

Identificación de Sistemas

Estimación de Mínimos Cuadrados

Autor: Dr. Juan Carlos Gómez

Estimación de Mínimos Cuadrados para Estructura de Regresor Lineal

□ Se asume que la relación entrada-salida puede ser descrita por una estructura de **regresor lineal** de la forma

$$y(n) = \varphi^T(n)\theta \quad (1)$$

donde

$\varphi(n)$ **vector de regresión (regresor)**. Depende, en general, de los datos de entrada-salida pasados, hasta el instante $n-1$.

$\theta \in D_M \subset \mathcal{R}^p$ vector de parámetros a estimar.

□ Un **ejemplo típico** de estructura de modelo que puede escribirse como un regresor lineal es una estructura de modelo **ARX** (**A**uto **R**egressive with **eX**ogenous inputs), que es una ecuación lineal en diferencias de la forma

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_P y(n-P) = b_1 u(n-1) + \dots + b_M u(n-M) \quad (2)$$

o equivalentemente

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - \dots - a_P y(n-P) + b_1 u(n-1) + \dots + b_M u(n-M)$$

Definiendo el **vector de parámetros** (3)

$$\theta = [a_1 \dots a_P b_1 \dots b_M]^T$$

y el **vector de regresión**

$$\varphi(n) = [-y(n-1) \dots -y(n-P) u(n-1) \dots u(n-M)]^T$$

la ecuación (3) puede escribirse en la forma (1) (i.e., una **regresión lineal**).

□ En general, los parámetros son desconocidos y lo que se pretende es estimarlos a partir de datos de medición, de manera que se pueda predecir la salida en función de los datos pasados hasta el instante $n-1$, y la estima del vector de parámetros. Es decir, se construye un **predictor** de la salida basándose en la estructura de modelo (1), de la forma

$$y(n | n-1, \theta) = \varphi^T(n) \theta \quad (4)$$

□ Se asume que para la estimación está disponible un conjunto de N datos de entrada-salida $\{u(n), y(n)\}_{n=1}^N$.

□ Se propone un **criterio cuadrático** en el **error de predicción**, de la forma

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{Tr} \left\{ [y(k) - \varphi^T(k) \theta] [y(k) - \varphi^T(k) \theta]^T \right\} \quad (5)$$

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{Tr} \{ \varepsilon(n) \varepsilon(n)^T \} = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{n=1}^N \varepsilon(n)^2}_{\text{Caso Escalar}} \quad (6)$$

donde

$$\varepsilon(n) = y(n) - \varphi^T(n)\theta \quad \text{Error de Predicción}$$

- La estimación de parámetros consiste en hallar la estima $\hat{\theta}_N$ que minimiza el criterio $V_N(\theta)$. El subíndice N en $\hat{\theta}_N$ y $V_N(\theta)$ se incluye para indicar que es una estima con N datos. Puede probarse que todo valor de $\hat{\theta}_N$ que verifica la ecuación

Ecuación Normal
$$\left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(n) \varphi^T(n) \right] \hat{\theta}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(n) y(n) \quad (7)$$

ISIS

5

es un **mínimo global** del criterio $V_N(\theta)$. Si la matriz de la izquierda es **no singular** entonces el mínimo es único y puede calcularse como

$$\hat{\theta}_N^{LS} = \underset{\theta}{\text{argmin}} \{ V_N(\theta) \} = \left[\sum_{n=1}^N \varphi(n) \varphi^T(n) \right]^{-1} \left[\sum_{n=1}^N \varphi(n) y(n) \right] \quad (8)$$

que se denomina **estima de mínimos cuadrados**. La minimización puede computarse analíticamente, igualando a cero la derivada (gradiente) de $V_N(\theta)$ con respecto a θ , i.e.

$$0 = \frac{d}{d\theta} V_N(\theta) = 2 \sum_{n=1}^N \varphi(n) (y(n) - \varphi^T(n)\theta) \Rightarrow \hat{\theta}_N^{LS}$$

□ Vectorizando

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad \Phi^T = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}$$

la ecuación (1) puede escribirse en forma matricial como

$$Y = \Phi^T \theta \quad (9)$$

y la estima de mínimos cuadrados (8) resulta

$$\hat{\theta}_N = (\Phi \Phi^T)^{-1} \Phi Y = \Phi^+ Y \quad (10)$$

donde Φ^+ es la pseudo-inversa (izquierda) de Moore-Penrose.

