau} = \nabla \cdot [\mathbf{K} (h_o - \xi) \nabla \psi^*] + \frac{K_r}{b_r} (\psi_r^* - \psi^*) \quad \psi^*(\mathbf{x}, \tau = 0) = \frac{K_r}{b_r S_y} B(\mathbf{x})$$

$$-\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{5 S_o^{1/2} w}{3n} (h_{ro} - z_r)^{2/3} \psi_r^* \right) = -\frac{K_r w}{b_b} (\psi_r^* - \psi^*) - \psi_r^* \frac{5}{3} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{S_o^{1/2} w}{n} (h_{ro} - z_r)^{2/3} \right)$$

$$\frac{dQ_s(\mathbf{x}_c, t_c)}{dQ_p(\mathbf{x})} \approx \int_0^{t_c} \psi^*(\mathbf{x}, \tau) d\tau$$

S_y = specific yield	h = head in aquifer	t = time	\mathbf{K} = hydraulic conductivity
Q_p = pumping rate	\mathbf{x}_w = well location	Q_r = river flow rate	ξ = elevation of aquifer bottom
h_r = head in river	$B(\mathbf{x})$ = indicator function	b_r = sediment thickness	K_r = sediment conductivity
\mathbf{x}_c = critical location	t_c = critical time	Ω = domain	s = coordinate along stream
w = river width	S_o = channel slope	n = Manning's roughness	z_r = river bottom elevation
Q_s = exchange rate between river and aquifer	\mathbf{x}_c = control location	t_c = control time	
ψ^* = adjoint state of h	ψ_r^* = adjoint state of h_r		