

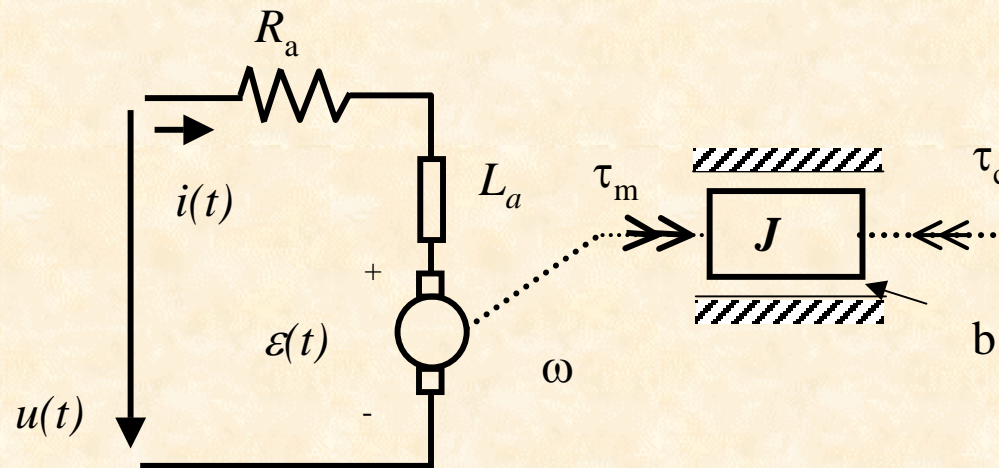
# Identificación de **SI**Stemas

**Identificación de un modelo ARX  
con Estima de Mínimos Cuadrados**

---

# Identificación de un modelo ARX usando Estima de Mínimos cuadrados

- **Proceso: Motor de Corriente Continua con excitación independiente constante**



**Conversión Electromecánica**  $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = k\omega \quad \text{f.c.e.m.} \\ \tau_m = ki \quad \text{torque} \end{array} \right.$

## □ Estructura de Modelo

Basándose en principios físicos (2da. Ley de Newton, Leyes de Kirchhoff y Faraday), es fácil ver que la FT entre la velocidad y la tensión de armadura del MCC es de la forma

