

# Identificación de **SI**Stemas

**Diseño de Entradas**

---

**Autor: Dr. Juan Carlos Gómez**

- Un requisito fundamental de las entradas para un experimento de identificación es el de **persistencia de excitación** de las mismas. Es decir las entradas deben contener un número suficiente de armónicas, de manera de excitar a todos los modos dinámicos del sistema que se quieren identificar.
- Para el diseño de las entradas deben considerarse algunos hechos:
  - Con el enfoque de Error de Predicción, las propiedades asintóticas de las estimas (desvío y varianza) dependen del espectro de la entrada y no de la forma de onda de la misma.
  - Usualmente hay restricciones en la amplitud que puede tomar la entrada, *i.e.*  $u_{\min} \leq u(n) \leq u_{\max}$  .
  - Las entradas periódicas pueden tener ciertas ventajas.

## Factor de Cresta

La matriz de covarianza de la estima es típicamente inversamente proporcional al espectro de densidad de energía de la señal de entrada, por lo que para tener una covarianza pequeña se debería tener una **entrada con una densidad de energía lo más alta posible**. En la práctica, las entradas están limitadas en amplitud, *i.e.*  $u_{\min} \leq u(n) \leq u_{\max}$  .

Las propiedades deseadas de la entrada pueden definirse en términos del denominado **factor de cresta**  $C_r$ , definido como

$$C_r^2 = \frac{\max_n u^2(n)}{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N u^2(n)} \quad (1)$$

para una señal con media cero.

Una **buena** forma de onda sería entonces una que tenga un factor de cresta bajo. Claramente, la **cota inferior teórica es 1**, que se logra para señales **binarias simétricas**

$$u(n) = \pm u_{\max}$$

Este tipo de señales tienen entonces una ventaja teórica, por lo que son muy usadas en identificación. Es necesario aclarar, sin embargo, que señales binarias no pueden usarse para identificar no linealidades a la entrada del sistema (por ejemplo, modelos Hammerstein) ya que la salida de la no linealidad sería también binaria y no podría identificarse la no linealidad a partir de esta señal.

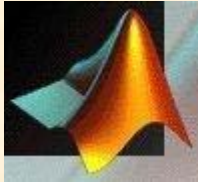
## Señales de Entrada más comunes

- Ruido Blanco Gaussiano Filtrado (de Banda Limitada)
- Señales Aleatorias Binarias (RBS)
- Señales Pseudo Aleatorias Binarias (PRBS)
- Suma de Sinusoides
- Señales Chirp o Swept
- Escalones

## □ Ruido Blanco Gaussiano Filtrado (de Banda Limitada) (**BLWN**)

Eligiendo apropiadamente el filtro (lineal) puede lograrse una señal con espectro arbitrario (que no tenga bandas de paso demasiado estrechas). Como la señal aleatoria Gaussiana es en teoría no acotada, debe saturarse a una cierta amplitud. Eligiendo esa amplitud de saturación igual a 3 desvíos estándar, resulta un factor de cresta igual a 3, y sólo un 1 % en promedio de las muestras es afectado, lo que resulta en una distorsión baja del espectro.





MATLAB



**idinput**

```
x=idinput(10000,'rgs',[0.2 0.5],[-1 1]);
```

↑  
Longitud de  
la señal

↑  
Señal aleatoria  
Gaussiana

↑  
Banda de  
Frecuencias

```
x=idinput(10000,'rgs',[0.2 0.5],[-1 1]);  
N=100000; % número de frecuencias FFT  
w=[-pi:2*pi/N:pi-2*pi/N];  
plot(w,20*log10(abs(fftshift(fft(x.*hanning(length(x)),N))))))
```

