

# Identificación de Sistemas

**Estimación de Mínimos Cuadrados**

---

**Autor: Dr. Juan Carlos Gómez**

# Estimación de Mínimos Cuadrados para Estructura de Regresor Lineal

- Se asume que la relación entrada-salida puede ser descrita por una estructura de **regresor lineal** de la forma

$$y(n) = \varphi^T(n)\theta \quad (1)$$

donde

$\varphi(n)$  **vector de regresión (regresor)**. Depende, en general, de los datos de entrada-salida pasados, hasta el instante  $n-1$ .

$\theta \in D_M \subset \mathfrak{R}^p$  vector de parámetros a estimar.

- Un **ejemplo típico** de estructura de modelo que puede escribirse como un regresor lineal es una estructura de modelo **ARX** (**A**uto **R**egressive with e**X**ogenous inputs), que es una ecuación lineal en diferencias de la forma

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_P y(n-P) = b_1 u(n-1) + \dots + b_M u(n-M)$$

(2)

o equivalentemente

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - \dots - a_P y(n-P) + b_1 u(n-1) + \dots + b_M u(n-M)$$

Definiendo el **vector de parámetros** (3)

$$\theta = [a_1 \dots a_P b_1 \dots b_M]^T$$

y el **vector de regresión**

$$\varphi(n) = [-y(n-1) \dots -y(n-P) u(n-1) \dots u(n-M)]^T$$

la ecuación (3) puede escribirse en la forma (1) (i.e., una **regresión lineal**).



□ En general, los parámetros son desconocidos y lo que se pretende es estimarlos a partir de datos de medición, de manera que se pueda predecir la salida en función de los datos pasados hasta el instante  $n-1$ , y la estima del vector de parámetros. Es decir, se construye un **predictor** de la salida basándose en la estructura de modelo (1), de la forma

$$y(n | n-1, \theta) = \varphi^T(n) \theta \quad (4)$$

□ Se asume que para la estimación está disponible un conjunto de  $N$  datos de entrada-salida  $\{u(n), y(n)\}_{n=1}^N$ .

□ Se propone un **criterio cuadrático** en el **error de predicción**, de la forma

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{Tr} \left\{ \left[ y(k) - \varphi^T(k) \theta \right] \left[ y(k) - \varphi^T(k) \theta \right]^T \right\} \quad (5)$$

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{Tr} \left\{ \varepsilon(n) \varepsilon(n)^T \right\} = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{n=1}^N \varepsilon(n)^2}_{\text{Caso Escalar}} \quad (6)$$

donde

$$\varepsilon(n) = y(n) - \varphi^T(n)\theta \quad \text{Error de Predicción}$$

- La estimación de parámetros consiste en hallar la estima  $\hat{\theta}_N$  que minimiza el criterio  $V_N(\theta)$ . El subíndice  $N$  en  $\hat{\theta}_N$  y  $V_N(\theta)$  se incluye para indicar que es una estima con  $N$  datos. Puede probarse que todo valor de  $\hat{\theta}_N$  que verifica la ecuación

**Ecuación Normal** 
$$\left[ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(n) \varphi^T(n) \right] \hat{\theta}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi(n) y(n) \quad (7)$$

es un **mínimo global** del criterio  $V_N(\theta)$ . Si la matriz de la izquierda es **no singular** entonces el mínimo es único y puede calcularse como

$$\hat{\theta}_N^{LS} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \{V_N(\theta)\} = \left[ \sum_{n=1}^N \varphi(n) \varphi^T(n) \right]^{-1} \left[ \sum_{n=1}^N \varphi(n) y(n) \right] \quad (8)$$

que se denomina **estima de mínimos cuadrados**. La minimización puede computarse analíticamente, igualando a cero la derivada (gradiente) de  $V_N(\theta)$  con respecto a  $\theta$ , i.e.

$$0 = \frac{d}{d\theta} V_N(\theta) = 2 \sum_{n=1}^N \varphi(n) (y(n) - \varphi^T(n)\theta) \Rightarrow \hat{\theta}_N^{LS}$$



□ Vectorizando

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad \Phi^T = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}$$

la ecuación (1) puede escribirse en forma matricial como

$$Y = \Phi^T \theta \quad (9)$$

y la estima de mínimos cuadrados (8) resulta

$$\hat{\theta}_N = \left( \Phi \Phi^T \right)^{-1} \Phi Y = \Phi^+ Y \quad (10)$$

donde  $\Phi^\dagger$  es la pseudo-inversa (izquierda) de Moore-Penrose.

□ La matriz

$$\left[ \sum_{n=1}^N \varphi(n) \varphi^T(n) \right]$$

es invertible (no singular) si se cumple cierta condición de **persistencia de excitación** de los regresores. Como en general los regresores dependen de las entradas pasadas, esta condición implica un cierto grado de persistencia de excitación de las entradas.

- En el modelo de regresión lineal (1) se suele incorporar un término de perturbación  $v(n)$ , para modelar la parte de la salida que no puede ser explicada por el regresor lineal, *i.e.*

$$y(n) = \varphi^T(n) \theta + v(n) \quad (11)$$



**Notar** que independientemente de que esté o no ese término, se obtiene la misma expresión para la estima de mínimos cuadrados.

