

Identificación de Sistemas

Título: Análisis Espectral
Autor: Dr. Juan Carlos Gómez

Fecha: Abril de 2002

Introducción

Los sistemas lineales y estacionarios quedan completamente caracterizados por su función transferencia, ya que la respuesta del sistema a una entrada arbitraria puede calcularse si se conoce la entrada, las condiciones iniciales y la función transferencia del sistema.



Como es bien sabido, la función transferencia es el cociente entre la transformada (de Laplace o Z) de la salida y la correspondiente transformada de la entrada, asumiendo condiciones iniciales nulas. En el área de identificación de sistemas existen diversos métodos que permiten estimar la función transferencia a partir de datos de entrada-salida del sistema. Uno de estos métodos es el denominado análisis espectral, que consiste en la determinación de una estima de la función transferencia a partir de estimas de los espectros de la entrada y la salida, de allí el nombre de *análisis espectral*. Este método es generalmente clasificado como un método de estimación no-paramétrico por no utilizar en forma explícita un vector de parámetros de dimensión finita en la búsqueda de la mejor estima del modelo, si bien en su implementación práctica se determina un número finito de parámetros para describir la función transferencia del mismo.

Revisión de conceptos

Consideremos a la señal en tiempo discreta (DT – Discrete Time) de energía finita $x(n)$, su DTFT se define como:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad (1)$$

la que físicamente representa la descomposición de $x(n)$ en sus componentes frecuenciales. Una característica muy importante que posee $X(\omega)$ es su periodicidad. Como el rango de frecuencias para una señal en DT es en el intervalo $(-\pi, \pi)$, esto se refleja en $X(\omega)$ haciendo que sea periódica, con período 2π .

Conociendo la DTFT de la señal, ésta puede recuperarse mediante la Transformada Inversa de Fourier en Tiempo Discreto (IDTFT – Inverse Discrete Time Fourier Transform) que se define como:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega \quad (2)$$

La definición de la DTFT en (1) implica que deben conocerse infinitos valores de la señal en DT $x(n)$, lo que obviamente hace imposible que (1) pueda utilizarse para el cálculo. Para poder realizar

un procesamiento digital de la señal es necesario tomar un número finito de valores, definiéndose la Transformada Discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform) de una secuencia $\{x(n)\}$ de N muestras equiespaciadas entre si como:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3)$$

la que resulta una herramienta computacionalmente implementable. Se define la Transformada Inversa Discreta de Fourier (IDFT – Inverse Discrete Fourier Transform) como:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4)$$

Formulación del problema

Sea un sistema lineal y estacionario (SLE) caracterizado por su respuesta al impulso $\{h(n)\}_{n=0}^{\infty}$ como el representado en la Figura 1.

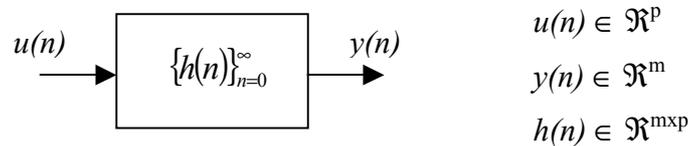


Figura 1: Sistema Lineal y Estacionario

Nos interesa determinar como se modifica el espectro (densidad espectral de energía) $\Phi_u(\omega)$ de la entrada $u(n)$ al pasar a través del SLE.

Asumiendo que $u(n)$ es un proceso estocástico estacionario, su espectro está definido como la DTFT de su matriz de covarianza $R_u(l)$ (momento centrado de segundo orden), es decir:

$$\Phi_u(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_u(n) e^{-j\omega n} \quad (5)$$

donde:

$$R_u(l) = E \left\{ [u(n+l) - m_u][u(n) - m_u]^T \right\} \quad (6)$$

con m_u el valor medio o momento de primer orden de la entrada $u(n)$ dado por:

$$m_u = E \{ u(n) \} \quad (7)$$

La respuesta del sistema a la entrada $u(n)$ viene dada por:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) u(n-k) \quad (8)$$

donde asumimos que el sistema es causal por lo que $h(n) = 0 \quad \forall \quad n < 0$.

Asumiremos también que el sistema es BIBO estable lo que implica que $\|h(n)\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Bajo estas condiciones, la señal $y(n)$ resulta estacionaria. Nos interesa entonces calcular su valor medio m_y , su matriz de covarianza $R_y(l)$ y su densidad espectral de energía $\Phi_y(\omega)$; a la vez que su matriz de covarianza cruzada $R_{yu}(l)$ y el espectro cruzado $\Phi_{yu}(\omega)$.

La ecuación (8) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)q^{-k} u(n) \\ &= H(q^{-1})u(n) \end{aligned} \quad (9)$$

donde se ha definido el operador (matriz) transferencia:

$$H(q^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)q^{-k} \quad (10)$$

De (8) es fácil ver que:

$$\begin{aligned} m_y &= E\{y(n)\} \\ &= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n-k)\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)E\{u(n-k)\} \end{aligned}$$

Insertando (7), tenemos:

$$\begin{aligned} m_y &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)m_u \\ &= H(1)m_u \end{aligned} \quad (11)$$

En (11), $H(1)$ puede interpretarse como la ganancia estática del SLE (**probarlo !!!**).