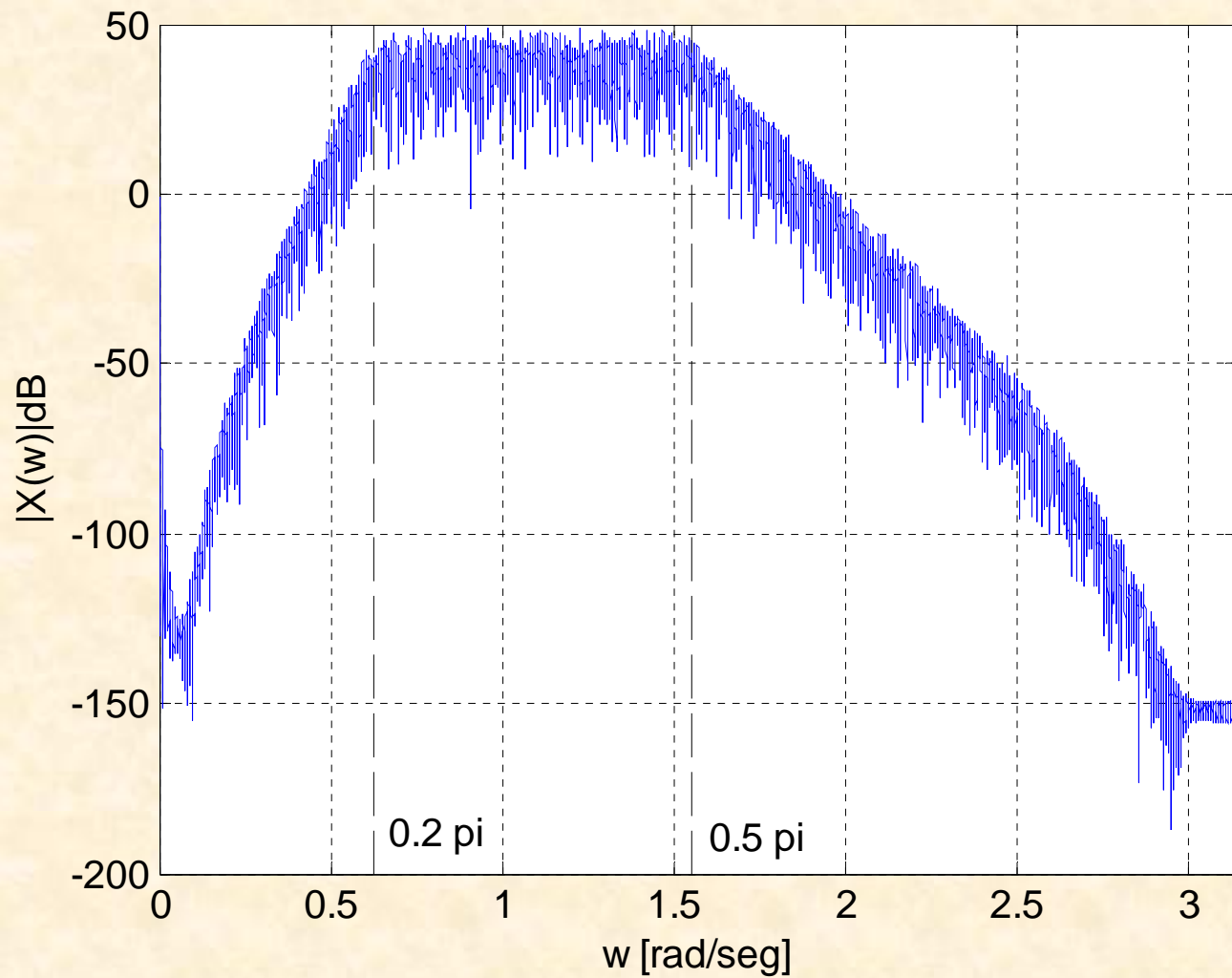


Figura 1: Espectro de la señal Gaussiana



## □ Señales Pseudo Aleatorias Binarias (**PRBS**)

Son señales que asumen sólo dos valores. Una señal PRBS es una señal periódica, determinística que tiene propiedades similares al ruido blanco. Puede generarse a partir de la ecuación en diferencias