Si se da una caracterización estocástica para  $v(n)$ , es decir si  $v(n)$  es un **proceso estocástico** entonces la estima de mínimos cuadrados es una **variable aleatoria**, la que puede caracterizarse por ejemplo, mediante los momentos estadísticos de primero y segundo orden (la media y la varianza) (en rigor, para que quede completamente caracterizada se debe computar la función de densidad de probabilidad).

# Interpretación Geométrica de la Estima de Minimos Cuadrados

Puede darse una interpretación geométrica a la estima de mínimos cuadrados (8), (10). Designemos con

$$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$$

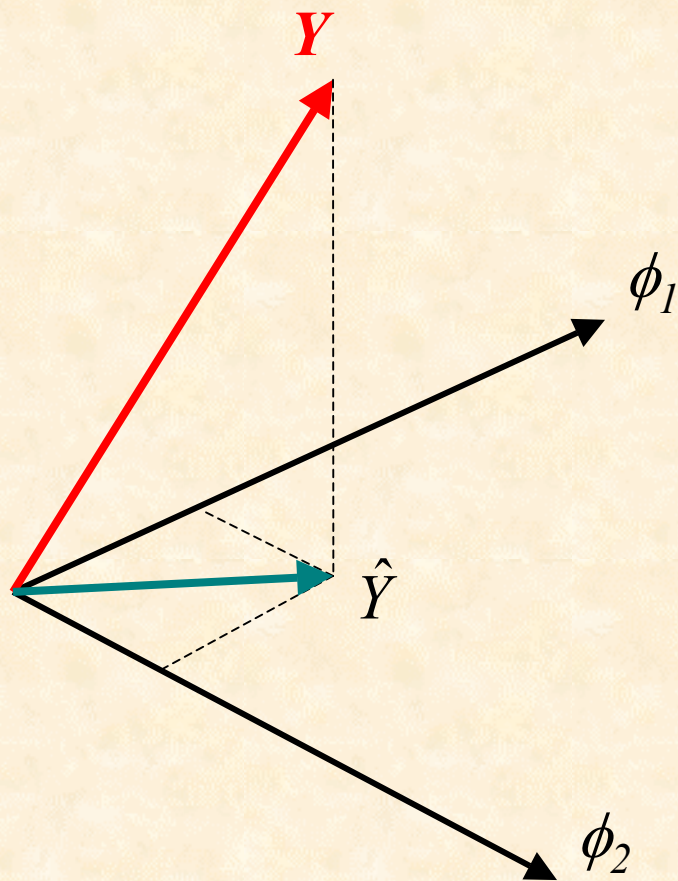
a las columnas de  $\Phi^T$ , es decir

$$\Phi^T = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p]$$

Luego,  $Y$  y  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  son vectores en  $\mathfrak{R}^N$ , y el problema de hallar  $\theta$  de la ecuación

$$Y = \Phi^T \theta$$

puede expresarse como: encontrar una combinación lineal de los vectores  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  que aproximen  $Y$  tan bien como sea posible.



Los vectores  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  generan un subespacio de dimensión  $p$ . Si  $Y$  pertenece a ese subespacio, puede expresarse como una única combinación lineal de los  $\phi_i$ . Si no es así, la mejor aproximación a  $Y$  en el subespacio es el vector con la mínima distancia a  $Y$ , que es la proyección ortogonal de  $Y$  en el subespacio ( $\hat{Y}$ ).

$$(Y - \hat{Y}) \perp \phi_i$$

$$(Y - \hat{Y})^T \phi_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$



Como  $\hat{Y}$  pertenece al subespacio expandido por los  $\phi_i$ , entonces se verifica

$$\hat{Y} = \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j \phi_j$$

por lo que resulta

$$Y^T \phi_i = \sum_{j=1}^p \hat{\theta}_j \phi_j^T \phi_i \quad i = 1, \dots, p$$

que es una forma de la ecuación normal

$$(\Phi \Phi^T) \hat{\theta}_N = \Phi Y$$

de donde se obtiene la expresión (10) para la estima de mínimos cuadrados.

# Persistencia de Excitación

**Definición:** Una señal **quasi-estacionaria**  $\{u(n)\}$  se dice que es **persistente de orden “n”** si la matriz (de covarianza)

$$R_u(n) = \begin{pmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \cdots & r_u(n-1) \\ r_u(-1) & r_u(0) & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_u(1-n) & & \cdots & r_u(0) \end{pmatrix}$$

es **definida positiva**, con

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k+\tau)u^T(k)$$

- ❑ Puede probarse que una señal quasi-estacionaria  $\{u(n)\}$ , con espectro (de densidad de energía)  $\Phi_u(\omega)$  es persistente de orden “n”, si el espectro es definido positivo en al menos “n” frecuencias distintas.
- ❑ Se dice que es una **excitación persistente** (de cualquier orden) si el espectro es definido positivo para **casi todo  $\omega$** .