

GEODESIA FÍSICA

Antonio INTROCASO



Boletín
del Instituto de
Fisiografía y Geología

Introcaso A., 2006. Geodesia Física. [*Physical Geodesy*]. *Boletín del Instituto de Fisiografía y Geología*, Volúmen especial número 1, pp. 1 - 128. Rosario, 10-06-2006. ISSN 1666-115X.

Resúmen. El objetivo de esta publicación es mostrar cómo se pueden obtener, a partir de ondulaciones del geode, empleando una amplia y adecuada metodología, las características corticales y el estado isostático de estructuras geológicas por un camino diferente al tradicional. Los conceptos que apuntan a cumplir el objetivo señalado se desarrollan en siete capítulos. En el Capítulo 1 se realiza una pequeña reseña histórica de las sucesivas descripciones del campo gravitatorio terrestre, hasta llegar a la explicación Einsteiniana sobre su génesis y sus características. El Capítulo 2 trata el campo gravitatorio externo desde las ecuaciones básicas (ecuación de Laplace) y el campo interior a la masa terrestre (ecuación de Poisson). Se enfatizan las relaciones entre el potencial, la gravedad y las ondulaciones del geode y se describe la geometría del campo externo (líneas de fuerza, equipotenciales). A partir de los cálculos del potencial de simple y doble capa se marca el camino que conduce a las fórmulas de Green. Finalmente, se trata el desarrollo del potencial tanto en armónicos esféricos como en serie de Fourier, y la utilidad práctica de cada representación. El Capítulo 3 es muy breve, aunque fundamental. Trata sobre la forma de la Tierra y el modelo de referencia regular que a través de la comparación con el caso real permite obtener tanto anomalías de gravedad como ondulaciones del geode. En el Capítulo 4, luego de pasar revista a las bien conocidas anomalías de gravedad (aire libre, Bouguer e isostáticas), se introduce el concepto de efecto indirecto en las fluctuaciones del geode ante cambios de masa, y se describe una forma de minimizar sus efectos (condensación de Helmert) para lograr resultados confiables. Luego se presentan las anomalías que utiliza preponderantemente la Geodesia (anomalías de Faye) para obtener las ondulaciones del geode. Finalmente, en este capítulo se tratan las ondulaciones del geode que originan los modelos de comparación perfectamente compensados (Airy, Pratt) para obtener a partir de ellas el grado de balance isostático (Capítulo 7). El Capítulo 5 se introduce en la definición de alturas tanto brutas (obtenidas como resultado de una nivelación geométrica, por ejemplo de alta precisión) como refinadas (con correcciones por la distorsión del campo de gravedad). Se nota aquí la importancia del geode como superficie de referencia y las distintas formas de obtenerlo. En el Capítulo 6 se ven diferentes métodos para la obtención del geode (es decir la ondulación N) a partir de anomalías de aire libre, con énfasis en las técnicas de fuentes equivalentes (FE) y de Stokes plana (SP) resuelta numéricamente. Ambos métodos son perfectamente compatibles con los objetivos planteados en esta publicación. Se destaca además que el muy moderno y en principio sencillo método de obtener N a partir de h (altura sobre el elipsoide con GPS) y H (altura sobre el geode) puede ser combinado con FE como técnica de interpolación. El Capítulo 7 comienza tratando los siempre ambiguos métodos de separación de diferentes longitudes de onda del geode, para luego centrarse en la obtención de las características corticales (espesor, isostasia, probable génesis y probable evolución) a partir de una metodología análoga a la utilizada en investigaciones tradicionales de 'g' que involucran modelado. Se hace notar, por último, que trabajando con una densa fuente de datos $N = h - H$ no se necesitan anomalías de 'g', y así el empleo de N resuelve la investigación geológica estructural por otro camino.

Abstract. The aim of this publication is to show that geological structures, crustal features and isostatic balance can be studied using geoid undulations methods in a non-traditional way. The subject is developed in seven chapters. Chapter 1 presents a brief historical review of the terrestrial gravity field descriptions until Einstein's explanation about its genesis and characteristics. Chapter 2 deals with the gravity field from basic relationships: the external one (Laplace's equation) and the internal one (Poisson's equation). Potential, gravity and geoid undulation links are emphasized, and external field geometry is described (equipotential contours). From simple layer and double layer potential computations, Green's formulae can be explained. Finally, spherical harmonic and Fourier series representations of the potential function are discussed. Chapter 3 is concise and important, and concerns to the Earth's shape and regular reference model which being compared with the real case allows to obtain either gravity anomalies or geoid undulations. In Chapter 4, after reviewing the well known gravity anomalies subject (free air, Bouguer and isostatic ones), indirect effect in geoid fluctuations as a result of masses changes is introduced, also describing a way of reducing its influence (Helmert condensation) to reach trustable results. Then, Faye anomalies are presented, since they are the most useful ones in Geodesy. Finally, completely balanced model's geoid undulations are considered, to obtain the isostatic state level. Chapter 5 treats either rough or refined heights (the former ones obtained as a result of geometric levelling, and the latter ones with gravity field distort corrections). Geoid as a reference surface and the different ways of obtaining it are put in evidence. Different ways for obtaining geoid undulation N from free air anomalies, are shown in Chapter 6, emphasizing equivalent source techniques, and numerical resolution of planar Stokes' integral. Both methods fit the aims of this publication. Besides, the modern and simple method of obtaining N from h (altitude over ellipsoidal surface with GPS) and H (altitude over the geoid) can be combined with equivalent sources as an interpolation method. Chapter 7 begins focusing the ambiguous methods for separating different geoid wavelengths, then on the characteristics of the crust (thickness, isostasy, probable

genesis and evolution) using a similar methodology to the one used for 'g' traditional modeling. Finally, it must be noted that a dense data source $N = h - H$ makes 'g' anomalies unnecessary, and so the use of N solves the geological research in another way.

Antonio Introcaso [geofisic@fceia.unr.edu.ar]: Gabinete de Geofísica, FCEIA, Universidad Nacional de Rosario & CONICET, Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina.

Manuscrito recibido: 12/04/2005
aceptado: 03/12/2005.

CONTENIDO

Resumen	1
Abstract	1
Cap. 1: Breve historia sobre el campo gravitatorio terrestre	3
Cap. 2: El campo gravimétrico terrestre	17
Cap. 3: La forma de la Tierra	47
Cap. 4: Anomalías gravimétricas	51
Cap. 5: Las alturas en el cálculo del Geoide	83
Cap. 6: Introducción al cálculo del Geoide	89
Cap. 7: Nociones sobre separación de distintas longitudes de onda geoidales	105
Referencias	123
Índice temático	125

1. BREVE HISTORIA SOBRE EL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

En su *Discorsi*, Galileo Galilei afirmó que sería ocioso e inútil discutir las teorías causales de la gravedad propuestas por sus contemporáneos y predecesores, dado que “nadie sabe qué es la gravedad, que no es más que un nombre, y que más vale contentarse con establecer las leyes matemáticas de la caída”. Luego, Isaac Newton, en su *Principia*, admitió que hasta el momento no había sido capaz de descubrir la causa de las propiedades de la gravedad, y más adelante afirmó que no presentaba hipótesis explicativas “debido a que las hipótesis no tienen lugar en la filosofía experimental”. De modo que ambos en sus respectivas épocas describieron en forma cuantitativa, simple e inequívoca los fenómenos gravitatorios, sin aludir a explicaciones causales.

Hacia fines del siglo XIX la Física ya conocía las maravillosas ecuaciones de Maxwell, pilares del electromagnetismo, y asistía a la llegada de notables hechos experimentales. Por ejemplo, la velocidad de la luz presentaba un valor constante independiente del movimiento del observador. Por el contrario, la masa - constante a bajas velocidades - variaba a elevadas velocidades. En 1905, un joven físico alemán de 26 años, Albert Einstein, presentó su Teoría Restringsida de la Relatividad, o Teoría de la Relatividad Especial (T.R.E.), válida para sistemas inerciales, justificando así los hechos observados en el marco de una concepción audaz y rigurosa. Por entonces, no obstante, continuaba sin explicación la naturaleza de la gravedad. Luego de 11 años, es decir en 1916, Einstein apoyado en experiencias conceptuales y en una apropiada matemática encontró en el espacio curvo una explicación inesperada sobre la causa de la gravedad.

La concepción Einsteniana sobre el campo de gravedad ha sido fundamental en diferentes disciplinas. Por ejemplo, se sabe que una meta fundamental para la Astronomía y para la Geodesia es establecer sistemas de referencia o ternas de ejes coordenados y su materialización (marco de referencia).

En un sistema clásico, tradicionalmente, un sistema euclídeo resultaba adecuado debido a la escasa precisión lograda en las observaciones. Sin embargo hoy sabemos que el sistema de coordenadas está dominado por la curvatura que posee el campo gravitatorio galáctico, y más allá de él, por la curvatura que producen la masa y la energía distribuidas en el Universo. Esto nos lleva a considerar un sistema de referencia dinámico. La diferencia entre los movimientos de los planetas referidos a un sistema relativista y a un sistema clásico es del orden de 10^{-8} .

En 1991, el grupo de trabajo sobre sistemas de referencia de la Unión Astronómica Internacional recomendó introducir la teoría de la relatividad general (T.R.G.) como marco teórico para la definición de un sistema de referencia espacio-temporal. Hoy, el tan en boga sistema G.P.S. (Global Positioning System) utiliza, para lograr los mejores resultados, ambas teorías: T.R.E. y T.R.G. Por todo ello, y porque además la relatividad permite dar una explicación sobre la génesis de la gravedad, luego de recorrer a grandes pasos los antecedentes del tema y los estudios de Galileo y de Newton entre otros haremos referencia, en forma breve, a la teoría de Einstein.

Comencemos ubicándonos en la era precristiana. Aristóteles, dos siglos antes de nuestra era, basándose sólo en el sentido común (de la época), sostuvo que los cuerpos más pesados, librados a sí mismos, caían más rápidamente que los cuerpos más livianos. Aseguró también que la caída libre era tan rápida que era imposible medirla. Tal vez por ello no intentó realizar alguna verificación práctica.

Esta concepción aristotélica fue luego refutada, entre otros, por Galileo. Pese a no haber sido el primero en rechazarla, Galileo fue sin duda quien más profundamente exploró el problema y quien mejores y más amplias conclusiones obtuvo a partir de su asombroso genio y de sus experiencias.

Aristóteles fue sistemáticamente criticado ya desde la física alejandrina y bizantina de la última época. Lo mismo podemos decir del pensamiento científico islámico y latino medieval. Hasta el Dante criticaba a Aristóteles, que aparecía como un blanco constante y obligado.

Pese a haber sido el destinatario de todo tipo de críticas, debemos decir que Aristóteles fue un notable pensador. Fue el fundador de la biología como ciencia, sostuvo en ese campo la importancia del método de observación controlada y de las clasificaciones. Hoy se leen con admiración sus escritos sobre economía y sobre política. No hay filósofo que no se detenga con reverencia ante sus trabajos sobre ética y sobre metafísica. Formuló también, por primera vez, el silogismo como razonamiento deductivo. Abordó además el concepto de inducción. Nada debe llevarnos, en consecuencia, a pensar que fue un filósofo más. Nos preguntamos entonces: ¿dónde se equivocó Aristóteles?. Él no sometió muchas de sus hipótesis a la experimentación, acumulando así frecuentes errores. Recordemos que sostuvo, sin las mínimas verificaciones, que los hombres tienen mayor número de piezas dentales que las mujeres; que si se concibe un bebé mientras sopla el viento norte, sin duda será varón; que la Tierra está fija y ocupa el centro de una serie de esferas concéntricas en cuyos ecuadores están fijos los distintos planetas; creyó que estas esferas giraban con diferentes períodos y con distintas orientaciones. Finalmente digamos que Aristóteles se equivocó respecto de su ya comentada concepción sobre la caída de los cuerpos.

Antes de Galileo, Joanes Filopomus (ó Juan el Gramático) sostenía que la experiencia contradice las opiniones usuales sobre la caída de los cuerpos. Afirmaba que las observaciones superaban a las argumentaciones verbales. Sus informes y opiniones circularon por Europa desde 1536 en adelante.

Por otro lado Simón Stevin, matemático, ingeniero y físico flamenco, realizó en 1586 una experiencia de caída libre. Arrojó, desde la misma altura, dos esferas de plomo de distinto peso, comprobando que llegaban sincrónicamente al suelo, refutando sin más a Aristóteles.

Galileo, algún tiempo después, realizó una serie de experiencias con mayor cuidado y amplitud que las de Stevin, y obtuvo, a través de su singular genio, inesperadas y novedosas consecuencias.

Se dice que Galileo recomendaba a sus alumnos y discípulos medir todo lo que fuera directamente medible, y lo que

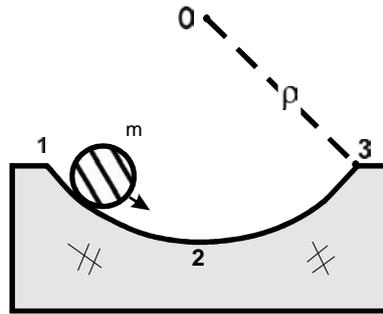


Figura 1.1. Una esfera de masa m lanzada en 1, se desliza en caída por el camino S (de radio de curvatura constante ρ). Esta caída es similar a la de la masa de un péndulo de longitud ρ .

no: “hacerlo” medible. Con esta idea, lentificó los movimientos de caída utilizando tanto péndulos como planos inclinados. Él y sus discípulos prepararon péndulos con diferentes longitudes y la misma masa y los pusieron en movimiento, observando sus comportamientos. Galileo sabía que las masas pendulares “caían” aunque estaban obligadas a seguir un camino circular. El fenómeno se repetía espontáneamente diez veces, cincuenta veces, cien veces y podía ser atentamente observado y controlado.

Masas de diferentes pesos sujetas por cuerdas de la misma longitud l , “caían” al mismo tiempo; los períodos se repetían. “Si a esas mismas masas se dijo las dejamos caer libremente (eliminando las cuerdas) desde un mismo nivel, en condiciones ideales llegarán todas al mismo tiempo al suelo”. El dogma aristotélico, antes cuestionado por Filopomus y Stevin, recibía de parte de Galileo el golpe de gracia. No obstante, los estudios sobre el movimiento de este gran precursor recién comenzaban.

Se dice que por entonces realizó una experiencia histórica, arrojando simultáneamente, desde la Torre Inclinada de su Pisa natal, masas de distintas sustancias y de distintos pesos. Sus testigos, estudiantes, discípulos, filósofos y amigos, verificaron asombrados la llegada sincrónica de las masas al suelo. En realidad se duda que tal experiencia se haya realizado. Fue tal vez Viviani, uno de sus más fieles discípulos, quien tras su muerte describió imaginariamente lo que es hoy tal vez la más célebre anécdota de Galileo.

Galileo, al mismo tiempo -para avanzar en sus estudios sobre el movimiento- realizó experimentos utilizando planos de diferentes inclinaciones. Él pensó, por ejemplo, que la caída de las masas pendulares desde los puntos más altos al umbral más bajo, era semejante al movimiento descendente de una masa esférica sobre una superficie cóncava cuyo radio de curvatura igualaba a la longitud de la cuerda (Fig. 1).

Para completar sus estudios utilizó planos inclinados con diferentes ángulos. En el límite, cuando el plano era vertical, se volvía al caso de caída libre. Al variar la inclinación desde ángulos pequeños a ángulos cada vez mayores, el movimiento se hacía más y más rápido. La esfera partía con cierta lentitud y luego su velocidad crecía. Pero el tipo de movimiento era siempre el mismo.

Sus mediciones, cuidadosamente repetidas, lo convencieron de que el movimiento era uniformemente acelerado. Trabajando con péndulos de longitudes diferentes, por ejemplo l_1 y l_2 , encontró que las relaciones entre las longitudes l_1 y l_2 igualaban a la relación entre el cuadrado de los tiempos (de oscilación) T_1 y T_2 , ó $(l_1/T_1^2) = (l_2/T_2^2)$ que son dimensionalmente aceleraciones.

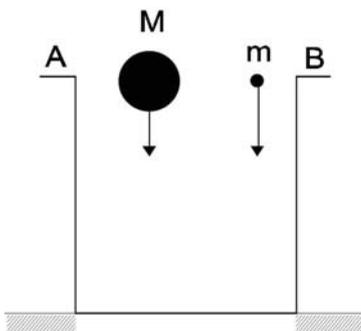


Figura 1.2. Lanzamiento sincrónico de dos masas M y m con $M \gg m$ desde A y B. La masa M , decía Galileo, opone mayor resistencia a moverse que m .

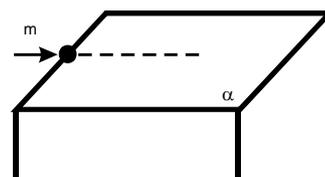


Figura 1.3. Un objeto m desplazado con fuerte movimiento rectilíneo y uniforme sobre un plano, seguirá en línea recta hasta los límites del plano. Si el plano se extiende, el movimiento también se extenderá en ausencia de otras fuerzas.

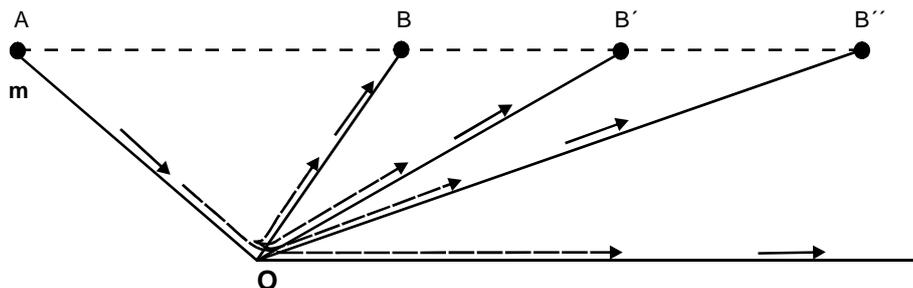


Figura 1.4. Lanzamiento de una bolita de masa m desde A. Galileo imaginó en esta experiencia conceptual que ella llegaría en cualquiera de los planos de la derecha al mismo nivel horizontal (B, B', B'', ...) hasta que, si el plano desde O se mantuviera sin pendiente, la bolita se desplazaría con velocidad rectilínea y uniforme (la velocidad adquirida en O) ad infinitum. Como físico, Galileo se resistió a confiar en las experiencias mentales que no tuvieran verificación en experiencias reales.

Galileo realizó anuncios fundamentales, y sentó también las bases sobre las cuales Newton formularía el principio de inercia. Señalaremos algunos de sus estudios y reflexiones.

Al poner fin al dogma aristotélico sobre la caída de los cuerpos, Galileo comenzó a razonar desde las antípodas de Aristóteles. Si dos cuerpos de diferente peso caen al mismo tiempo, se dijo, algo habrá que compense la diferencia de peso (Fig. 2). Cuanto más pesado es un cuerpo, mayor será su resistencia a ser movido. Otras de sus experiencias mentales son esclarecedoras. Por ejemplo aquellas vinculadas con el principio de inercia. Galileo imaginó un móvil lanzado sobre un plano horizontal (por ejemplo la superficie lisa de una mesa) con movimiento rectilíneo y uniforme (Fig. 3). Al ir eliminando el roce entre el móvil y la superficie de la mesa, el movimiento persistía más y más, anunciando así que idealmente no se detendría. También imaginó, con su sorprendente ingenio, que un móvil m , lanzado desde un plano inclinado AO (Fig. 4) llega al mismo nivel en B, B', B''; es decir, en planos inclinados (a la derecha) con pendientes cada vez menores. En el límite, el plano sería horizontal y el móvil impulsado por la velocidad que tiene en O, se desplazaría “ad-infinitum” manteniendo siempre la misma velocidad.

Sin embargo, Galileo se negaba a realizar generalizaciones más allá de lo que pudiera tener comprobación experimental. Lo demás era considerado, en su mentalidad de experimentador, como metafísico y, por lo tanto, meramente especulativo. El primero en formular la ley de inercia tal cual la conocemos actualmente, fue Descartes. Aunque, enterado de la persecución que la Inquisición hiciera a Galileo, postergó la edición de sus textos evitando, en ese momento, su difusión. Posteriormente, cuando Newton formuló su ley de inercia, reconoció la importancia de los estudios anteriores de Galileo.

Utilizando un madero en forma de cuña, Galileo continuó sus notables avances sobre el conocimiento del movimiento (Fig. 5). Empujando una pequeña esfera de masa m horizontalmente en dirección a la arista “a” de la cuña, notó que la masa m “caía”, describiendo una parábola. Con esta experiencia Galileo intentó explicar el movimiento de los proyectiles y estableció que cuando ellos son lanzados como en Fig. 5, describen una curva: más precisamente una parábola. Su más brillante discípulo, Evangelista Torricelli, lo generalizó luego para un movimiento inicial cualquiera.

Su mente aguda le permitió comprender que un cuerpo puede tener simultáneamente una componente de velocidad horizontal uniforme y otra vertical uniformemente acelerada.

La componente horizontal es la tendencia que tiene un cuerpo a moverse en línea recta, con velocidad constante, es decir sin aceleración, conservando este movimiento con independencia de su origen. La componente vertical acelerada y la componente horizontal con velocidad constante, aparecen nítidas como consecuencia de los estudios de Galileo.

Al mismo tiempo las trayectorias curvas preocupaban a Galileo. Se preguntaba si no tendría algo que ver el movimiento de la pequeña masa m sobre la cuña con el movimiento de la luna alrededor de la Tierra, o con el movimiento de los planetas. Sin embargo, no dejó registro de sus reflexiones ya que en las escalas cósmicas Galileo no se desenvolvía con la misma facilidad que en la escala de sus experimentos locales terrestres.

Otra cuestión esencial: la relatividad de los movimientos, había sido advertida antes de Galileo, por ejemplo, por Copérnico, quien estableció que entre dos barcos que se mueven uno respecto del otro con movimientos rectilíneos y uniformes, es imposible establecer desde cada uno de ellos si se mueven o están en reposo.

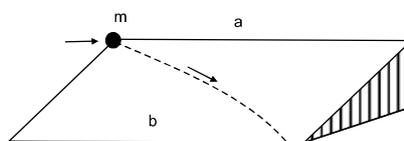


Figura 1.5. Lanzada la masa m horizontalmente, pronto comenzará a “caer” describiendo una parábola.

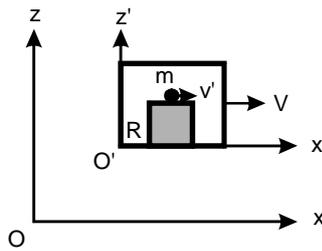


Figure 1.6. Movimientos de un recinto R y de una masa interior m relativos a un sistema fijo O (x,z).

Nuevamente fue Galileo quien estableció el principio de relatividad que hoy se conoce como sistema inercial o sistema que lleva su nombre. En estos sistemas que se desplazan con movimiento rectilíneo y uniforme, (a las velocidades usuales reconocidas por entonces), las leyes de la mecánica siguen siendo válidas. En ellos, las velocidades netas obedecen a su suma algebraica (Fig. 6).

Consideremos dos sistemas de coordenadas bidimensionales 2D, O(x,z) fijo y O'(x',z') que se mueve respecto de O, con velocidad rectilínea y uniforme V. Supongamos que en el recinto de O' una masa m se mueve con velocidad v' uniforme en la misma dirección que V. La velocidad general de m respecto de O será, de acuerdo con Galileo,

$$v = v' + V \tag{1.1}$$

En sus “Diálogos sobre los dos sistemas del mundo”, Galileo puso en boca del aristotélico Simplicio, que un objeto que cae desde el tope de un mástil de un barco en movimiento rectilíneo y uniforme, cae sobre la cubierta en un punto lejano al mástil, ubicado entre el mástil y la popa. Mientras Simplicio admitió no haber realizado la experiencia, Galileo afirmó que él sí la había realizado y que el objeto caía exactamente al pie del mástil, tanto con el barco detenido, como con el barco desliziéndose con velocidad rectilínea y uniforme.

La Fig. 7 ilustra la descripción de Galileo. Un observador externo, ubicado por ejemplo en tierra firme, verá la caída tal cual se ve en Fig. 7, o como lo vemos nosotros frente al dibujo. Mientras que un observador ubicado sobre el barco en movimiento verá la caída como vertical. O bien como se vería en el barco detenido.

La caída del objeto aparece así ante los dos observadores (externo e interno al barco) como correspondientes a espacios diferentes. Para el observador interno la representación puede hacerse en un espacio unidimensional (la masa m cae en dirección de z, variando con el tiempo). En este caso, el observador del barco toma como referencia al mástil. En cambio, para el observador externo, el espacio es bidimensional. Él hace referencia o a un punto fijo de la costa o al barco fijo antes que comience a desplazarse. Cuando un cuerpo se mueve en el espacio, hacemos referencia siempre a otro cuerpo. Entonces, el espacio es relativo, y depende del observador ó de la referencia que él tome. Pero ni Galileo, ni Newton después, advirtieron la trascendencia de este concepto, que desafortunadamente pasaron por alto.

Como veremos luego, la medición de la velocidad de la luz es clave para entender la concepción física moderna. En épocas de Galileo, y por mucho tiempo, se asumió su propagación como instantánea (velocidad infinita). Galileo sin embargo debe haber sospechado que la velocidad de la luz, aunque notablemente rápida, tiene un valor finito. Prueba de ello es que planificó una forma de medirla colocando observadores nocturnos con linternas sobre colinas distantes. Desafortunadamente, esta forma rudimentaria de trabajar - y la falta de relojes precisos - determinó el fracaso de estos intentos.

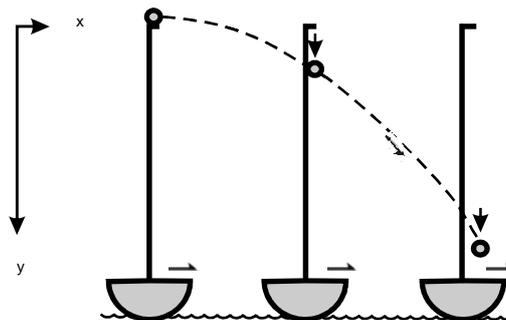


Figura 1.7. Caída de un objeto m desde la cima del mástil de un barco que se desplaza con movimiento rectilíneo y velocidad constante.

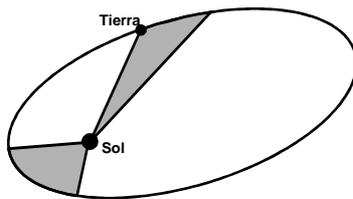


Figura 1.8. Figura que expresa las dos primeras leyes de Kepler.

En principio, según publicara en *Il Saggiatore* (1623), Galileo concibió una teoría corpuscular de la luz, compuesta por átomos indivisibles y velocidad infinita. Pero luego en sus *Discorsi* (1638) cambió de opinión, proponiendo que su velocidad era finita.

Durante mucho tiempo, Galileo y sus contemporáneos creyeron que los planetas describían órbitas circulares. Anteriormente Ptolomeo (90-168) y Copérnico (1473-1543) lo aseguraron también. Todos ellos se basaron en que la naturaleza actúa siempre con la mayor sencillez. Uno de los mayores aportes de Kepler (1575-1630), contemporáneo de Galileo, es haber encontrado mejores resultados para la descripción de las trayectorias de los planetas utilizando elipses. Kepler se basó en las observaciones de Thycho Brahe (1546-1601) considerado el reformador de las observaciones astronómicas simplistas. Para ello ideó instrumentos astronómicos de gran porte y cuidadosa construcción, aunque no dispuso de anteojos astronómicos. Ellos comenzaron a ser utilizados por Galileo pocos años después de la muerte de Thycho. Se dice también que Kepler nunca dispuso de un antejo astronómico, ni de la forma de construirlo, pese a sus pedidos a Galileo. Sin embargo, otros autores sostienen que por el contrario Galileo le envió a Kepler una carta con explicaciones sobre su construcción y, como éste no pudo hacerlo, le hizo llegar un telescopio.

Copérnico, basándose en un cuidadoso análisis, encontró que reordenando las órbitas de los planetas y ubicando al sol en el centro, aparecía una sorprendente regularidad. El planeta más lento, Saturno, era el más alejado del sol, mientras Mercurio era el más rápido y el más cercano al sol. Tanto Kepler como Galileo aceptaron el sistema heliocéntrico, terminando así con la concepción de Ptolomeo de un Universo geocéntrico. Todos los estudios de Kepler referidos al sistema solar se basaron fundamentalmente en el material dejado por Thycho y en sus propias observaciones de Marte. Así, encontró sus dos primeras leyes que sostienen: (1) que las órbitas de los planetas son elípticas, con el sol en uno de sus focos; y (2) que las velocidades areales de los planetas son constantes. O dicho de otra manera: el radio vector sol-planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Cuanto más cerca del sol está el planeta, más rápidamente se mueve ó mayor es su velocidad lineal (Fig. 8).

Casi una década más tarde, y basándose en las observaciones de Brahe sobre los satélites de Júpiter, Kepler presentó su tercera ley. Ella relaciona la distancia a del planeta al sol con el período de revolución T , encontrando que: $a^3/T^2 = K$ (constante).

La primera ley de Kepler establece que las órbitas planetarias son elípticas, condenando al olvido a las órbitas circulares. La segunda ley señala que los movimientos de los planetas no son uniformes: su velocidad aumenta en las cercanías del sol. De la tercera ley, presentada nueve años más tarde, Kepler no parece haber sacado mayores conclusiones. Sí, en cambio, fue fundamental para Newton (ver expresión 1.6).

El 8 de enero de 1642, completamente ciego y condenado por la Inquisición a reclusión domiciliaria, en la villa de Arcadi, cerca de Florencia, moría Galileo. Casi un año después, el 5 de enero de 1643, nacía Newton (de acuerdo con el calendario que se considere 1643 o en 1642, en este último caso en el mismo año de la muerte de Galileo) para tomar la posta que dejara Galileo, avanzando hasta ofrecer la primera explicación coherente y fundamentada del funcionamiento del Universo.

Con anterioridad a Newton, Galileo y Kepler habían pensado que una fuerza central proveniente del sol mantiene en órbita a los diferentes planetas. Se había aludido en principio a fuerzas atractivas de origen magnético. Pero las enormes distancias entre los planetas, y más aún el hecho que cualquier objeto amagnético (por ejemplo de madera) fuera atraído, hicieron que pronto descartaran esta línea de pensamiento.

Veamos como construyó Newton su teoría de la gravitación. Inspirado en los estudios de Galileo presentó dos de

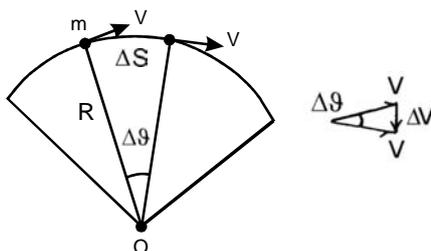


Figura 1.9. Movimiento circular alrededor de O ($v = \text{cte.}$).

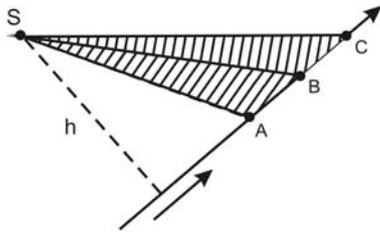


Figura 1.10. Movimiento puramente inercial. La masa m se desplaza con $v = \text{cte.}$ $AB=BC \dots$ También las áreas son iguales $SAB = SBC \dots$ debido a que ellas tienen la misma base y altura h .

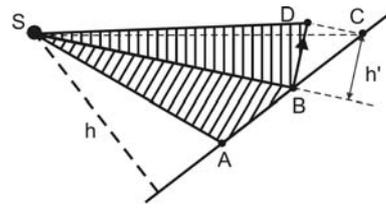


Figura 1.11. Ante una fuerza central F_c , la trayectoria es ahora ABD. La igualdad de las áreas se mantiene dado que: $SBC = SBD$ (tienen la misma base SB y la misma altura h'). DC es paralela a SB.

las tres leyes que hoy llevan su nombre. La primera de estas leyes fue formulada diciendo que un cuerpo animado de una velocidad rectilínea constante, persistirá indefinidamente en ella, en ausencia de otras fuerzas que lo perturben.

Su segunda ley, en apariencia simple, era también fundamental. Al recibir una Fuerza F , un objeto adquiere una aceleración a . Esta es tanto mayor cuanto menor es la resistencia que opone el objeto al cambio. A esta resistencia la denominó masa m , y la consideró constante, e independiente del movimiento, de modo que:

$$F = ma \tag{1.2}$$

La tercera ley corresponde a las acciones recíprocas entre cuerpos, y es -sin duda- de enorme trascendencia. Es el principio de acción y reacción, que expresa las interacciones tanto entre los planetas como entre objetos cualesquiera.

Para avanzar en sus estudios Newton creó el análisis infinitesimal, abriendo un camino notable para la matemática e inaugurando al mismo tiempo una disputa histórica con Leibnitz (si se quiere ríspida y desleal por parte de Newton), sobre la paternidad de tan estupendo hallazgo, al cual es muy probable que ambos hayan llegado independiente y contemporáneamente.

Otro paso importante lo dió Newton al comprender que existe una fuerza central, llamada centrípeta, y al encontrar una expresión para la aceleración que se origina ante el cambio de dirección que experimenta un objeto en su movimiento circular: $a_c = v^2/R$.

Este estudio también originó una disputa, esta vez entre Newton, quien en este caso parece haber sido quien lo concibió primero, y Huygens, quien -no obstante- la publicó antes que Newton.

La Fig. 9 muestra un cuerpo de masa m que gira alrededor de O (a distancia R de m) con velocidad lineal de módulo constante v . En este movimiento, la velocidad lineal es:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \Delta \theta}{\Delta t} = R w, \text{ con } w = \frac{\partial \theta}{\partial t} : \text{velocidad angular}$$

A partir de aquí podemos calcular la aceleración centrípeta normal a_n debida al cambio V en la dirección de la velocidad v .

Así:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = R w^2 \tag{1.3}$$

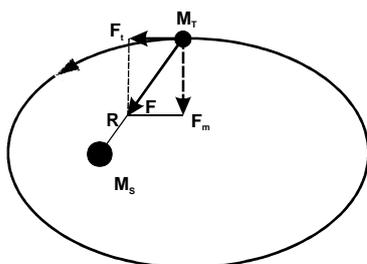


Figura 1.12. Atracción en el sistema Tierra-Sol.

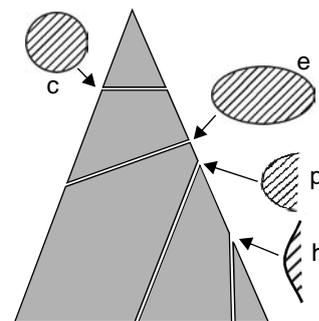


Figura 1.13. Secciones cónicas que representan las órbitas de los cuerpos celestes (e, p, h).

Debido a que el módulo de la velocidad v es constante, la otra aceleración (la aceleración tangencial) es cero.

Munido de estas herramientas, Newton comenzó a analizar las leyes de Kepler, tratando de encontrar para ellas un sentido físico. Hasta entonces se las consideraba sólo numerología. Las Figs. 10 y 11 muestran los resultados alcanzados.

Incorporando la fuerza central F_c hacia S, la trayectoria se quiebra siguiendo una sucesión de segmentos que si se hacen infinitamente pequeños conforman una curva.

Ante la sugerencia de Hooke, Newton trabajó sobre la idea de una atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia ($1/d^2$). Con la llamada “prueba lunar” realizó una eficaz verificación. Sabía que sobre la superficie terrestre, distante un radio R del centro del planeta, un cuerpo cae recorriendo casi 5 metros en 1 segundo. La luna, distante unos 60 radios terrestres, caerá $1/60^2$ de 5 metros o sea unos 0.14 centímetros. Con los datos disponibles, Newton comprobó con suficiente aproximación este resultado, valiéndose de la suposición de un movimiento circular con velocidad uniforme para la luna (sin ser afectada por el sol) y su “caída” desde su posición tangencial (inercial) en un segundo.

Al llegar aquí, Newton disponía de todo lo necesario para encontrar la expresión correspondiente a la atracción universal.

Partió de su segunda ley, imaginando un planeta de masa m que se mueve sobre una órbita circular de radio R

$$F = ma_n = m \frac{v^2}{R} \quad (1.4)$$

Si T es el tiempo que necesita el planeta para dar una vuelta completa: $v=2\pi R/T$, y $F=m(2\pi R/T)^2/R$, ó bien:

$$F = \frac{4\pi^2 R}{T^2} m \quad (1.5)$$

Aquí introdujo la expresión encontrada para la tercera ley de Kepler: $K = R^3/T^2$, de donde:

$$F = m \frac{4\pi^2 K}{R^2} \quad (1.6)$$

Si multiplicamos y dividimos por M_s (la masa del sol) se tendrá:

$$F = \left(\frac{4\pi^2 K}{M_s} \right) \frac{M_s m}{R^2} = G \frac{M_s m}{R^2} \quad (1.7)$$

Debido a que esta ley es válida para todo objeto de la naturaleza:

$$F = G \frac{m m'}{d^2} \quad (1.8)$$

La Fig. 12 ilustra el caso para el sistema Tierra-Sol.