$$u(n) = \text{rem}(a_1 u(n-1) + \dots + a_k u(n-k), 2) \quad (2)$$

donde  $\text{rem}(x,2)$  es el resto de la división de  $x$  por 2. La señal  $u(n)$  sólo puede asumir los valores 0 y 1. El vector de entradas pasadas

$$[u(n-1), \dots, u(n-k)]$$

puede asumir sólo  $2^k$  valores diferentes, por lo que la secuencia

$u(n)$  será periódica con período como máximo  $2^k$ . Considerando que una secuencia de todos ceros haría que todos los subsiguientes valores fueran cero, el período máximo que puede obtenerse es  $M = 2^k - 1$ .

El período real de la señal queda determinado por los valores de los coeficientes  $a_i$ . Puede probarse que para cada valor  $k$  existen valores de los  $a_i$  que dan secuencias de período máximo. A esas secuencias de período máximo se las denomina **Maximum Length PRBS**.

La tabla siguiente muestra los valores de  $k$  para los cuales es  $a_k = 1$  (los restantes coeficientes son nulos) y que generan PRBS de máxima longitud (Davis, 1970).

**Tabla 1:** Coeficientes para generación de señales PRBS de máxima longitud.

Orden $k$	$M = 2^k - 1$	$a_k = 1$ para $k$
2	3	1 , 2
3	7	2 , 3
4	15	1 , 4
5	31	2 , 5
6	63	1 , 6
7	127	3 , 7
8	255	1 , 2, 7 ,8
9	511	4 , 9
10	1023	7 , 10
11	2047	9 , 11

Puede probarse que cualquier señal PRBS de máxima longitud, y que conmuta entre los valores  $\pm \bar{u}$ , tiene las siguientes propiedades estadísticas de primero y segundo orden

$$\left| \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M u(n) \right| = \frac{\bar{u}}{M} \quad (3)$$

$$R_u(\ell) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M u(n)u(n+\ell) = \begin{cases} \bar{u}^2 & \ell = 0, \pm M, \pm 2M, \dots \\ -\frac{\bar{u}^2}{M} & \text{c.o.c.} \end{cases} \quad (4)$$

Donde  $M = 2^k - 1$ , es el período máximo de la señal, y las sumas se realizan con continuación periódica de la señal. Notar que la señal no tiene exactamente media cero por lo que su función de covarianza difiere de la función de autocorrelación en (4).

El espectro de la señal resulta

$$\begin{aligned}\Phi_u(\omega) &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} R_u(\ell) e^{-j\omega\ell} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{M-1} R_u(\ell + kM) e^{-j\omega\ell} e^{-j\omega kM} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kM} \sum_{\ell=0}^{M-1} R_u(\ell + kM) e^{-j\omega\ell}\end{aligned}$$

que puede aproximarse por

$$\Phi_u(\omega) = \frac{2\pi \bar{u}^2}{M} \sum_{k=1}^{M-1} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{M}\right), \quad 0 \leq \omega < 2\pi \quad (5)$$

El espectro posee  $M - 1$  picos (exceptuando el pico en  $(\omega = 0)$ ) en la región  $-\pi \leq \omega < \pi$  .

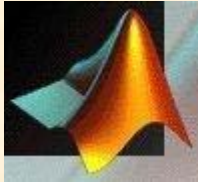
Esto muestra que las señales PRBS de máxima longitud se comportan como *ruido blanco periódico* y tienen persistencia de excitación de orden  $M - 1$ .

Es esencial utilizar períodos completos de la señal para que tenga las características espectrales mencionadas. Esto es a diferencia de las señales aleatorias, donde uno tiene que confiar en la Ley de Grandes Números para tener “buenas” propiedades de segundo orden con número finito de muestras.