Analizaremos ahora de qué forma están relacionadas las desviaciones de entrada y salida respecto a sus valores medios.

Definiendo las desviaciones como:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &= y(n) - m_y \\ \tilde{u}(n) &= u(n) - m_u \end{aligned}$$

y considerando las expresiones (7) – (11), resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n-k) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)m_u \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)[u(n-k) - m_u] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\tilde{u}(n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)q^{-k}\tilde{u}(n) \\ &= H(q^{-1})\tilde{u}(n) \end{aligned} \quad (12)$$

Vemos que $\{\tilde{u}(n), \tilde{y}(n)\}$ están relacionadas en la misma forma que $\{u(n), y(n)\}$, por lo que sin pérdida de generalidad podemos asumir que $m_u = 0$ y reemplazar $\{\tilde{u}(n), \tilde{y}(n)\}$ por $\{u(n), y(n)\}$ en las expresiones de las respectivas matrices de covarianza.

La matriz de covarianza de $y(n)$ resulta:

$$\begin{aligned}
 R_y(n) &= E\{y(n+l)y^T(l)\} \\
 &= E\left\{\left[\sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n+l-k)\right]\left[\sum_{s=0}^{\infty} h(s)u(l-s)\right]^T\right\} \\
 &= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k)u(n+l-k)u^T(l-s)h^T(s)\right\} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k)E\{u(n+l-k)u^T(l-s)\}h^T(s) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k)R_u(n+s-k)h^T(s)
 \end{aligned} \tag{13}$$

que no provee mucha información. Sin embargo, pasando al dominio transformado de Fourier se obtiene una expresión útil para la densidad espectral de energía $\Phi_y(\omega)$ de $\{y(n)\}$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
 \Phi_y(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_y(n)e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k)R_u(n+s-k)h^T(s)e^{-j\omega n}
 \end{aligned}$$

Considerando el cambio de variable $n+s-k = m \Rightarrow n = m-s+k$, resulta

$$\begin{aligned}
 \Phi_y(\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} h(k)R_u(m)h^T(s)e^{-j\omega(m-s+k)} \\
 &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}}_{H(\omega)} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_u(m)e^{-j\omega m}}_{\Phi_u(\omega)} \underbrace{\sum_{s=0}^{\infty} h^T(s)e^{j\omega s}}_{H^*(\omega)} \\
 \Phi_y(\omega) &= H(\omega)\Phi_u(\omega)H^*(\omega)
 \end{aligned} \tag{14}$$

donde $(\bullet)^*$ indica el transpuesto conjugado.

Para el caso SISO (Single Input – Single Output) resulta:

$$\Phi_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \Phi_u(\omega) \tag{15}$$

La matriz de covarianza cruzada $R_{yu}(l)$ entre la salida y la entrada resulta:

$$\begin{aligned}
R_{yu}(l) &= E\{y(n+l)u^T(n)\} \\
&= E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n+l-k)u^T(n)\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)E\{u(n+l-k)u^T(n)\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)R_u(l-k)
\end{aligned} \tag{16}$$

El espectro cruzado resulta entonces

$$\begin{aligned}
\Phi_{yu}(\omega) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_{yu}(l)e^{-j\omega l} \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(k)R_u(l-k)e^{-j\omega l}
\end{aligned}$$

Considerando el cambio de variable $l-k = m \Rightarrow l = m+k$, resulta

$$\begin{aligned}
\Phi_{yu}(\omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h(k)R_u(m)e^{-j\omega(m+k)} \\
&= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}}_{H(\omega)} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_u(m)e^{-j\omega m}}_{\Phi_u(\omega)}
\end{aligned}$$

Es decir

$$\Phi_{yu}(\omega) = H(\omega)\Phi_u(\omega) \tag{17}$$

La expresión (17) se puede usar para estimar la respuesta en frecuencia $H(\omega)$ del sistema a partir del espectro de la entrada y el espectro cruzado salida – entrada. Para esto es necesario poder estimar estos espectros a partir de los datos de entrada salida. La estima $\hat{H}(\omega)$ resultaría entonces:

$$\hat{H}(\omega) = \hat{\Phi}_{yu}(\omega)\hat{\Phi}_u^{-1}(\omega) \tag{18}$$

donde $\hat{\Phi}_{yu}(\omega)$ y $\hat{\Phi}_u(\omega)$ son las estimas de $\Phi_{yu}(\omega)$ y $\Phi_u(\omega)$ respectivamente.