A partir de la ecuación de movimientos de Newton:

$$F = M_T \ddot{R} \quad (1.9)$$

y realizando una doble integración, se obtiene la posición del vector R .

Newton pronto se dió cuenta que las órbitas de los cuerpos celestes describen no sólo elipses sino, en general, secciones cónicas como parábolas o hipérbolas, con el sol ocupando uno de sus focos (Fig. 13).

Cuando la energía cinética que lleva el planeta en movimiento no es suficiente para llevarlo al infinito, su órbita

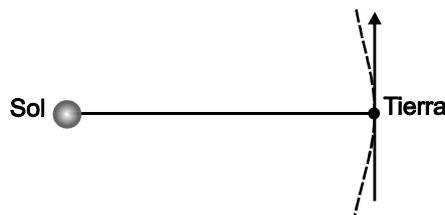


Figura 1.14. La Tierra como una nave espacial recibe la luz del sol en dirección perpendicular a su trayectoria. El movimiento de la Tierra durante el corto período que dura el experimento puede considerarse como rectilíneo y uniforme.

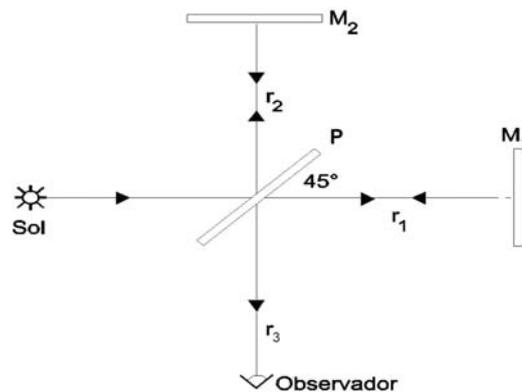


Figura 1.15. Esquema elemental del interferómetro de Michelson. La lámina P (a 45° respecto del haz del sol) con un delgado revestimiento de plata en la cara posterior, refleja la mitad del haz luminoso (rayo r₂) y transmite la otra mitad (rayo r₁). Los espejos M₁ y M₂ a exactamente la misma distancia d de P, son perpendiculares entre sí y devuelven los rayos hacia P, donde vuelven a reflejarse y refractarse parcialmente, de modo que en r₃ hay dos rayos superpuestos que pueden interferir entre sí. Si se hace girar el aparato (que puede moverse sobre una plataforma que flota sobre mercurio), las franjas de interferencia mantendrán una posición invariable si la velocidad de la luz es la misma en cualquier dirección. Esto fue exactamente lo que ocurrió en la experiencia conducida por Michelson.

será elíptica. Tanto la elipse como la circunferencia son las únicas secciones cónicas que dan lugar a movimientos recurrentes. Las órbitas elípticas de los planetas son casi circulares, en cambio muchos cometas se mueven en elipses sumamente alargadas. Si el objeto sigue una órbita parabólica o hiperbólica, pasará sólo una vez cerca del cuerpo atractivo alejándose luego de él para siempre.

En realidad, los planetas en el sistema solar interactúan entre sí. El sistema aislado Tierra-Sol es una abstracción o, si se quiere, una simplificación. Sólo en un sistema tal, la órbita sería estrictamente elíptica. De existir otros planetas, la órbita sufriría alteraciones. El problema matemático es de gran complejidad. Aún si consideramos el caso de sólo dos planetas y el sol, estaremos ante el problema de los tres cuerpos, aún no resuelto completamente. Sin embargo desde el punto de vista práctico tenemos suerte. Dada la gran masa del sol, mil veces superior a la masa de Júpiter, planeta que lo sigue, las órbitas se calculan suficientemente bien ignorando otros efectos (véase Fig. 12).

La teoría de Newton pronto se hizo fuerte, muy fuerte. Su capacidad predictiva, el éxito de sus validaciones, le acordaron un reconocimiento general y la admiración de físicos, de astrónomos y de toda la comunidad en general.

El alcance de la teoría de Newton es notable. Ella comprende a las leyes de Kepler y sus explicaciones físicas; al movimiento de los planetas y su forma (por ejemplo el achatamiento de la Tierra); al fenómeno de las mareas; a la precesión; a la predicción de eclipses; a la predicción de la existencia de nuevos planetas. También inspiró a Coulomb, quien propuso la conocida expresión de las cargas eléctricas, de notable analogía con la fórmula newtoniana.

Newton, prosiguiendo a Kepler y a Galileo, contribuyó decididamente al éxito de la doctrina de Copérnico. Su ley de gravedad controla tanto al movimiento de una manzana, como al movimiento de la luna alrededor de la Tierra, y de ésta alrededor del sol. Su obra fundamental “Los Principios” (1687) comprende todos los conocimientos anteriores y gran parte de las bases de todos los posteriores. En él explicó los conceptos de masa, peso y fuerza. Formuló las tres leyes del movimiento y la ley de gravedad, dándole carácter de universal. Newton ha sido considerado por no pocos como el padre de la astronomía moderna, de la matemática y de la física.

Al mismo tiempo que Leibnitz creó el cálculo diferencial e integral, y también el espectro solar a partir del análisis de la luz natural.

Edmundo Halley, editor de “Los Principios”, pronosticó el regreso, luego de 65 años, del cometa bautizado con su nombre. Clairaut calculó luego, en base a perturbaciones de Júpiter y Saturno, una órbita más exacta de aproximadamente 76 años. U.J.J. Leverrier en 1846, a partir de las perturbaciones de Urano, descubrió a Neptuno. De un modo similar, P. Lowell descubrió en 1930 a Plutón.

En 1798, Enrique Cavendish realizó la primera comprobación experimental de (1.8) cuando determinó en laboratorio la constante de gravitación universal G .

Sin embargo la teoría, no obstante su reconocida fortaleza, no pudo explicar fundamentalmente dos cosas: ni la naturaleza de la gravedad, ni el corrimiento del perihelio de la órbita de Mercurio de casi 43" por siglo.

Agregamos a ello que la teoría, al ser netamente mecanicista, no explica los cambios que se producen en el interior de la materia, imprescindibles hoy para comprender las mutaciones del Universo.

La teoría de Newton supone: masas constantes, efectos atractivos de propagación instantánea, un espacio absoluto y un tiempo absoluto.

La teoría newtoniana resistió algo más de 200 años. Al llegar a fines del siglo XIX y principios del siglo XX, una serie de hechos inesperados, de descubrimientos físicos asombrosos, comenzaron a poner en aprietos a la teoría y a su base filosófica.

Las admirables ecuaciones de Maxwell no reconocen la acción a distancia y señalan que el tiempo no es absoluto.

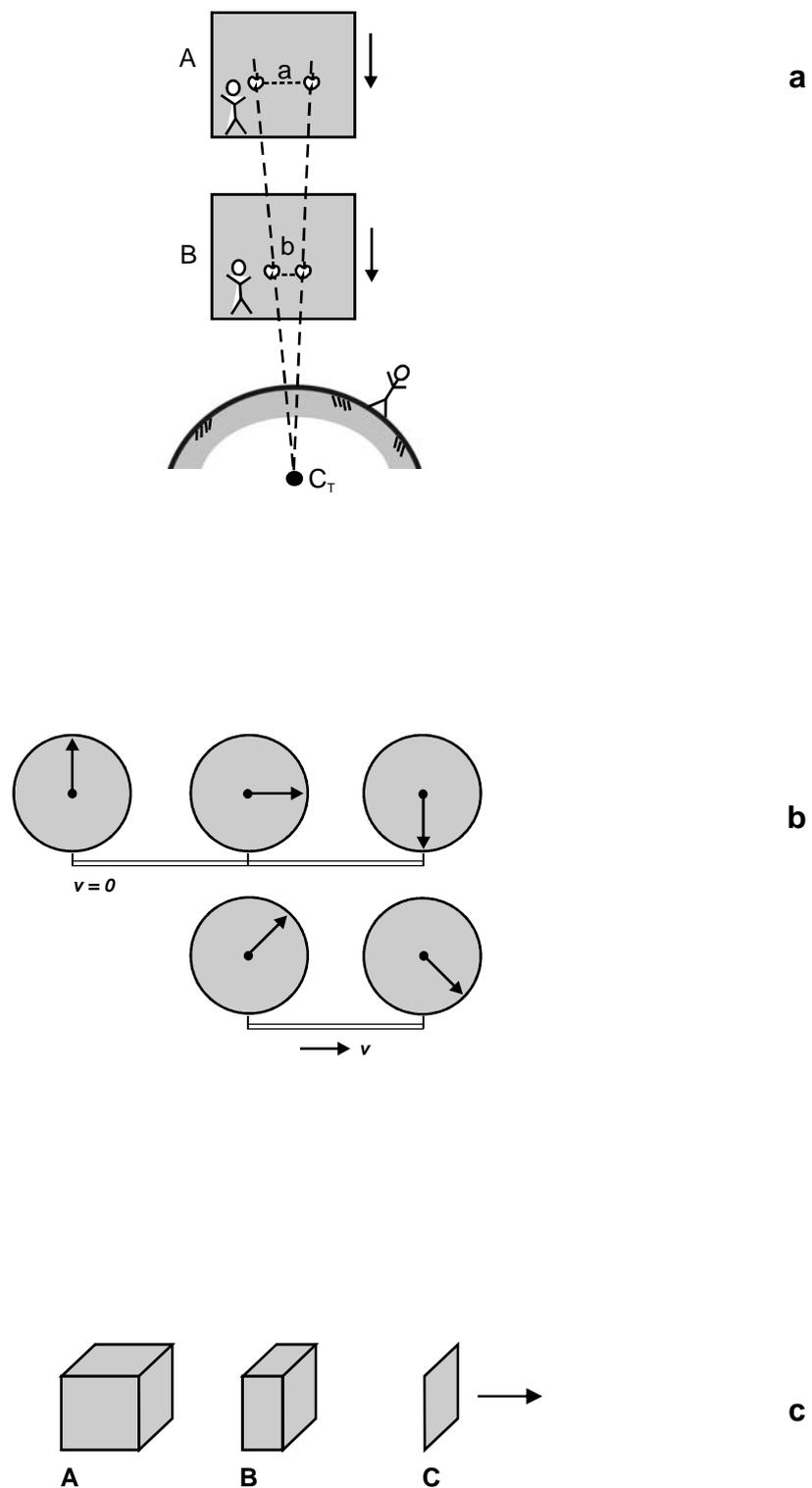


Figura 1.16. a. Experiencia conceptual de Eddington que demuestra que los movimientos son relativos. El observador interior creerá que las manzanas se atraen ($b < a$) sin cambiar su nivel, cuando el recinto cae de A a B. Por el contrario, el observador externo verá que las masas se deslizan hacia el centro de la Tierra. b. Cambio de marcha de los relojes de un sistema en movimiento (abajo) respecto de los relojes de un sistema inmóvil (arriba). c. Contracción del espacio. A: cubo en reposo. B: cubo que se contrae en un 60 % en dirección del movimiento con velocidad $v = 240000$ km/s. C: el cubo alcanza la velocidad máxima de 300.000 km/s (máxima contracción).

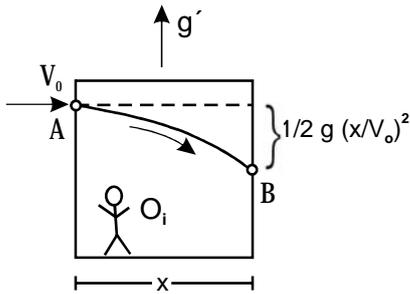


Figura 1.17. Experiencia mental de Einstein.

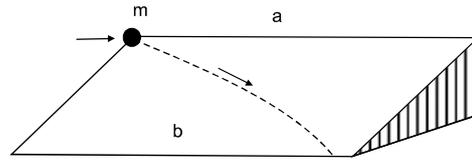


Figura 1.18. Experiencia de Galileo.

Ellas tienen exactamente la misma forma, cualquiera sea el sistema móvil en que se formulen, y llevan impresas en su concepción a la teoría de la relatividad, que luego a principios del siglo XX formulara Einstein.

Los físicos descubrieron que los electrones emitidos por las sustancias radioactivas se desplazaban a grandes velocidades, por entonces inimaginables, de 15000 km/s. Las velocidades consideradas antes eran enormemente más bajas. Pensemos que una locomotora de entonces no llegaba a recorrer 50 m en 1 s.

Además se descubrió que los electrones a tan altas velocidades alteraban su masa y esto contradecía a Newton, quien había sostenido que la masa era constante respecto del movimiento.

Las mediciones precisas, cuidadosas, de Michelson encontraron que la velocidad de la luz tenía un valor $c = 300.000$ km/s, y además revelaron un hecho sorprendente. Su valor era independiente de la velocidad del observador (hoy se admite para c el valor 299.792,458 km/s).

Antes Galileo había sospechado que su propagación no era instantánea; y luego un contemporáneo de Newton, Röemer, astrónomo danés, encontró un valor finito para c en 1676. Él tomó como referencia el ocultamiento del satélite más cercano a Júpiter y advirtió que las predicciones de los eclipses se atrasaban más y más a medida que la Tierra se alejaba de Júpiter. Esto es debido a que la luz recorría cada vez mayor camino. La propagación de la luz no es instantánea, se dijo, y con los valores de distancias de entonces obtuvo para c un valor de 220.000 km/s. Digamos de paso que esta ingeniosa determinación de la velocidad de la luz constituye otra prueba a favor del sistema copernicano.

A mediados del siglo XIX, operando con ruedas dentadas y con espejos, con nuevos experimentos se obtuvieron valores de casi 300.000 km/s. Años más tarde y como ya lo señaláramos Michelson, en experiencias que le llevaron toda su vida, trabajando con un interferómetro por él diseñado, encontró para la velocidad de la luz un valor de 300.000 km/s y, asombrosamente, aseguró que este valor era independiente del movimiento del observador.

Hasta ese momento los físicos admitían que el desplazamiento de la luz necesitaba del éter, una trama tenue, ideal, completamente fluida, perfectamente elástica e imponderable, sin peso, de modo tal que esta trama sutil hacía posible transportar a través de millones de kilómetros a las radiaciones ondulatorias sin hacer decrecer su energía inicial. ¿No sería un hábito mental que nos exigía un soporte? Del mismo modo, en épocas lejanas se creía que era imprescindible que hubiera soportes para la Tierra porque de lo contrario caería en el espacio. Debido a las dudas sobre la presencia del éter, Michelson se empeñó en comprobar su existencia. Él debía frenar en alguna forma a la luz. Para comprender cómo el éter debería ofrecer un obstáculo, un freno al pasaje de la luz, repararemos en la siguiente analogía: los pescadores del río Paraná saben que se tarda más en remar aguas arriba una distancia D en dirección de la corriente y volver al punto de partida, que en recorrer una distancia igual D transversalmente a la corriente ida y vuelta. Al apelar a esta analogía, Michelson pensó que el éter fijo (sistema de referencia fijo) retardaría menos a la luz si los rayos se propagan perpendicularmente al movimiento de la Tierra alrededor del sol, que si lo hicieran en el espacio en la misma dirección que aquella. De no existir el éter no importaría cual

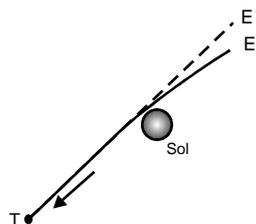


Figura 1.19. Curvatura de un rayo luminoso al pasar cerca del Sol. Durante un eclipse, la luz de una estrella E, que pasa cerca de la superficie del Sol, se verá desde la Tierra como proveniente de E', es decir como si la estrella se hubiera desplazado. Este desplazamiento aparente es pequeño.

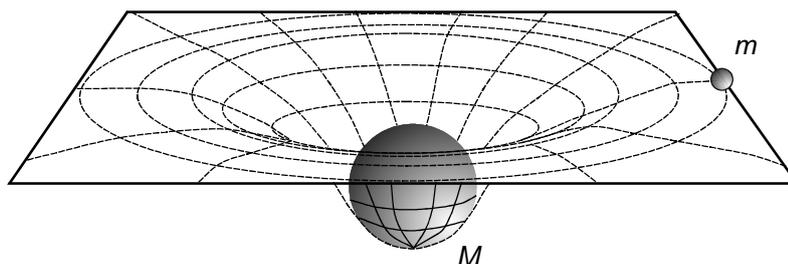


Figura 1.20. La presencia de una masa M deforma el campo, curvándolo. Un símil no riguroso podría ser una lámina (de hule por ejemplo) que se deforma (se deprime) al soportar a la masa M . Pero en este caso debemos ser cuidadosos. No es la masa M la que atrae o determina el movimiento de m , sino el espacio curvo el que da forma a la trayectoria que siguen los objetos.

fuera la dirección de los rayos de luz. Michelson consideró que la Tierra era una nave espacial que gira alrededor del sol con respecto al éter inmutable (sistema de referencia fijo). El plan trazado consistía en enviar un rayo de luz sobre una distancia conocida en dirección al sol y en dirección perpendicular a él, recorriendo la misma distancia. Ambos rayos deberían ser emitidos en el mismo instante y luego de ser reflejados y de recorrer la misma distancia, deberían regresar al punto de partida. Los resultados fueron asombrosos. Michelson probó que la luz se propagaba con la misma velocidad en todas direcciones, independientemente del desplazamiento del Observador. Todo ocurría como si la Tierra estuviera siempre inmóvil (Figs. 14 y 15).

Al realizar los experimentos, Michelson pensó en la composición de velocidades de Galileo (1.1). Pero la experiencia contradecía estas ecuaciones: las dos mitades del haz de luz dividido retornaban virtualmente en el mismo instante.

La forma de solucionar estos hechos exigiría admitir: $c \rightarrow \infty$, pero c era finita. El físico irlandés Fitzgerald propuso que una varilla viajando en la misma dirección que la luz debía contraerse. Pero se sabe que la resistencia eléctrica de un alambre depende de su longitud y puesto en movimiento el alambre su resistencia no cambia.

Hacia 1905 Einstein dijo: entre un sistema de cuerpos que se mueven unos respecto de otros con movimiento rectilíneo y uniforme, puede suponerse en reposo a cualquiera de ellos, debido a que ningún experimento, ni óptico ni eléctrico ni mecánico, revelará la más mínima diferencia de comportamiento.

Recordemos el caso ya comentado en el que Galileo razonó en base a dos barcos, uno fijo y otro móvil (con velocidad rectilínea constante) ó bien pensemos en un tren desplazándose con v constante. Si hacemos rebotar verticalmente en el piso del tren una pelota de tenis, ésta regresará a la misma posición del piso, mientras para un observador exterior, luego de botar una vez, la pelota se desplazaría unos 40 m, o sea la distancia recorrida por el tren entre los dos botes. No existe pues, como ya señaláramos, una posición absoluta o bien un reposo absoluto o espacio absoluto. No tenemos forma de preferir uno u otro observador como bien puede verse en otra experiencia conceptual, debida a Eddington (Fig. 16a). El espacio es relativo al observador, al sistema de referencia que adopte, y debido a que la velocidad c es constante e independiente del observador, el tiempo deberá también variar con el observador para garantizar la constancia de c . Las ecuaciones de Maxwell señalaban ya que el tiempo no es absoluto. En otras palabras, cada observador debe tener su propia medida del tiempo, que es precisamente la del reloj que se mueve junto con él. Idénticos relojes moviéndose con observadores que se desplazan a velocidades diferentes no tienen por qué coincidir.

Einstein demostró que:

- 1) el tiempo es relativo: se dilata en un sistema de referencia en movimiento. Por ejemplo, si un vehículo pudiera desplazarse a 240000 km/s, los relojes en su interior marcarían 0.6 s, cuando en un sistema en reposo los relojes marquen 1 s (Fig. 16b).
- 2) el espacio es también relativo: se contrae en la dirección de su movimiento. La Fig. 16c señala la contracción espacial. El cubo en reposo (A) se contrae en un 60 % al alcanzar la velocidad de 240000 km/s (B).

Tanto las contracciones mutuas de las longitudes como el atraso mutuo de los relojes son muy semejantes a los efectos de la perspectiva. Por ejemplo, si dos personas de la misma altura se alejan, se detienen y se vuelven para mirarse, cada una pensará que la otra ha disminuido de tamaño. Sin embargo, esta contracción mutua no nos parece extraña, simplemente porque nos hemos acostumbrado a ella.

El tiempo y el espacio son pues cantidades dinámicas, mientras c es la constante central. Debido a este carácter dinámico de ambos, debemos hablar de una entidad: el espacio-tiempo.

Consecuencia cinemática

Si un tren se mueve respecto de la vía con velocidad v , y dentro del tren un móvil se desplaza con velocidad u respecto del tren, la velocidad del móvil respecto de la vía no será $u+v$ como viéramos en (1.1) sino:

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} \quad (1.10)$$

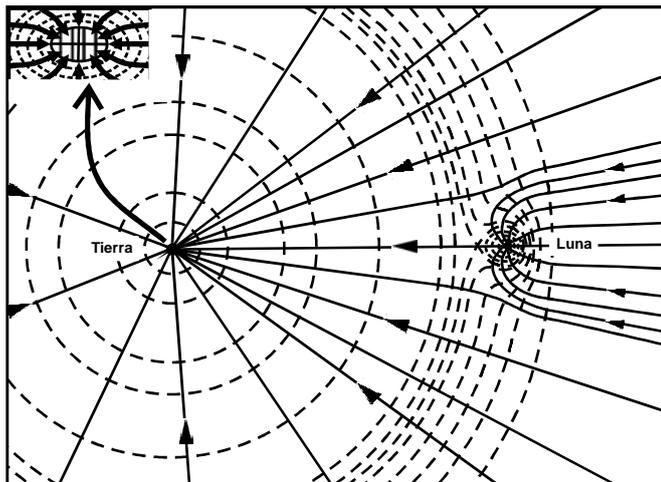


Figura 1.21. Campo gravitatorio del sistema Tierra-Luna (arriba izquierda, detalle). Las líneas de trazos son las equipotenciales y las flechas en líneas sólidas las líneas de fuerza.

con c : velocidad de la luz.

Consecuencias dinámicas

Otra cuestión importante encontrada por Einstein fue la equivalencia entre masa y energía de acuerdo con una sencilla ecuación:

$$E = mc^2 \tag{1.11}$$

con E : energía y m : masa. La masa varía con la velocidad v de acuerdo con:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{1.12}$$

con m_0 : masa en reposo

Es decir, si la masa m inicialmente en reposo se mueve respecto del observador con velocidad v , ella aumentará según la expresión (1.12).

Once años después de haber presentado su teoría de relatividad restringida, válida para movimientos rectilíneos y uniformes, Einstein generalizó su teoría haciéndola válida para movimientos cualesquiera. Una experiencia conceptual lo puso en el camino de la solución. Volvamos al recinto de Fig. 17 y pensemos que está ahora en un campo hipotéticamente ingrávido. Si de pronto empujamos el recinto imprimiéndole un movimiento uniformemente acelerado g hacia arriba, el observador interior percibiría que los objetos “caen” exactamente de la misma forma que si estuviéramos en el campo gravitatorio conocido. Si se colocan masas de diferentes pesos y de diferentes sustancias, todas caerían en la misma forma, tal como lo comprobara Galileo. Llegó así a la conclusión que en cada punto del espacio no es posible determinar si hay un movimiento uniformemente acelerado sin campo gravitatorio o si en realidad hay un campo gravitatorio newtoniano. Este es su famoso principio de equivalencia.

Luego de largas y profundas reflexiones, Einstein pensó que la explicación sobre la gravitación estaba en el espacio mismo. Lejos de mantener el espacio euclídeo, sostuvo que el espacio es curvo.

Los físicos del siglo pasado edificaron toda la física en base al concepto de materia. Hoy se conciben dos conceptos: materia y campo, con enormes depósitos de energía para la primera y menor energía para el campo que envuelve a la materia.

Volvamos al recinto en movimiento hacia arriba con aceleración $-\vec{g}$ (o - lo que es lo mismo - ubicado en un campo gravitatorio \vec{g}). En un campo tal, una pequeña bolita es lanzada horizontalmente desde A (Fig. 17) con velocidad constante v_0 en la pared de la izquierda. Del mismo modo que en el caso de la composición de los dos movimientos analizada por Galileo (Figs. 5 y 18), la bolita describirá una curva e interceptará a la pared de la derecha en B. La trayectoria para un observador interior O_i se presentará como una curva.

Einstein no se limitó a considerar casos sólo mecánicos como fuera descripto, sino que extendió estos conceptos a todo tipo de experimentos. Por ejemplo, sabemos que la luz es una propagación electromagnética. Ella se comporta como onda y como partícula y por supuesto propaga energía. Es fácil imaginar que la bolita de las Figs. 17 y 18 puede ser

reemplazada por la luz. Y así, la luz se curva al atravesar un campo gravitatorio (Fig. 19). Como ya lo señaláramos, Einstein se dio cuenta que la explicación del origen del campo gravitatorio estaba en el espacio mismo. Abandonó entonces la propagación rectilínea del espacio euclideo, concibiendo un espacio curvo donde los efectos son locales y no remotos como lo creyera Newton. Einstein vio en la trayectoria de nuestro planeta la prueba evidente de la naturaleza no euclidea del espacio. En realidad no existe ninguna fuerza atractiva desde el sol. Lo que ocurre es que el espacio de 3 dimensiones que rodea al sol es curvo, y sólo significativamente lejos de toda masa gravitacional puede considerarse euclideo. Además, ante la curvatura del espacio tenemos la curvatura del tiempo. Él transcurre más lentamente cuanto mayor es el campo gravitacional. En síntesis, la gravitación es la manifestación del espacio-tiempo. Así, la existencia de masa como podemos ver en las Figs. 19 y 20, origina el espacio curvo. En la Fig. 21, la presencia de la masa lunar modifica el campo distante de la Tierra. Ambas masas, la de la Tierra y la de la Luna, originan en sus respectivos entornos campos curvos. La fuerza gravitatoria no depende directamente de las masas en juego, pero sí se manifiesta por la curvatura del espacio-tiempo. La teoría de la relatividad general retiene el principio de inercia, pero para un espacio curvo.

Recapitulando, para Einstein no hay fuerza de gravedad, ni éter. No hay necesidad de ellos dado que los planetas siguen los caminos de mínima distancia (las geodésicas) en el espacio curvo. Al llegar aquí debemos señalar que las órbitas de los planetas serían líneas geodésicas en el espacio tridimensional. En la imagen einsteniana el espacio mismo resulta curvo, mientras los planetas se mueven según líneas geodésicas, es decir geodésicas de este espacio tetradimensional (Fig. 22) que denominamos l . Debido a que en la figura las escalas horizontal y vertical no guardan relación real, debemos señalar que la geodésica l está realmente tan estirada que se aparta muy poco de una línea recta.

Es el espacio el que se curva, dijo Einstein. Recordemos que es el recinto acelerado (Fig. 17) el que “curva” el espacio. En realidad el rayo de luz que lo atraviesa sigue siendo recto. Si reemplazamos el recinto móvil por un campo masivo, podremos asegurar que donde exista masa, ella determina un espacio curvo a su alrededor, es decir, localmente. Si nos referimos a la masa de nuestro planeta, ella origina un espacio cóncavo y por él se desliza la luna, de la misma forma que se mueve una bola por las paredes curvadas del plato de una ruleta (Fig. 20). En suma, la gravitación se describe ahora como la curvatura del espacio en presencia de materia. Ahora podemos comprender tanto la naturaleza del campo de gravedad como la recomendación de la Unión Astronómica Internacional, hoy en plena vigencia, de introducir la teoría general de la relatividad para la definición de un sistema de referencia espacio-temporal. Al existir una densidad cósmica, el Universo como un todo se curva, ya no es euclideo, está determinado por la distribución de materia y por su velocidad.

Ambas teorías, la de la relatividad especial (T.R.E.) y la de la relatividad general (T.R.G.), han sido bien verificadas

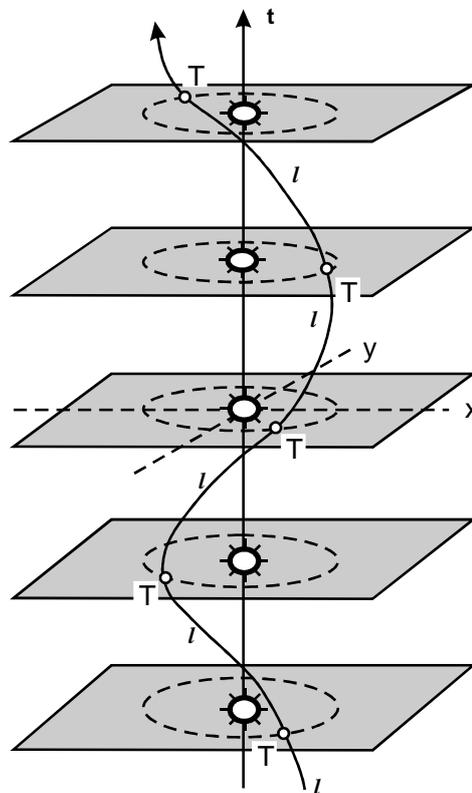


Figura 1.22. La línea helicoidal de la Tierra l es una geodésica en un espacio-tiempo (x,y,t) .

experimentalmente. Además, conceptualmente, ellas han permitido realizar avances técnicos y teóricos en áreas tales como la astronomía, la geodesia, la astrofísica, y principalmente en áreas significativas de la física. Por ejemplo, es sabido que la T.R.E. es el edificio conceptual de toda la física de partículas elementales y de sus metodologías experimentales. Otro tanto ocurre con la T.R.E. En efecto, hacia 1939-1940, Einstein, Infeld y Hoffmann trataron con relatividad general el problema de N cuerpos, encontrando ecuaciones que describen tanto su geometría como su evolución. Ellas son usadas en el análisis de órbitas planetarias de nuestro sistema solar. Por ejemplo, el Caltech Jet Propulsion Laboratory las utiliza, convenientemente modificadas, para calcular las efemérides con las cuales observan los planetas y las naves espaciales.

También la dilatación del tiempo en la T.R.E. fue confirmada utilizando relojes atómicos con precisión de un billonésimo de segundo, al igual que las marchas más lentas de los relojes originadas por la gravedad en las proximidades de una gran masa. Esta dilatación, junto con los efectos del movimiento orbital, deben ser consideradas en la programación del sistema G.P.S., notable tecnología moderna.

A los tres tests clásicos: el corrimiento del perihelio de la órbita de Mercurio, el desvío de la luz en las cercanías del Sol, y el atraso de los relojes en campos gravitacionales, R.A. Hulse y J.H. Taylor, ambos galardonados con el Premio Nobel en 1993, agregaron un test más definitorio aún que los anteriores restringidos a nuestro sistema solar. En efecto, ellos observaron durante 18 años un pulsar binario, concluyendo que la pérdida de energía del sistema era consistente con los cálculos basados en la Teoría de la Relatividad General (T.R.G.).

Finalmente digamos que en la trascendente teoría de Einstein, si bien el espacio, el tiempo y la masa (la energía), son relativos, existen absolutos esenciales; así tanto la velocidad de la luz c como las leyes de la naturaleza son las mismas cualquiera sea el sistema de referencia elegido.

2. EL CAMPO GRAVIMÉTRICO TERRESTRE

Introducción a la construcción de la superficie física de la Tierra

2.1. Introducción - El objetivo de la geodesia

Todas las operaciones geométricas que tienden a la preparación de planos, tanto topográficos como de construcción, utilizan un sistema de referencia local definido por la dirección de la línea de gravedad (que constituye la vertical) y los planos horizontales perpendiculares a ella.

Este sistema de referencia tiene un doble mérito: por una parte sus aplicaciones (estabilidad de las construcciones, escurrimiento de las aguas) tienen un gran interés; por otra parte, definir este sistema de referencia en forma práctica es sumamente sencillo. En efecto, dado que la dirección de la vertical es normal a la superficie libre de un líquido en equilibrio, ella puede ser obtenida con gran precisión ya que coincide con el eje de rotación de un nivel de burbuja que en el transcurso de un giro completo no se desplaza.

Si se trata de una extensión limitada, se puede considerar que prácticamente tanto las verticales entre sí como las superficies consideradas horizontales entre sí son respectivamente paralelas. No obstante, esto no es válido para superficies extendidas, y menos aún para la Tierra entera.

La geodesia tiene por objeto la determinación de la forma del sistema de referencia. Aparentemente pareciera que es un problema geométrico, sin embargo es esencialmente un problema físico: la gravitación. Recordemos brevemente algunas etapas en la solución de este problema. En el Siglo III antes de nuestra era, Eratóstenes determinó el radio de la Tierra o la longitud del meridiano con precisión 1:100.

Los estudios de Newton en el siglo XVII lo convencieron de que la Tierra era un cuerpo aplastado en los polos, y obtuvo un valor primitivo de su aplastamiento: α . En efecto, él asumió que la Tierra era un cuerpo líquido, homogéneo y en rotación, deduciendo un valor de α de 1/230. La necesidad de representar la forma del planeta llevó a los científicos a realizar mediciones en regiones alejadas. De allí, las expediciones de Bouguer y La Condamine al Ecuador (1735-1744), y de Maupertuis a Lapponia (1736-1737). Sus mediciones de arcos de meridiano establecieron que la Tierra es abultada en el ecuador (el radio ecuatorial es 21 km mayor que el radio polar).

Sin embargo, el objetivo de estas notables expediciones era más físico que geométrico, dado que se trataba de dilucidar entre la teoría de gravitación Universal formulada por Newton y las ideas de Cassini, que sostenían que la Tierra se alargaba siguiendo el eje polar.

A fines del Siglo XVIII, Delambre y Mechain definieron el metro a través de la medición del meridiano. Todas las operaciones que se realizaron en el Siglo XIX se propusieron determinar las dimensiones del elipsoide que mejor aproximara a la Tierra. Sin embargo, las divergencias encontradas entre los resultados más precisos hicieron comprender que el problema estaba mal planteado. Hoy los científicos tratan de determinar la forma real de la Tierra sin hacer ninguna hipótesis "a priori", y si bien emplean un elipsoide convencional como sistema de referencia lo utilizan en realidad para determinar desde él los apartamientos.

Desde Eratóstenes hasta fines del Siglo XIX sólo las mediciones de ángulos y de longitudes tenían la precisión suficiente para contribuir a la solución del problema.

Aunque Bouguer había realizado mediciones de la intensidad de la gravedad que le permitieron llegar a interesantes conclusiones, ellas fueron sólo intentos aislados. Recién con Hayford (1909) la determinación de la forma de la Tierra incorporó irregularidades locales de gravedad. Estos estudios se limitaron a calcular variaciones teóricas de la gravedad en base a la forma del relieve, utilizando hipótesis formuladas medio siglo antes (Pratt, 1855; Airy, 1855). En una etapa ulterior los científicos se esforzaron en verificar estas teorías discutiendo las mediciones de gravedad disponibles.

Actualmente las mediciones de gravedad se han hecho fáciles y precisas y se han multiplicado. Su rol en la determinación de la forma de la Tierra se hace cada vez más importante dado que son más cómodas que las mediciones geométricas, aunque ambas intervienen en conjunto para definir la forma buscada. Así, el objetivo de la gravimetría es el conocimiento del campo geopotencial, es decir el conocimiento de la intensidad de la gravedad y la forma de todas las superficies que son normales a su dirección.

El conocimiento de este material es necesario para el cálculo de las trayectorias de escape de satélites artificiales, que como contrapartida aportan datos sustanciales al estudio del campo geopotencial.

Las mediciones de gravedad reflejan la repartición de densidades en el interior de la Tierra. Por ello es posible inferir, a partir de ellas, la estructura geológica y en particular las características corticales y sus apartamientos o coincidencias con las hipótesis isostáticas. No obstante, existe una severa restricción y es la falta de unicidad en la relación entre los resultados gravimétricos y la estructura geológica inferida a partir de ellos.

2.2. La gravedad: de Newton a Einstein.

La fuerza de gravedad exhibe notables características. Ella no puede ser desviada. Un objeto no puede protegerse de ella. No existe materia antigravitatoria (al menos aún no ha sido detectada) que pueda anular a la gravedad. Actúa tanto

sobre la materia como sobre la energía (luz y radiación). Afecta al espacio curvándolo y al tiempo produciendo su dilatación, lo cual quiere decir que la geometría que la describe no es euclídea.

Se considera a la gravedad como la primera fuerza y la más significativa, dado que si bien es débil penetra en todo el universo y organiza todo su espacio original en galaxias, estrellas, planetas, etc. Así, en general, las fuerzas débiles dan lugar a grandes estructuras. Por el contrario, fuerzas intensas originan pequeñas estructuras.

Es por demás conocida la *ley de gravitación universal* de Newton (deducida luego de conocidas las leyes de Kepler como viéramos en el Capítulo 1), que dice que todo pasa como si dos partículas materiales se atrajeran con una fuerza de dirección coincidente con la de la recta que las une y de intensidad directamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. Newton logró demostrar (como ya veremos) que un cuerpo esférico atrae a otro de la misma forma que si la masa estuviera concentrada en su centro.