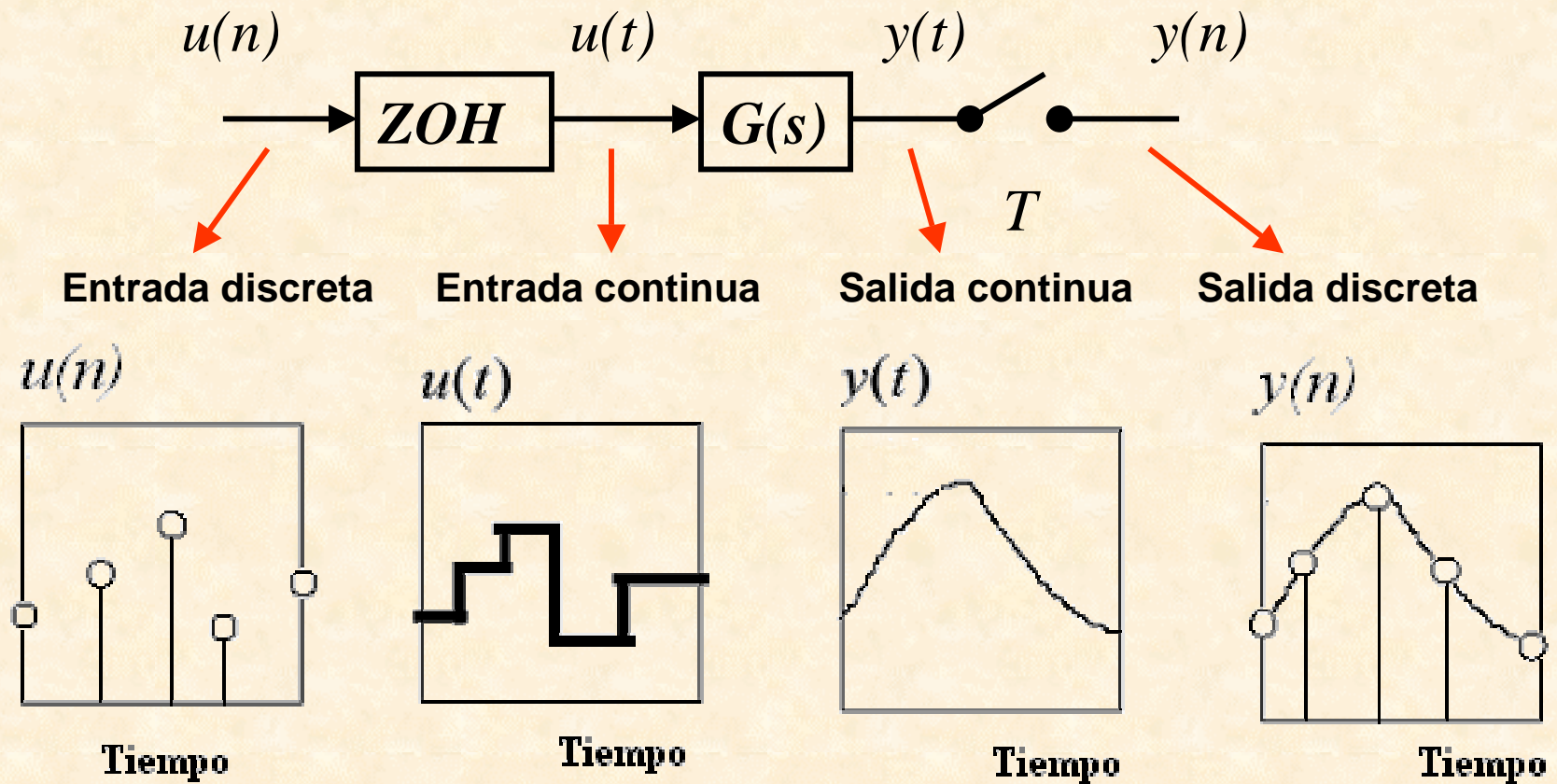
$$G(s) = \frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde

$$2\xi\omega_n = \frac{b}{J} + \frac{R_a}{L_a} \quad \omega_n^2 = \frac{R_a b + k^2}{L_a J} \quad K = \frac{k}{R_a b + k^2}$$

Considerando entonces que tiene un equivalente discreto (equivalente ZOH: Zero Order Hold) de la forma





## Equivalente Discreto ZOH

$$G(z) = \text{ZOH}\{G(s)\} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

es natural tratar de identificar los parámetros del modelo ARX que se deriva de esta transferencia discreta, *i.e.*

$$\omega(n) = -a_1 \omega(n-1) - a_2 \omega(n-2) + b_1 u(n-1) + b_2 u(n-2) \quad (1)$$

Definiendo el vector de parámetros

$$\theta = [a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2]^T$$

y el vector de regresión

$$\varphi(n) = [-\omega(n-1) \quad -\omega(n-2) \quad u(n-1) \quad u(n-2)]^T$$

la ecuación en diferencias (1) puede escribirse en la forma de un **regresor lineal**

$$y(n) = \varphi^T(n)\theta$$

**Estructura de Modelo**

donde  $y(n) = \omega(n)$

### □ Estimación de parámetros

Basándose en la Estructura de Modelo, puede definirse un **predictor** de la salida en función de los datos pasados hasta el instante  $n-1$  y el vector de parámetros  $\theta$ , como

$$\hat{y}(n | n-1, \theta) = \varphi^T(n)\theta$$



La estima de parámetros puede entonces computarse minimizando un criterio cuadrático en los **errores de predicción**

$$\varepsilon(n, \theta) = y(n) - \hat{y}(n | n-1, \theta)$$

Es decir, considerando que se dispone de  $N$  pares de datos de entrada-salida  $\{u(n), y(n)\}_{n=1}^N$

$$\hat{\theta}_N = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \{V_N(\theta)\}$$