Considerando que $\{u(n)\}$, $\{y(n)\}$ son señales de duración finita N y causales, la (matriz) de covarianza cruzada puede estimarse a partir de los datos como:

$$\hat{R}_{yu}(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=1-\min(l,0)}^{N-\max(l,0)} y(n+l)u^T(n) \tag{19}$$

para N lo suficientemente grande. Aquí estamos asumiendo implícitamente la propiedad de ergodicidad (reemplazamos la media muestral por la media temporal).

Luego, una estima de $\Phi_{yu}(\omega)$ puede calcularse como:

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{yu}(\omega) &= \sum_{l=-N}^N \hat{R}_{yu}(l)e^{-j\omega l} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=-N}^N \sum_{n=1-\min(l,0)}^{N-\max(l,0)} y(n+l)u^T(n)e^{-j\omega l}
\end{aligned} \tag{20}$$

Haciendo el cambio de variable $s = n+l$, resulta:

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}_{yu}(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \sum_{n=1}^N y(s)u^T(n)e^{-j\omega(s-n)} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N y(s)e^{-j\omega s} \sum_{n=1}^N u^T(n)e^{j\omega n} \\
&= \frac{1}{N} Y_N(\omega)U_N^*(\omega)
\end{aligned} \tag{21}$$

donde hemos definido:

$$Y_N(\omega) = \sum_{s=1}^N y(s)e^{-j\omega s} \tag{22}$$

$$U_N(\omega) = \sum_{n=1}^N u(n)e^{-j\omega n} \tag{23}$$

Es claro que la aproximación (21) presenta un problema desde el punto de vista de la implementación, ya que “ ω ” es una variable continua y por lo tanto hay infinitos valores de “ ω ” en el intervalo fundamental $[-\pi, \pi]$.

Esto obviamente se soluciona calculando (21) en un número N de frecuencias equiespaciadas en el intervalo $[-\pi, \pi]$, es decir en:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Las ecuaciones (22) y (23) calculadas en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$ constituyen las Transformadas Discretas de Fourier (Discrete Fourier Transform - DFT) con N-puntos de las señales $\{y(n)\}$ y $\{u(n)\}$ respectivamente.

$$Y_N(\omega_k) = Y_N(k) = \sum_{s=1}^N y(s)e^{-j\frac{2\pi ks}{N}} \tag{24}$$

$$U_N(\omega_k) = U_N(k) = \sum_{n=1}^N u(n)e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} \tag{25}$$

Estas DFT pueden implementarse eficientemente con los algoritmos de Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform – FFT).

Resumiendo, una estima de $\Phi_{yu}(\omega)$ puede computarse para las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, como:

$$\hat{\Phi}_{yu}(\omega_k) = \frac{1}{N} Y_N(k)U_N^*(k) \tag{26}$$

En forma análoga puede probarse que una estima de $\Phi_u(\omega)$ puede calcularse como:

$$\hat{\Phi}_u(\omega) = \frac{1}{N} U_N(\omega)U_N^*(\omega) \tag{27}$$

donde para la implementación se calcula en las frecuencias $\omega_k = 2\pi k/N$, es decir

$$\hat{\Phi}_u(\omega_k) = \frac{1}{N} U_N(k)U_N^*(k) \tag{28}$$

Finalmente, considerando (21) y (27), la estima de la respuesta en frecuencia del sistema en (18) resulta:

$$\hat{H}(\omega) = Y_N(\omega)U_N^*(\omega)[U_N(\omega)U_N^*(\omega)]^{-1} \quad (29)$$

que para el caso escalar (SISO) resulta:

$$\hat{H}(\omega) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)} \quad (30)$$

que se implementa como:

$$\hat{H}(\omega_k) = \frac{Y_N(k)}{U_N(k)} \quad (31)$$

donde $\omega_k = 2\pi k/N$ y $k = 1, 2, \dots, N$.

La estima (30) se denomina “Estima de la Función Transferencia Empírica” (Empirical Transfer Function Estimate - ETFE).

Periodograma

Al valor $U_N(\omega)U_N^*(\omega) = |U_N(\omega)|^2$ se lo denomina periodograma de la señal $\{u(n)\}$ y representa la contribución a la potencia de la señal de la componente de frecuencia “ ω ”.

Se verifica

$$\sum_{k=1}^N \left| U_N\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right|^2 = \sum_{k=1}^N u(k)^2 \quad (32)$$

que constituye una de las formas de la Identidad de Parseval.

Extensión

Los resultados de esta sección, derivados para procesos estacionarios, se extienden, con las apropiadas interpretaciones, para señales cuasi-estacionarias, es decir procesos estocásticos con componentes determinísticas. Recordar que en este caso la media y la covarianza estaban definidas como:

$$m_u = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E\{u(n)\} \quad (33)$$

$$R_u(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E\{[u(n+l) - m_u][u(n) - m_u]^T\} \quad (34)$$

Referencias

- [1] Ljung, L. *System Identification: Theory for the User*, second edition, Prentice Hall, N.J., 1999.
- [2] Söderström, T. and Stoica, P.. *System Identification*, Prentice Hall, N.J., 1989.