De modo que la ley de Newton tiene validez para describir la interacción que ejercen entre sí los planetas, siempre que midamos la distancia de centro a centro. Esta clásica ley, ya vista en el Capítulo 1, se expresa:

$$F = G \frac{mm'}{r^2} \quad (2.1)$$

siendo m y m' las masas, r la distancia que las separa y G la constante de gravitación universal. La expresión (2.1) fue utilizada sin reparos hasta que las teorías einstenianas abrieron nuevos caminos en el campo científico, como viéramos en el Capítulo 1. En 1914, Albert Einstein formuló la *teoría de la relatividad generalizada*, válida no sólo para movimientos rectilíneos y uniformes sino también para movimientos acelerados, planteando una nueva concepción sobre la naturaleza de la gravedad. Comencemos reafirmando que estas dos grandes concepciones sobre el Universo (la newtoniana y la einsteniana) presentan grandes diferencias conceptuales. En efecto, las leyes de la dinámica de Newton no son derivadas de las de Einstein. Así, la masa newtoniana se conserva mientras que la einsteniana se transforma por medio de la energía; el tiempo newtoniano es absoluto mientras que el tiempo einsteniano es relativo al sistema de referencia (concepto de tiempos múltiples utilizados por observadores en movimiento), lo mismo sucede respecto del espacio: hoy se admite una entidad *espacio-tiempo* (dilatación del tiempo y paralelamente contracción del espacio); finalmente la máxima velocidad en el Universo newtoniano es infinita mientras que en el Universo einsteniano es finita e igual a 300.000 km/s (no se puede transmitir información a velocidad mayor que la de la luz). Precisamente para poder explicar la constancia de la velocidad de la luz, y atendiendo a todos los conocimientos de la física de entonces (por ejemplo las ecuaciones de Maxwell), Einstein propuso en su teoría de la relatividad generalizada hechos inesperados. Así, como viéramos en el Capítulo 1, la teoría de la relatividad generalizada postula que un campo de gravitación es equivalente a un movimiento acelerado si se elige convenientemente el sistema de referencia.

Si bien hemos pasado revista a la concepción Einsteniana, para los propósitos de este curso nos valdremos de las sencillas expresiones newtonianas, dado que numéricamente para nuestro campo restringido proporcionan los mismos resultados pero tienen la enorme ventaja de ser muchísimo más sencillas. Así, en la actualidad los astrónomos (salvo casos especiales) utilizan las leyes de Newton para calcular órbitas de satélites, movimientos de planetas, estrellas y fenómenos tales como las mareas. Las pruebas de la observación están a favor de la teoría de Einstein, pero las fórmulas son más complicadas que las de Newton, y éstas dan las mismas respuestas que aquéllas para numerosísimos problemas prácticos.

A partir de (2.1), la atracción ejercida por unidad de masa será $\frac{F}{m'} = \frac{Gm}{r^2}$. Se habla a menudo de aceleración de

la gravedad, aunque esta forma de expresarse no es correcta más que si el cuerpo atraído es libre.

Una ley esencial de la mecánica verificada con una alta precisión por la mecánica celeste nos dice que la masa que interviene en la ley de Newton tiene la misma medida que la que interviene en la dinámica (relación entre la fuerza que actúa y la aceleración). En otras palabras, la masa gravitacional es idéntica a la masa inercial.

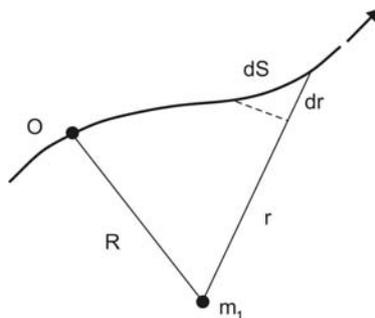


Figura 2.1. Trabajo efectuado para mover la masa unitaria desde O a ∞.

A menudo se trabaja a partir del potencial terrestre V que, como sabemos, está vinculado con el concepto de trabajo.

Definimos el potencial en un punto del campo gravitacional como el trabajo requerido para desplazar una unidad de masa hacia un punto de referencia arbitrario, comúnmente ubicado en el infinito.

Como se ve en la Fig. 2.1, si queremos llevar la masa $m_1 = 1$ desde 0 al infinito tendremos:

$$V = Gm_1 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = -Gm_1 \frac{1}{r} \Big|_R^\infty = \frac{Gm_1}{R} \quad (2.2)$$

con G : constante de gravitación universal; m_1 : fuente; dr : componente en la dirección de r . La fuerza por unidad de masa es $\frac{Gm_1}{r^2}$ y R : distancia desde 0 a m_1 .

Es importante señalar que $V = \frac{Gm}{r}$ y $\vec{g} = \frac{Gm}{r^2}$ están relacionados a partir de:

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = \vec{g} \quad (2.3)$$

Debemos advertir que si queremos obtener el potencial terrestre, debemos conocer la masa de la Tierra y ello es posible a partir de la gravedad observada. Luego veremos que para obtener el potencial perturbador y, desde él, el geoide, es necesario disponer de anomalías de gravedad observadas.

2.3. Potencial debido a una capa esférica (atracción gravitatoria).

Consideremos una capa esférica (espacio comprendido entre dos esferas concéntricas muy próximas) de radio a y de espesor e (Fig. 2.2). Calculemos el potencial debido a dicha capa de masa M_c en un punto P exterior. Un anillo de espesor fijo e que abarca un ángulo $d\theta$ tiene un volumen

$$dV = 2\pi a^2 e \sin \theta d\theta$$

siendo su masa:

$$dM_c = 2\pi a^2 \sigma e \sin \theta d\theta$$

con σ densidad constante.

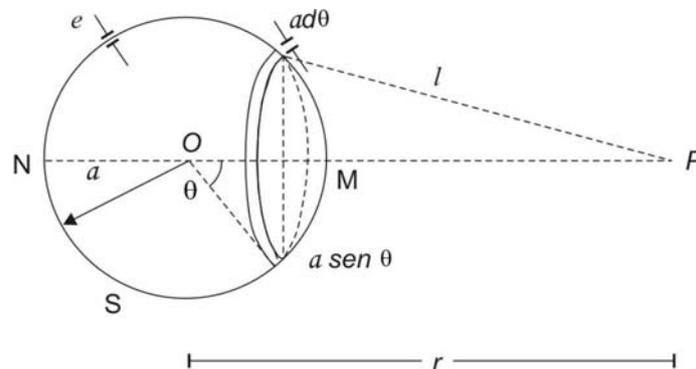


Figura 2.2. Atracción gravitatoria de una capa esférica en un punto exterior P .

El potencial en P (punto exterior) debido al anillo ubicado a distancia l es:

$$dV_0 = \frac{G dM_c}{l}$$

pero:

$$l^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$$

siendo r la distancia del centro de la esfera al punto P .

Por lo tanto

$$2l dl = 2ar \sin \theta d\theta$$

Integrando dV con θ entre 0 y π (es decir l entre $r - a$ y $r + a$) se tiene entonces:

$$V_{0_e} = \frac{2\pi a \sigma G e}{r} \int_{r-a}^{r+a} dl = \frac{4\pi G a^2 \sigma e}{r} \quad (2.4)$$

Pero la masa de la capa esférica es

$$M_c = 4\pi a^2 e \sigma$$

y por lo tanto

$$V_0 = \frac{GM_c}{r}.$$

De aquí:

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = g = \frac{GM_c}{r^2}$$

Si en (2.4) integramos de 0 a $2a$, habremos llevado el punto exterior P al punto M sobre la superficie. En este caso V_0 de (2.4) no se altera. Podremos entonces calcular el potencial sobre la superficie en base a las anomalías de gravedad tal como veremos al tratar el potencial de simple capa.

Se ha demostrado que una capa esférica atrae a un cuerpo exterior como si toda la masa estuviera concentrada en su centro. Dado que una esfera sólida de masa M puede considerarse como formada por un gran número de capas esféricas superpuestas densamente, concluimos que una esfera sólida (y en particular nuestro planeta, en primera aproximación) atrae a la materia fuera de su superficie como si toda su masa estuviera concentrada en su centro (las líneas de fuerza y equipotenciales son las mismas que para un solo punto de masa). Entonces:

$$V_0 = \frac{GM}{r}; \quad g = \frac{GM}{r^2}.$$

En razón de la simetría, las superficies equipotenciales no pueden ser más que esferas concéntricas. Dado que $\sum M_i = M$, distintas combinaciones de capas esféricas de distintas densidades proporcionan el mismo campo gravitatorio exterior, lo cual constituye una seria dificultad para el conocimiento de la verdadera distribución de masas interiores.

Calculemos ahora el potencial sobre un punto interior. Sigue siendo válida (2.4) pero ahora $r < a$ (Fig. 2.3):

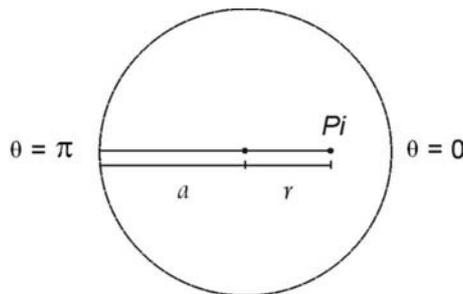


Figura 2.3. Potencial en un punto interior P_i .

$$V_{0i} = \frac{GM_c}{a} \quad \text{ó} \quad V_{0i} = 4\pi a G \sigma e \quad (2.5)$$

Por lo tanto:

$$g = -\frac{\partial V_{0i}}{\partial r} = 0.$$

Estas expresiones nos dicen que en el interior de una capa esférica, el potencial es constante e independiente de la ubicación de P_i y la atracción gravitacional debida a la capa es nula.

Para conocer el potencial que genera un sector de la superficie, integramos ahora (2.4) entre los valores de l correspondientes a $\theta = 0$ y un θ cualquiera:

$$V = \frac{2\pi a \sigma e G}{r} \int_{r-a}^{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}} dl = \frac{2\pi a \sigma e G}{r} \left[\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta} - r + a \right].$$

Reemplazando el espesor fijo e por da e integrando en a el potencial entre a_1 y a_2 será:

$$V = \frac{2\pi \sigma G}{r} \int_{a_1}^{a_2} a \left(\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta} - r + a \right) da$$

2.4. Determinación del potencial en un punto interior P_i de una esfera homogénea de densidad σ .

Según se puede ver en la Fig. 2.4, considerando ahora la esfera sólida, el potencial en un punto interior P_i será:

$$V_{P_i} = G\sigma \left(\frac{4}{3} \pi r_0^3 \right) \frac{1}{r_0} + 4\pi G\sigma \int_{r_0}^a r dr = G\sigma \frac{4}{3} \pi r_0^2 + 4\pi G\sigma \frac{r^2}{2} \Big|_{r_0}^a$$

$$V_{P_i} = 4\pi G\sigma \left(\frac{a^2}{2} - \frac{r_0^2}{6} \right) \quad (2.6)$$

siendo r_0 la distancia del centro de la esfera al punto P_i (naturalmente $r_0 < a$).

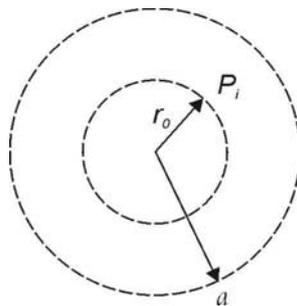


Figura 2.4. Potencial en un punto interior P_i de una esfera homogénea.

Desde (2.6) vemos que el potencial aumenta desde la superficie de la Tierra hacia su centro, con valores extremos:

$$V_{\max} \text{ (en } r_0 = 0) = 2\pi G\sigma a^2$$

$$V_{S_0} (r = a) = 2/3 V_{\max} \text{ (Fig. 2.5a)}$$

En puntos exteriores $r \geq a$, la expresión será: $V = \frac{4}{3} \pi G a^3 \sigma r^{-1}$

Recordemos que la variación (crecimiento) de la presión dp con la profundidad obedece a:

$$dp = \sigma g dr \tag{2.7}$$

con σ : densidad; g : gravedad y dr : espesor de cada capa, que superpuestas constituyen la Tierra. Por otra parte sabemos que el potencial V terrestre y la gravedad están relacionados por:

$$\partial V = g \partial r \tag{2.8}$$

$$\partial p = \sigma \cdot \partial V \tag{2.9}$$

La expresión (2.9) dice que las superficies de igual presión, son superficies equipotenciales. Cualquier variación de masas (en el núcleo, en el manto convectivo, en la dinámica litosférica, en el derretimiento de hielo en regiones polares) cambia y deforma a las equipotenciales.

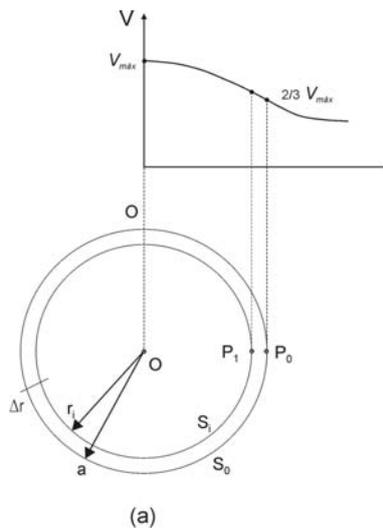


Figura 2.5(a). Distribución del potencial desde el exterior $r \geq a$ al interior $r < a$.

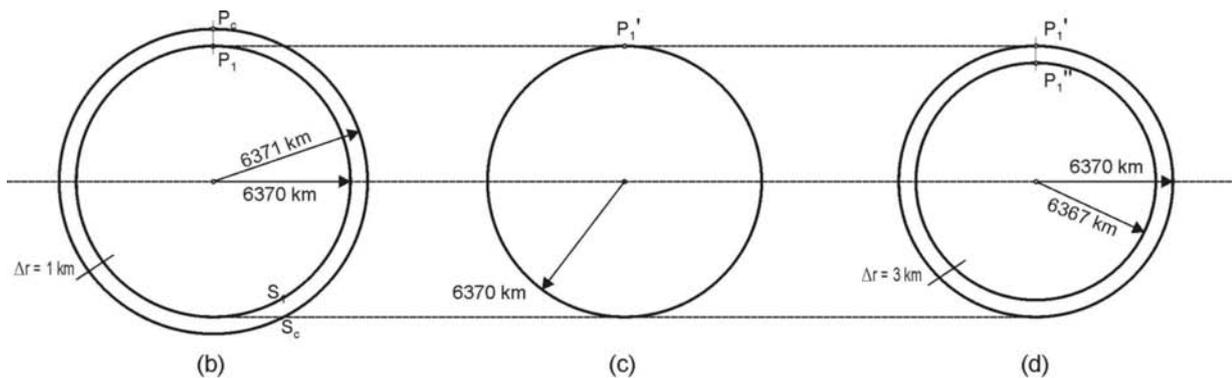


Figura 2.5. (b): Potencial V_{P_1} en P_1 sobre una superficie interior S_i ; $V_{P_1} > V_{P_0}$ (c): Al retirar la capa externa de espesor 1 km, el potencial $V_{P_1'} < V_{P_1}$. (d): Para recuperar el potencial V_{P_1} debemos introducirnos unos 3 km (punto P_1'') en el interior de la Tierra.

Volvamos a la Fig. 2.5(a). Vemos que en el interior de la Tierra el potencial crece regularmente. Cuando abordemos el tema de anomalías de gravedad, veremos que en ciertos casos se exige retirar masas. Esta operación cambia la posición de las equipotenciales. Es fácil ver que si en Fig. 2.5(b), retiramos, por ejemplo, la capa esférica externa:

$S_0 - S_i = 4\pi |a^2 - r_i^2| = 4\pi |6371^2 - 6370^2| \times 10^5 \text{ cm}^2$, de espesor $\Delta r = 1 \text{ km}$, el potencial en (2.6) antes de retirar la capa externa (Fig. 2.5(c)) será:

$V_{P_1} = 6.238.231,9 \times 10^5$ ucgs, y luego de retirada la capa (manteniendo la densidad media de la Tierra: $5,5 \text{ g/cm}^3$; Fig. 2.5(c),

$$V_{P_1} = 6.235.295 \times 10^5 \text{ ucgs}$$

Haciendo la diferencia ($V_{P_1} - V_{P_1'}$), el corrimiento (aprox.) de la posición de la equipotencial exigido para mantener V_{P_1} , se obtiene utilizando la fórmula de Bruns, que veremos en 2.12. Así:

$$(V_{P_1} - V_{P_1'}) / \gamma \approx 2.996836 \text{ km} \approx 3 \text{ km}$$

con g : gravedad terrestre.

De modo que para mantener el potencial V_P (que teníamos en Fig. 2.5 (b)) luego de retirar la capa esférica externa ($\Delta r \equiv 1 \text{ km}$, Fig. 2.5(c)), P_1' deberá descender a P_1'' unos 3 km en el interior de la Tierra (Fig. 2.5(d)).

Digamos ahora a manera de anticipo que cuando veamos las correcciones por masa en el tema anomalías de gravedad, señalaremos que el geoide (concepto que será introducido en 2.10 y ampliado en 2.11) se desplaza al co-geoide (efecto indirecto). También veremos que si condensamos las masas en una superficie interior (el geoide por ejemplo), el potencial se altera muy poco y, por otro lado, esta operación permite mantener la armonicidad sobre y por encima de la superficie de condensación (espacio desprovisto de masas).

2.5. Las ecuaciones básicas del campo gravitatorio.

(a) Campo irrotacional

Comencemos considerando una masa puntual m a distancia r de un punto $P(x, y, z)$. Como se desprende de (2.1) las componentes del vector \vec{g} serán:

$$\begin{cases} g_x = \frac{Gm}{r^2} \cos \alpha \left(= \frac{x}{r} \right) \\ g_y = \frac{Gm}{r^2} \cos \beta \left(= \frac{y}{r} \right) \\ g_z = \frac{Gm}{r^2} \cos \gamma \left(= \frac{z}{r} \right) \end{cases} \quad (2.10)$$

Si se trata de nuestro planeta considerado como un sólido integrado por masas dm , las componentes del vector \vec{g} en puntos exteriores serán:

$$\begin{cases} g_x = G \iiint \frac{\cos \alpha}{r^2} dm \\ g_y = G \iiint \frac{\cos \beta}{r^2} dm \\ g_z = G \iiint \frac{\cos \gamma}{r^2} dm \end{cases} \quad (2.11)$$

(b) Campo rotacional

Si la velocidad angular de rotación de la Tierra es: $\omega = \frac{2\pi}{86164 \text{ s}}$ (una revolución en un día sidéreo), las componentes rotacionales en x, y y z serán $\omega^2 x, \omega^2 y, 0$ y las expresiones (2.11) se completan:

$$\begin{cases} g_x = G \iiint \frac{\cos \alpha}{r^2} dm + \omega^2 x \\ g_y = G \iiint \frac{\cos \beta}{r^2} dm + \omega^2 y \\ g_z = G \iiint \frac{\cos \gamma}{r^2} dm \end{cases} \quad (2.12)$$

El potencial completo V del cual derivan las (2.12) será:

$$V = G \iiint \frac{dm}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (2.13)$$

En efecto, si derivamos (2.13) respecto de x , de y y de z (véase 2.3) se llegará a (2.12). Veremos luego que el potencial terrestre ha sido analizado a partir del desarrollo en serie de la recíproca de la distancia. Si lo consideramos sin asignarle forma alguna al planeta, el potencial estará compuesto por un término dominante: GM/r más una suma de términos de menor significación. Con la misma expresión de partida, Clairaut (1743) y Mc Cullagh (1809-1847) encontraron respectivamente: (a) que la Tierra es en primera aproximación un elipsoide de revolución de radio: $r = a (1 - \alpha \sin^2 \varphi)$ con a : semieje mayor de la elipse, α : aplastamiento geométrico, y φ : latitud. (b) que α puede obtenerse a partir del aplastamiento dinámico β , de a y de m (término que involucra la fuerza de rotación terrestre); (c) que el potencial puede ser expresado en función de la masa terrestre M y de los momentos de inercia (A, B, \dots).

2.6. La ley de Gauss. Ecuaciones de Laplace y Poisson.

Dentro de la masa atractiva, establecemos $r = 0$ en el origen de coordenadas. La ecuación de Laplace incluye, en este caso, integrales indeterminadas. Esta cuestión no había sido advertida por Laplace; sí fue señalada por Poisson. Así, los distintos términos deben ser evaluados en forma diferente. Comencemos tomando un punto de masa m dentro de la masa atractiva M contenida en una superficie S (Fig. 2.6). Si rodeamos m con una esfera de radio r' y superficie S' , el flujo saliente, o líneas de aceleración gravitacional que atraviesan S' , puede ser escrito:

$$\iint_{S'} g_n dS' = -G \iint_{S'} \frac{mdS'}{r'^2} = -Gm \int_0^{2\pi} d\Omega = -4\pi Gm$$

siendo g_n : la gravedad geocéntrica sobre S' y $d\Omega$ es el ángulo sólido que para toda la esfera vale 4π . Extendiendo el concepto a toda una superficie irregular S tendremos:

$$\frac{dS'}{r'^2} = \frac{dS \cos \zeta}{r^2}$$

siendo ζ el ángulo entre el radio vector tomado desde m y la normal a dS .

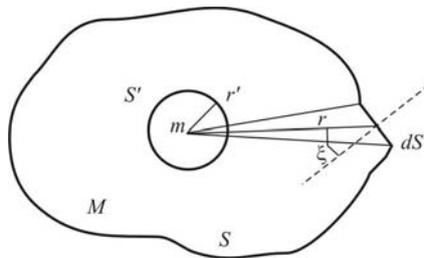


Figura 2.6. Flujo saliente que origina una masa m a través de las superficies S y S' .

Incluyendo todos los puntos de masa m dentro de M con densidad σ : $\sum m = M$, se tendrá:

$$\iint_S g_n dS = -4\pi GM = -4\pi G \iiint_V \sigma dv$$

Esta es la bien conocida Ley de Gauss, que -como aplicación- nos permite evaluar masas de yacimientos enterrados utilizando las anomalías de gravedad.

Notemos que aplicando el Teorema de la divergencia:

$$\iint_S g_n dS = \iiint_V \text{div } g dv = -4\pi G \iiint_V \sigma dv$$

de aquí se tiene $\text{div } g = -4\pi G\sigma$, con lo cual obtenemos la ecuación de Poisson. En efecto, para el interior de la materia:

$$\text{div } g = -4\pi G\sigma \tag{2.14}$$

Esta expresión muestra discontinuidades ante cualquier cambio de densidad. Cuando $\sigma = 0$ tendremos

$$\text{div } g = 0 \tag{2.15}$$

que es la ecuación de Laplace. Al no exhibir discontinuidades se dice que g es armónica. La verificación de (2.14) o (2.15) es fundamental en la mayor parte de los problemas de campo potencial, parte de los cuales iremos viendo. Anticipamos que la construcción del geoide es un problema fundamental en Geodesia. Métodos muy difundidos, aunque no los únicos, calculan el potencial T (y el geoide) utilizando anomalías de gravedad g distribuidas regularmente sobre la superficie física de la Tierra (como veremos al tratar la fórmula de Stokes). Se pasa así de g a T a través de una integración y ello exige que la función sea armónica. Como en principio no lo es, dado que las anomalías g están ubicadas en el interior de la Tierra, plantaremos técnicas para superar este escollo.

La Fig. 2.7 muestra las variaciones de V , g y \dot{g} desde el exterior al centro de una esfera homogénea e irrotacional hasta su centro.

En (2.14) y (2.15) se ha omitido el término de rotación. Estas expresiones deberían completarse sumando al término de la derecha: $2\omega^2$.

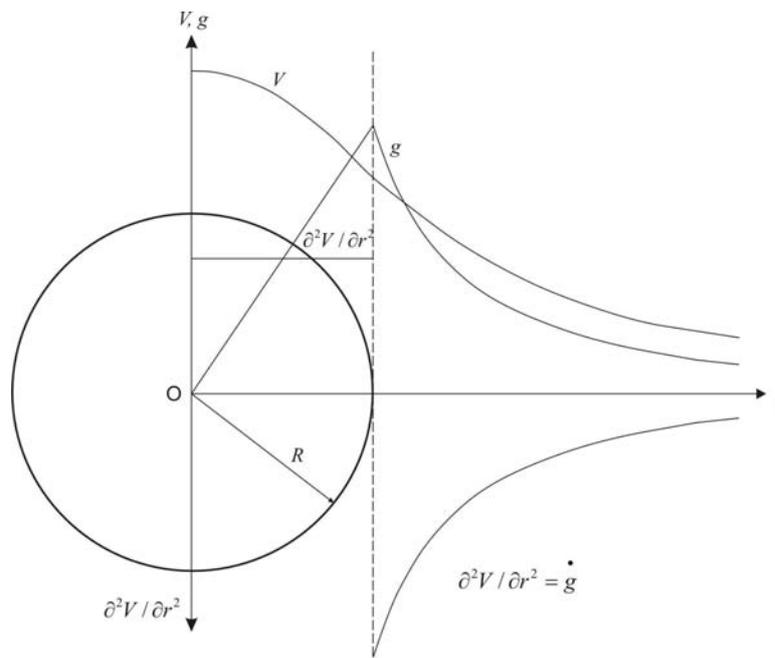


Figura 2.7. Campo gravitatorio de una esfera homogénea.

2.7. Densidad superficial de una capa infinitamente delgada. Momento dipolar.

(a) Simple capa.

Para el cálculo de la densidad equivalente de una capa esférica de espesor dR (Fig. 2.8) de acuerdo con lo visto en (2.2) y (2.3) se tendrá:

$$\Delta g_p = \frac{GM_c}{R^2} \quad ; \quad M_c = 4\pi R^2 \sigma dR \quad (2.20)$$

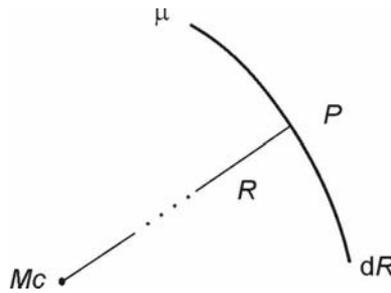


Figura 2.8. Densidad equivalente sobre una capa esférica de radio R .

Por lo tanto:

$$\Delta g_p = 4\pi G (\sigma dR) = 4\pi G \mu$$

con:

$$\mu = \sigma dR = \frac{\Delta g_p}{4\pi G} \left[\frac{g}{cm^2} \right] \quad (2.16)$$

Esta es la densidad sobre una capa esférica de nivel equivalente. Como consecuencia importante puede demostrarse que si toda la masa comprendida en el interior de una superficie de nivel de potencial V se distribuye sobre esta superficie de modo que la densidad de dicha capa sea:

$$-\frac{1}{4\pi G} \left[\frac{\partial V}{\partial \eta} \right] \quad (2.17)$$

el potencial de esta última en un punto exterior tendrá el mismo valor que el potencial de la distribución inicial de masas newtonianas en el interior de la superficie. A esto hay que añadir que la capa de espesor equivalente no ejerce acción alguna sobre los puntos interiores dado que la ausencia de masas torna a V armónica y constante (ver párrafo 2.3).

A partir de (2.16) si consideramos una distribución de masas sobre un plano de espesor equivalente, se tendrá:

$$\mu \left[\frac{g}{cm^2} \right] = \sigma h = \frac{\Delta g_p}{2\pi G} \quad (2.18)$$

De acuerdo con (2.17) el potencial de simple capa en puntos ubicados sobre o en el exterior de la capa será:

$$V = \frac{1}{4\pi} \iint_S -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \eta} dS \quad (2.19)$$

(b) Doble capa

Comencemos considerando el potencial en un punto exterior P debido a un dipolo magnético $+m, -m$ correspondiente a un imán corto (Fig. 2.9).

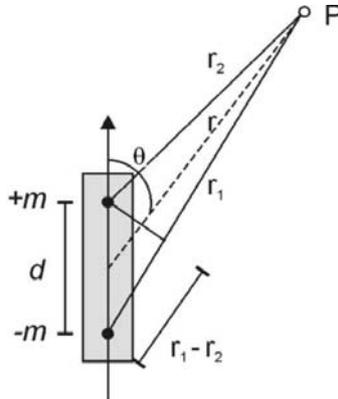


Figura 2.9. Expresión dipolar $+m, -m$ debido a un imán corto.

$$V_P = \frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2} = \frac{m(r_1 - r_2)}{r_1 r_2} \approx \frac{md \cos \theta}{r^2} \tag{2.20}$$

esta expresión, si $md = \overline{\mathfrak{M}}$ (momento magnético), puede escribirse:

$$V_p = -\overline{\mathfrak{M}} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \eta} \tag{2.21}$$

Para un conjunto de dipolos (Fig. 2.10), y sabiendo que $d\overline{\mathfrak{M}} = \overline{J}dv$, con \overline{J} : densidad de magnetización y dv : volumen elemental (= $d dS$: con d : distancia dipolar por sección transversal del imán), se tendrá:

$$V = \iiint_S (\overline{J} d) - \frac{\partial(1/r)}{\partial \eta} dS \tag{2.22}$$

Tratemos ahora de encontrar una expresión equivalente a (2.22) para el potencial gravitatorio. Debemos advertir que, si bien el potencial será riguroso, en principio es completamente ficticio.

Después veremos que este potencial de doble capa encuentra su aplicación, por ejemplo, en el caso isostático. $(\overline{J} d)$ de (2.22) se reemplaza por $\mu d\eta$. En efecto, desde (2.17) tendremos: $V = -4\pi G \int \mu d\eta$. Así, el momento dipolar será:

$$-\frac{V}{4\pi G} \tag{2.23}$$

Entonces, desde (2.22) tendremos:

$$V = \frac{1}{4\pi} \iiint_S V \frac{\partial(1/r)}{\partial \eta} dS \tag{2.24}$$

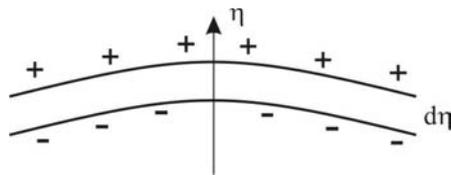


Figura 2.10. Doble capa con separación $d\eta$ debida a un conjunto de dipolos.

La suma de los potenciales (2.19) y (2.24) se reconoce en la tercera fórmula de Green (Baranov, 1975, entre muchos otros). Esta expresión es de una enorme riqueza conceptual para la obtención de V en base a datos de contorno. Luego veremos desde (2.20) que el problema isostático puede ser tratado a partir de distribuciones dipolares $+m, -m$; además desde (2.18) calcularemos el potencial a partir de una simple capa plana (caso plano de la fórmula de Stokes), que como introducción veremos en 2.8.

2.8. Lámina plana de masas equivalentes.

Trataremos de calcular la gravedad en un punto exterior $P(x', y', z')$ (ver Fig. 2.11) debida a una distribución superficial:

$$\Delta g(x', y', z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z' \Delta g(x, y, 0)}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dx dy \tag{2.25}$$

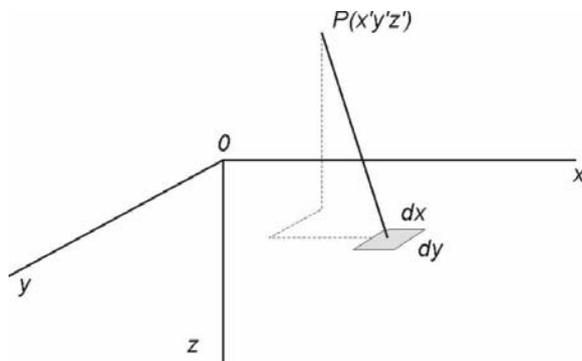


Figura 2.11. Cálculo de $\Delta g(x', y', z')$ a través de la densidad superficial μ en el plano xy .

Para el caso bidimensional integramos en y desde $-\infty$ a $+\infty$ teniendo en cuenta que la distribución de densidad superficial no cambia sobre líneas paralelas al eje y . Entonces:

$$\Delta g(x', z') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta g(x, 0) \frac{z'}{x'^2 + z'^2} dx \tag{2.26}$$

Por tanto una distribución superficial de densidad $\frac{\Delta g(x, y)}{2\pi G}$ sobre cualquier plano horizontal sobre el cual la distribución de gravedad es conocida, producirá el mismo campo en puntos altos, que las masas reales que son responsables de las respuestas gravimétricas encontradas. Veremos luego que el cálculo del geode exige definir el potencial local (perturbador). Una forma es definir su morfología a partir de una distribución de densidad superficial plana obtenida desde Fig. 2.11. Otra, más rigurosa, es trabajar con la solución tradicional de Stokes.

2.9. Unidades.

En el sistema c.g.s. de unidades, la gravedad se expresa en cm/s^2 o Gal (en honor a Galileo). Es decir: $1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$. Frecuentemente se utiliza una unidad mil veces menor: el miligal. Así, tendremos como valor medio para la Tierra: $980,6 \text{ Gal} = 980.600 \text{ mGal}$. En prospección gravimétrica suele utilizarse como unidad el décimo de miligal: $1 \text{ u.g.} = 10^{-4} \text{ Gal} = 0,1 \text{ mGal}$ siendo útil, a veces, para estudios muy finos de gravedad, expresar los resultados en microgal. Para cuestiones de potencial (próximo párrafo) es conveniente definir el kilogal: $1 \text{ kGal} = 10^3 \text{ Gal}$. Por tanto, el potencial de atracción puede expresarse en $\text{kGal} \times \text{m}$.

Debemos notar que el potencial gravitacional tiene dimensiones de trabajo por unidad de masa (o sea L^2T^{-2} es el cuadrado de una velocidad); siendo las dimensiones de trabajo ML^2T^{-2} .

La unidad que define el gradiente se denomina Eötvös: $1 \text{ Eötvös} = 1 \text{ mGal}/10 \text{ km} = 10^{-9} \text{ Gal}/\text{cm}$.

El gradiente vertical normal adoptado es $0,3086 \text{ mGal}/\text{m}$ ó 3086 Eötvös . A veces se evita la repetición continua de G (constante de gravitación universal) eligiendo las unidades de modo que $G = 1$. Tales unidades se llaman astronómicas o teóricas.

Actualmente la Asociación Internacional de Geodesia (1989) recomienda adoptar el sistema m.k.s. racionalizado. Sus principales recomendaciones son:

- (1) El término gravedad " g " debe ser usado en general en el sentido de "intensidad de campo de gravedad". Se la expresará en Newton/kg , siendo $1 \text{ N}/\text{kg} = 1 \text{ Gal}$. La constante G será expresada en $\text{Nm}^2 / \text{kg}^2$ y GM en Nm^2 / kg
- (2) El término gravedad en el sentido "aceleración en caída libre" o simplemente "aceleración de gravedad" a_g deberá ser usado en cálculos cinemáticos (distancias, velocidades, aceleración o tiempo) o en movimientos en caída libre. En estos casos, y sólo en estos casos, las unidades serán el Gal ($= 10^{-2} \text{ m/s}^2$) o SI para valores numéricos.
- (3) El "potencial de gravedad" se expresará en Julios/kg. Los números potenciales en unidades específicas de trabajo se dan en $10 \text{ J}/\text{kg}$.
- (4) Para el gradiente de gravedad se conserva el Eötvös dado que depende sólo del tiempo (cuya unidad es compartida en ambos sistemas).

2.10. Equipotenciales.

Se denomina superficie de nivel o equipotencial a una superficie en la que V es constante (Fig. 2.12).

Físicamente una equipotencial se materializa por la superficie de un líquido en equilibrio sometida a la acción de la gravedad (geoide, en primera aproximación).

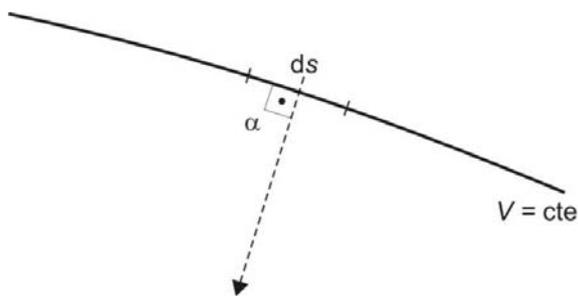


Figura 2.12. Línea de fuerza y superficie equipotencial.

Si consideramos las trayectorias ortogonales a las superficies de nivel, tendremos las líneas de fuerza del campo. Puede demostrarse fácilmente que las líneas de fuerza del campo gravitatorio son ortogonales en cada punto a las equipotenciales. De acuerdo con el concepto de trabajo en un campo gravitacional sobre una equipotencial se tiene:

$$dV = g_n ds = g \cos \alpha ds = 0$$

dado que $g \neq 0$ y $ds \neq 0$ debe ser $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ortogonalidad entre g y V).

Como g varía a lo largo de una equipotencial, la distancia entre equipotenciales debe también variar, pero en forma inversa a g . Es por ello que las equipotenciales tienden a estrecharse hacia los polos donde la gravedad aumenta. No tienen equidistancia geométrica pero sí dinámica (Fig. 2.13). Al tratar el sistema de alturas, veremos que al pasar de una equipotencial a otra se realiza un trabajo que no depende del camino. Ello facilita el cálculo (indirecto) de la verdadera altura.