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \operatorname{Tr} \left\{ \left[ y(k) - \varphi^T(k)\theta \right] \left[ y(k) - \varphi^T(k)\theta \right]^T \right\} \quad \text{Criterio Cuadrático}$$

*i.e.*

$$\hat{\theta}_N = \left[ \sum_{k=1}^N \varphi(k)\varphi^T(k) \right]^{-1} \left[ \sum_{k=1}^N \varphi(k)y(k) \right]$$

**Estima de Mínimos Cuadrados**

## □ El sistema “real”

$$L_a = 2.5 \text{ mHy} \quad R_a = 0.062 \Omega \quad k = 6.6 \text{ Nm/A}$$

$$b = 1.275 \text{ Nms} \quad J = 30 \text{ Nms}^2$$

$$G(s) = \frac{87.99}{s^2 + 1.3370s + 580.821}$$

**Sistema Real (FT)**



**Equivalente ZOH ( $T_s = 10^{-4}$  seg)**

$$G(z) = \text{ZOH}\{G(s)\} = \frac{0.4399 \times 10^{-6} (z + 1)}{z^2 - 1.9999z + 0.9999}$$



## □ Script Matlab

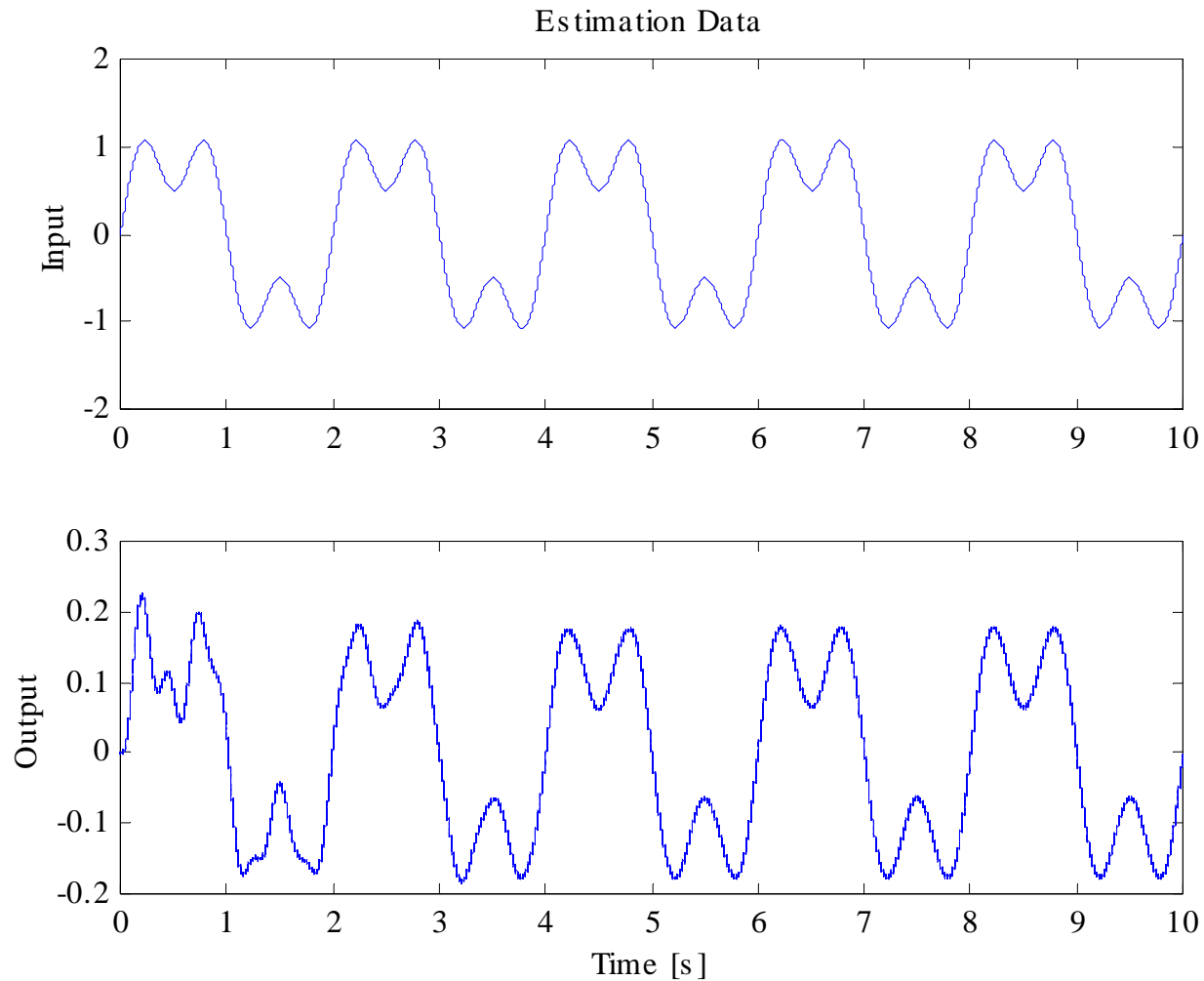
```
% Motor de Corriente Continua con Excitacion
% independiente constante
%      G(s)=num(s)/den(s)
%
num=87.9912;
den=[1 1.3370 580.821];
%
%      Computo de G(z)=ZOH{G(s)}