□ La matriz

$$\left[\sum_{n=1}^N \varphi(n) \varphi^T(n) \right]$$

es invertible (no singular) si se cumple cierta condición de **persistencia de excitación** de los regresores. Como en general los regresores dependen de las entradas pasadas, esta condición implica un cierto grado de persistencia de excitación de las entradas.

- En el modelo de regresión lineal (1) se suele incorporar un término de perturbación $v(n)$, para modelar la parte de la salida que no puede ser explicada por el regresor lineal, *i.e.*

$$y(n) = \varphi^T(n) \theta + v(n) \quad (11)$$

Notar que independientemente de que esté o no ese término, se obtiene la misma expresión para la estima de mínimos cuadrados.

Si se da una caracterización estocástica para $v(n)$, es decir si $v(n)$ es un **proceso estocástico** entonces la estima de mínimos cuadrados es una **variable aleatoria**, la que puede caracterizarse por ejemplo, mediante los momentos estadísticos de primero y segundo orden (la media y la varianza) (en rigor, para que quede completamente caracterizada se debe computar la función de densidad de probabilidad).

Interpretación Geométrica de la Estima de Minimos Cuadrados

Puede darse una interpretación geométrica a la estima de mínimos cuadrados (8), (10). Designemos con

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$$

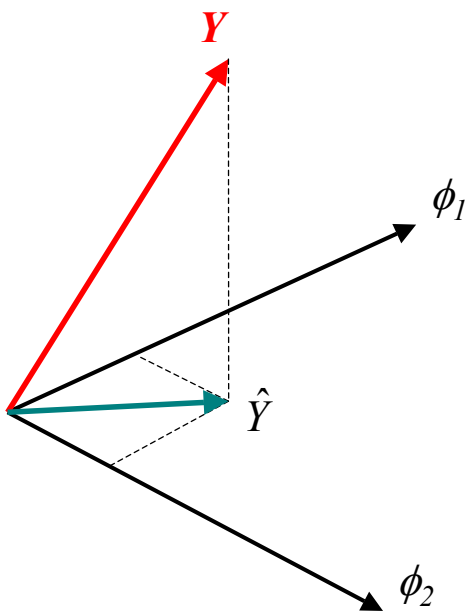
a las columnas de Φ^T , es decir

$$\Phi^T = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p]$$

Luego, Y y $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ son vectores en \mathfrak{R}^N , y el problema de hallar θ de la ecuación

$$Y = \Phi^T \theta$$

puede expresarse como: encontrar una combinación lineal de los vectores $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ que aproximen Y tan bien como sea posible.



Los vectores $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ generan un subespacio de dimensión p . Si Y pertenece a ese subespacio, puede expresarse como una única combinación lineal de los ϕ_i . Si no es así, la mejor aproximación a Y en el subespacio es el vector con la mínima distancia a Y , que es la proyección ortogonal de Y en el subespacio (\hat{Y}).

$$(Y - \hat{Y}) \perp \phi_i$$

$$(Y - \hat{Y})^T \phi_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

Como \hat{Y} pertenece al subespacio expandido por los ϕ_i , entonces se verifica

$$\hat{Y} = \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j \phi_j$$

por lo que resulta

$$Y^T \phi_i = \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j \phi_j^T \phi_i \quad i = 1, \dots, p$$

que es una forma de la ecuación normal

$$(\Phi \Phi^T) \hat{\theta}_N = \Phi Y$$

de donde se obtiene la expresión (10) para la estima de mínimos cuadrados.

Persistencia de Excitación

Definición: Una señal **quasi-estacionaria** $\{u(n)\}$ se dice que es **persistente de orden “n”** si la matriz (de covarianza)

$$R_u(n) = \begin{pmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \cdots & r_u(n-1) \\ r_u(-1) & r_u(0) & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_u(1-n) & & \cdots & r_u(0) \end{pmatrix}$$

es **definida positiva**, con

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k+\tau)u^T(k)$$

ISIS

13

- Puede probarse que una señal quasi-estacionaria $\{u(n)\}$, con espectro (de densidad de energía) $\Phi_u(\omega)$ es persistente de orden “n”, si el espectro es definido positivo en al menos “n” frecuencias distintas.
- Se dice que es una **excitación persistente** (de cualquier orden) si el espectro es definido positivo para **casi todo** ω .