Las señales PRBS tienen un factor de cresta óptimo (igual a 1).

Diferentes valores iniciales cuando se genera la señal de acuerdo a (2) sólo corresponden a un desplazamiento de la secuencia, por lo que no es claro como generar secuencias PRBS mutuamente no correlacionadas





MATLAB



**idinput**

```
x=idinput(16383,'prbs',[0 1],[-1 1]);
```

↑  
Longitud de  
la señal

↑  
Señal PRBS

↑  
Banda de  
Frecuencias

↑  
Niveles

```
x=idinput(16383,'prbs',[0 1],[-1 1]);  
N=100000; % número de frecuencias FFT  
w=[-pi:2*pi/N:pi-2*pi/N];  
plot(w,20*log10(abs(fftshift(fft(x.*hanning(length(x)),N))))))
```



## □ Suma de senoides (**Multi-sines**)

$$u(n) = \sum_{k=1}^d a_k \cos(\omega_k n + \phi_k) \quad (6)$$

El espectro resulta de la forma

$$\Phi_u(\omega) = 2\pi \sum_{k=1}^d \frac{a_k^2}{4} [\delta(\omega - \omega_k) + \delta(\omega + \omega_k)] \quad (7)$$

Estas señales tienen la ventaja de que se puede localizar la energía del espectro muy precisamente en las frecuencias deseadas.

El problema que presentan es el factor de cresta, que resulta de un valor hasta  $\sqrt{2d}$  (si todos los  $a_k$  son iguales). Una manera de controlar el factor de cresta es elegir las fases  $\phi_k$  de manera que los cosenos estén lo más fuera de fase posible.

Una solución a esto es la denominada **fase de Schroeder**, que distribuye la fase según (Schroeder, 1970)

$$\begin{aligned} \phi_1 & \text{ arbitraria} \\ \phi_k & = \phi_1 - \frac{k(k-1)}{d} \pi \quad ; \quad 2 \leq k \leq d \end{aligned} \tag{8}$$

con todos los coeficientes  $a_k$  iguales.

□ **Señales Chirp**: Una señal chirp es una senoide con una frecuencia que cambia en forma continua en una cierta banda de frecuencias  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$  en un intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq T$ , es decir:

$$u(t) = A \cos\left(\omega_1 t + (\omega_2 - \omega_1) t^2 / (2T)\right) \quad (9)$$

La **frecuencia instantánea** de la señal se obtiene derivando respecto al tiempo al argumento del coseno, y resulta

$$\omega_i = \omega_1 + \frac{t}{T} (\omega_2 - \omega_1) \quad (10)$$

Puede verse que la frecuencia instantánea crece linealmente con el tiempo desde  $\omega_1$  hasta  $\omega_2$ .

La señal chirp tiene un factor de cresta igual al de una senoide pura, es decir  $\sqrt{2}$ , y permite un buen control de la banda de frecuencias de excitación.



```
x = chirp(T, F0, T1, F1)
```

T: vector con los instantes de tiempo en que se muestrea la señal chirp

F0 : frecuencia instantánea en Hz en el tiempo 0

F1 : frecuencia instantánea en Hz en el tiempo T1

## Ejemplo:

$$F_0 = 50 \text{ Hz} \quad ; \quad F_1 = 300 \text{ Hz} \quad ; \quad F_s = 1000 \text{ Hz} \quad ; \quad T_1 = 10 \text{ seg}$$

```
Fs = 1000;  
T1 = 10;  
F0 = 50;  
F1 = 300;  
x = chirp([0:1/Fs:T1]',F0,T1,F1);  
N = 100000;  
F=[-0.5:1/N:0.5-1/N]*Fs;  
plot(F,20*log10(abs(fftshift(fft(x.*hanning(length(x))),N))))
```