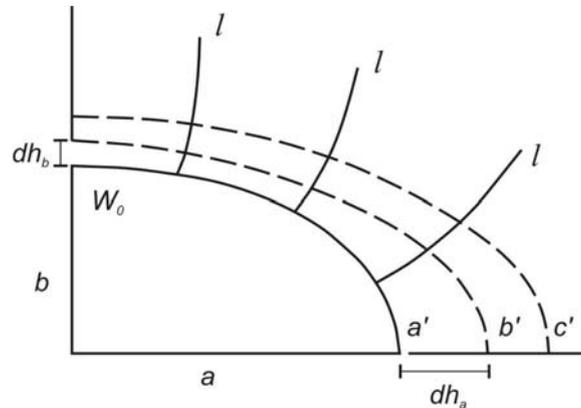


Figura 2.13. Superficie elipsoidal; las equipotenciales (b' , c' , ...) y las líneas de fuerza l son perpendiculares.

A medida que nos alejamos de la superficie terrestre, las superficies equipotenciales (en principio aproximadamente elipsoidales) se irán aproximando a superficies esféricas hasta que, suficientemente alejadas, serán superficies esféricas casi perfectas. Por tanto, en los primeros trabajos el estudio de las deformaciones de las equipotenciales mediante satélites artificiales tuvo sentido si estos se movían a distancias cortas (no mayores de 2000 km) de la superficie terrestre.

Si consideramos a la Tierra esférica e irrotacional, el potencial debido a su masa, en la superficie terrestre será:

$$V_0 = \frac{GM}{r} = 6.237.253 \times 10^5 \text{ cm}^2\text{s}^{-2}$$

Para el elipsoide internacional $V_0 = 6.263.977 \text{ kGal m}$. De acuerdo con la resolución de AIG (Hamburgo, 1983): $V_0 = (6.263.686 \pm 2) \text{ kGal m}$.

2.11. La superficie física de la Tierra (el geoide).

Supongamos que el total de nuestro planeta estuviera cubierto por agua. La superficie, dada su fluidez, estaría modelada por el campo gravitatorio. Ella sería, en cada punto de su superficie, perpendicular a los vectores gravedad. A esta superficie continua equipotencial ($W = V(r) = V_0$), condicionada por el campo gravitatorio terrestre, se la denomina geoide. La presencia de continentes que se elevan y sobresalen del nivel medio del mar determina que el geoide se introduzca y ondule por debajo de las masas continentales siguiendo en forma atenuada a la topografía.

La Fig. 2.14 muestra un modelo simple en el cual la superficie de nivel del agua que representa el geoide se eleva en B respecto de A y C, ante la presencia del continente (simulado por un paralelepípedo de madera). En realidad, dentro de C_0 se eleva aún más que en la figura.

Los equipotenciales en el espacio exterior son superficies cerradas y continuas (cuasiesféricas). Debido a que en el espacio exterior no hay prácticamente materia ponderable (la densidad del aire es $0,001395 \text{ g/cm}^3$), las superficies equipotenciales responden allí a funciones armónicas. No ocurre lo mismo con el geoide continental. En efecto el geoide oceánico se prolonga por debajo de los continentes. Al introducirse en la zona continental la densidad cambia abruptamente (crece a, digamos, $2,7 \text{ g/cm}^3$). En este caso aparecen discontinuidades en las segundas derivadas y la función deja de ser armónica y su construcción puede realizarse a partir de trozos de superficies diferentes. Las curvaturas cambian discontinuamente en la segunda derivada. Al no ser armónico el geoide continental ya no lo podemos utilizar como superficie de referencia para las determinaciones de posiciones. Hacia mediados del siglo XX las coordenadas del sistema Sueco diferían en más de 250 m del sistema Danés, mientras las Francesas e Inglesas discrepaban en unos 200 metros. Sin embargo para el cálculo de alturas es posible ignorar la falta de paralelismo de las equipotenciales en primera aproximación.

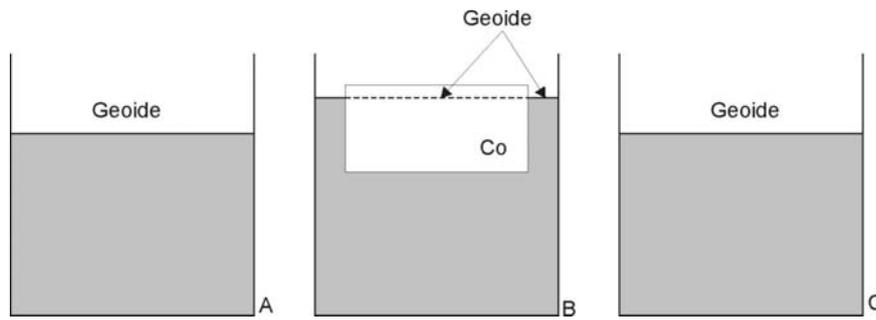


Figura 2.14. Ante la presencia de un continente Co en B, la superficie de nivel del agua se eleva respecto de A y C.

Estamos ahora en condiciones de definir el geoide como la prolongación de las aguas medias de los mares en equilibrio por debajo de los continentes.

Recapitulando digamos que el Geoide se materializa con el nivel medio del mar obtenido a partir de promediar series de registros mareográficos a lo largo de un período de unos 19 años.

En efecto, los movimientos relativos del sistema Tierra-Luna-Sol producen largos ciclos de marea. Hay un ciclo lunisolar correspondiente al movimiento de los nodos de la órbita de la Luna en 18,67 años.

También es conveniente señalar el ciclo de repetición de fases lunares de 19 años, y el ciclo de repetición de eclipses de 18 años.

En realidad, deberíamos hablar del geoide para una época, es decir de una superficie de nivel que varía con el tiempo. Ello es debido a que el potencial terrestre cambia con el tiempo, por ejemplo por cambios de masa provocados en el núcleo, o en la cáscara litosférica en constante dinámica (tectónica de placas), o por desprendimiento de hielo en los polos, o por cambios en el ciclo hidrológico, etc.

2.12. Ondulación del geoide debida a las masas perturbadoras (fórmula de Bruns).

Si por simplicidad consideramos que el modelo de referencia es una esfera (radio constante), homogénea (densidad constante) e irrotacional (velocidad angular nula), las equipotenciales en P (punto sobre la superficie) y en Q (punto elevado, por ejemplo, en $N = 20$ m) tendrán los siguientes valores:

$$V_p = \frac{Gm}{R_m} = g \times R_m = 6.237.253 \times 10^5 \text{ u.c.g.s.}$$

y,

$$V_Q = \frac{Gm}{R_m + N} = 6.237233 \text{ u.c.g.s.} = \frac{Gm}{R_m} \left(1 + \frac{N}{R_m}\right)^{-1} = \frac{Gm}{R_m} \left[1 - \left(\frac{N}{R_m}\right) + \left(\frac{N}{R_m}\right)^2 - \dots\right]$$

(el desarrollo en serie converge siempre y cuando $\left|\frac{N}{R_m}\right| < 1$, cuestión que está garantizada pues la ondulación del geoide es mucho menor que el radio medio de la Tierra).

Luego:

$$V_Q \approx \frac{Gm}{R_m} - \frac{Gm}{R_m^2} N = V_p - \gamma N.$$

siendo γ : gravedad terrestre.

Por lo tanto la diferencia de potencial T es:

$$T = V_p - V_Q \approx \gamma N \tag{2.27}$$

Consideremos ahora que T es producida por la presencia de la masa de un yacimiento subsuperficial. Debido a él, la equipotencial V_p se elevará una cantidad N que puede ser calculada desde (2.27). La expresión (2.27) es la bien conocida **fórmula de Bruns**.

2.13. Nociones sobre el desarrollo del potencial terrestre en armónicos esféricos.

Si a partir de la expresión Newtoniana vista en (2.13) con $\omega = 0$, es decir: $V = V(r) = G \iiint \frac{dm}{l} = G \iiint \frac{\sigma dV}{l}$, intentáramos determinar el potencial $V = V(r)$ en el interior de la Tierra, tendríamos que proceder capa a capa atendiendo además a que: $\text{div}g = -4\pi G\sigma$ vista en (2.18). No obstante, en el interior de la Tierra no se conoce $\sigma = \sigma(r)$. Otro camino para analizar el potencial V , es trabajar desde el espacio exterior en donde se cumple $\text{div}g = 0$ (vista en 2.19). En este caso a partir de la expresión $V = G \iiint \frac{dm}{l}$, intentaremos desarrollar la recíproca de l en una serie convergente. Veremos que esta solución equivale a la descomposición espectral del campo gravitacional. Los coeficientes de este desarrollo, que son números adimensionales, proveen las distintas amplitudes del espectro. Es posible demostrar que tales coeficientes tienen, en grados bajos, interpretaciones físicas simples. Ellos puestos en coordenadas rectangulares son integrales de masas que involucran productos y momentos de inercia que nos informan por ejemplo de la elipticidad polar y ecuatorial de la Tierra. Al final de 2.7 hemos visto que el cálculo del potencial necesita disponer de los valores de g observados ($= -\partial V / \partial \eta$). Análogamente para evaluar los coeficientes del desarrollo en serie del potencial de perturbación, necesitaremos utilizar cualquier observable funcional de él; por ejemplo trabajar con el desarrollo de anomalías de gravedad observadas. Cada valor de la anomalía de gravedad observada proporciona una ecuación para la determinación de los coeficientes buscados. Además para facilitar los cálculos de los coeficientes, se suelen emplear criterios de ortogonalidad para funciones esféricas totalmente normalizadas (de forma tal que sus valores medios cuadráticos sobre la superficie de la esfera queden especificados).

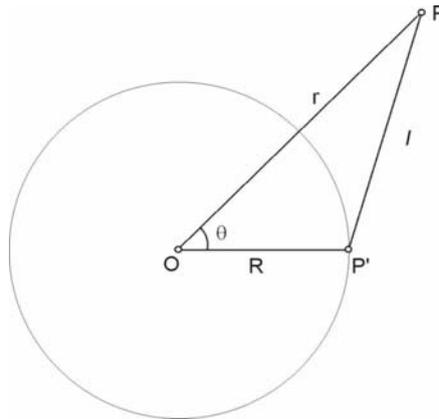


Figura 2.15. Distancia espacial l , cuya recíproca se expresa en serie convergente. El ángulo θ varía respecto del eje \overline{OP} .

De acuerdo con la Fig. 2.15 reescribimos $1/l$:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{P'P} = (r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{R^2}{r^2} - \frac{2R}{r} \cos \theta \right) \right]^{-1/2}$$

con $\left[\left(\frac{R}{r} \right)^2 - 2 \frac{R}{r} \cos \theta \right] < 1$.

Si desarrollamos en serie de potencias:

(a) sólo hasta el término lineal en $\frac{R}{r}$, tendremos:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{R}{r} \cos \theta + \dots \right) \right],$$

que podemos escribir:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left[P_0(\cos \theta) + \frac{R}{r} P_1(\cos \theta) + \dots \right] \quad (2.28)$$

con $P_0(\cos \theta) = 1$ y $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$.

(b) Agregando ahora el término cuadrático, se tendrá:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{R}{r} \cos \theta + \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}\right) + \dots \right], \text{ ó}$$

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \left[P_0(\cos \theta) + \frac{R}{r} P_1(\cos \theta) + \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_2(\cos \theta) + \dots \right] \quad (2.29)$$

(c) y en general por inducción tenemos:

$$P_0(\cos \theta) = 1$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \quad (2.30)$$

...

$$P_n(\cos \theta) = \sum_{k=0}^{n/2} \frac{1.3 \dots (2n-k-1)(-1)^k \cos^{n-2k} \theta}{2^k k!(n-2k)!}$$

Los $P_n(\cos \theta)$ son los llamados polinomios de Legendre, con n : grado del polinomio. Notemos que el ángulo θ se toma a partir de un eje inclinado, no vertical como es usual. Debido a que a todos los términos (que son funciones armónicas) los podemos considerar desarrollados sobre una *esfera* de radio unitario, se los denomina armónicos esféricos de superficie. Cada uno de estos polinomios depende de θ . Por ello al variar θ se forman zonas simétricas respecto de r o del eje \overline{OP} y a los términos correspondientes se los llama armónicos zonales (Figs. 2.16 y 2.18 izquierda).

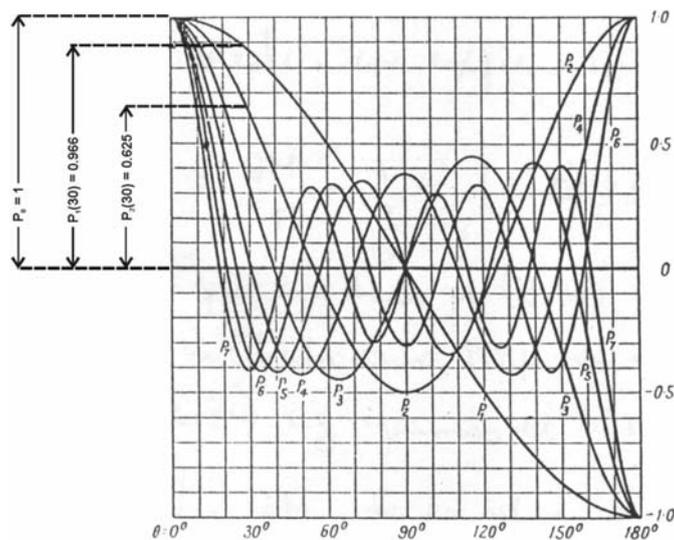


Figura 2.16. Armónicos Zonales P_1, P_2, \dots, P_7 como función de θ . A la izquierda aparecen $P_0 = 1$, y P_2 y P_3 para $\theta = 30^\circ$.

Finalmente (2.29) puede ser escrita como:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos \theta) \quad (2.31)$$

dado que la serie converge para $R < r$, y los $P_n(\cos \theta)$ pueden obtenerse desde (2.30).

Si introducimos $1/l$ desde (2.31) en $V = G \iiint \frac{dm}{l}$ tendremos:

$$V = \frac{G}{r} \iiint \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos \theta) dm \quad (2.32)$$

Las integrales de los tres primeros términos del desarrollo de (2.31) constituyen los momentos de inercia A , B , C respecto de una terna x , y , z . Si I es el momento respecto del eje \overline{OP} , llegamos a:

$$V = \frac{GM}{r} + \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3I), \quad (2.33)$$

que puede expresarse en función de la latitud φ :

$$V = \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(C - A)(3\sin^2 \varphi - 1) \quad (2.34)$$

El desarrollo que conduce a (2.33) y (2.34) puede verse, entre muchos otros en Introcaso (1997, pags. 30 a 34). Si en (2.34) agregamos el término de rotación con velocidad ω tendremos:

$$V = \frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3}(C - A)(3\sin^2 \varphi - 1) + \frac{1}{2}r^2\omega^2 \cos^2 \varphi \quad (2.35)$$

Para un modelo elipsoidal en lugar de esférico, los términos de distancia deben involucrar la relación (r/a) , siendo a : semieje mayor de la elipse. Reagrupando y llamando J_2 a $\frac{C - A}{a^2 M}$ y m a $\frac{\omega^2 a^3}{GM}$, (2.35) toma la forma:

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 - \frac{J_2}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 (3\sin^2 \varphi - 1) + \left(\frac{r}{a}\right)^3 \frac{m}{2} \cos^2 \varphi \right] \quad (2.36)$$

(2.36) se denomina fórmula de Mc Cullagh (1809-1847). Ella es una aproximación de primer orden que representa el potencial de un elipsoide de revolución en función de los momentos de inercia A y C y de un término de rotación. Este elipsoide presenta un aplastamiento geométrico dado por: $\alpha = \frac{a - b}{a}$ y un radio vector: $r = a(1 - \alpha \sin^2 \varphi)$ con φ : latitud. A partir del potencial (2.36) puede demostrarse que:

$$r = a \left[1 - \left(\frac{3}{2} J_2 + \frac{m}{2} \right) \sin^2 \varphi \right]$$

Entonces:

$$\alpha = \frac{3}{2} J_2 + \frac{m}{2} \quad (2.37)$$

También la aceleración de la gravedad con una aproximación de primer orden nos conducirá a la célebre fórmula de Clairaut (1743) sobre la que volveremos al tratar el sistema de referencia.

Volvamos ahora a (2.31) y (2.32). Es conveniente realizar un cambio de eje para referir θ al eje vertical (Fig. 2.17). Esta figura relaciona la distancia esférica θ que vincula las proyecciones P y P' sobre la esfera unitaria, con el eje vertical \overline{ON} mediante las colatitudes φ y φ' , ubicadas sobre los meridianos a distancias ω y ω' del meridiano origen G.

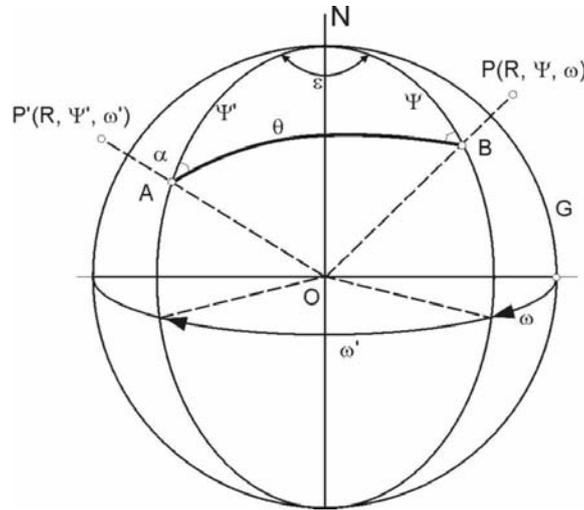


Figura 2.17. Distancia esférica θ vinculada al eje vertical \overline{ON} .

Del triángulo esférico ANB se tiene:

$$\cos \theta = \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' \cos(\omega' - \omega).$$

Sustituyendo esta expresión en los $P_n(\cos \theta)$ la complejidad aumenta, tendremos así:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 \\ P_1 &= \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' \cos \varepsilon, \text{ con: } \varepsilon = \omega - \omega' \\ P_2 &= \frac{3}{2} \left[(\cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' \cos \varepsilon)^2 - \frac{1}{3} \right] \\ &\dots \end{aligned} \tag{2.37}$$

Los P_n , desarrollados y agrupados contienen tres tipos de términos:

- Zonales, que al depender sólo de φ' dividen a la esfera en zonas latitudinales (Fig. 2.18 izquierda).
- Cuadrangulares o tesaerales (del griego tetra o cuatro) que dependen tanto de ω' como de φ' (Fig. 2.18 centro), y
- Sectoriales, en las cuales la dependencia con la colatitud desaparece y la esfera queda dividida en sectores alternativamente positivos y negativos determinados por círculos máximos que pasan por los polos (Fig. 2.18 derecha). La Fig. 2.19 representa también los distintos tipos de armónicos descriptos.

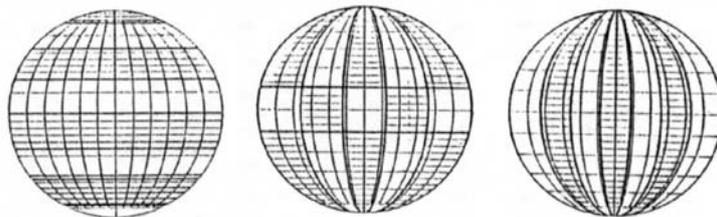


Figura 2.18. Mapas de áreas definidas por líneas cero en hemisferas. Izquierda: Armónico zonal P_7^0 . Medio: Armónico tesimal $P_7^5 \cos 5\varphi$. Derecha: Armónico sectorial $P_7^7 \cos 7\varphi$.

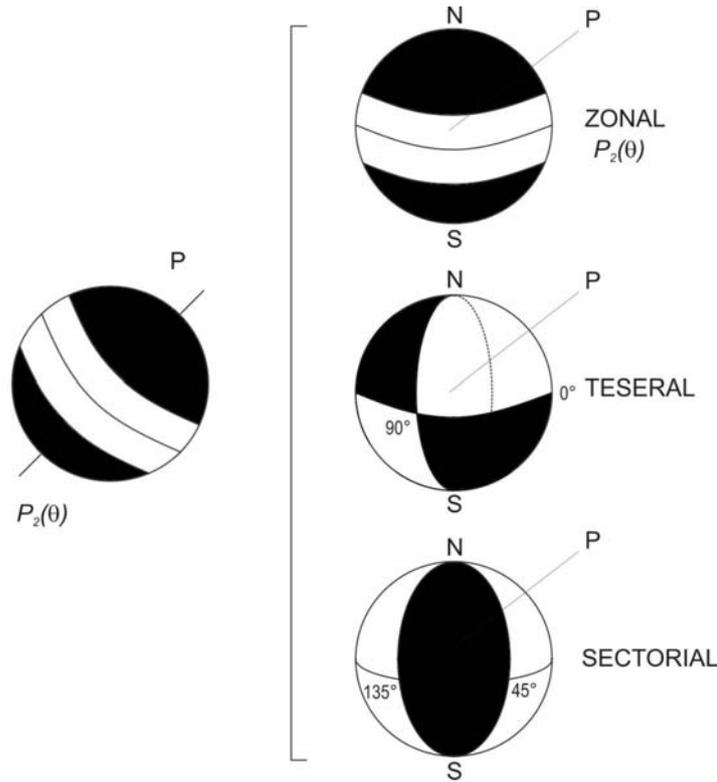


Figura 2.19. Izquierda: Armonica zonal $P_2(\theta)$ referida al eje \overline{OP} (véase Fig. 2.15). Derecha: Armónicos zonales, teserales y sectoriales referidos al eje vertical \overline{ON} .

Visto el desarrollo de la recíproca de l en (2.30), el potencial V de (2.31) y el cambio de ejes que originan las expresiones (2.37) es posible, introduciendo el semieje mayor a del elipsoide como una constante y llamando a las integrales de masa $C_{n,m}$ y $S_{n,m}$ (coeficientes armónicos esféricos), expresar el potencial en armónicos esféricos como:

$$V = \frac{GM}{r} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (C_{n,m} \cos m\omega + S_{n,m} \sin m\omega) P_{n,m}(\cos \theta) \right] \quad (2.39)$$

con n : grado, m : orden y ω : longitud.

$M = M_T$ (Tierra) + M_A (Atmósfera); a : semieje mayor del elipsoide de revolución.

Como por otra parte, $V = G \iiint \frac{\sigma(r)dv}{r}$, se ve -al comparar esta con (2.39)- que los coeficientes del desarrollo en serie $C_{n,m}$ y $S_{n,m}$ son integrales de masa del campo potencial. Para la descripción del campo de gravedad se usan generalmente armónicos esféricos completamente normalizados. Tendremos así:

$$\overline{P_{n,m}}(\cos \theta) = \sqrt{\frac{k(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}} P_{n,m}(\cos \theta) \quad (2.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{C_{n,m}} \\ \overline{S_{n,m}} \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{k(2n+1)(n-m)!}} \left\{ \begin{array}{c} C_{n,m} \\ S_{n,m} \end{array} \right\} \quad (2.41)$$

con $k = 1$, para $m = 0$, $k = 2$ para $m \neq 0$.

El desarrollo en serie representa una descomposición integral en estructuras de campo de longitudes de onda $360^\circ/n$ (con resolución $180^\circ/n$). El análisis espectral permite no sólo conocer las grandes contribuciones de masa terrestres a través de los momentos de inercia por ejemplo, sino además tener una idea sobre las distintas profundidades de los emplazamientos de masas anómalas.

La diferencia entre el potencial real y el potencial normal es el potencial perturbador $T(r)$ que suele expresarse como:

$$T(r) = \frac{GM}{r} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\overline{\Delta C_{n,m}} \cos m\omega + \overline{\Delta S_{n,m}} \sin m\omega) \overline{P_{n,m}}(\cos \theta\omega) \right] \quad (2.42)$$

Notemos que el desarrollo comienza con $n = 2$, dado que se asume que coinciden tanto las masas de la Tierra y del elipsoide como sus respectivos centros de gravedad.

Los armónicos esféricos normalizados $\overline{\Delta S_{n,m}}$ y $\overline{\Delta C_{n,m}}$ de (2.42) son las diferencias entre los coeficientes armónicos esféricos normalizados de los campos real y normal. Si, desde (2.42) derivamos: $\partial T(r)/\partial r$ y atendemos a la ecuación diferencial fundamental de la Geodesia (véase 4.39) tendremos:

$$\Delta g(r) = \frac{GM}{r^2} \left[\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\overline{\Delta C_{n,m}} \cos m\omega + \overline{\Delta S_{n,m}} \sin m\omega) \overline{P_{n,m}}(\cos \theta) \right] \quad (2.43)$$

con $\Delta g(r)$: anomalía de gravedad observada.

Desde (2.43) los coeficientes armónicos esféricos pueden ser calculados, a partir de las anomalías de gravedad, empleando el criterio de ortogonalidad para funciones esféricas armónicas totalmente normalizadas.

Tendremos así:

$$\left\{ \frac{\overline{C_{n,m}}}{\overline{S_{n,m}}} \right\} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma=1} \frac{r^2}{GM} \frac{1}{(n-m)} \left(\frac{a}{r} \right)^n \Delta g \left\{ \frac{\cos m\omega}{\sin m\omega} \right\} \overline{P_{n,m}}(\cos \theta) d\sigma \quad (2.44)$$

con: $d\sigma = \sin \theta d\theta d\omega$ y $\sigma = 1$

En conexión con el movimiento de los satélites artificiales, el potencial a menudo se escribe en la forma:

$$V = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n J_n P_n(\cos \theta) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r} \right)^n (J_{n,m} \cos m\omega + K_{n,m} \sin m\omega) \right\}$$

En esta expresión los términos J_n son los términos zonales, mientras $J_{n,m}$ y $K_{n,m}$ son los armónicos teserales.

Debido a que los efectos de los armónicos zonales (efectos acumulativos) sobre las órbitas de los satélites son mucho mayores que los efectos de los armónicos teserales (perturbaciones oscilatorias, con rápidos cambios de signo), suelen considerarse sólo los términos zonales. Entonces:

$$R = \frac{-GM}{a_e} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{n+1} J_n P_n(\cos \theta)$$

donde R (potencial de perturbación en mecánica celeste) es función de r y θ solamente y a_e es la excentricidad lineal de la órbita satelital. Los armónicos J_2, J_3, J_4, \dots se obtienen así desde las perturbaciones de los orbitales satelitales.

2.14. Interpretación física de los coeficientes de bajo grado.

Hemos visto que si en (2.32) representamos sólo los primeros términos, podremos poner en primera aproximación al potencial V expresado por los momentos de inercia: A, B, C e I en (2.33) y A y C en (2.34 y 2.35). Análogamente, los primeros grados del desarrollo de los coeficientes $\overline{C_{n,m}}$ y $\overline{S_{n,m}}$ de (2.39) representan momentos y factores de inercia.

Para $n = 0$, desde (2.32) y (2.30), $V_o = GM/r$ representa el potencial de una Tierra homogénea de masa M y radio r o bien de una Tierra formada por una superposición de capas esféricas cada una con densidad homogénea $\sigma = \sigma(r)$.

Veamos los términos de grados 1 y 2.

$$C_1 = C_{1,1} = S_{1,1} = 0$$

$$C_{2,1} = S_{2,1} = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{a^2 M} \left(\frac{A+B}{2} - C \right)$$

$$C_{2,2} = \frac{B-A}{4a^2 M}, \quad S_{2,2} = \frac{F}{2a^2} M$$

con F : producto de inercia (ó integral de masa del producto de las distancias ecuatoriales x e y).

Si cambiamos el signo a C_2 , tendremos el factor de forma dinámico J'_2 :

$$J'_2 = \frac{1}{a^2 M} \left(C - \frac{A+B}{2} \right)$$

$$\text{Si } A \approx B; \quad J'_2 \approx \frac{C-A}{a^2 M} = J_2$$

este factor, ya mencionado en (2.36), caracteriza el aplastamiento del polo. Es una de las constantes fundamentales en la Geodesia y la Astronomía. Hoy se admite para J'_2 : $(1082,6267 \pm 0,0001) \times 10^{-6}$. Este valor es 3 veces mas grande que los sucesivos coeficientes. Los coeficientes $C_{2,2}$ y $S_{2,2}$ describen la simetría en la distribución de masas ecuatoriales con relación al eje de revolución (elipticidad en el ecuador) y una cierta torsión. Estos coeficientes sugieren un elipsoide triaxial.

2.15. El potencial debido a algunos cuerpos simples.

Veremos a continuación el cálculo del potencial de algunos cuerpos regulares.

Masa cilíndrica vertical.

Consideremos una masa cilíndrica vertical de densidad σ (Fig. 2.20). El caso es sencillo si el potencial (y la gravedad vertical) se calculan sobre el eje del cilindro (por ejemplo en la estación exterior E).

Fuera del eje del cilindro, el cálculo no es simple y requiere resolver integrales elípticas (véase también Introcaso & Huerta, 1979).

Siendo la masa elemental $dm = \sigma dV = \sigma r dA dr dz$, con σ : densidad, dV : diferencial de volumen, $r dA$: arco de la masa elemental, dr y dz : lados elementales del volumen dV , se tendrá:

$$V = G\sigma \int_0^{2h} \int_{h_1}^{h_2} \int_0^R \frac{dA dz r dr}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \quad (2.45)$$

y

$$g = G\sigma \int_0^{2h} \int_{h_1}^{h_2} \int_0^R \frac{dA z dz r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (2.46)$$

con: $\frac{z}{(z^2 + r^2)^{1/2}} = \cos \gamma$ y h_1 y h_2 las distancias a la tapa y a la base del cilindro respectivamente. La expresión (2.45)

es el potencial en E debido al total de la masa cilíndrica de Fig. 2.20, mientras g es la componente vertical de gravedad. V (ó V/γ) y g son básicas para realizar inversiones en busca de masas causantes, como se verá luego.

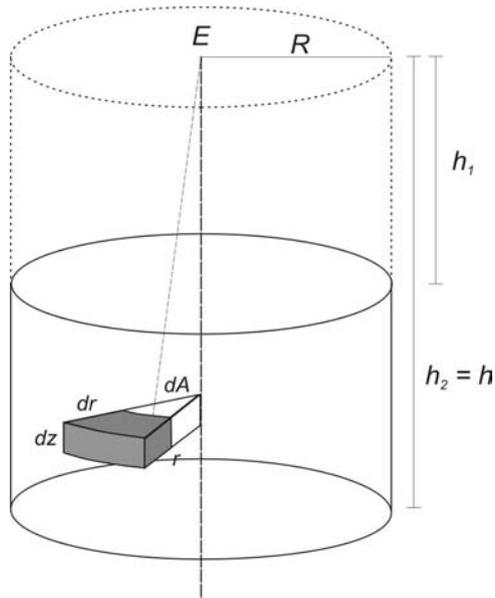


Figura 2.20. Estación externa E donde se calcula el potencial originado por la masa cilíndrica.

Si integramos (2.46) obtenemos:

$$V_e = \pi G \sigma \left[h_1^2 - h_2^2 - h_1 \sqrt{R^2 + h_1^2} + h_2 \sqrt{R^2 + h_2^2} + R^2 \ln \left(\frac{h_2 + \sqrt{R^2 + h_2^2}}{h_1 + \sqrt{R^2 + h_1^2}} \right) \right] \quad (2.47)$$

Desarrollos en serie.

Los desarrollos en serie constituyen a menudo la base para buenas aproximaciones. Así, de acuerdo con McMillan (1930), el potencial aproximado debido a un cubo de lado 2a, a distancia r del centro O en un punto exterior P(x,y,z) es:

$$V(x, y, z) \approx G \left[\frac{M}{r} - 7 \frac{M a^4}{18 r^9} (x^2 + y^2 + z^4 + 3x^2 y^2 + 3z^2 y^2 + 3x^2 z^2) \right] \quad (2.48)$$

con M: masa del cubo, G: constante de gravitación universal, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Desde aquí:

$$g(x, y, z) \approx G \left\{ \frac{Mz}{r^3} - 7 \frac{Ma^4}{18r^9} \left[6z(x^2 + y^2) + 4z^3 - \frac{9z}{r^2} (x^4 + y^4 + z^4 + 3x^2 y^2 + 3z^2 y^2 + 3x^2 z^2) \right] \right\} \quad (2.49)$$

Debido a que las expresiones para V y g involucran un segundo término en $1/r^9$, cuando r es suficientemente grande los cálculos pueden hacerse simplemente con:

$$V \approx \frac{GM}{r}; \quad g \approx \frac{GM}{r^3} z.$$

Cálculo del potencial originado por un paralelepípedo rectangular.

El potencial en O, debido a un paralelepípedo elemental de volúmen dx dy dz y masa $\sigma dx dy dz$ (con σ : densidad) a distancia r desde O (Fig. 2.21) será:

$$dV = G\sigma \frac{dx \, dy \, dz}{r}$$

$$V = G\sigma \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Si resolvemos analíticamente las dos primeras integrales en y, z tendremos:

$$V = \sigma G \int_{x_1}^{x_2} \left[x \left(1 - \ln \left(y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \right) - y \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) + \frac{z \arcsin \left(z^2 + y^2 + y \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)}{\left(y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \sqrt{y^2 + z^2}} \right] \Bigg|_{y_1}^{y_2} \Bigg|_{z_1}^{z_2} dx \quad (2.50)$$

Esta última integral puede resolverse numéricamente a partir de descomponer, por ejemplo, el paralelepípedo en un número impar de láminas: para cada x fijo entre y_1 y y_2 , z_1 y z_2 para emplear finalmente, por ejemplo, la fórmula de Simpson.

Para la resolución analítica completa de V recomendamos consultar cualquiera de los siguientes trabajos McMillan (1930, págs. 72 a 79), Nagy (1966), Introcaso & Huerta (1976), Guspí (1999).

Las siguientes expresiones de g_x, g_y y g_z son de gran utilidad:

$$g_x(x, y, z) = G \cdot \rho \left\| \left\| \left\| z \ln(y+r) + y \ln(z+r) + 2x \arctan \frac{z+y+r}{x} \right. \right. \right\|_{\Delta x_1}^{\Delta x_2} \Bigg|_{\Delta y_1}^{\Delta y_2} \Bigg|_{\Delta z_1}^{\Delta z_2}$$

$$g_y(x, y, z) = G \cdot \rho \left\| \left\| \left\| x \ln(z+r) + z \ln(x+r) + 2y \arctan \frac{x+z+r}{y} \right. \right. \right\|_{\Delta x_1}^{\Delta x_2} \Bigg|_{\Delta y_1}^{\Delta y_2} \Bigg|_{\Delta z_1}^{\Delta z_2}$$

$$g_z(x, y, z) = G \cdot \rho \left\| \left\| \left\| x \ln(y+r) + y \ln(x+r) + 2z \arctan \frac{x+y+r}{z} \right. \right. \right\|_{\Delta x_1}^{\Delta x_2} \Bigg|_{\Delta y_1}^{\Delta y_2} \Bigg|_{\Delta z_1}^{\Delta z_2}$$

con $r = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$, $\Delta x_i = x - x_i$, $\Delta y_i = y - y_i$, $\Delta z_i = z - z_i$, $i = 1, 2$.

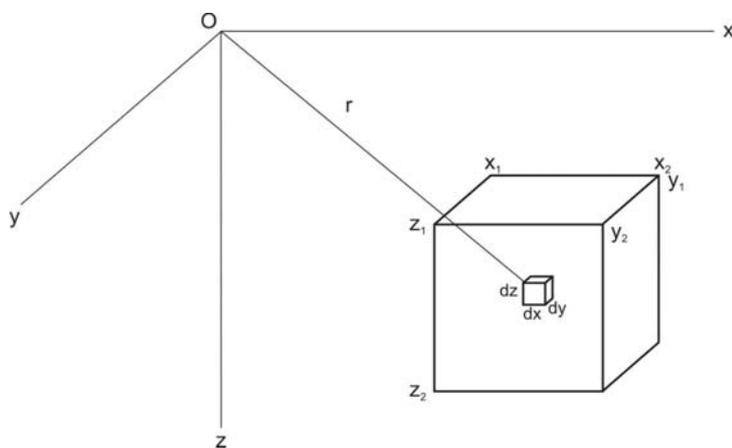


Figura 2.21. Potencial en O debido a un paralelepípedo elemental $dx \, dy \, dz$ a distancia r de O. Luego es integrado entre $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$.

2.16. Masa 2D de sección poligonal.

Talwani et al. (1959) resolvieron el cálculo de efectos gravimétricos de una estructura poliédrica 2D (en yz), tanto para la componente vertical g_v , como horizontal g_h . Veremos esta última por ser la menos utilizada, aunque para el cálculo del geoides, las más significativa. Así, para g_h obtuvieron:

$$g_h(y) = 2G\sigma \sum_{i=1}^n Y_i$$

con:

$$Y_i = a_i \sin \phi_i \cos \phi_i \left[\tan \phi_i (\theta_{i+1} - \theta_i) + \ln \frac{\cos \theta_i (\tan \theta_i - \tan \phi_i)}{\cos \theta_{i+1} (\tan \theta_{i+1} - \tan \phi_i)} \right] \quad (2.51)$$

con la notación que se desprende de la Fig. 2.22. Tendremos entonces:

$$V_{i+1} = \int_{i+1}^i gh(y) dy$$

expresión que suele integrarse numéricamente.