%
Ts=1e-4;
[numd,dend]=c2dm(num,den,Ts,'zoh');
%
%      Generacion de datos de entrada/salida a partir del
%      sistema en tiempo continuo
%
t=[0:1e-4:10]';
u=sin(1*pi*t)+0.5*sin(3*pi*t);
y=lsim(num,den,u,t) + 0.001*randn(size(u));
%
%      Computo del regresor
%
yy=-y;
ry=[yy(2) yy(1)];
cy=yy(2:length(yy)-1,:);
phiy=toeplitz(cy,ry);
ru=[u(2) u(1)];
cu=u(2:length(u)-1,:);
phiu=toeplitz(cu,ru);
phit=[phiy phiu];
```

```

% Computo de la estima
%
thetahat=phit\y(3:length(y),:);
%
% Computo de la salida estimada
%
[yhat,x]=dlsim([thetahat(3) thetahat(4)],...
[1 thetahat(1) thetahat(2)],u);
%
% Ploteo de la salida y la salida estimada
%
subplot(211)
plot(t(3:length(t)),y(3:length(y)), 'g',...
t(3:length(t)),yhat(3:length(y)), 'r')
title('Salida(trazos) y Salida Estimada (llena)-...
Indistinguibles');
axis([0 10 -0.25 0.25])
subplot(212)
plot(t(3:length(t)),y(3:length(y))-
yhat(3:length(y)))
xlabel('Tiempo [s]'),title('Error de Estima')