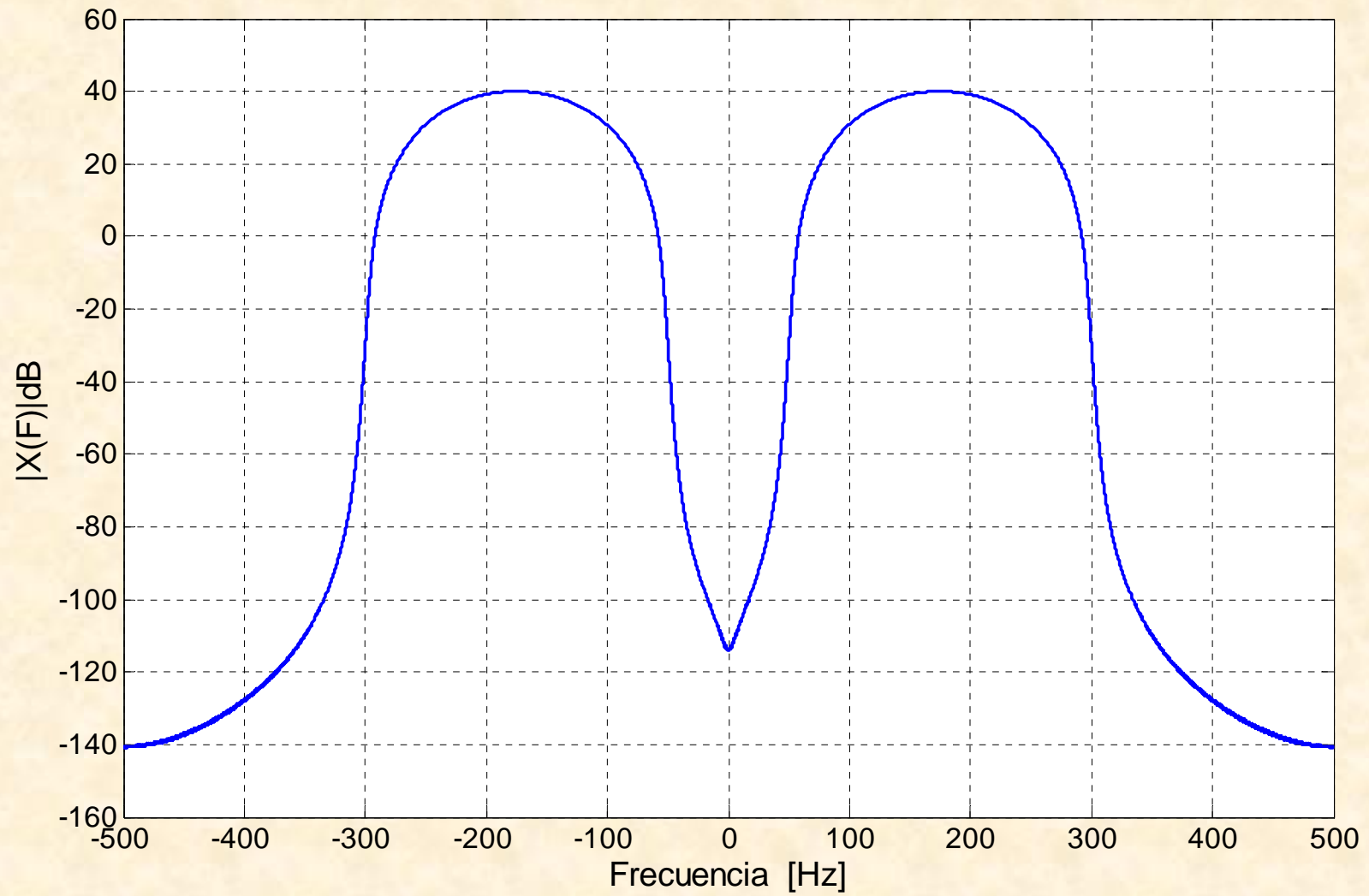


Figura 2: Espectro de la señal chirp