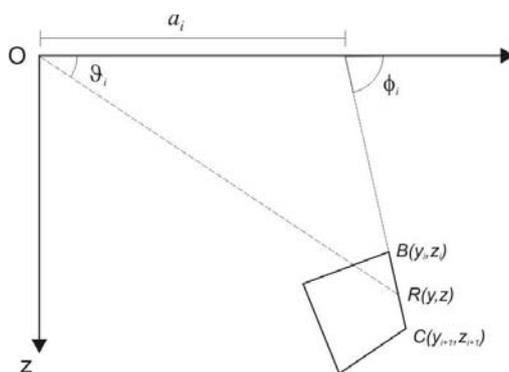


Figura 2.22. Poligonal 2D (en x, z) a partir de la cual calculamos el potencial en O.

2.17. La Transformada de Fourier

Hemos visto en 2.13 el desarrollo del potencial en serie de armónicos esféricos. Veremos a continuación el desarrollo de funciones (potencial, gravedad, etc.) en las llamadas series de Fourier.

En ambos casos (2.13 y 2.17) se pretende que los desarrollos en serie faciliten los cálculos y además amplíen las posibilidades de interpretación.

Sabemos que las series de Fourier son herramientas matemáticas que permiten descomponer funciones periódicas (repetitivas) en un conjunto de componentes senoidales (curvas ondulantes como las olas oceánicas).

S. B. Fourier, estudiando la distribución de calor en cuerpos sólidos, dedujo – a principios del siglo XIX – un método para estudiar el fenómeno (véase Bracewell, 1989). Él propuso que la irregular distribución inicial podía descomponerse en numerosas sinusoides simples provistas cada una de su máxima temperatura y de su propia fase, es decir de de su posición relativa dentro del anillo metálico utilizado en su estudio (Fig. 2.23 (a)).

Fourier había cambiado una distribución única, cuya descripción matemática era difícil, por una serie – más manejable – de funciones trigonométricas periódicas que, al sumarse, engendraban la distribución original. Cada componente senoidal variaba un número entero de veces desde un máximo a un mínimo. Llamó *armónico esférico fundamental* al que realizaba un solo ciclo (frecuencia mínima); *segundo armónico* al que realizaba dos ciclos, y así sucesivamente.

Todos conocemos el fenómeno de descomposición de la luz cuando se forma el arcoiris. Recordemos que un prisma de Newton descompone un haz de luz blanca en colores simples (Fig. 2.23(b)). Que ello es así, puede ser comprobado haciendo pasar nuevamente cada color por otro prisma. Ellos no sufrirán desviación. La causa que origina

esta descomposición es el índice de refracción ($\eta = \frac{c}{v}$ con c : velocidad de la luz y v : velocidad en el medio atravesado), de modo que cuanto más corta sea la longitud de onda mayor será la desviación. El prisma actúa, pues, como analizador de frecuencias f_r .

Para realizar matemáticamente este análisis (análisis de Fourier, o análisis armónico) es necesario calcular los coeficientes de Fourier a_m y b_m . Ellos permiten calcular las amplitudes de los distintos armónicos ($= A_n$ ó $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$). Sea la función:

$$y = f(x) = \sum_m d_m \frac{\cos mx}{\sin mx} \quad (2.52)$$

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots \quad (2.53)$$

siendo

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad , \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx \quad , \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx \quad (2.54)$$

A menudo la función $f(x)$ viene dada por un conjunto de valores discretos equiespaciados. En este caso la integral se resuelve numéricamente.

Luego de analizada la función se realiza la síntesis, tomando en general – de cada senoide – los siguientes pares de valores: amplitud y frecuencia, amplitud y fase. Ellos se reúnen en sendos gráficos. Se ha realizado así la Transformada de Fourier, obteniéndose los denominados espectros de amplitud y fase. Notemos que hemos pasado de un dominio funcional a un dominio frecuencial. Esta transformación facilita la interpretación.

En el ejemplo de Fig. 2.23(b), si queremos recuperar la luz original podemos colocar un espejo cóncavo que – convenientemente dispuesto – enfoca cada color hacia un punto donde se funden todos (luz blanca). Realizamos así la llamada antitransformación.

En la práctica, al pasar al dominio frecuencial podemos eliminar o reforzar algunas frecuencias. Luego la antitransformación nos permite obtener resultados más interpretables.

Es usual expresar en forma exponencial la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad (2.55)$$

con

$$i : \text{unidad imaginaria} \quad , \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (2.56)$$

La forma exponencial permite un mejor manejo de $f(t)$.

Originariamente la transformada de Fourier se pensó para funciones periódicas utilizando valores discretos. Gracias a un artificio simple, es posible representar igualmente una función aperiódica por una serie de Fourier. Si una tal función, definida en un cierto intervalo, se repite indefinidamente, nos encontraremos frente a una función periódica.

Introduciendo c_n en la función $f(t)$ expresada en forma exponencial, se tiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] e^{in\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] \omega_0 e^{in\omega_0 t} \quad (2.57)$$

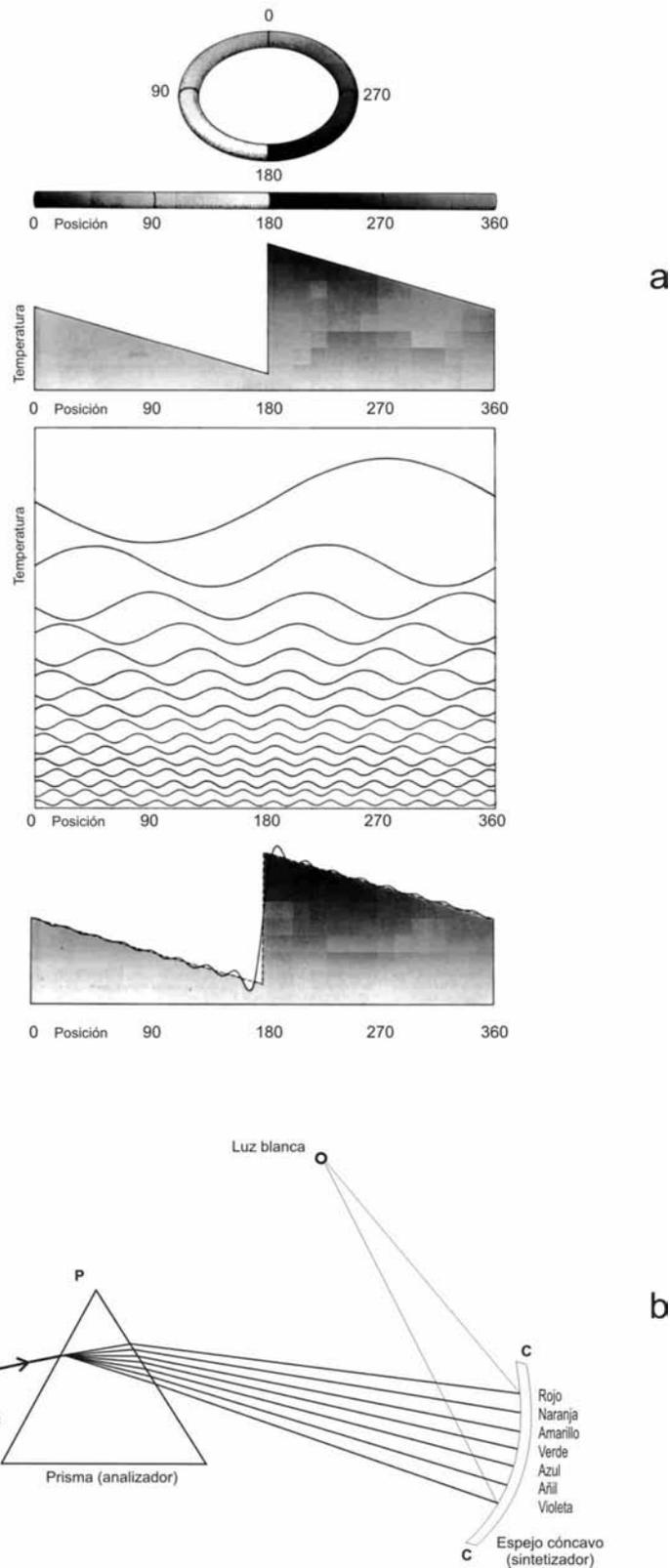


Figura 2.23. (a) Estudio original de Fourier que muestra la distribución de temperatura en distintos puntos de un anillo de Fe (arriba). Luego se ve el anillo desarrollado que precede a la gráfica tipo diente de sierra. El anteúltimo gráfico contiene una multitud de curvas sinusoidales con uno, dos, tres o más ciclos. Por último (abajo) se ve la suma de 16 de estas curvas (línea continua) con una buena aproximación al gráfico original (en trazos discontinuos). **(b)** Analogía física de los estudios de Fourier. El prisma de Newton descompone un haz de luz blanca en siete colores, cada uno con una frecuencia y una amplitud característica. Luego con el espejo cóncavo es posible recomponer la luz blanca.

Cuando $T \rightarrow \infty$ todas las frecuencias ω son permitidas. Reemplazando t por x para evitar confusiones tendremos:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\omega x} dx \right] e^{i\omega t} d\omega \quad (2.58)$$

Si definimos

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (2.59)$$

la ecuación (2.58) se convierte en:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.60)$$

Esto nos dice que cualquier función dada tiene dos modos de representación: uno en el dominio funcional (por ejemplo del tiempo $f(t)$) y otro en el dominio de las frecuencias $F(\omega)$.

Extensión al caso de dos variables

Si la función es $g(x, y)$ en coordenadas cartesianas, su transformada de Fourier será:

$$G(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy \quad (2.61)$$

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u, v) e^{i(ux+vy)} du dv \quad (2.62)$$

con: u y v en el dominio espectral.

2.18. El teorema de convolución

Esta es una herramienta extremadamente útil. Por definición de transformada de Fourier, sabemos que si f es una función de módulo integrable en \mathbb{R} , y llamamos u a una nueva variable en el dominio espectral (dominio de las frecuencias):

$$F(f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i u t} dt$$

y su inversa:

$$F^{-1}(F(f)(u))(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{2\pi i u t} du$$

Así:

$$\begin{aligned}
 F^{-1}(F(f)(u).F(g)(u))(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F(f))(u).(F(g))(u)e^{2\pi iut} du = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F(f))(u).\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)e^{-2\pi iu\tau} d\tau\right)e^{2\pi iut} du = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} (F(f))(u).e^{-2\pi iu\tau} e^{2\pi iut} du = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} (F(f))(u).e^{2\pi iu(t-\tau)} du = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(t-\tau)d\tau = f(t)*g(t)
 \end{aligned}$$

Luego:

$$F(f * g) = F(f).F(g)$$

y la extensión a dos variables es inmediata.

Veamos un ejemplo. En el Capítulo 6 veremos la expresión de Stokes, de relevancia fundamental en Geodesia. En su versión plana, ella es:

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_S \Delta g(x, y) \frac{1}{l} dS \tag{2.63}$$

con: $l = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}$. Esta es una integral de convolución:

$$N(x, y) = \frac{1}{\gamma} \Delta g(x, y) * l' \tag{2.64}$$

con $l' = \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2}}$. Si la transformada de Fourier se simboliza con F y su inversa F^{-1} , utilizando el resultado del

Teorema de Convolución para dos variables podemos escribir:

$$N(x, y) = \frac{1}{\gamma} F^{-1}[\Delta g(u, v)l'(u, v)] \tag{2.65}$$

2.19. La Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform, Cooley y Turkey, 1965)

A partir de métodos analíticos es posible evaluar la integral de Fourier y obtener la transformada de una función. Esto será luego ejemplificado para el caso de un hilo pesante, horizontal e indefnido. No obstante esto no es lo usual, y hay funciones cuyas integrales no son fáciles de calcular o no figuran en tablas. En estos casos se dispone de métodos numéricos que permiten resolver estos problemas. En principio el número de cálculos depende del número de datos sucesivos que describen la función a transformar. El número de adiciones es igual al número de datos, mientras que el número de multiplicaciones es igual al cuadrado del número de datos. Por ejemplo, el análisis de una función descrita mediante 500 datos exige 250500 operaciones: 500 sumas y 250000 multiplicaciones. La transformada rápida de Fourier (FFT) reduce considerablemente el número de multiplicaciones (operaciones por entonces (1965) lentas para las computadoras). Esta reducción se basa en la partición del área muestreada. Por ejemplo, si de una función se toman 32 muestras el número de multiplicaciones necesarias sería $32^2 = 1024$. Si dividimos el intervalo en dos partes con 16 muestras cada una, el número de multiplicaciones será $2 \times 16^2 = 512$; si volvemos a dividir cada subintervalo en dos,

tendremos $4 \times 8^2 = 256$ multiplicaciones, y así sucesivamente. Esta estrategia tiene antecedentes en los trabajos de Gauss (1803) cuando calculó órbitas de asteroides.

3. LA FORMA DE LA TIERRA

3.1. El sistema de referencia. Las anomalías gravimétricas.

Es por demás conocido que un albañil trabaja con un sistema de referencia local en el cual la terna de ejes cartesianos (x,y,z) se materializa con dos niveles de burbuja centrados colocados normalmente uno respecto de otro (coordenadas x e y que determinan un plano horizontal) mientras la coordenada vertical (z) se determina simplemente con una plomada (dirección física).

Este sistema de referencia local podría ser utilizado por la Agrimensura si las superficies a representar pudieran ser consideradas planas. Pensemos por ejemplo que el territorio argentino es una amplia extensión que exige tener en cuenta la curvatura terrestre. Pensemos también que sería deseable poder comparar los levantamientos geodésicos en distintos continentes. Surge de aquí la necesidad de disponer de un único sistema de referencia geodésico mundial, que necesariamente debe estar concebido por una terna de ejes (x,y,z) ubicados geocéntricamente, es decir en coincidencia con el centro de gravedad del planeta. Se ha pensado tomar en este sistema una figura auxiliar que, sin perder sencillez, represente en la forma más ajustada posible a la superficie media de nuestro planeta.

Recordemos que uno de los mayores objetivos de la Geodesia es el estudio de la forma de la Tierra.

Con la experiencia de Eratóstenes se admitió para la tierra una forma esférica, que algunos autores consideran hoy una aproximación de orden cero.

En este modelo rudimentario (Tierra esférica, homogénea e irrotacional) la superficie terrestre coincide con una superficie de nivel. Si al modelo anterior lo hacemos rotar con velocidad ω , la equipotencial que parte del polo, se separa ascendiendo hacia el ecuador, en virtud de la caída de "g" producida por la rotación (que es máxima en el ecuador).

Al llegar el siglo XVII, Newton y Huggens intuyeron que la Tierra se aplastaba en los polos, como ya fuera dicho en el capítulo 2. Newton propuso representar a la tierra como un fluido homogéneo en rotación, encontrando que su superficie exterior (para un cierto rango de velocidades) es un elipsoide de revolución de aplastamiento 1/230.

En el siglo siguiente fue Clairaut (1743) quien encontró que en primera aproximación el modelo terrestre es un elipsoide de revolución, cuyo aplastamiento α se deduce de coeficientes dinámicos. No esta demás señalar que asumiendo que la Tierra es un elipsoide de revolución disponemos de una figura geométrica de referencia de fácil manejo.

Ya en el siglo XX, Darwin (1910) demostró que si el fluido en rotación incrementa regularmente su densidad hacia el centro, la superficie exterior puede ser también un elipsoide de revolución.

Pensemos que si la Tierra fuese observada desde muy lejos, digamos desde la Luna, ella aparecería como una esfera ya que su aplastamiento es de muy difícil percepción. En un modelo a escala con un radio de 50 cm, el aplastamiento sería de sólo milímetros.

Todas estas son aproximaciones a la verdadera superficie física de la Tierra o nivel medio del mar (no perturbado por vientos y mareas) prolongado por debajo de los continentes. Esta superficie, llamada geoide, es una equipotencial que se acomoda y se distorsiona ante las irregularidades de la distribución de las masas terrestres. Estas distorsiones (30 m, 100 m) son muy pequeñas respecto del radio medio terrestre.

En una palabra, con la superficie de referencia (elipsoide, esferoide,...) no se pretende, como primer objetivo, buscar una aproximación a la forma de nuestro planeta. Se intenta sí, desde ella encontrar los apartamientos de la verdadera forma ya sea del geoide o de la superficie topográfica. Ellos, por otra parte, deben ser lo mas pequeños posibles para garantizar la consistencia de los resultados.

Así, la superficie elipsoídica elegida como referencia debe ser una superficie de nivel con la mayor aproximación al geoide y al campo de gravedad externo. Se trabaja por ejemplo con figuras de referencia truncando el desarrollo armónico esférico. Así si $n = 2$ se tiene el esferoide de Bruns, si $n = 4$ el esferoide de Helmert, etc.

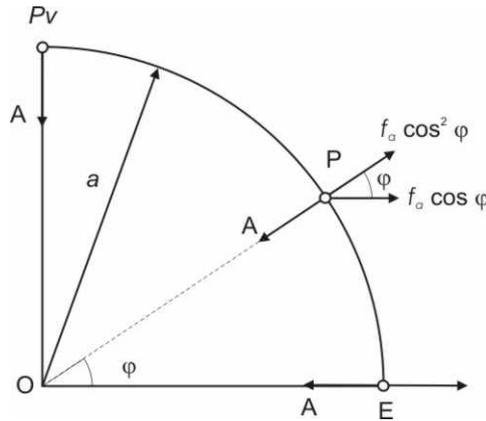
En síntesis tanto en Geodesia como en Geofísica se ha trabajado usualmente con sistemas de referencia elipsoídicos originados por la rotación con velocidad angular ω de una elipse meridiana de aplastamiento α y semieje mayor a alrededor de su eje menor b . Luego se procuró que tanto la masa encerrada como el centro de gravedad coincidieran con los correspondientes a la Tierra verdadera. Es decir, el propósito es encontrar un elipsoide de nivel o elipsoide equipotencial que coincida lo mas estrechamente posible con nuestro planeta.

Comencemos considerando una esfera homogénea de radio a , sometida a rotación ω alrededor del eje vertical PNO (Fig. 3.1). Desde Fig. 3.1, la gravedad en el polo g_p y en el ecuador g_E serán:

$$g_p = A \quad (3.1)$$

$$g_E = A - f_a \quad (3.2)$$

con A : gravedad Newtoniana, f_a : fuerza axífuga ($= \omega^2 a$).


Figura 3.1. Esfera en rotación ω , de radio a .

Desde (3.1) y (3.2):

$$g_P - g_E = f_a \quad (3.3)$$

En un punto cualquiera P , de latitud φ , tendremos (Fig. 3.1):

$$g_\varphi = A - f_a \cos^2 \varphi \quad (3.4)$$

Siendo $f_a \cos^2 \varphi$ la proyección geométrica de la fuerza axífuga en la estación P de latitud φ .

Reemplazando A de (3.4) por A de (3.2) tendremos:

$$g_\varphi = g_a + f_a(1 - \cos^2 \varphi) \quad (3.5)$$

Reemplazando f_a desde (3.3)

$$g_\varphi = g_a(1 + \beta_0 \sin^2 \varphi) \quad (3.6)$$

con: $\beta_0 = (g_b - g_c) / g_a = \omega^2 a / g_a = m$, aplastamiento gravimétrico.

Por supuesto al tratarse de una esfera $\alpha = 0$. Es necesario señalar que la expresión (3.6) tiene la forma encontrada por Clairaut (1738) en primera aproximación. Sin embargo Clairaut asumió que la Tierra es un elipsoide de revolución que se aparta poco de la esfera. Él encontró la siguiente expresión en primera aproximación:

$$g_\varphi = g_a(1 + \beta \sin^2 \varphi) \quad (3.7)$$

con $\beta = \frac{5}{2}m - \alpha$, siendo $m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e}$, a : semieje ecuatorial, γ_e : gravedad en el ecuador, $\alpha = (a - b) / a$ aplastamiento geométrico, con b : semieje polar.

La expresión (3.7) nos permite obtener el aplastamiento geométrico α con a y los parámetros dinámicos β y m . Vemos nuevamente el fuerte condicionamiento físico que presenta la construcción de la forma de la Tierra.

Desde (3.7), si dos valores de γ_0 son conocidos sobre el elipsoide (problema de reducción de gravedad) en dos lugares de latitudes diferentes φ ; tanto γ_a como β pueden ser determinados. Luego con a y ω se obtiene m y ya estamos en condiciones de determinar el aplastamiento α .

En (2.36) vimos el α de la fórmula de Clairaut determinada en primera aproximación en función de J_2 y de m . α y β fueron determinados con mayor número de términos y m con mayor precisión. Así:

$$\alpha = \frac{3}{2}J_2 + \frac{m}{2} + \frac{9}{8}J_2^2 + \frac{15}{28}J_2m + \frac{3}{56}m^2 \quad (3.8)$$

con $J_2 = -C_2$; C_2 caracteriza el aplastamiento polar (factor dinámico) como viéramos en (2.35).

$$\beta = -\alpha + \frac{5}{2}m - \frac{17}{14}\alpha m + \frac{15}{4}m^2 \quad (3.9)$$

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \gamma_a(1 + \beta \sin^2 \varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi), \\ \beta_1 &= \frac{\alpha^2}{8} - \frac{5}{8}\alpha m \end{aligned} \quad (3.11)$$

Una de las primeras aplicaciones del teorema de Clairaut fue hecha por Helmert (1901), ajustando la fórmula (3.8) con unos 1400 valores de gravedad reducida (por efecto de la altura). Obtuvo por entonces: $\gamma_0 = 978,03\text{Gal}$; $\beta = 0,005302$ con $\alpha = 1/298,3$.

Los coeficientes armónicos de segundo orden pueden ser obtenidos desde α y m de acuerdo con :

$$J_2 = \frac{3}{2}\alpha - \frac{m}{3} - \frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{2}{21}\alpha m; \quad J_4 = \frac{-5}{4}\alpha^2 + \frac{4}{7}\alpha m \quad (3.12)$$

Hoy día se trabaja con términos de tercer grado α^3 . Veamos las siguientes expresiones para el elipsoide de nivel:

$$\gamma(1930) = 978.049(1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,00000542 \sin^2 2\varphi) \quad (3.13)$$

(3.13) fue adoptada en el Congreso Internacional de Geodesia reunido en Madrid en 1930.

$$\gamma(1967) = 978.031(1 + 0,0053024 \sin^2 \varphi - 0,0000058 \sin^2 2\varphi) \quad (3.14)$$

La expresión (3.14) fue recomendada a partir de la Asamblea General de la UGGI reunida en Lucerna. Para esta expresión la constante geocéntrica GM se obtuvo con sondas espaciales (incluye la masa de la atmósfera). El factor de forma dinámica J_2 se obtuvo desde las deformaciones orbitales de los satélites artificiales. Finalmente la velocidad de rotación ω se conoce con gran precisión ($2\pi/86164$ s).

Conviene señalar que los valores de gravedad observados vinculados con el viejo valor fundamental de Postdam deben ser actualmente corregidos en aproximadamente -14 mGal. En nuestro país se ha asumido provisoriamente que el valor fundamental de Miguelete debe ser corregido en $-14,97$ mGal.

En Argentina los datos están siendo llevados al International Gravity System Network (IGSN 1971) en correspondencia con la recomendación del SILAG (Sistema informático latinoamericano de gravedad) establecido por el IPGH (Instituto Panamericano de Geografía e Historia). Luego (1984) el Sistema Geodésico Mundial propuso la siguiente expresión que incluye el efecto de la atmósfera:

$$\gamma(1984) = 978.032,67714 \times \frac{1 + 0,0019318513639 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - 0,00669437999013 \sin^2 \varphi}} \text{ mGal} \quad (3.15)$$

Recapitulando. La Geodesia exige hoy el conocimiento del geoide dado que desde él se realizan las mediciones de altura. Con el fin de obtener esta superficie (superficie física de la Tierra) se considera actualmente una figura de referencia elipsoidal (elipsoide con aplastamiento α y semieje mayor a) por su fácil manejo matemático. Se le exige además a este elipsoide incluir el total de la masa terrestre, girar con velocidad angular ω y tener su centro en

coincidencia con el centro de gravedad de la Tierra. Veremos en capítulos próximos cómo se logra la determinación del geoide por distintos caminos.

Finalmente, consignamos aquí los parámetros de distintos sistemas de referencia geodésicos:

- Sistema de referencia 1924/1930: $a = 6378388$ m, $\alpha = 1/297,0$.
- La Asamblea General reunida en Estocolmo (1930) adoptó para este elipsoide la fórmula de gravedad internacional establecida por G. Cassinis: $\gamma_0 = 9,78049 (1 + 0,0052884 \operatorname{sen}^2\varphi - 0,0000059 \operatorname{sen}^2 2\varphi)$ ms⁻².
- Debido a que este sistema representa hoy una aproximación insuficiente para el elipsoide terrestre medio con propósitos científicos, fue sustituido, en principio, por el sistema de referencia geodésico 1967, que está definido con las siguientes constantes: $a = 6378160$ m, $GM = 398603 \times 10^9$ m³s⁻², $J_2 = 1082,7 \times 10^{-6}$, $\omega = 7,2921151467 \times 10^{-5}$ s⁻¹. En este sistema $\alpha = 1/298,247$.
- En la Asamblea general de Canberra el sistema de referencia geodésico de 1967 fue reemplazado por el sistema de referencia geodésico de 1980, también basado en la teoría del elipsoide equipotencial geocéntrico con las siguientes constantes: $a = 6378137$ m, $GM = 398600,5 \times 10^9$ m³s⁻², $J_2 = 1082,63 \times 10^{-6}$, $\omega = 7,292115 \times 10^{-5}$ s⁻¹, donde GM incluye a la atmósfera.

4. ANOMALÍAS GRAVIMÉTRICAS

4.1. Introducción

Como vimos, puede considerarse que nuestro planeta es una esfera aplastada que gira alrededor de su eje de revolución. Además presenta una superficie topográfica irregular. Tales circunstancias hacen que los valores de gravedad medidos sobre ella no puedan ser directamente comparados dada la desigual influencia de la rotación, altitud y masa. Se pensó así, en principio, en transportar los valores observados mediante adecuadas reducciones a una misma superficie de referencia para compararlos allí con valores teóricos obtenidos para las respectivas estaciones.

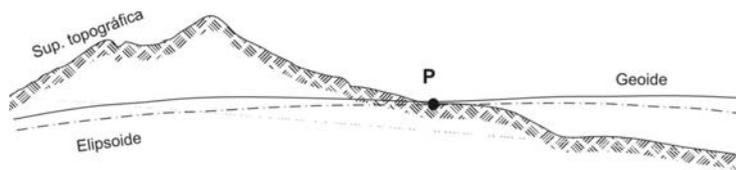


Figura 4.1. Superficie de referencia terrestre.

Dijimos que la superficie de referencia que se suele considerar es el geoide, definido como la equipotencial determinada por las aguas medias de los mares en equilibrio prolongada por debajo de los continentes. Resulta cómodo tomar en primera –aunque grosera– aproximación, geoide y elipsoide coincidentes. (Como se sabe, el esferoide terrestre, o figura media que corresponde a una distribución regular de masas, coincide con un elipsoide de revolución tan estrechamente, que prácticamente pueden considerarse como una única superficie elipsoidal). No obstante, esta simplificación se traduce en imprecisiones no despreciables en trabajos geodésicos. Para fines prospectivos, tales errores carecen en general de importancia. En contraposición, en Geodesia la separación entre geoide y elipsoide es esencial. Volveremos sobre esta cuestión al final del capítulo. En la Fig. 4.1 están dibujadas las superficies mencionadas.

Supongamos ahora haber determinado la gravedad sobre la superficie topográfica en la estación E (Fig. 4.2).

A este valor lo designaremos g_0 . En ε intersección del elipsoide y la vertical que pasa por E , de latitud ϕ_0 , tendremos un valor γ_0 deducido de acuerdo con una expresión teórica (expresión internacional de 1930 hoy desactualizada o expresiones de 1967, 1984). Ver 3.13, 3.14 y 3.15. No podemos comparar este valor teórico con el obtenido directamente de la observación, dado que están a distintas altitudes. Para hacer posible la comparación, comúnmente se transporta el valor observado a la superficie de referencia ε (Fig. 4.2).

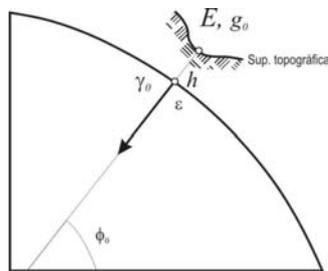


Figura 4.2. Gravedad teórica γ_0 y observada g_0 sobre la misma vertical.

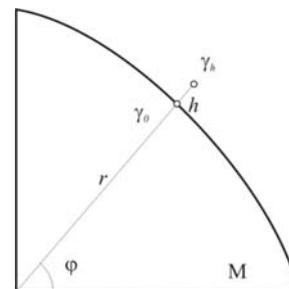


Figura 4.3. Gravedad γ_0 sobre una Tierra homogénea (masa m), esférica (radio r) e irrotacional ($\omega = 0$). A una altura h la gravedad será γ_h .

Comparando ahora los valores obtenidos por los dos caminos (observacional reducido y teórico, fórmula de 1984, por ejemplo), las discrepancias serán las anomalías gravimétricas:

$$\text{Anomalía gravimétrica} = g_{\text{observado y reducido}} - \gamma_0 \quad (4.1)$$

4.2. Reducción de altura (aire libre)

Cerca de la superficie de la Tierra, un desarrollo en serie de Taylor con respecto a la altura h será:

$$\gamma_h = \gamma_0 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial h}\right)_0 h + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial h^2}\right)_0 h^2 + \dots \quad (4.2)$$

Si consideramos a la Tierra, esférica de radio r , homogénea e irrotacional (Fig. 4.3) y tomamos los términos lineales de (4.2), tendremos con $\gamma = GM/r^2$; $\partial\gamma/\partial h = -2\gamma_0/r$:

$$\gamma_h = \gamma_0 - 2 \frac{\gamma_0}{r} h \quad (4.3)$$

Si agregamos ahora el término cuadrático de (4.2) tendremos:

$$\gamma_h = \gamma_0 \left[1 - 2 \frac{h}{r} + 3 \left(\frac{h}{r}\right)^2 + \dots \right] \quad (4.4)$$

Idéntico resultado hubiéramos obtenido partiendo de (Fig. 4.3):

$$\gamma_h = \frac{GM}{(r+h)^2} = \frac{GM}{r^2} \left(1 + \frac{h}{r}\right)^{-2}$$

y desarrollando hasta el término cuadrático. Si en (4.4) introducimos el radio medio terrestre (6371 km) tendremos:

$$\gamma_h - \gamma_0 = -0,308 h + 0,073 H^2, \text{ con } h \text{ en m y } H \text{ en km} \quad (4.5)$$

La influencia del 2° término será:

$$\begin{aligned} H = 1 \text{ km; } & 0,07 \text{ mGal} \\ H = 2 \text{ km; } & 0,29 \text{ mGal} \\ H = 3 \text{ km; } & 0,65 \text{ mGal} \\ H = 5 \text{ km; } & 1,80 \text{ mGal} \end{aligned}$$

Si buscando mayor rigurosidad empleamos la serie de Taylor con h elipsoídico, deberemos partir de un γ de la forma (3.11), es decir, el correspondiente a un sistema de referencia elipsoico de nivel. Derivando γ una y dos veces y reemplazando en (4.2) tendremos:

$$\gamma_h = \gamma_0 \left[1 - 2 \frac{h}{a} C_1 + 3 \left(\frac{h}{a}\right)^2 \right] \quad (4.6)$$

con a : semieje mayor del elipsoide y

$$C_1 = 1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi \quad (4.7)$$

Con f : aplastamiento geométrico, m : $\omega^2 a / \gamma_a$ (aceleración centrífuga / gravedad normal en el ecuador).

C_1 que para una esfera es igual a uno, toma para el elipsoide de nivel un valor máximo de 1,007, es decir con una discrepancia del 7/1000.

Debido a que tradicionalmente las coordenadas geodésicas λ , φ y h no han sido conocidas, se debió trabajar con altitudes normales H^N ($= \frac{C_p}{\gamma}$, Torgue, 2001, p. 82) en el sentido de Molodenski. En este caso debemos reemplazar h por H^N en (4.6), siendo ahora la corrección de aire libre (altura) en 1ª aproximación $-\frac{\partial\gamma}{\partial H^N} H^N$.

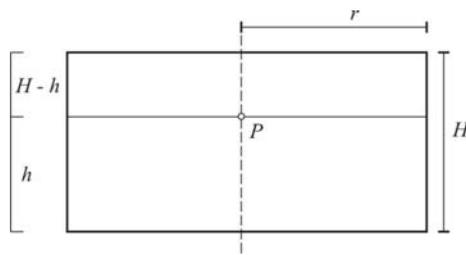


Figura 4.4. Descomposición de un cilindro de altura H para el cálculo de g en el interior P .

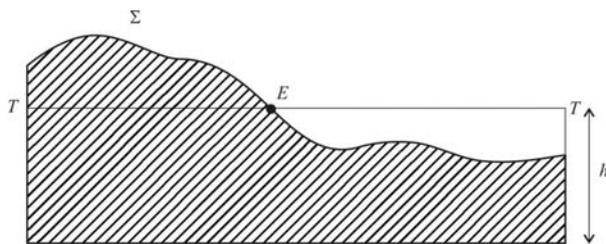


Figura 4.5. La losa plana indefinida de espesor h se aproxima al verdadero volumen (rayado).

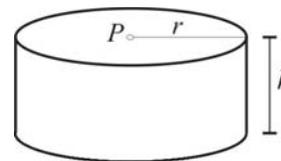


Figura 4.6. Gravedad en el centro P del techo de un cilindro de altura h .

4.3. Reducción de masa (fórmulas auxiliares)

En la reducción anterior por aire libre se tuvo en cuenta sólo el efecto de altitud sobre el valor de gravedad observado. En la reducción por masa se considera el efecto que origina sobre la gravedad el exceso o defecto entre el nivel del mar y la superficie topográfica.

Para determinar el valor de la reducción comenzaremos considerando la atracción que ejerce sobre un punto P de la superficie terrestre, un trapecio circular elemental (Fig. 2.20) del interior de la corteza.

La atracción vertical entre E y dm será:

$$dg' = \frac{G\sigma dv}{d^2} \cos \gamma \quad (4.8)$$

ó

$$dg' = G\sigma \frac{dA z dz r dr}{d^3 \left[= (z^2 + r^2)^{3/2} \right]} \cos \gamma \quad (4.9)$$

siendo σ la densidad de dm encerrada en el volumen dv . Esta expresión dá lugar a (2.39) integrando (4.9) entre 0 y 2π , r_1 y r_2 y h_1 y h_2 , tendremos:

$$g' = G\sigma \int_0^{2\pi} dA \int_{h_1}^{h_2} z dz \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (4.10)$$

$$g' = G\sigma \int_0^{2\pi} dA \int_{h_1}^{h_2} z \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + r_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + r_2^2}} \right) dz \quad (4.11)$$

$$g' = 2\pi G\sigma \left(\sqrt{r_1^2 + h_2^2} - \sqrt{r_1^2 + h_1^2} - \sqrt{r_2^2 + h_2^2} + \sqrt{r_2^2 + h_1^2} \right) \quad (4.12)$$

Esta expresión tiene validez sólo si h_1 y h_2 ($= h$) tienen el mismo signo, de lo contrario y como dichos valores son cuadráticos, dará el mismo valor tanto si los comprtimientos están por encima o por debajo de la estación. En estos

casos se deben considerar los efectos por encima y por debajo de la estación por separado. Si se trata de una fracción n de 2π , g' debería dividirse por n .

Para el cálculo de la gravedad en un punto interior P del eje del cilindro descomponemos el cilindro de altura H en dos cilindros de alturas h y $(H-h)$ (Fig. 4.4). Para el cilindro superior desde (4.12) con $r_1 = h_1 = 0$; $r_2 = r$; $h_2 = h$ se tiene:

$$g_s = 2\pi G\sigma \left[r + H - h - \sqrt{r^2 + (H-h)^2} \right] \quad (4.13)$$

y para el cilindro inferior:

$$g_i = 2\pi G\sigma \left[r + h - \sqrt{r^2 + h^2} \right] \quad (4.14)$$

Sumando algebraicamente ambos efectos se tiene el efecto total g_p :

$$g_p = 2\pi G\sigma \left[2h - H - \sqrt{r^2 + h^2} + \sqrt{r^2 + (H-h)^2} \right] \quad (4.15)$$

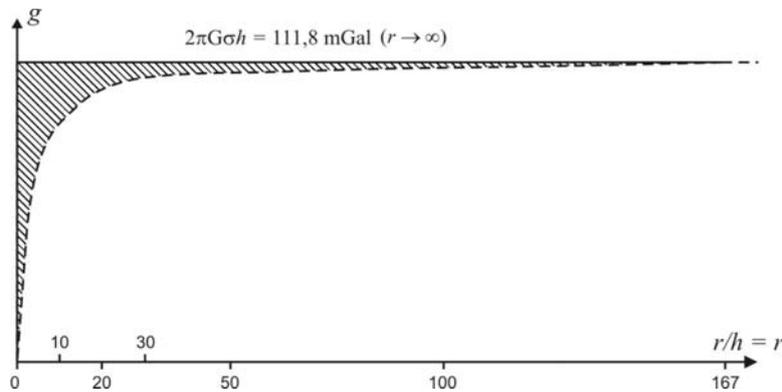


Figura 4.7. Diferencias entre los efectos de g de una losa plana indefinida de espesor $h = 1 \text{ km}$ y una masa cilíndrica de distintos r en el punto central de su techo (línea de trazos). Para r grande, 4.16 y 4.20 tienden a coincidir.