```

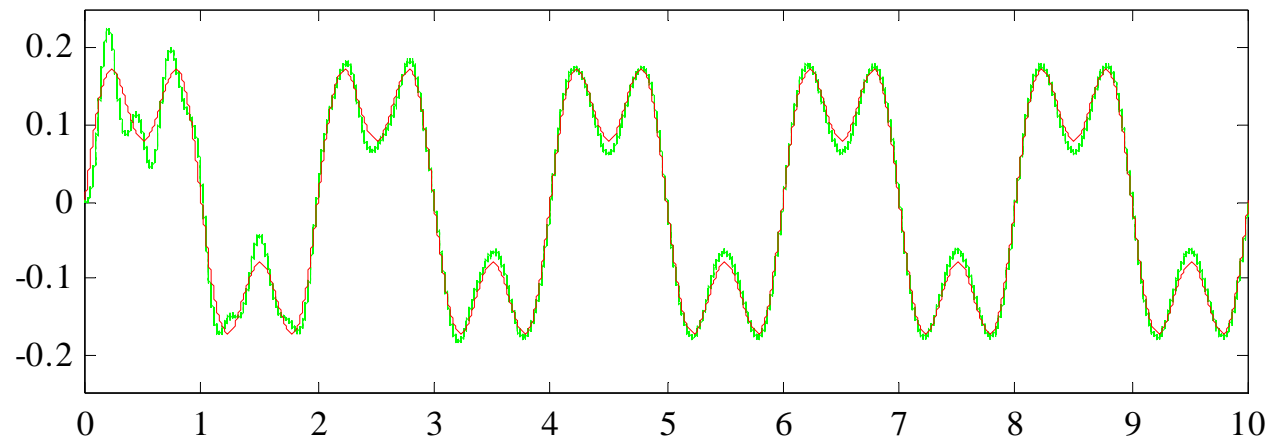
## □ Resultados de Identificación



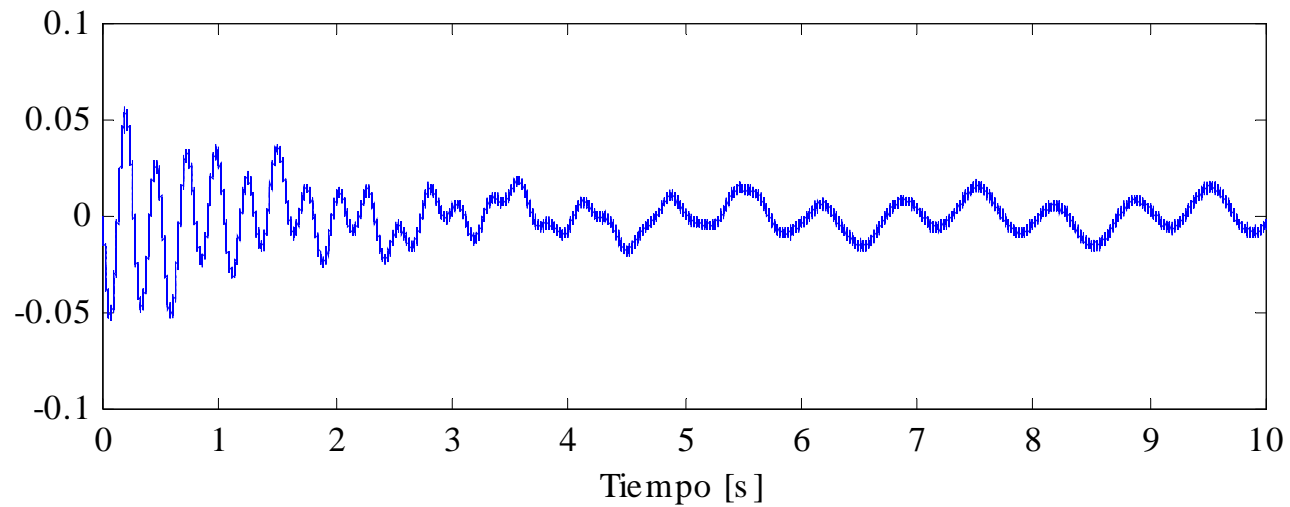
Datos de Entrada-Salida de Estimación



Salida (verde) y Salida Estimada (roja)



Error de Estima



## Datos de Validación

## □ El modelo Identificado

La FT (en tiempo continuo) estimada puede calcularse con el siguiente script **Matlab**

```
numd=[thetahat(3) thetahat(4)];  
dend=[1 thetahat(1) thetahat(2)];  
sysd=tf(numd,dend,Ts);  
sysc=d2c(sysd,'zoh');  
tf(sysc)
```

y resulta

$$\hat{G}(s) = \frac{87.99}{s^2 + 1.337s + 580.8}$$

**Modelo Identificado**