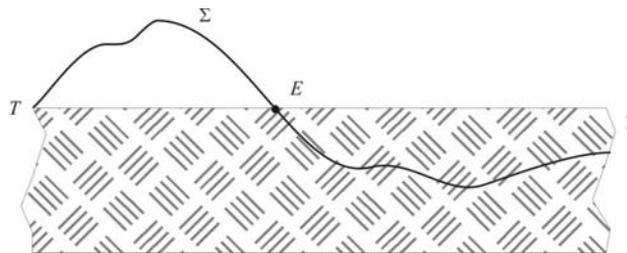


Figura 4.8. Los apartamientos del techo TT de la losa plana indefinida originan efectos de g que deben ser corregidos.

4.4. Reducción simplificada de Bouguer

Debe su nombre a Pierre Bouguer (1749), físico francés que dirigió la expedición de la Real Academia Francesa para medir la longitud de un grado de latitud en el Ecuador, en el siglo XVIII.

En la reducción de Bouguer, se considera el efecto que origina sobre la gravedad la masa interpuesta entre el nivel del mar y la estación considerada, en la hipótesis de que esta masa es una losa plana horizontal indefinida de espesor h y densidad generalmente adoptada como $2,67 \text{ g/cm}^3$.

Las elevaciones y depresiones comprendidas entre la superficie topográfica y el plano horizontal superior, que limita a la losa y pasa por la estación E (Fig. 4.5), hacen imprecisa la reducción. Es necesario realizar entonces una

corrección adicional subsiguiente llamada reducción topográfica complementaria para compensar estos efectos. Si hacemos $r_1 = 0$, $r_2 \rightarrow \infty$, $h_1 = 0$ en (4.10) obtendremos el efecto de la losa plana indefinida:

$$g' = 2\pi G\sigma \int_0^h \frac{z}{z} dz = 2\pi G\sigma h \quad (4.16)$$

La expresión (4.16) recuerda a la expresión para una repartición de densidades planas (2.18). La cantidad (σh) admite, con tal de mantenerse constante, distintas combinaciones de espesores y densidades (dilataciones y contracciones de masas). La condensación en un plano, nos lleva al método propuesto por Helmert que luego veremos.

El valor mas usual de la corrección de Bouguer es $-0,1118 h$; con $\sigma = 2,67$. Sin embargo, para ciertas exploraciones se suele reemplazar el 2,67 por la densidad de la zona en estudio, en cuyo caso se emplea la expresión: $-0,0419 \sigma h$.

Admitiendo una densidad de $2,67 \text{ g/cm}^3$ para la corrección de Bouguer, ambas correcciones por altitud y masa pueden combinarse en una sola:

$$\text{Corr AL} = +0,3086h \quad (4.17)$$

$$\text{Corr B} = -0,1118h \quad (4.18)$$

$$\text{Corr AL,B} \sim +0,197h \text{ mGal/m} \quad (4.19)$$

Para analizar la validez de la corrección de Bouguer comencemos por hacer en (4.12) $r_1 = 0$, $h_1 = 0$, $r_2 = r$, $h_2 = h$ (Fig. 4.6). Se tendrá:

$$g = 2\pi G\sigma \left[r+h-\sqrt{r^2+h^2} \right]; \quad g = 2\pi G\sigma h \left[1 + \frac{r}{h} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \right] \quad (4.20)$$

Si hacemos la relación de (4.20) con $2\pi G\sigma h$ (losa plana indefinida) se tiene:

$$g' = f\left(\frac{r}{h}\right) = 1 + \frac{r}{h} - \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}$$

Graficando se tiene (Fig. 4.7).

Con $r = 30 \text{ km}$, el error es inferior a 2 mGal (menor del 2%) con lo cual se demuestra que rápidamente se realiza todo el efecto y prácticamente (r/h) no tiene por qué ser infinito. O, dicho en otras palabras, el efecto de las masas lejanas es insignificante.

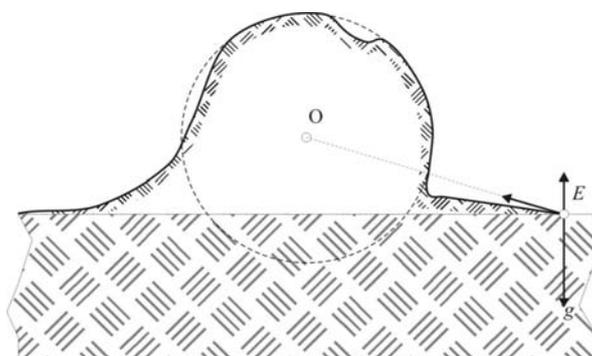


Figura 4.9. La colina asimilada a una esfera origina en E un efecto contrario a g .

4.5. Reducción topográfica complementaria

Como ya comentamos en la corrección de Bouguer se despreciaron en una primera aproximación las irregularidades topográficas cercanas (colinas y masas por encima de la losa, y valles y depresiones por debajo de la estación) (Fig. 4.5).

Sólo si se trabaja en zonas llanas y planicies la corrección por masa tal como la planteó Bouguer es suficientemente correcta, de lo contrario deberemos tener en cuenta las irregularidades del terreno en una corrección complementaria que denominaremos topográfica. El signo de esta corrección es siempre aditivo.

Si se trata de una colina o elevación, las masas sobrepuestas a la losa producen una sollicitación contraria a la gravedad (Fig. 4.8).

Si haciendo un análisis cualitativo consideramos la sobre-elevación como asimilada a una esfera (Fig. 4.9), podemos concentrar la masa en el centro O . Descomponiendo entonces la atracción según EO en dos direcciones, horizontal y vertical, se ve que esta última componente es de signo contrario a la gravedad. Por tanto la corrección será del mismo signo que (g) (aditiva).

Tomemos ahora una depresión o valle. En este caso la corrección vuelve a ser aditiva puesto que en la reducción de Bouguer el valle fue ocupado por masas que en realidad no existen, originando un exceso negativo que debe ser eliminado mediante una corrección aditiva.

En síntesis, la corrección será siempre positiva, se trate de elevaciones o depresiones.

Si en la expresión (4.12) hacemos $h_1 = 0$, $h_2 = \Delta h$, y subdividiendo 2π en n partes iguales, se tendrá:

$$g_T = \frac{2\pi}{n} G \sigma \left[r_2 - r_1 + (r_1^2 + \Delta h^2)^{\frac{1}{2}} - (r_2^2 + \Delta h^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (4.21)$$

Históricamente, para efectuar las reducciones se han confeccionado tablas que son utilizadas en concordancia con plantillas impresas sobre papel transparente. Estas plantillas (Fig. 4.10) se superponen sobre el plano topográfico de curvas de nivel que expresan la altimetría del terreno.

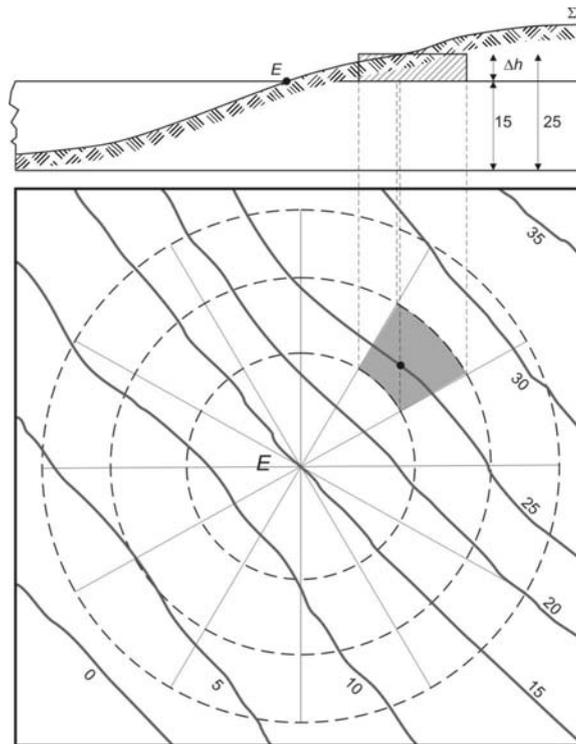


Figura 4.10. La figura muestra un compartimiento con $\Delta h = 25 \text{ m} - 15 \text{ m} = 10 \text{ m}$, cuyo efecto sobre E se calcula con (4.22).

Las plantillas transparentes se subdividen en compartimentos originados por la intersección de un haz de rectas radiales y circunferencias concéntricas al centro O . Cada compartimiento tiene una contribución conocida por unidad de elevación media. El centro O de tales plantillas se superpone a la estación E en estudio y se estima para cada compartimiento la altitud media mediante el plano alimétrico. Estos valores se substraen a la altitud de la estación y con las diferencias se entra en una Tabla (Tablas de Hammer, 1939, por ejemplo, que se extienden hasta unos 22 km de la estación) y se obtiene para cada compartimiento o prisma elemental medio, la corrección topográfica buscada.

La suma de las contribuciones así encontradas nos dará la corrección topográfica en la estación E. Mas adelante, al tratar las correcciones isostáticas volveremos sobre esta cuestión. Hammer (1939, p. 187) da cuenta de un ejemplo muy ilustrativo (Fig. 4.11).

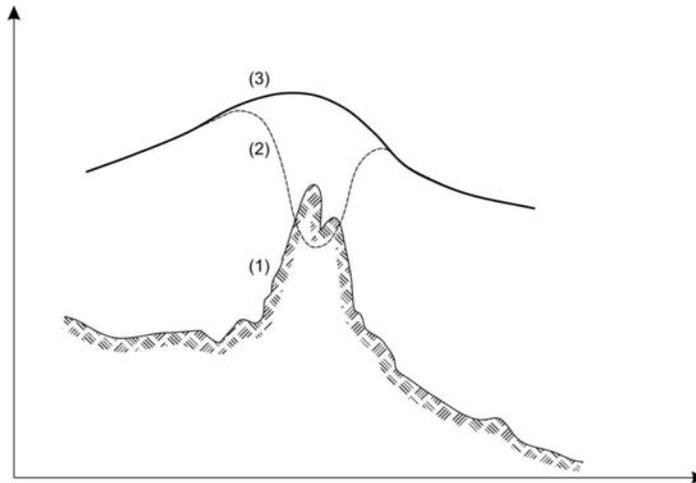


Figura 4.11. Anomalías de Bouguer: sin corrección topográfica (2); con corrección topográfica (3). Topografía (1).

Actualmente el efecto topográfico se calcula mediante computadoras. Se digitaliza el terreno tomando un damero como base de los prismas rectos que conforman el terreno (Fig. 4.12), siendo sus altitudes, las altitudes topográficas de cada prisma tomadas desde la estación a corregir. Los cálculos pueden hacerse usando la ecuación:

$$C_T = G\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{H_p}^{Z=H} \frac{Z - H_p}{l^3} dx dy dz \quad (4.22)$$

$$\text{con } l = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}$$

La corrección topográfica pensada en principio para perfeccionar a la corrección simple de Bouguer, se la utiliza además actualmente para realizar correcciones a las anomalías de aire libre.

Forsberg (1997), considerando inclinaciones pequeñas, simplificó C_T expresando el integrando en una serie de convoluciones que resuelven más eficientemente el cálculo en el dominio frecuencial.

También han sido usadas expresiones simplificadas. Por ejemplo, condensando las masas de los paralelepípedos de espesores: $(z_1 - z_2)$ en una placa intermedia ubicada en: $z_m = (z_1 - z_2)/2$. Tendremos así:

$$C_T = G\sigma \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z}{r^3} dx dy dz \text{ siendo } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z_m^2}. \text{ Con } \mu = \sigma(z_2 - z_1): C_T = G\mu \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{z_m}{r^3} dx dy = -G\mu z_m \left[\arctan \frac{xy}{z_m r} \right]_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2}.$$

Si bien en zonas llanas esta corrección suele despreciarse, en zonas montañosas suele alcanzar valores significativos. Los geofísicos corrigen usualmente por efectos de terreno a las anomalías de Bouguer (expresiones 4.25), mientras los geodestas las suelen considerar en las anomalías de Aire Libre para el cálculo del geoide (véase capítulo 6).

4.6. Anomalías de aire libre y de Bouguer

Tradicionalmente la gravedad observada g_0 ha sido reducida al geoide utilizando: $+\frac{\partial \gamma}{\partial H} \times H$ ó corrección de aire libre CAL, siendo H la altitud geóidica. En este caso la anomalía de aire libre (AAL) ha sido definida como:

$$A_{AL} = g_0 + C_{AL} - \gamma_0 \quad (4.23)$$

con γ_0 : gravedad sobre el elipsoide de referencia en la latitud de la estación.

La anomalía de aire libre en el sentido de Molodenski, de acuerdo con (4.4) será:

$$A_{AL} = g_0 - \gamma_h \tag{4.24}$$

Con h : altitud elipsoidal, que a veces se toma como H^N (altitud normal). Volveremos luego sobre el tema.

Si a (4.23) le agregamos la corrección simple por masa C_B o la corrección perfeccionada $C_{B,T}$ tendremos respectivamente la anomalía de Bouguer (AB) simple y (AB_T) perfeccionada:

$$A_B = A_{A,L} + C_B$$

$$\acute{o}$$

$$A_{B,T} = A_B + C_T \tag{4.25}$$

con C_T : corrección topográfica.

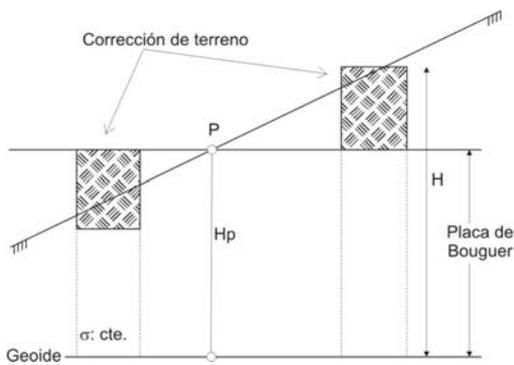


Figura 4.12. Placa de Bouguer y correcciones de terreno.

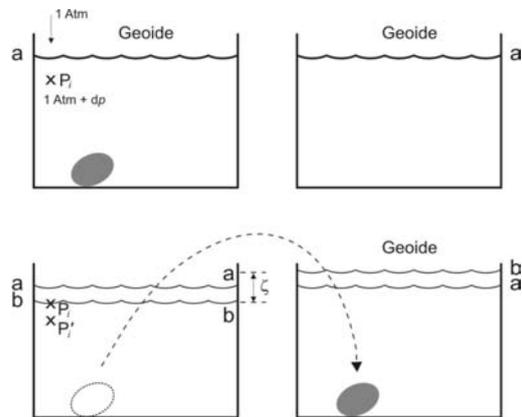


Figura 4.13. Esta experiencia simple comienza con dos recipientes llenos de agua hasta el mismo nivel \overline{aa} (arriba). La masa m se ubica en el recipiente de la izquierda. Luego (abajo) retiramos la masa m y la depositamos en el recipiente de la derecha, observando el cambio en la superficie de nivel, que pasa a \overline{bb} .

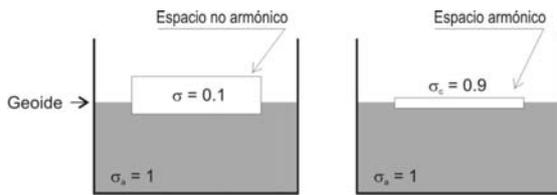


Figura 4.14. Izquierda: las anomalías de g sobre el geoide y dentro del paralelepípedo dejan de ser armónicas. A la derecha, condensando las masas (con densidad que aumenta nueve veces) prácticamente el espacio por sobre el geoide es armónico (y así con Δg_i se deduce V_i).

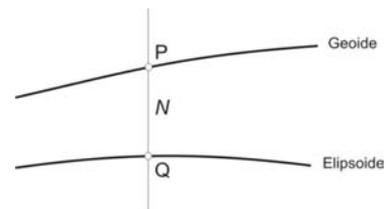


Figura 4.15. Ondulación N entre el geoide y el elipsoide.

4.7. El cambio de posición del geoide (efecto indirecto)

Todo cambio de masas produce un cambio de posición de la superficie de nivel. Así, al retirar las masas habrá un desplazamiento ζ denominado *efecto indirecto* (Fig. 4.13). Esta figura corresponde a un modelo hidráulico.

Recordemos que las expresiones (2.8) y (2.9) nos dicen que las superficies de igual presión son superficies equipotenciales. En el recipiente de arriba (a la izquierda) la superficie de nivel (agua) soporta una presión de 1 atm; mientras que en el interior (en P_i , a distancia ab de aa) la presión crecerá, digamos, a 1 atm + dp . Al quitar la masa m el agua desciende de \overline{aa} a \overline{bb} alcanzando el punto P_i . Allí la presión vuelva ser de 1 atm, de modo que para volver a tener la misma presión debemos descender de P_i a P_i' una cantidad \overline{ab} .

Si en los cálculos gravimétricos eliminamos la masa interpuesta de espesor H con una losa plana indefinida, asumiendo para su mejor manejo que ella está prácticamente representada por un cilindro del mismo espesor, de radio 167 km y densidad $2,67 \text{ g/cm}^3$, tendremos para $H = 1 \text{ km}$, $\zeta \approx 38 \text{ m}$ y para $H = 3 \text{ km}$, $\zeta \approx 58 \text{ m}$.

Estos valores son demasiado grandes. O, dicho en otras palabras, desplazan demasiado a la superficie de nivel, y esto no es bueno para la consistencia de los cálculos. Una manera elegante y eficaz de reducir considerablemente estos números es trabajar con el método de condensación sugerido por Helmert a fines del siglo XIX, que veremos en el próximo parágrafo.

4.8. La condensación de Helmert

Si reducimos los valores de g_{obs} al geoide de acuerdo con 4.23, las anomalías sobre esta superficie soportan a la masa por encima de ellas. Es decir, la distribución de gravedad dentro de la tierra no es armónica. Para recuperar la armonicidad y trabajar entonces con las anomalías de g para obtener el potencial T (y por ende el geoide), Helmert propuso “condensar” a las masas que están sobre el geoide en la superficie del mismo (Fig. 4.14).

Una forma sencilla de obtener valores numéricos es considerar que la masa de Bouguer es un cilindro por ejemplo de radio $r = 167 \text{ km}$, el espesor h es de 1 km y la densidad $2,67 \text{ g/cm}^3$. En este caso el efecto indirecto calculado con la fórmula de Bruns (2.27) toma, como viéramos, valores no despreciables (por ej. puede llegar a casi 60 m para $H = 3 \text{ km}$). Estos desplazamientos del geoide conspiran contra la precisión buscada. En cambio la condensación de masas origina efectos indirectos muy pequeños.

El desplazamiento de masas (correcciones de Bouguer, isostáticas y por condensación) produce así un corrimiento del geoide que pasa a llamarse co-geoide. La ondulación buscada será:

$$N = N_c + \zeta \quad (4.26)$$

con N_c : ondulación del co-geoide; ζ : efecto indirecto. Mas adelante veremos como calcular N_c en base a anomalías de aire libre, llevadas ahora al co-geoide con una corrección (corrección de Bowie, véase expresión 4.3): $2\gamma\zeta / r$.

Significación numérica de la condensación. Con el objeto de apreciar la importancia de la condensación consideraremos ahora las expresiones del potencial y de la gravedad correspondiente al punto central P de un cilindro de radio $r = 167 \text{ km}$, altura h y densidad $\sigma = 2,70 \text{ g/cm}^3$ (Fig. 4.6).

Tomando en (4.10) los siguientes límites: r de 0 a r , A de 0 a 2π y z de 0 a h se tendrá:

$$g_p = 2\pi G \sigma \left| h + r - \sqrt{r^2 + h^2} \right| \quad (4.27)$$

Para el caso de la gravedad g_c condensada sobre el geoide, podemos emplear:

$$g_c = 2\pi G \sigma h = 2\pi G \mu \quad (4.28)$$

que coincide con (4.16). Véase también (2.1).

Calculemos ahora el potencial V_p en la misma estación P (Fig. 4.6) citada mas arriba.

$$dV_p = G \sigma \frac{dA dz r dr}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \quad (4.29)$$

Integrando en los mismo límites dados para el cilindro en el caso del cálculo de g_p , tendremos:

$$V_p = \pi G \sigma \left| -h^2 + h\sqrt{h^2 + r^2} + r^2 \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + r^2}}{r} \right| \quad (4.30)$$

Si condensamos la masa cilíndrica de altura h en la base del cilindro (disco plano) con densidad superficial $\sigma h = \mu$, el potencial que origina el disco en P a distancia h desde el centro del disco, será:

$$V'_p = G (\sigma h) \int_0^{2\pi} dA \int_0^r \frac{r}{(r^2 + h^2)^{1/2}} dr = 2\pi G \mu \left| \sqrt{r^2 + h^2} - h \right| \quad (4.31)$$

Con $h = 0$, tendremos que (4.32) expresa el potencial en el centro del disco de la masa condensada:

$$V_c = 2\pi G \mu r \quad (4.32)$$

Si $h = 1$ km y $r = 167$ km; $|g_p - g_c| = 0,3$ mGal y $|V_p - V_c|/\gamma = 5,7$ cm. Si $h = 3$ km, las diferencias serán de 3 mGal y 51,6 cm respectivamente. Vemos así la eficiencia de la condensación. Rigurosamente hablando, al mover (condensar) las masas el geoide, se translada a una nueva posición (co-geoide). Si el efecto indirecto es: $\zeta = |V_p - V_c|/\gamma$, de acuerdo con la fórmula de Bruns, las anomalías de aire libre deberán ser corregidas para llevarlas al co-geoide. Esta corrección, llamada corrección de Bowie, será como ya viéramos $2\gamma\zeta/r$. Si $\zeta = 1$ m, la corrección será de sólo 0,3 mGal. Siendo N la distancia del elipsoide al geoide y N_c la distancia del elipsoide del co-geoide, la ondulación buscada será: $N = N_c + \zeta$.

4.9. La anomalía de Faye

Usualmente la Geofísica ha utilizado para obtener modelos de inversión: (a) anomalías de aire libre en zonas oceánicas y (b) anomalías de Bouguer (simples o modificadas) en zonas continentales.

Algunas veces, aunque no frecuentemente, las anomalías de aire libre fueron utilizadas en continentes. Por ejemplo, se buscaron relaciones lineales entre anomalías de aire libre (y también de Bouguer) y altitudes medias independizadas de las altitudes puntuales usadas para definir a las anomalías.

Se comparaban así las rectas de regresión de las zonas estudiadas, con rectas de regresión de aquellas zonas de ancho y alto similares a las primeras y además –y esto es fundamental– de reconocido balance isostático (EEUU por ejemplo).

En esencia, las anomalías de aire libre, están fuertemente vinculadas con la topografía. Con las relaciones anomalías versus altitudes se pretendía minimizar esta contaminación, aunque los resultados distaban de alcanzar el objetivo. Dado que hoy se cuenta con modelos digitales de terreno, esta distorsión puede corregirse.

En efecto, si afectamos a las anomalías de aire libre (expresión 4.23) de las correcciones de terreno tendríamos la llamada anomalía de Faye, o:

$$\text{Anomalía de Faye} = \text{Anomalía de Aire libre} + C_T \quad (4.33)$$

A partir de aquí podemos pensar a la condensación de masas, como una corrección idealizada en la cual hacemos desaparecer la losa plana indefinida a costa de un pequeño desplazamiento del geoide (efecto indirecto ζ) que a menudo se desprecia.

En síntesis, en primera aproximación, la anomalía de Faye puede ser obtenida desde una anomalía de Bouguer (con corrección topográfica) afectada finalmente de la corrección de condensación de Helmert.

4.10. Las anomalías de gravedad mixtas y puras. Deflexión de la vertical

Consideremos el vector de gravedad \vec{g}_p sobre el geoide, y el vector de gravedad $\vec{\gamma}_Q$ sobre Q ubicada sobre el elipsoide de referencia (Fig. 4.15). La anomalía vectorial de gravedad será:

$$\Delta\vec{g} = \vec{g}_p - \vec{\gamma}_Q \quad (4.34)$$

mientras la anomalía de gravedad, o magnitud del vector \vec{g}_p será:

$$\Delta g = g_p - \gamma_Q \quad (4.35)$$

Por estar referidas a distintas superficies (4.34) y (4.35) suelen denominarse anomalías mixtas.

Las deflexiones relativas de la vertical en el meridiano y en el primer vertical son respectivamente (Figs. 4.15 y 4.16):

$$\begin{aligned} \varepsilon'' &= \varphi_a - \varphi_e \\ \eta'' &= (\omega_a - \omega_e) \cos \varphi \end{aligned}$$

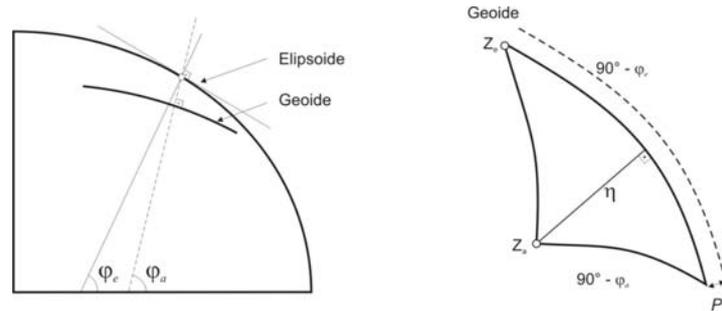


Figura 4.16. Desvíos de la vertical: ε'' en el meridiano y η'' en dirección de los paralelos.

En efecto, la primera, ε'' o desvío de la vertical en dirección del meridiano, es - de acuerdo con las figuras mencionadas - la diferencia entre la latitud astronómica φ_a determinada por el ángulo vertical a la normal al geoides y el ecuador y la latitud elipsoidal φ_e ángulo vertical entre la normal al elipsoide y el ecuador. La segunda, η'' o desvío de la vertical en el paralelo, se obtiene de consideraciones análogas a las realizadas para ε'' , aunque ahora con las longitudes astronómicas ω_a y elipsoidal ω_e , el $\cos \varphi$ tiene en cuenta la convergencia de meridianos.

Es posible comparar las gravedades (observada y proveniente del modelo) en el mismo punto P . Así:

$$\partial \bar{g} = \bar{g}_P - \bar{\gamma}_P \quad (4.36)$$

y

$$\partial g = g_P - \gamma_P \quad (4.37)$$

Estos son las llamadas perturbaciones de gravedad o anomalías puras (referidas a la misma superficie).

Relacionemos ahora ∂g con Δg ; sumando y restando γ_Q a (4.37) se tendrá:

$$\partial g = g_P - \gamma_Q - \gamma_P + \gamma_Q = \Delta g + N \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \quad (4.38)$$

dado que $N = T / \gamma$ se tiene:

$$\partial g = \Delta g + \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \quad (4.39)$$

o bien: $-\partial T / \partial r = \Delta g + 2T / r$. Esta es la ecuación diferencial fundamental de la geodesia física, resuelta por primera vez por G. Stokes en 1849. Su solución permite obtener las ondulaciones del geoides N a partir de las anomalías de gravedad integradas sobre todo el planeta. Debemos notar que ∂g proporciona información sobre las masas anómalas; mientras que Δg referida a dos superficies diferentes, involucra además la posición del geoides respecto del elipsoide (es decir N).

Veremos en 6.3 que resuelto el caso de la ondulación N para una distribución plana con $\mu = \Delta g(x, y) / 2\pi G$, será razonablemente sencillo admitir la expresión encontrada por Stokes resolviendo (4.39) para el total de la Tierra. Veremos también que con los desvíos de la vertical ε'' y η'' es posible determinar N .

4.11. Isostasia (Sistemas de Pratt, de Airy, flexural, de Rutzki y de Helmert)

Calculadas las anomalías de Bouguer en numerosas estaciones del planeta, se comprobó que en general difieren de cero, salvo en regiones costeras. En áreas continentales son generalmente negativas y en cuencas oceánicas, positivas. Estos resultados indican claramente una deficiencia de densidad en zonas sobreelevadas respecto del nivel medio del mar, un exceso de densidad debajo de los fondos oceánicos y una densidad sensiblemente igual a la esperada en regiones de topografía baja. Por tanto, la corteza no se comporta en forma rígida. Las teorías isostáticas explican este singular comportamiento y justifican las desiguales reparticiones de densidades.

4.12. Nacimiento de las teorías isostáticas

En el siglo XVIII, Pierre Bouguer, durante la expedición de los Académicos a Sud América para la medición del arco de meridiano ecuatorial, determinó la atracción del macizo Chimborazo de 6200 m de altura en la Cordillera de los Andes, y comparó la desviación de la vertical que debería resultar de ella, con el valor obtenido por observaciones.

Este último valor resultó notablemente mas pequeño que el calculado. Si el Chimborazo no realizaba una atracción tan potente como lo hacía prever su volumen, Bouguer concluyó que debería existir una compensación que atribuyó por entonces a cavidades corticales o a deficiencias de densidades subyacentes.

A mediados del siglo XIX, el geodesta inglés Pratt se encontraba haciendo una triangulación de alta precisión en la India y encontró entre dos estaciones, Kaliiana (en las primeras estribaciones del Himalaya) y Kaliampur (en medio de una llanura), separadas unos 700 km, en sentido norte-sur, un error de alrededor de 5'' (150 m) entre las determinaciones astronómicas y las mediciones geodésicas. Si bien éste es un error pequeño en 700 km, la precisión del trabajo sembró serias dudas y se descartó una posible vacilación en las determinaciones geodésicas. Sin embargo, en primera aproximación se repartieron los 5'' entre estaciones intermedias, pero con justa razón Pratt criticó el procedimiento, encontrando inadmisibile dejar sin explicación el apartamiento encontrado.

Valuada la influencia del Himalaya tras laboriosos cálculos se llegó a una aparentemente extraña comprobación. El valor calculado era de 15'' en lugar de los 5'' encontrados. Por entonces Pratt cometió un error todavía inexplicable al pretender justificar tal discrepancia diciendo que se había utilizado un valor de aplastamiento demasiado grande para el arco de las Indias, aunque correcto para la Tierra en general. En 1855, presentó a la Real Academia de Londres sus cálculos, pero no sus conclusiones. Dos meses después, el astrónomo real Airy, en un artículo de cuatro páginas, sin fórmulas y en un momento de inspiración fundaba las bases de la isostasia. Según Airy, cada bloque de corteza debía considerarse como flotando sobre un magma más denso, del mismo modo que flotaban los "icebergs" en el mar. De modo que las desviaciones de la vertical debidas a las montañas debían reducirse considerablemente por acción de las masas de menores densidades, muy sumergidas en el magma denso.

Pratt discrepó abiertamente con la teoría de Airy, y fue así que mas tarde presentó una explicación diferente según la cual los bloques corticales de igual sección deberían tener todos la misma masa, de modo que presionarían igualmente al llegar a una cierta profundidad. Pratt hizo sus cálculos tomando profundidades de 1000, 500, 300 y 100 millas, encontrando para este último valor desviaciones mínimas. Casi un siglo después se encontraron ciertas montañas que responden a la teoría de Airy, y otras que responden a la teoría de Pratt.

4.13. Sistema de Pratt (1855)

En el sistema de Pratt se considera que a una cierta profundidad fija H (profundidad de compensación), existiría una losa por encima de la cual las masas serían iguales en todas partes. Para fijar nuestra imaginación podemos suponer hipotéticamente que las montañas han sido formadas por dilatación vertical de los materiales subyacentes de la corteza y las masas oceánicas, por contracción vertical. Estas contracciones y dilataciones no modificarían para nada la masa total que se encuentra situada por encima de cada elemento de superficie de la losa, y por consiguiente, podemos imaginar a la corteza como dividida en bloques elementales homogéneos, de densidades que son sólo función de la altitud (Fig. 4.17a).

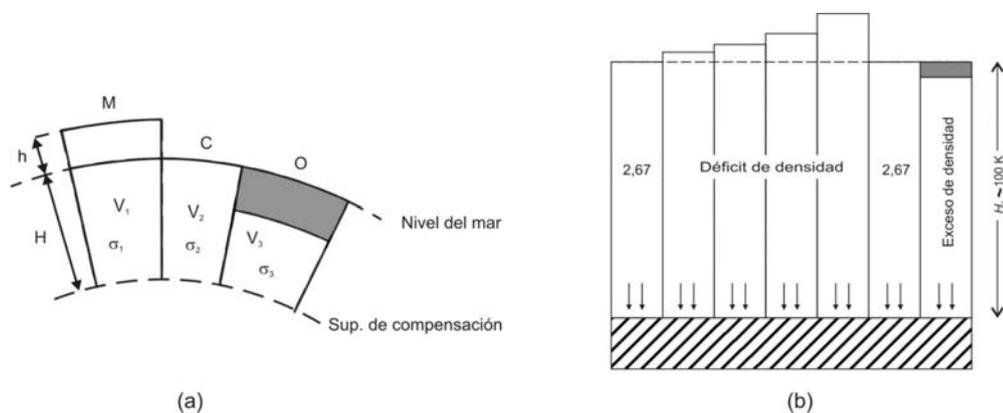


Figura 4.17. (a) Tres bloques corticales: Montaña (M), Planicie (C) y Océano (O) de la misma masa. (b) Déficit de densidad de bloques sobreelevados. Exceso de densidad en áreas oceánicas.

La compensación comenzaría en la superficie misma de la Tierra, bajo los océanos en el fondo del mar, y terminaría a una profundidad H del orden de 100 km por debajo del geoide (fondo litosférico; Fig. 4.17a y b).

Las Figs. 4.16, 4.17 y 4.18 ilustran la teoría de Pratt. Esta última constituye un modelo simplificado.

En términos generales podemos decir que para conservar la misma presión a una profundidad de 100 km, las columnas verticales sobre ese nivel deben contener la misma cantidad de masa, dado que las diferencias numéricas son sólo del orden del 1%.

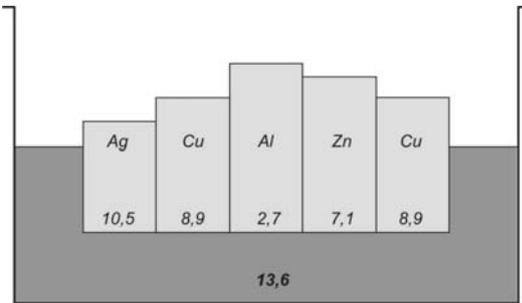


Figura 4.18. Modelo que ilustra la teoría de Pratt. Los bloques de diferentes densidades se introducen a profundidad constante en el mercurio.

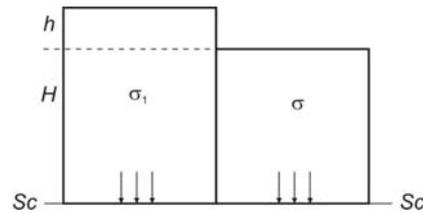


Figura 4.19. Bloques que producen igual presión sobre Sc-Sc ($\sigma > \sigma_1$).

Supongamos tener ahora dos bloques rectangulares de igual sección aunque de distintos espesores, que descansan sobre una superficie de compensación ubicada a una profundidad H bajo el geoide (Fig. 4.19). La igualdad de presiones por unidad de sección en la base de la columna puede expresarse como :

$$p = \int_{-H}^h \sigma(z) g dz = \text{cte.} \quad (4.40)$$

dado que los cambios de g son pequeños en las columnas, se tendrá en el concepto de Pratt:

$$\int_{-H}^h \sigma_1 dz = \int_{-H}^0 \sigma dz \quad (4.41)$$

con σ_1 : densidad de la columna sobreelevada en h , σ : densidad de la columna normal. Integrando:

$$\sigma_1(H + h) = \sigma H \quad (4.42)$$

Siendo $h < H$, tendremos:

$$\sigma_1 = \sigma \frac{1}{1 + \frac{h}{H}} = \sigma \left(1 - \frac{h}{H} + \frac{h^2}{H^2} - \dots \right) \quad (4.43)$$

Si despreciamos las potencias mayores que uno, cuando h es pequeño respecto de H tendremos:

$$\sigma_1 \approx \sigma - \sigma \frac{h}{H} \quad (4.44)$$

La densidad de compensación σ_c que debe tener el bloque sobreelevado respecto del bloque de comparación al nivel del mar, será:

$$\sigma_c = \sigma - \sigma_1 = \sigma \frac{h}{H} \quad (4.45)$$

Expresión utilizada por Hayford y Bowie en la aplicación de la isostasia, para el cálculo de los parámetros del elipsoide de 1909.

Si volvemos ahora a nuestra corteza, tendremos para: $\sigma = 2,67 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, $h = 1 \text{ km}$, $H = 100 \text{ km}$, un $\sigma_c = 0,0267 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, valor considerado a título de ejemplo. Veremos luego que σ_c es del orden del déficit de densidad que producen el calentamiento o el enfriamiento.

La expresión (4.45) puede ser interpretada mediante el dudoso modelo físico que ilustra la Fig. 4.20.

$$\sigma h + \sigma_1 H = \sigma H \quad (4.46)$$

ó

$$m_T (= \sigma h) = m_c (= (\sigma - \sigma_1) H) \quad (4.47)$$

con: m_T : masa topográfica; m_c : masa de compensación.

$$\therefore \sigma_c = \sigma - \sigma_1 = \sigma \frac{h}{H} \quad (4.48)$$

según este esquema, la compensación comenzaría a nivel del mar (Fig. 4.20), cuando en rigor debería comenzar desde la estación sobre-elevada (Fig. 4.19).

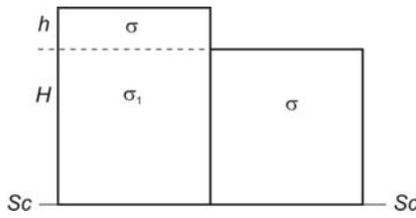


Figura 4.20. Dudoso modelo físico que representa a (4.39).

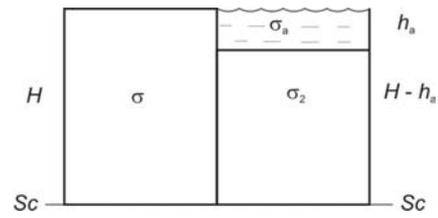


Figura 4.21. Bloque suboceánico (derecha) respecto de un bloque normal (izquierda).

Analicemos ahora un bloque suboceánico (Fig. 4.21). Nuevamente:

$$S H \sigma = \sigma_a h_a S + \sigma_2 S (H - h_a) \quad (4.49)$$

con S : sección constante.

$$\therefore \sigma_2 = \frac{\sigma H - \sigma_a h_a}{H - h_a} \quad (4.50)$$

y la densidad de la compensación será:

$$\sigma_c = \sigma_2 - \sigma = \frac{\sigma H - \sigma_a h_a}{H - h_a} - \sigma = (\sigma - \sigma_a) \frac{h_a}{H - h_a} = 1,643 \frac{h_a}{H - h_a} \quad (4.51)$$

con $\sigma_a = 1,027 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$; $\sigma = 2,67 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$

4.14. Sistema de Airy (1855)

La hipótesis de Airy consiste esencialmente en suponer que cada trozo de corteza está en equilibrio hidrostático. (La flotación no debe ser considerada en el sentido ordinario, debe entenderse que es un proceso plástico que necesita miles de años (10 000 a 15 000 años, por ejemplo).

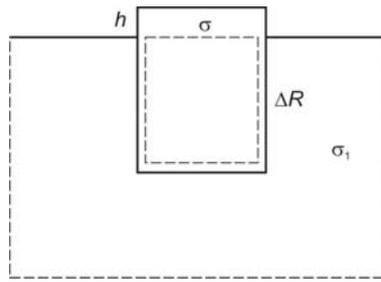


Figura 4.22. Bloque de densidad σ flotando hidrostáticamente en un material de mayor densidad σ_1 .

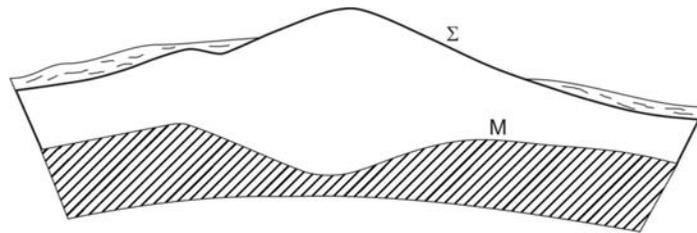


Figura 4.23. Sistema de Airy. El fondo de corteza M se engrosa ante la sobreelevación Σ .

Cuanto mas alta es la montaña, mas profundamente hunde sus raíces en el manto superior. Todo pasa como si cada prisma vertical elemental que se pudiera cortar en la corteza terrestre, flotara en un material viscoso que le permitiera realizar lentos movimientos verticales.

Supongamos un bloque de densidad σ flotando hidrostáticamente en un líquido de densidad σ_1 mayor que σ (Fig. 4.22). Las líneas cortadas corresponden al material desalojado. Tendremos la siguiente expresión por unidad de sección:

$$\sigma(\Delta R + h) = \sigma_1 \Delta R \quad (4.52)$$

$$\Delta R = \frac{\sigma}{\sigma_1 - \sigma} h \quad (4.53)$$

La diferencia fundamental entre los dos sistemas vistos está dada porque mientras en la hipótesis de Pratt, la densidad litosférica varía con la altitud en tanto permanece constante la profundidad de compensación, en el sistema de Airy, la densidad cortical se mantiene constante, variando en cambio la profundidad. La Fig. 4.23 ilustra la hipótesis de Airy. La superficie M puede considerarse como una imagen espejular ampliada verticalmente de la superficie topográfica Σ .

4.15. Sistema de Airy – Heiskanen

Ya se ha visto que Airy consideraba que la corteza flotaba sobre un magma más denso del mismo modo que un “iceberg” flota en el mar. Tal analogía señalada por Airy no encuentra sin embargo un completo paralelismo en la mecánica de la corteza. Las diferencias fundamentales son:

- La raíz de la masa de hielo flotante comienza a nivel del mar, mientras que las raíces de los edificios corticales comienzan a una profundidad media de unos 30 a 40 km.
- La parte subyacente de los rasgos topográficos no presenta la misma facilidad para penetrar en el magma más denso, que el iceberg en el agua.

En los años 1924-1931 y 1938, Heiskanen trató de perfeccionar la hipótesis de Airy y preparó tablas basadas en los siguientes puntos:

- a. La compensación isostática es completa (la masa topográfica m_T iguala a la masa de compensación m_C).
- b. Los bloques se compensan localmente, exactamente por debajo de los rasgos topográficos (Vening-Meinesz, como veremos, considera compensación lateral o “regionalidad”).

- c. La densidad de la corteza es constante e igual a $2,67 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ (densidad considerada entonces como promedio de la densidad del granito).
- d. La densidad del magma es también constante e igual a $3,27 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ (densidad correspondiente a materiales del manto superior). Es sabido que los valores de densidad en corteza y manto superior no son fijos, sino que varían, para cada región. Además, los valores medios ahora aceptados son mas altos, por ejemplo: $2,93 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ y $3,32 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ en lugar de $2,67 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ y $3,27 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$.

Debe notarse que el adoptar una corteza homogénea de $\sigma = 2,67 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ en continentes y océanos flotando sobre una capa plástica subcortical de densidad $\sigma = 3,27 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ no es más que un modelo útil para la aplicación de la hipótesis de Airy. Modelos geológicamente más representativos, aunque demasiado generalizados, correspondientes a la corteza continental y oceánica, se muestra en Fig. 4.24.

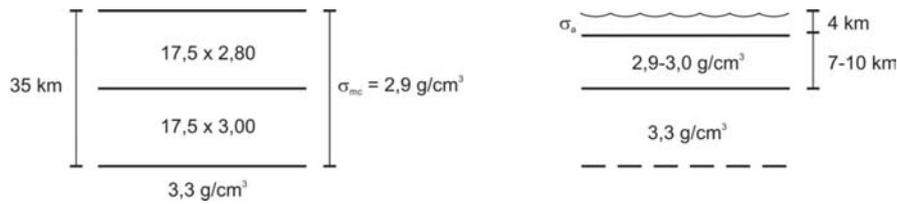


Figura 4.24. Izquierda: probable modelo de corteza continental compensada. Derecha: probable modelo actual de corteza oceánica compensada.

Sin embargo, la distribución de densidades dentro de la corteza no es crítica. Lo realmente importante es la densidad media de corteza σ_{mc} y la densidad σ_M del manto superior.

Antes de aportar un valor para el espesor T de la corteza, Heiskanen realizó numerosos ensayos (variando el espesor entre 20 y 100 km) encontrando finalmente como valores más probables 30 y 40 km. En la actualidad y para numerosos trabajos se adopta un espesor normal de alrededor de 30 y 40 km como promedio de estudios realizados en diferentes regiones del mundo (Fig. 4.25a). Sismólogos como Bullen (1963) o gravimetristas como Woolland (1969) adoptan $T = 33 \text{ km}$.

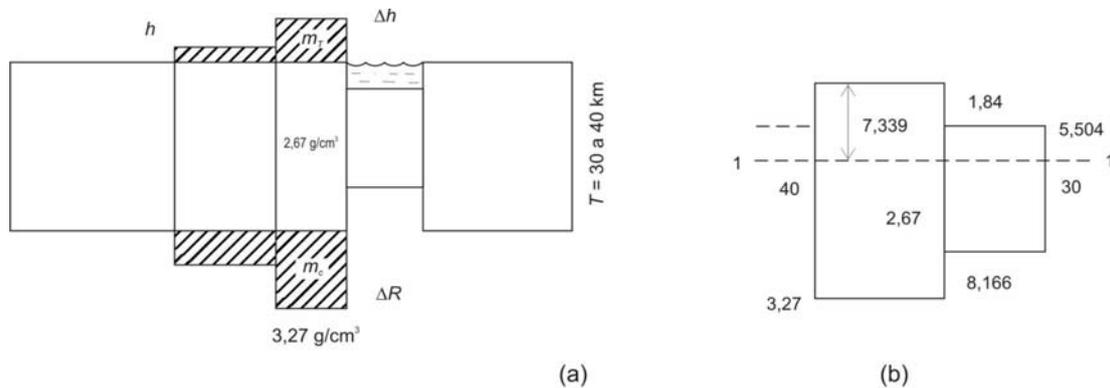


Figura 4.25. (a) Sistema isostático de Airy-Heiskanen. (b) Diferencias de borde libre de dos bloques corticales de 30 km y 40 km.

Busquemos la relación entre las raíces corticales que penetran un ΔR en el magma y las sobre-elevaciones Δh de las masas topográficas en la hipótesis de Airy-Heiskanen. De acuerdo con (4.53), dos bloques de espesores 30 y 40 km por ejemplo, tendrán las siguientes relaciones:

$$R_1 = 4,45 h_1; R_2 = 4,45 h_2 \tag{4.54}$$

con

$$\sigma_c = 2,67 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3} \text{ y } \sigma_M = 3,27 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3} \therefore \Delta R = R_2 - R_1 = 4,45(h_2 - h_1) = 4,45 \Delta h \tag{4.55}$$

Un bloque de 30 km de altura y densidad $\sigma = 2,67 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ tendrá un borde libre BL al penetrar en el magma de densidad $3,27 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ de:

$$BL = T - T \times \frac{2,67}{3,27} = 30 (1 - 0,8165) = 5,505 \text{ km} \quad (4.56)$$

Véase Fig. 4.25b (bloque de la derecha).

Para otro bloque cualquiera con $T = 40 \text{ km}$ por ejemplo, el borde libre será:

$$40 \times 0,183486 = 7,339 \text{ km (Fig. 4.25b, bloque de la izquierda)}$$

La diferencia de los bordes libres es: 1,834 km, mientras que la diferencia de penetración en el magma es:

$$\Delta R = 30 - 5,505 - (49 - 7,339) = 8,166 \text{ km}$$

$$\therefore \frac{\Delta R}{\Delta h} = \frac{8,166}{1,834} = 4,45$$

El balance isostático exige que el exceso de masa topográfica m_T sea compensado por el defecto de masa de compensación m_C (Fig. 4.25a)

$$m_T = 2,67 \times \Delta h = 4,90$$

$$m_C = 0,6 \times \Delta R = 4,90$$

La expresión $\Delta R = 4,45 h$ (Fig. 4.23b) coincide con (4.53), aunque en el caso de corteza real la raíz de espesor ΔR se cuenta a partir del fondo de corteza, mientras en (4.53), a partir del nivel superior del material de densidad σ_1 .

La tendencia actual considera como densidades de corteza y manto superior respectivamente $\sigma = 2,93 \text{ g/cm}^3$ y $\sigma' = 3,32 \text{ g/cm}^3$, con estos valores:

$$\Delta R = 7,5 h$$

o también

$$\Delta R = 6,675 h \quad (4.57)$$

con $\sigma_c = 2,67 \text{ g/cm}^3$, y $\Delta\sigma = 0,4 \text{ g/cm}^3$ (Introcaso et al. 1992).

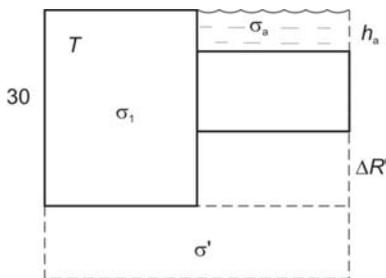


Figura 4.26. Bloque suboceánico compensado.

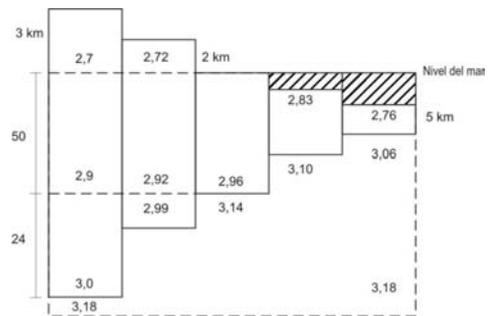


Figura 4.27. Sistema isostático de Heiskanen (combinación de las ideas de Airy y Pratt con densidad radialmente creciente).

Para un bloque suboceánico y según la Fig. 4.26, se tendrá: $T\sigma = h_a\sigma_a + \Delta R'\sigma' + T\sigma - h_a\sigma - \sigma\Delta R'$,

$$\Delta R' = \frac{\sigma - \sigma_a}{\sigma' - \sigma} h_a = \frac{1,643}{0,6} h_a, \text{ con } \sigma' - \sigma : 3,27 - 2,67 = 0,6 \text{ g/cm}^3.$$

$$\Delta R' = 2,73 h_a \quad (4.58)$$

con $\sigma_a = 1,027$; $\sigma' - \sigma : 3,32 - 2,93 = 0,39 \text{ g} \cdot \text{cm}^3$; $\Delta R'$: antiraíz. Así:

$$\Delta R' = \frac{1,9}{0,39} h_a = 4,87 h_a$$

Finalmente, el espesor de corteza suboceánica será:

$$T' = T - h_a - 2,73 h_a = T - 3,73 h_a \quad (4.59)$$

4.16. Sistema de Heiskanen (1932)

La hipótesis de Heiskanen es una combinación de los sistemas de Pratt y Airy, puesto que considera tanto bloques de distintos espesores como de distintas densidades (Fig. 4.27). Desde el nivel del mar hacia abajo, Heiskanen considera un aumento de densidad por kilómetro, de $0,004 \text{ g/cm}^3$ para materiales superficiales de la corteza y de $0,002 \text{ g/cm}^3$ en materiales mas profundos y más densos.

Desde el nivel del mar hacia arriba, admite una disminución de densidades. Así a 1 km de altitud la densidad es de $2,74 \text{ g/cm}^3$, a 2 km de $2,72 \text{ g/cm}^3$ y a 3 km de $2,70 \text{ g/cm}^3$.

Dado que ha sido muy difícil admitir que los valores de esta suposición intermedia están realmente ligados a las condiciones reales de la corteza, este sistema ha sido muy poco utilizado, aunque no debe despreciarse su valor conceptual.

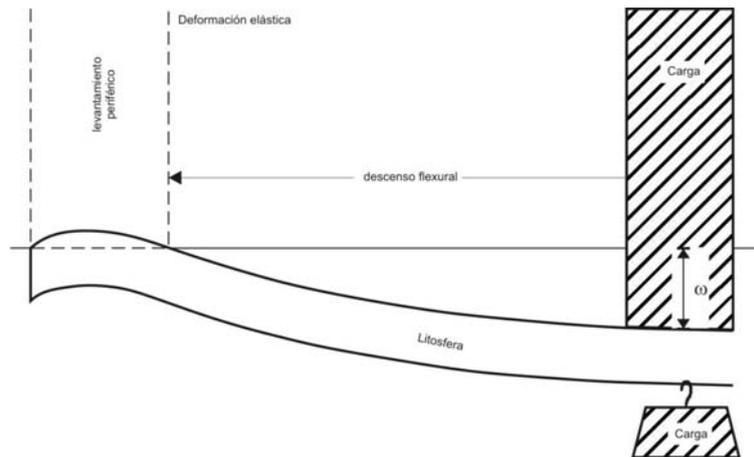


Figura 4.28. Dibujo esquemático ilustrando la deformación inicial producida por una carga superficial o por una carga intrínseca en profundidad. El levantamiento periférico se muestra exagerado.

4.17 Sistema regional de Vening Meinesz y viscoelástico de Maxwell

En los tres sistemas mencionados antes se admitió que la compensación se realizaba estrictamente por debajo de las masas superficiales, es decir, en forma local. Cada trozo de corteza modificaría su densidad o su presión para lograr la compensación. Para Vening Meinesz resulta difícil que esto se cumpla siempre en la naturaleza.

Parecería pues más correcto admitir que en ciertos casos a una masa montañosa correspondiera un hundimiento general (regionalidad) de la corteza en el magma, más que hacer corresponder exactamente un hundimiento para cada pico y un levantamiento de la base para cada valle. El sistema de compensación regional (flexural) ha sido imaginado por Vening Meinesz para que responda a estas consideraciones físicas.

Estudiando el comportamiento mecánico y los esfuerzos de la litosfera cargada se llegó a la conclusión que el parámetro importante no es en realidad el módulo elástico E , sino la rigidez flexural D , que involucra además de E (y del coeficiente de Poisson σ) el espesor litosférico T . Este parámetro define la máxima magnitud y la máxima longitud de onda de las cargas superficiales que pueden ser soportadas sin fracturación elástica de la litosfera.

Así, para una lámina de espesor T , módulo elástico E y módulo de Poisson σ , se tiene:

$$D = \frac{ET^3}{12(1-\sigma^2)} \quad [\text{N} \times \text{m}] \quad (4.60)$$

con [N×m]: Newton×metro , mientras el parámetro flexural α es:

$$\alpha = \left[\frac{4D}{(\sigma_m - \sigma_c)g} \right]^{1/4} \quad [m] \quad (4.61)$$

D tiene dimensiones de cupla y, como dijéramos, caracteriza la resistencia de la placa a la flexión, mientras que α tiene dimensiones de longitud. Ella es una medida de la longitud de onda de la losa flexionada, o bien del alcance de la deformación medida desde el punto de aplicación de la carga. En los continentes α tiene unos 60 km, en los océanos unos 20 km.

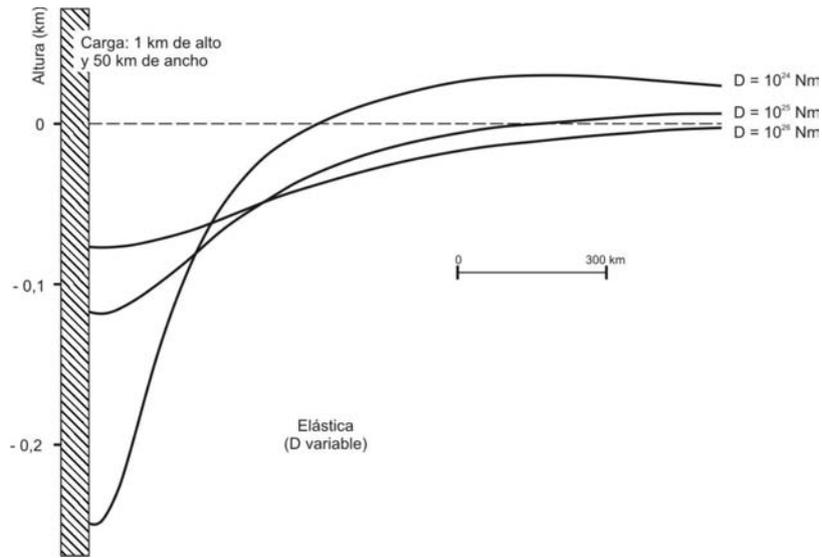


Figura 4.29. Deformación elástica producida por una carga sobre una placa con $D = 10^{24}$, 10^{25} y 10^{26} N×m.

En un extremo tenemos la flexión elástica con D constante (por ejemplo, $D = 10^{23}$ N × m); en el otro, $D = 0$. En este caso, recaemos en la hipótesis de Airy. Hay sin embargo casos intermedios para los cuales D , inicialmente constante, va disminuyendo en el transcurso del tiempo. Se alude en estos casos a un comportamiento viscoelástico y a una rigidez flexural aparente que varía en función del tiempo.

Para el estudio de la deformación elástica ω , una litosfera resistente sobre una débil astenosfera es usualmente modelizada como una delgada lámina elástica flotando sobre un denso fluido. Existen varias soluciones para este modelo: Hertz (1884), Jeffrey (1959), Meinesz (1939).

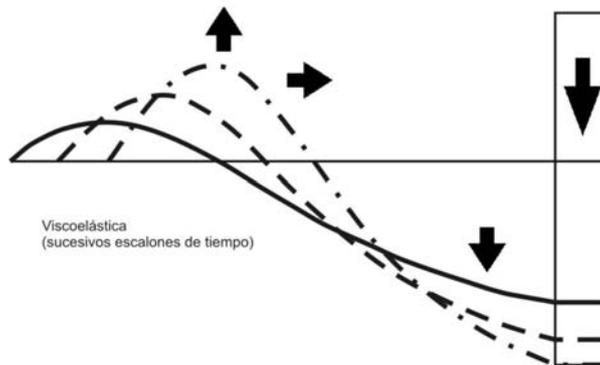


Figura 4.30. Deformación viscoelástica ante el transcurso del tiempo.

Para una solución analítica de distribución armónica bidimensional (Jeffrey 1959), el desplazamiento vertical ω será (Fig. 4.28):

$$\omega = \frac{P}{D k^4 (\sigma_m - \sigma_c) g} \quad (4.62)$$

Con $P(\text{carga}) = m \cdot g \cdot \cos kx$; $k = 2\pi / \lambda$; λ : longitud de onda de la carga, m : masa por unidad de longitud, D : rigidez flexural de la lámina. $(\sigma_m - \sigma_c)$: densidad diferencial manto-corteza, y g : aceleración de la gravedad.

Para la deformación viscoelástica o elástico-viscosa (Figs. 4.29 y 4.30), ω' dependerá además de la relación, entre el tiempo de carga y el tiempo de relajación τ .

Si consideramos el caso más simple de deformación constante, la tensión de corte disminuirá exponencialmente con t/τ , siendo t : el tiempo de carga y τ : el tiempo de relajación (o de reabsorción de esfuerzos). Este, al igual que el coeficiente η , describe el grado de viscosidad de la placa.

La deformación viscoelástica es progresiva, tal como lo muestra la Fig. 4.30. Según transcurre el tiempo, la máxima amplitud de deformación aumenta, hacia el interior, hacia el lugar donde se concentra la carga.

Las expresiones que describen a la deflexión $\omega'(x)$ de una viga viscoelástica que soporta una carga ubicada en $x = 0$, son de la forma:

$$\omega' = \omega_0 e^{\frac{t}{\tau}} e^{-\frac{x}{\alpha}} \left[\sin \frac{x}{\alpha} + \cos \frac{x}{\alpha} \right] \quad (4.63)$$

con ω_0 : deformación elástica inicial de la viga en $x = 0$, $e^{t/\tau}$: factor de cambio exponencial con el tiempo.

4.18. Sistemas de Rutzki y de Helmert

Rutzki propuso que la topografía por sobre el nivel del mar presenta una perfecta simetría por debajo de la superficie de referencia. Si bien este sistema no presenta efecto indirecto es muy difícil de asociarlo a mecanismos de generación razonables.

Helmert propuso condensar las masas en el geoide para soslayar exigencias matemáticas. A partir de la propuesta es posible considerar que la masa topográfica excedente se compensa sobre el geoide con una masa compensadora condensada proveniente de una litosfera de espesor L .

4.19. Anomalías isostáticas y no isostáticas. Correcciones

Si a los valores de gravedad observados los afectamos, además de las reducciones por aire libre (AL), Bouguer (B) y topográfica (T), de las correcciones isostáticas (I) y las comparamos con el valor teórico de la gravedad (fórmula teórica), tendremos la llamada:

$$\text{Anomalía Isostática} = g \text{ observ. reduc. AL, B, T, I} - \gamma_0 \quad (4.64)$$

ó bien

$$\text{Anomalía Isostática} = \text{Anomalía de Bouguer perfeccionada} + C_I \quad (4.65)$$

con C_I : corrección isostática.

Generalmente las correcciones isostáticas serán positivas en áreas continentales y negativas en regiones oceánicas. Si para realizar la reducción isostática (C_I) se elige el sistema de Pratt habrá que calcular el déficit o exceso de densidad en los bloques sobre elevados o sumergidos respecto al nivel del mar, eligiendo una profundidad de compensación que se mantendrá constante. Si, en cambio, se prefiere el sistema de Airy, deben calcularse las raíces y antirraíces suponiendo una profundidad normal de la corteza (de 30 a 40 km por ejemplo). Si se utiliza el sistema de Rutzki, la corrección isostática C_I se obtiene evaluando el efecto gravimétrico de la imagen especular de la topografía tomada desde el nivel del mar hacia abajo. Si se utiliza el sistema de Helmert, puede considerarse que la topografía estará compensada (C_I) por la condensación de la masa litosférica (de espesor L) en el geoide ($L = 0$).

Comenzaremos considerando los métodos utilizados por la Geodesia desde principios del siglo pasado. Así se tiene desde (4.12) y (4.48), la influencia isostática (deficiencia compensadora en áreas continentales) en el sistema de Pratt-Hayford será:

$$g_c = 2\pi G \left(\frac{h_1}{H_c} \sigma \right) \left[(r_1^2 + H_c^2)^{1/2} - (r_1^2 + h_1^2)^{1/2} - (r_2^2 + H_c^2)^{1/2} + (r_2^2 + h_1^2)^{1/2} \right] \quad (4.66)$$

Es importante notar que esta expresión, como todas las deducidas desde (4.12) desprecia la curvatura terrestre (fórmula plana).

Se supone que la compensación comienza al nivel del mar.

Análogamente, en el sistema de Airy-Heiskanen tendremos de acuerdo con (4.12) y (4.53):

$$g_c = 2\pi G \Delta\sigma \left\{ \left[r_1^2 + (T + \Delta R)^2 \right]^{1/2} - (r_2^2 + T^2)^{1/2} + (r_2^2 + T^2)^{1/2} - \left[r_2^2 + (T + \Delta R)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (4.67)$$

siendo T el espesor de la corteza y ΔR la raíz ($\Delta R = 4,45h$ ó $6,67h$ por ejemplo) puesto que se admite que la compensación comienza a profundidad T y termina a profundidad $(T + \Delta R)$. El valor $\Delta\sigma$ es 0,6 c.g.s. si admitimos en principio que $\Delta R = 4,45h$ ó 0,4 para $\Delta R = 6,675h$

Para aplicar las expresiones vistas se subdividía toda la superficie de la Tierra en 33 coronas circulares centradas en la estación a corregir. Cada corona se subdividía a su vez en sectores circulares iguales (317 sectores para la subdivisión de Hayford-Bowie, 1912). Las coronas ubicadas entre la estación y los 166,7 km se denominaban zonas letradas A, B, C, ... N, O. Desde allí hasta las antípodas se designaban zonas numeradas 18, 17, 16, ..., 2, 1.

Hayford computó tablas donde los efectos de topografía y compensación isostática de cada compartimiento eran dados como función de la altura del compartimiento. Para las zonas letradas los efectos de topografía y compensación están separados. Para las zonas numeradas Hayford y Bowie combinaron ambos efectos dado que aunque los dos son grandes, la resultante es de aproximadamente un 25%. Este efecto es esencialmente constante en cualquier región dada.

Los efectos de las zonas letradas fueron computados por las fórmulas planas (deducidas a partir de 4.12). las zonas M, N y O están bajo el plano horizontal. Para aplicar las correcciones planas Hayford computó una tabla con la pequeña corrección adicional.

Para las zonas numeradas deben emplearse fórmulas esféricas.

Actualmente se adoptan modelos teóricos (de Airy, flexural, etc.) perfectamente compensados y se los compara con los modelos reales (observados). De estas comparaciones surge tanto el sistema que opera como el grado de balance isostático.

4.20. Las anomalías de gravedad y su relación con los procesos tectónicos

Los estudios gravimétricos conducen a la noción de movilidad vertical de la corteza de acuerdo con las reglas de isostasia. Su vinculación con interpretaciones geológicas es extremadamente fructífera (Aubouin, 1981). No obstante, debemos señalar con Belousov (1971) que si bien la isostasia es un hecho comprobado e indiscutible, su importancia como factor geotectónico es de poca significación. Y a esto agregaríamos que en el principio de acción y reacción ampliamente comprobado en distintas ramas de la Física, las acciones corresponderían a fuerzas tectónicas mientras las reacciones a la isostasia.

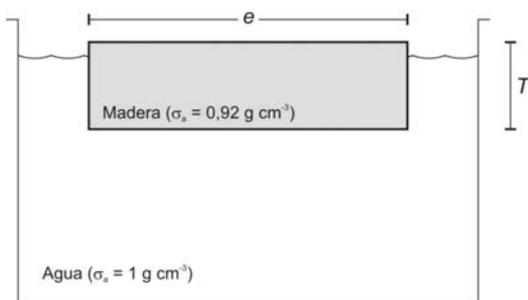


Figura 4.31. Modelo simple que representa a la corteza (madera) flotando en el manto superior (agua).

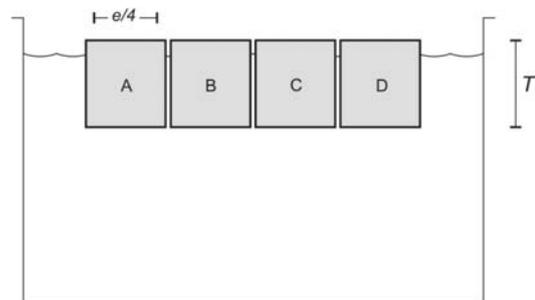


Figura 4.32. Modelo corteza-manto semejante al de Fig. 4.31, aunque la corteza está integrada por prismas A, B, ... con posibilidades de movimiento vertical.

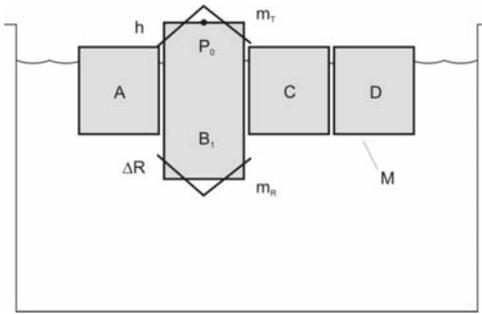


Figura 4.33. Rasgo montañoso compensado isostáticamente.

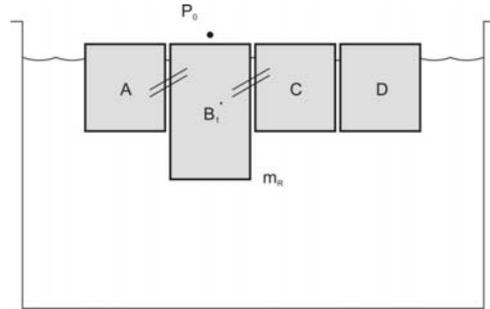


Figura 4.34. Interpretación de la anomalía de Bouguer. La masa anómala $m_R(-)$ produce la anomalía de Bouguer en P_0 .

4.21. El significado de las anomalías de “g” a partir del modelo de Airy

Representamos la corteza terrestre descansando sobre el manto superior mediante un sencillo modelado analógico. La Fig. 4.31 muestra un recipiente con agua y un trozo de madera de espesor T y ancho e flotando en ella. En este modelo, la corteza está representada por la placa de madera de densidad $< 1 \text{ g/cm}^3$, mientras el agua de densidad 1 g/cm^3 sería el manto superior. Para nuestro propósito, es útil integrar a la corteza mediante paralelepípedos independientes, A, B, C, D, adyacentes de ancho e/n , todos del mismo espesor T . De esta forma, tendremos oportunidad de analizar segmentos locales de corteza con posibilidades de movilidad vertical (ajuste isostático) (Fig. 4.32).

Un ejemplo introductorio muy claro, que revela una activa reacción isostática actual, lo tenemos en Escandinavia. Esta región que exhibe hoy descompensación (anomalías de aire libre e isostáticas negativas), estuvo cubierta por una gran masa de hielo durante la última glaciación. Sobrevino luego calentamiento con derretimiento del hielo que produjo ascenso cortical, reconocido hoy mediante mediciones geodésicas. Se estima que el monto de elevación fué de 250 m para los últimos 10 000 años.

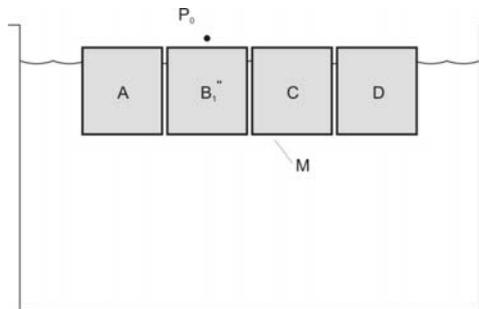


Figura 4.35. Eliminada la raíz en B_1 de Fig. 4.34, el bloque B_1'' se normaliza. La anomalía isostática será cero (compensación).

Pensemos que uno de los bloques de Fig. 4.32 es cargado con hielo, descendiendo por el sobrepeso. Luego si el hielo se derrite, asciende alcanzando nuevamente el nivel original.

Supongamos ahora que el prisma B_1 de Fig. 4.33 corresponde a un orógeno compensado isostáticamente. En este caso, la corteza estará engrosada. La masa excedente (visible) m_T es compensada mediante la raíz o masa no visible, desalojando la masa subyacente de mayor densidad. Denominaremos a este déficit de m_R .

La Fig. 4.33 ilustra a la montaña (B_1) compensada isostáticamente. Analicemos cualitativamente las anomalías de gravedad que obtendríamos en el paralelepípedo montañoso B_1 . Si entendemos que la corteza “normal” (bloques A, B, C y D, Fig. 4.32 o A, C y D, Fig. 4.33) no exhibe gravedad anómala, la anomalía de aire libre en B_1 sería el resultado de comparar en P_0 el efecto gravimétrico originado por $m_T (+)$ con el efecto gravimétrico producido por $m_R (-)$. Dado que la masa $m_T (+)$ está más cerca de P_0 que $m_R (-)$, la anomalía de aire libre (A_{AL}) será positiva:

$$A_{AL} = \text{Efecto grav. de } m_T (+) - \text{efecto grav. de } m_R (-) > 0$$

Para el caso de la anomalía de Bouguer (AB), debemos pensar en que físicamente la masa m_T es retirada. Hipotéticamente es como si tuviéramos el techo de B_1' al nivel del techo de A, C y D. La Fig. 4.34 muestra esta situación. La anomalía de Bouguer (AB) en P_0 será originada por el efecto gravimétrico de la masa anómala que produce la “raíz”. Tendremos así:

$AB = \text{Efecto gravimétrico de } mR (-) < 0$

Se explica así que en general las anomalías de Bouguer en las zonas montañosas sean significativamente negativas, por ejemplo, de -300 mGal a -400 mGal en los Andes.

Finalmente, la anomalía isostática (AI) exige eliminar el efecto negativo de la raíz (Fig. 4.33) o, lo que es lo mismo, retirar la raíz. Así, el bloque B₁ (Fig. 4.35) será idéntico al bloque B de Fig. 4.32. Decimos en este caso que la corteza se habrá “normalizado y AI = 0. La Fig. 4.36 muestra las tres anomalías correspondientes a un bloque cortical compensado.

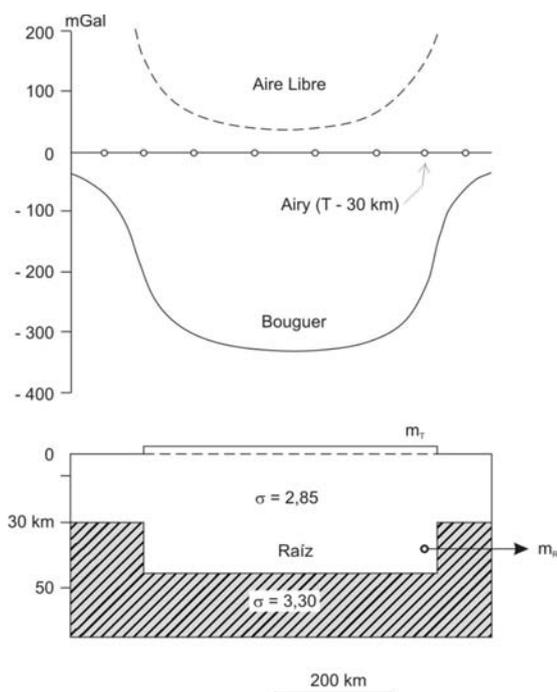


Figura 4.36. Las tres anomalías corresponden a un bloque cortical compensado.

Consideremos ahora que el bloque C corresponde a las condiciones iniciales de una cuenca sedimentaria con corteza C₁ atenuada ($t < T$) (Fig. 4.37). De la misma forma que el bloque B engrosado sobresale por sobre los otros y origina una raíz simplemente siguiendo el principio de Arquímedes (Fig. 4.33), en el caso del bloque C₁ de espesor atenuado, habrá un descenso del techo de C₁ y al mismo tiempo una antirraíz (Fig. 4.37). Si la depresión es llenada por sedimentos, el sobrepeso hace descender a C₁ en un proceso repetitivo convergente hasta que alcanza a nivelarse con el techo de A, B y D (fin del proceso compensado) (Fig. 4.38). Si por simplicidad admitimos que la densidad diferencial entre sedimentos y corteza C₁ es igual en valor absoluto a la densidad diferencial entre manto y corteza: h será igual a ΔR . Mediante análogos razonamientos que los realizados para el bloque B₁ de Fig. 4.33, tendremos que la anomalía de aire libre A_{AL} resultará del balance en P₀ de los efectos de los sedimentos respecto de la corteza y del efecto del manto superior ascendido respecto de la corteza. Tendremos así:

$$A_{AL} = \text{Efecto de los "sedimentos"} (-) + \text{Efecto del manto superior (+)} < 0$$

Nuevamente, el efecto predominante es el más próximo a P₀, en este caso el efecto “negativo” debido a los sedimentos – corteza, respecto del más lejano efecto positivo de la antirraíz (manto superior – corteza).

La anomalía de Bouguer coincidirá con la anomalía de aire libre, dado que no hemos considerado en este caso variaciones de altitud respecto del techo de la corteza “normal” (A, B, ...) tomada en nuestros modelos como superficie de referencia.

Podríamos pensar en “normalizar” a la corteza superior retirando los sedimentos y colocando en su reemplazo materiales corticales del tipo A, B, etc. En este caso, habríamos realizado la corrección geológica y la anomalía sería positiva (debido al efecto de “antirraíz”). Si, finalmente, eliminamos a la antirraíz “normalizando” al total de la corteza, la anomalía de gravedad resultante (equivalente a una anomalía isostática) nos daría cero, tal como corresponde a la cuenca compensada isostáticamente.

Veamos ahora el caso de descompensación isostática. Si el bloque B_1 en el caso de una montaña presentara un excedente topográfico de altitud media h y la raíz fuera por ejemplo $\Delta R < 7,5 h$ habrá un defecto de raíz o subcompensación (Fig. 4.39). Si por el contrario $\Delta R > 7,5 h$, habrá un exceso de raíz o sobrecompensación (Fig. 4.40).

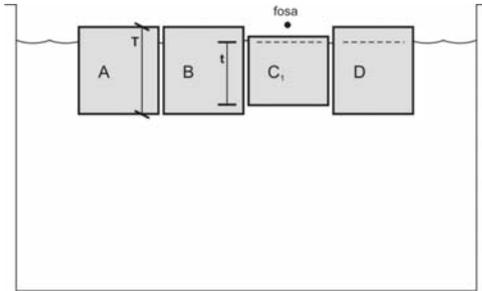


Figura 4.37. Bloque C_1 de espesor atenuado. Su techo descende respecto de A, B y D, mientras su fondo desarrolla una antirraíz.

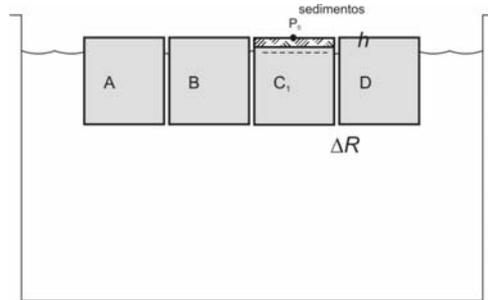


Figura 4.38. Idem Fig. 4.37 pero con la cuenca en C_1 llena de sedimentos y descendida por un mayor peso.

Es por demás evidente que el primer caso exige el descenso del bloque para lograr la compensación, mientras el segundo caso requiere, contrariamente, el ascenso. Pero ¿cómo nos damos cuenta que una montaña está o no compensada isostáticamente? La respuesta es obvia, en el caso de compensación isostática las anomalías isostáticas deben ser pequeñas, preferentemente de ambos signos de modo de no tener un residuo sistemático sospechoso. En el caso de tener $AI > 0$ y de cierta significación, estaremos ante el caso de subcompensación. En este caso, podemos predecir que habrá movilismo vertical descendente. Si por el contrario la $AI < 0$, la montaña estará sobrecompensada. Predecimos entonces ascenso en busca de la compensación.

Un gravimetrista avezado puede reconocer el estado isostático utilizando las anomalías de Bouguer. En efecto, supongamos el caso del Bloque B_1 de ancho 300 km y altitud 1 km compensado (Fig. 4.33 y 4.34). En este caso, para ejemplificar las anomalías de aire libre pueden ser del orden de +20 mGal, las de Bouguer de -90 mGal y las isostáticas cero o muy pequeñas.

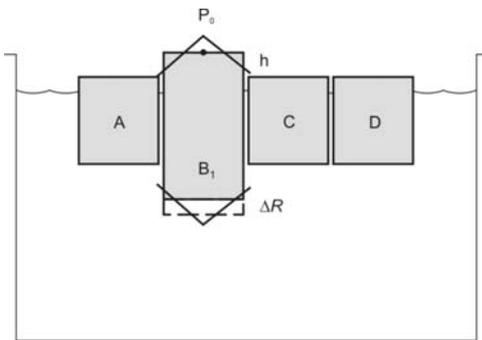


Figura 4.39. Bloque B_1 subcompensado.

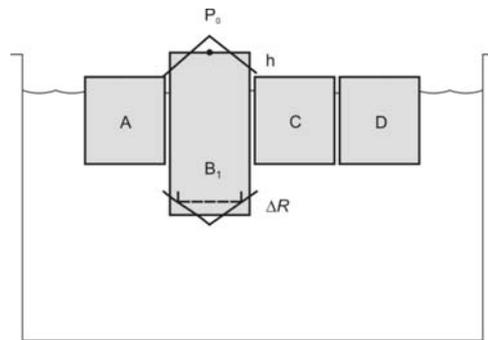


Figura 4.40. Bloque B_1 sobrecompensado.

En el caso del bloque subcompensado, la anomalía de Bouguer podría ser por ejemplo de -60 mGal, es decir, tendría un exceso de +30 mGal respecto a la anomalía esperada en el caso compensado. Para el caso de un bloque subcompensado, la anomalía de Bouguer puede ser por ejemplo de -115 mGal. En este caso habría un defecto de -25 mGal respecto del estándar estimado para ese caso.

Tomemos ahora el caso de una cuenca sedimentaria descompensada. Si $AI > 0$, habrá un exceso de antirraíz, y podemos predecir que deberá subsidir para lograr la compensación. Si por el contrario $AI < 0$, habrá un defecto de antirraíz. Debemos esperar, en este caso, movilismo ascendente.

Digamos, por ahora, que cortezas gruesas, como lo exigen en general las montañas, pueden originarse como consecuencia de significativos esfuerzos compresionales con acortamientos (S_h) en el sentido de las tensiones y engrosamientos verticales (Fig. 4.41 y 4.42). El acortamiento S_h se obtiene simplemente de la siguiente expresión:

$$S_h = \frac{A_T + A_R}{T} \quad (4.68a)$$

(véase Fig. 4.41). A_T es el área topográfica, A_R es el área de raíz y T es el espesor inicial de la corteza (sin deformación).

También, aunque en mucha menor medida, la intrusión en corteza de materiales provenientes del manto superior, producirá engrosamiento (como podemos ver en Fig. 4.43).

El esquema anterior está supersimplificado. Aludimos aquí sólo a una tensión (compresiva y ubicada en el sentido del movimiento de la topadora). En rigor deberíamos considerar tres tensiones principales: σ_1 , σ_2 y σ_3 perpendiculares entre sí.

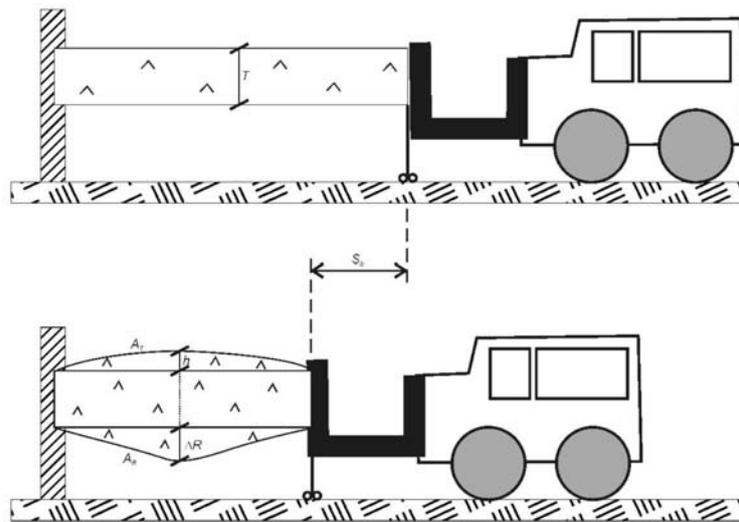


Figura 4.41. Dibujo esquemático que muestra el engrosamiento desde T a $T+h+\Delta R$ con acrotamiento S_h ante fuerte compresión. A medida que se produce el engrosamiento $h+\Delta R$, cada milímetro de elevación h forma una raíz ΔR seis o siete veces h , en un proceso controlado en general por la isostasia.

Siendo σ_1 la tensión principal máxima, σ_3 la tensión principal mínima y σ_2 la tensión principal intermedia. Ellas varían con el tiempo e intercambian sus roles. Por ejemplo, en el dibujo esquemático (de Fig. 4.41) σ_1 sería la tensión principal máxima que produce la topadora. σ_2 sería la tensión intermedia, perpendicular al plano del papel, mientras σ_3 (en el plano del papel y perpendicular a σ_1) es cero en el inicio (dibujo superior). Cuando la corteza se engrosa aparece σ_3 que va incrementándose con el tiempo según avanza el proceso de engrosamiento. Cuando σ_3 alcanza a σ_2 , puede aún sobrepasarlo por ejemplo por intrusión cortical. Pueden producirse en este caso fallas transcurrentes. Cuando σ_3 es suficientemente grande, σ_1 podría ser insuficiente para provocar mayor engrosamiento, aunque podrían anexarse aún materiales lateralmente. El mismo σ_1 puede disminuir (y aún desaparecer), por ejemplo por lentificación de la deriva. En este caso, prevalecería σ_3 y la cordillera comenzaría a desplomarse hasta llegar al estado de plataforma (Fig. 4.42 abajo).

Para analizar cortezas atenuadas vinculadas con cuencas sedimentarias, es útil considerar un modelo distensivo o de estiramiento. En este caso, a la topadora de Fig. 4.39 la deberíamos enganchar al extremo de la corteza para hacerla "retroceder". Así es posible calcular el estiramiento con:

$$E_S = \frac{A_C + A_{\Delta R}}{T} \quad (4.68b)$$

donde E_S : estiramiento, A_C : área de la cuenca, $A_{\Delta R}$: área de la antirraíz, y T : espesor normal de la corteza.

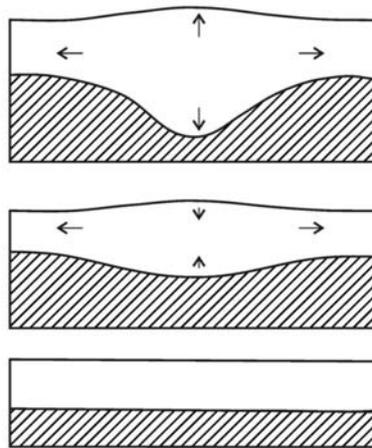


Figura 4.42. Arriba: montaña actual. Fuerte acortamiento. **Medio:** desplome, erosión subaérea y subcortical con reajuste isostático. **Abajo:** penillanura o resultado de la inversión del proceso de acortamiento.

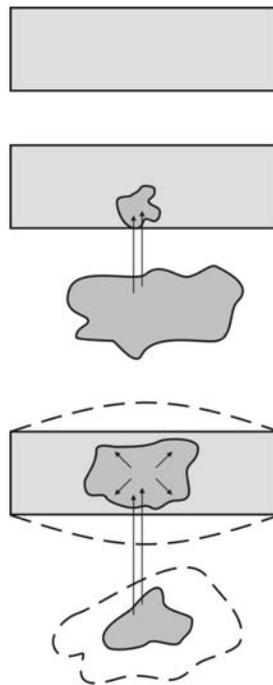


Figura 4.43. Arriba: corteza “normal” (antes de la inyección). **Medio:** magmas provenientes del manto superior comienzan a intruirse en la corteza. **Abajo:** los materiales intruidos “empujan” para alojarse. La corteza “se hincha” y engrosa.

4.22. Isostasia térmica, el método de Pratt

Hemos visto en 4.13, que en el sistema de Pratt (1855) el orden de la densidad de compensación es $\sigma_c = 0,0267 \cdot \text{cm}^{-3} \sim 0,03 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Demostraremos ahora que este orden de densidad (centésimos de $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$) corresponde con un proceso de calentamiento.

Comencemos recordando que la longitud de una cinta de Agrimensura l_0 sufre variaciones ante cambios de temperatura ΔT . Si el coeficiente de dilatación térmica del metal de tal cinta es α , un aumento de temperatura ΔT respecto de la temperatura de contraste producirá una dilatación lineal $\Delta l = l_0 \alpha \Delta T$. Análogamente, si consideramos una dilatación volumétrica, tendremos: $\Delta V = V_0 \alpha \Delta T$. Si sometemos una roca de masa m_0 , volumen V_0 y densidad σ_0

a calentamiento ΔT , habrá una dilatación volumétrica ΔV acompañada de una pérdida de densidad $\Delta \sigma$ para mantener la masa m_0 invariante. Así:

$$m_0 = V_0 \sigma_0 = (V_0 + \Delta V)(\sigma_0 - \Delta \sigma) = V_0 \sigma_0 - V_0 \Delta \sigma + \sigma_0 \Delta V - \Delta V \Delta \sigma \quad (4.69)$$

De aquí, despreciando el infinitésimo de 2° orden tendremos:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta \sigma}{\sigma_0} \quad (4.70)$$

$$\Delta \sigma = \sigma_0 \alpha \overline{\Delta T} \quad (4.71)$$

Si la densidad del manto superior es $\sigma_0 = 3,3 \cdot \text{g cm}^{-3}$, el calentamiento medio: $\overline{\Delta T} = 300^\circ\text{C}$ y el coeficiente de dilatación térmica $\alpha = 3 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ (en general se los considera entre 3 y $3,4 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$) tendremos:

$$\Delta \sigma = 3 \times 3,3 \times 3 \times 10^{-3} \text{ g cm}^{-3} \sim 0,03 \text{ g cm}^{-3} \quad (4.72)$$

Resulta claro, así, que la densidad de compensación prevista por Pratt es consistente con la pérdida de densidad originada por el calentamiento. De aquí que se denomine a esta hipótesis, isostasia térmica.

Si el total de la litosfera de 100 km de espesor sufriera un calentamiento medio de $\overline{\Delta T} = 300^\circ\text{C}$, la elevación $\Delta \zeta$ del techo de la corteza con $\alpha = 3 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ será $\zeta = 900 \text{ m}$.

El máximo calentamiento medio de la litosfera, admitiendo que la geoterma de 1200°C ubicada a 100 km de profundidad asciende hasta el tope de la corteza, será: $1200^\circ\text{C} / 2 = 600^\circ\text{C}$.

Podemos admitir así una máxima elevación cortical de 1,8 km que aunque resulta insuficiente para justificar el total de levantamiento del orógeno Andino por ejemplo, explica parte del mismo en la región central.

En 1998, Isacks propuso que una pequeña parte del levantamiento de los Andes centrales, se debía a calentamiento actual de la mitad inferior de la litosfera de esa zona de la cordillera. Simultáneamente, Introcaso – Pacino (1988) consideramos para la misma región, una raíz térmica subcortical y luego Introcaso – Pacino (1992) construyeron una carta de correcciones térmicas en base a la cual Introcaso (1993) construyó un modelo sísmico-gravimétrico-térmico.

Conviene señalar también que, entre otros estudios, Werner & Kahle (1980) consideraron calentamiento actual en sus estudios gravimétricos de la cuenca del Rhin.

Digamos finalmente que las anomalía de gravedad en gran escala suelen correlacionarse muy bien con la corteza terrestre y con el manto subyacente, tal como podemos apreciar en Fig. 4.44. Su interpretación es pues de gran utilidad.

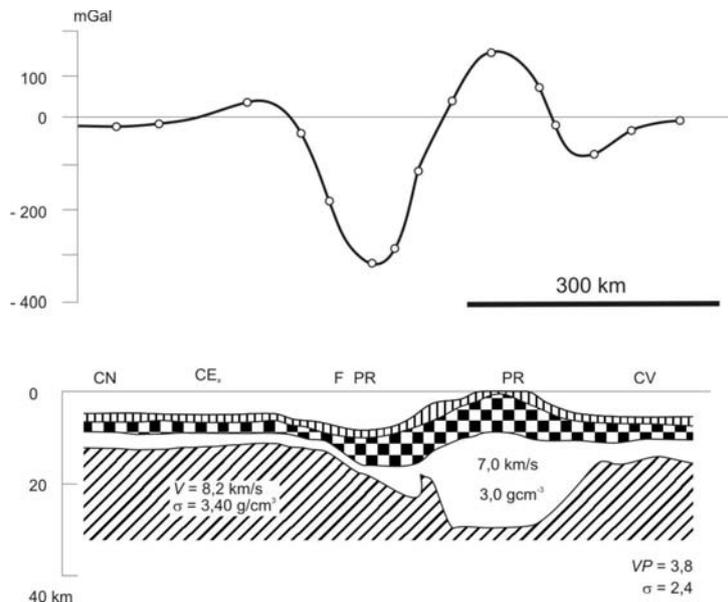


Figura 4.44. Anomalía gravimétrica sobre Puerto Rico (PR) y su fosa adyacente (F, PR). Fuente: Talwani, Sutton & Worzel (1959).

4.23. Anomalías de las ondulaciones del geoides y su relación con el comportamiento isostático

La evaluación del balance isostático puede hacerse también utilizando las ondulaciones del geoides en escala cortical o litosférica. Si designamos con N_0 a una tal anomalía (observada o verdadera) necesitaremos compararla con la ondulación isostática N_i obtenida a partir de un modelo perfectamente balanceado cuya topografía coincida con la verdadera topografía de la zona estudiada.

Veremos ahora que a poco de reparar en las propiedades del potencial de doble capa que viéramos en (2.24), nos encontraremos con el potencial expresado por una distribución dipolar.

Comencemos considerando el potencial de un dipolo magnético, en P a distancia r_1 de $-m$ y a distancia r_2 de $+m$ (Fig. 2.9).

$$V_p = \frac{-m}{r_1} + \frac{m}{r_2} = m \left[\frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2} \right] \sim \left\{ \frac{m \cos \theta}{r^2} \times d = H \times d \right\} \quad (4.73)$$

Con H : intensidad magnética y d : distancia dipolar. Caracterizamos pues al potencial magnético como intensidad magnética por distancia dipolar.

Análogamente, sabemos que el potencial gravitatorio conceptualmente es gravedad por distancia.

Si la distribución dipolar está extendida en una losa plana indefinida: $g = 2\pi G \sigma h$. El potencial perturbador será:

$$V = 2\pi G \sigma h \times d \quad (4.74)$$

Donde d (distancia dipolar) = $T + \frac{h}{2} + \frac{\Delta R}{2}$, tal como podemos ver en Fig. 4.45, que corresponde al sistema de Airy con:

$$\Delta R = \frac{\sigma_c}{\sigma_m - \sigma_c} h.$$

Finalmente la ondulación isostática N_i , considerando la fórmula de Bruns, será:

$$N_i = \frac{2\pi G \sigma_c h}{\gamma} \left[T + \frac{\Delta R}{2} + \frac{h}{2} \right] \quad (4.75)$$

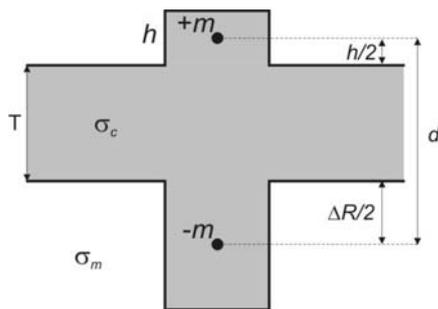


Figura 4.45. Distribución dipolar $+m$, $-m$ a distancia $d = h/2 + \Delta R/2 + T$; con h : altitud del relieve; ΔR : raíz cortical compensadora y T : espesor cortical "normal". Compárese este arreglo con un imán y sus polos (Fig. 2.9).

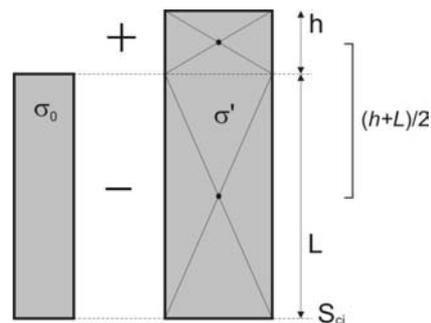


Figura 4.46. Masa compensada en la litosfera de espesor $L + h$. La densidad σ' es un déficit (sistema de Pratt).

Veamos ahora el sistema de Pratt (Fig. 4.46). De acuerdo con este sistema, todos los bloques litosféricos: 1) de espesor normal L de orden 100 km y densidad σ_0 del orden de $3,0 \text{ g cm}^{-3}$; 2) con espesor $L + h$ proveniente de un rasgo montañoso sobre elevado un cierto h , y densidad $\sigma' < \sigma_0$, etc., pesan lo mismo al llegar al fondo de L o superficie de compensación isostática S_{ci} .

Con una distribución dipolar (Fig. 4.46):

$$N_i = \frac{2\pi G \sigma' h}{\gamma} \times \frac{L+h}{2} \quad (4.76)$$

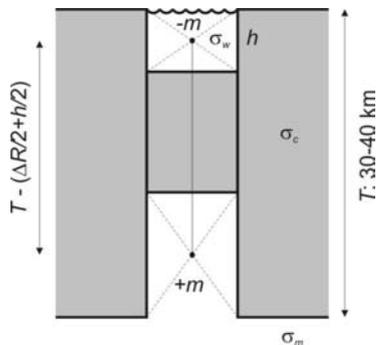


Figura 4.47. Caso oceánico para el sistema de Airy.

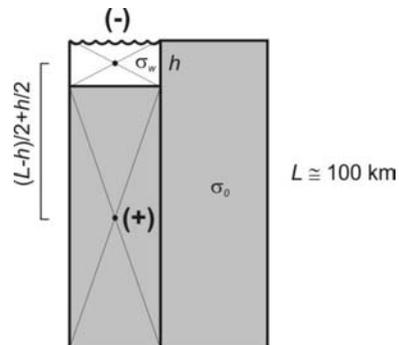


Figura 4.48. Caso oceánico para el sistema de Pratt.

Pero dado que: $\sigma_0 L$ (columna de comparación) = $(L+h)\sigma'$ (columna sobreelevada);

$$\sigma' = \sigma_0 \times \frac{L}{L+h} \quad (4.77)$$

y

$$N_i = \frac{\pi G \sigma_0 h L}{\gamma} \quad (4.78)$$

Las expresiones (4.74) a (4.78) corresponden a zonas continentales de relieve positivo que obedecen a simples distribuciones dipolares.

Veamos ahora el caso oceánico.

En este caso la densidad del agua σ_w reemplaza a la densidad cortical σ_c , o litosférica σ_0 . Es decir las intensidades gravimétricas extendidas serán respectivamente (Figs. 4.47 y 4.48):

$$2\pi G(\sigma_c - \sigma_w)h \quad (4.79)$$

y

$$2\pi G(\sigma_0 - \sigma_w)h \quad (4.80)$$

con h : profundidad oceánica.

Finalmente las ondulaciones isostáticas serán:

$$N_i = 2\pi G(\sigma_c - \sigma_w) h \left[T - \left(\frac{\Delta R}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] \quad (4.81)$$

$$N_i = 2\pi G (\sigma_0 - \sigma_w) h \left[\frac{L-h}{2} + \frac{h}{2} \right] = \pi G (\sigma_0 - \sigma_w) \times hL \quad (4.82)$$

La expresión (4.81) corresponde al sistema de Airy con: ΔR (antirraíz) = $(\sigma_c - \sigma_w)h / (\sigma_m - \sigma_c)$ con σ_m : densidad del manto superior. Desde (4.76) y (4.78) L es del orden de 100 km y σ_0 de 3 a 3,1 g cm^{-3} .

Si estamos ante el caso de una cuenca sedimentaria distensiva, en el sistema de Airy tendremos:

$$N_i = 2\pi G (\sigma_c - \sigma_s) \left[T - \left(\frac{\Delta R'}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] \times h \quad (4.83)$$

con σ_s : densidad de los sedimentos; $\Delta R'$ (antirraíz) = $(\sigma_c - \sigma_s) h / (\sigma_m - \sigma_c)$.

Las expresiones (4.75), (4.76), (4.78), (4.81), (4.82) y (4.83) han sido encontradas por un camino no riguroso que hemos elegido por su claro y simple aporte conceptual. Rigurosamente las expresiones anteriores pueden ser obtenidas considerando que la isostasia requiere que:

$\sum m_i = 0$ a lo largo de una columna balanceada, o bien: $\int_0^h \sigma(z) z dz = 0$. Sin embargo en regiones isostáticamente compensadas las ondulaciones del geoide no son cero. Ellas en realidad miden el momento dipolar $\int_0^h \sigma_c(z) z dz$ que explica la variación de la densidad con la profundidad.

En efecto, desde

$$-\partial V / \partial z = g_z \quad (4.84)$$

tendremos:

$$V = 2\pi G \int_0^h \sigma(z) z dz \quad (4.85)$$

Integrando a lo largo de las columnas continentales compensadas (Figs. 4.45 y 4.46) y oceánicas compensadas (Figs. 4.47 y 4.48) y teniendo en cuenta la fórmula de Bruns recaemos en las expresiones (4.74) a (4.82).

Recapitulando: la determinación del balance isostático es un problema capital en ciencias de la Tierra. Tradicionalmente, ha sido determinado realizando una comparación entre los efectos de “ g_0 ” correspondientes a una corteza real (definidos clásicamente a partir de anomalías de Bouguer) y los de una corteza de comparación perfectamente compensada.

Si disponemos de las ondulaciones N el método para analizar el balance isostático es similar. Debemos comparar las ondulaciones observadas N_o (obtenidas por ejemplo desde las anomalías de gravedad) con las ondulaciones que provienen de modelos perfectamente compensados: ecuaciones (4.75), (4.82) y (4.83) en el sistema de Airy y (4.76) y (4.82) en el sistema de Pratt.

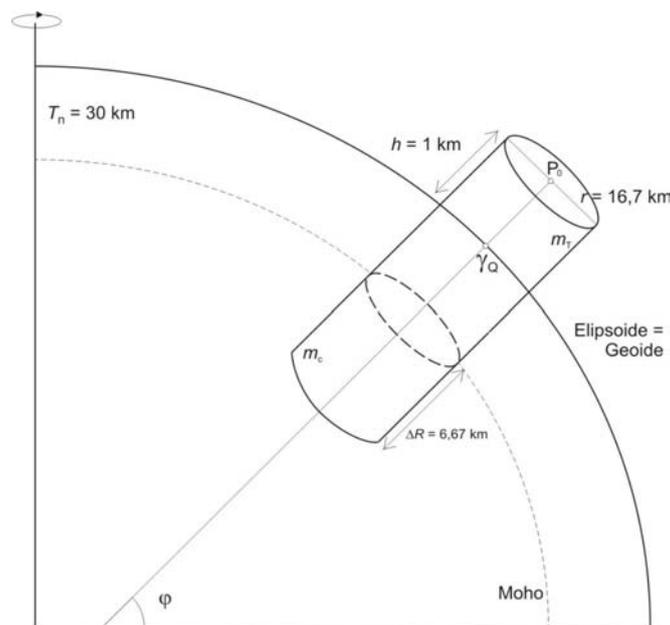


Figura 4.49. Masa topográfica m_T compensada con la raíz cortical de masa m_C (ubicada desde el “Moho normal” hacia abajo).

4.26. La significación de las anomalías de gravedad y geoidicas

Con el objeto de clarificar el concepto de anomalías (de gravedad y geoidicas) tomemos una masa cilíndrica ($h = 1$ km, $r = 167$ km y $\sigma = 2,67 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$) m_T que simula una estructura montañosa (Fig. 4.49). Asumimos que m_T está compensada por una raíz m_c ($\Delta R = 6,67$ km, $r = 167$ km y $\Delta\sigma = -0,4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$). Las siguientes expresiones garantizan la compensación de masas:

$$m_T = |m_c| \quad (4.86)$$

que explicitadas, son respectivamente: $\pi r^2 h \sigma_c = \pi r^2 \Delta R \cdot \Delta\sigma$, con $\Delta\sigma = -0,4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Calculemos ahora la gravedad en P_0 (centro de la tapa del cilindro en Fig. 4.49). La gravedad debida a m_T será:

$$g_T = 112 \text{ mGal}$$

mientras la gravedad de P debida a $-m_c$ será:

$$g_c = -90 \text{ mGal}.$$

Sabemos que la anomalía de aire libre compara γ_Q llevada a P_0 ($=\gamma_Q - 0,3086 \times h$) con g_{P_0} (valor observado). Así:

$AAL = g_{P_0} - (\gamma_Q - 0,3086 \times h)$. De no estar presentes m_T y m_c la AAL sería, en este modelo, cero. Con los valores para g_T y g_c encontrados mas arriba la anomalía de AL será:

$$m_T - m_c = (112 - 90) \text{ mGal} = 22 \text{ mGal} \quad (4.87)$$

La anomalía de Bouguer se obtiene retirando la masa m_T de (4.87), es decir:

$$-m_c = -90 \text{ mGal} \quad (4.88)$$

y finalmente la anomalía isostática será:

$$-m_c + C_I \quad (4.89)$$

C_I corresponde al efecto de raíz compensadora, cambiado de signo; es decir $C_I = 90$ mGal, por lo que la anomalía isostática será entonces igual a cero.

Si la verdadera raíz es demasiado grande ($|m_c| > m_T$) el valor g_{P_0} será anormalmente negativo. La AAL estará por debajo de 22 mGal, mientras que la anomalía de Bouguer será mas negativa que -90 mGal. Finalmente la AI será también negativa debido a que la raíz predictiva no alcanza a compensar la raíz real en exceso.

Si por el contrario la raíz real es demasiado pequeña (insuficiente) ó $|m_c| < m_T$, el valor observado g_{P_0} será anormalmente positivo. La AAL será > 22 mGal y la anomalía de Bouguer < -90 mGal.

Por fin la Anomalía isostática será positiva ó $C_I > |AB|$.

Como ya fuera dicho, el análisis isostático puede hacerse también con las ondulaciones del goide. Si continuamos con el modelo dado en Fig. 4.49 y trabajamos con la expresión: $N_i = 2\pi G \sigma_c h [T + \Delta R/2 + h/2] / \gamma$, ecuación (4.75); $N_i \sim 3,9$ m en P_0 . Si la verdadera raíz es sobre espesa y proporciona un valor de ondulación digamos $N_0 = 2$ m, la anomalía del geoide (en el sentido isostático) será: $N_0 - N_i = (2 - 3,9) \text{ m} = -1,9 \text{ m}$.

Este negativo se corresponde como viéramos con la AI también negativa. Si por el contrario la raíz está en déficit, será la ondulación observada $N_0 > N_i$. Supongamos ahora que $N_0 = 5$ m. En este caso la anomalía del geoide (en el sentido isostático) será $N_0 - N_i = 5 \text{ m} - 3,9 \text{ m} = 1,1 \text{ m}$ que se corresponde con la AI también positiva como ya fuera visto.

Geodinámicamente tendremos:

Si $AI \sim 0$ y $N_0 - N_i \sim 0$, tendremos balance isostático y probable estatismo.

Si $AI > 0$ y $N_0 - N_i > 0$, tendremos subcompensación y movilidad descendente potencial.

Si $AI < 0$ y $N_0 - N_i < 0$, tendremos sobrecompensación isostática y movilidad ascendente potencial.

No debemos perder de vista que las ondulaciones observadas que debemos usar corresponden a longitudes de onda de la cáscara del planeta (corteza, litosfera). Ellas pueden obtenerse desde un filtrado.

5. LAS ALTURAS EN EL CÁLCULO DEL GEOIDE

5.1. Introducción

Debido a que la gravedad depende fuertemente de la altura, se ha prestado una especial atención a los distintos sistemas de referencia utilizados. Las alturas, que dependen de las distintas técnicas de mediciones, son fundamentales para construir el geoide.

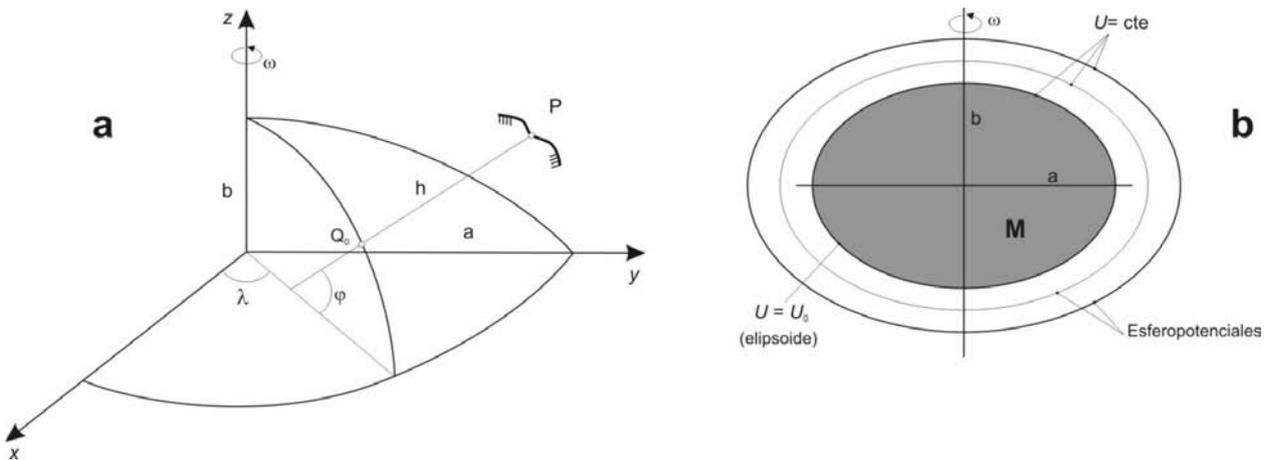


Figura 5.1. (a) $Q_0P = h$ altura elipsoidal satelital. Abajo: esferopotenciales. (b) Diferencias entre las distancias elipsoidal h y física H^N .

5.2. Alturas elipsoidicas h

Existe un sistema de referencia representado por un elipsoide de nivel. Este sistema queda completamente determinado por cuatro parámetros: a , $\alpha (= \frac{a-b}{a})$, M y ω (Fig. 5.1 (a)) y queda descrito por el potencial $U(r)$ del campo normal de gravedad. Sólo la superficie del propio elipsoide con $U(r) = U_0$ es un elipsoide de nivel, actualmente el elipsoide adoptado es el correspondiente WGS84. Las demás superficies se llaman esferopotenciales, $U(r) = cte$.

En puntos sobre el elipsoide como viéramos en el Cap. 3, se tiene:

$$r = a(1 - \alpha \sin^2 \varphi).$$

Si el elipsoide de referencia es geocéntrico las cantidades son absolutas, de lo contrario son relativas.

Las alturas elipsoidicas h se definen geoméricamente sobre una vertical al elipsoide (Fig. 5.1 (b)). Ellas son independientes del campo de gravedad. Por ello la altura geométrica h no coincide con la altura definida entre equipotenciales (que llamaremos H^N : altura normal, ver Fig. 5.2). Así puede ocurrir que h y H^N tengan los mismos valores en estaciones de distintos niveles o viceversa.

La altura elipsoidal h se determina con altimetría satelital sobre los océanos y GPS sobre los continentes.

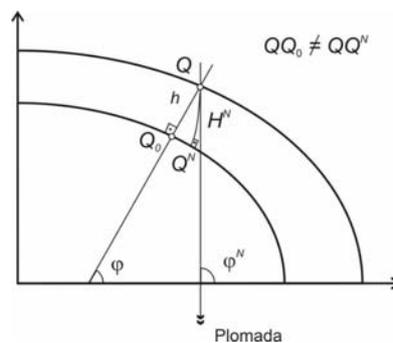


Figura 5.2. Diferencias entre las distancias elipsoidal h y física H^N .

5.3. Alturas ortométricas H

El geode tradicionalmente constituye la superficie de referencia para las alturas. Consideremos ahora dos puntos vecinos P_0 (sobre el geode de potencial W_0) y P'_1 (Fig. 5.3) situados sobre la superficie topográfica de potencial W_1 ; la aceleración de la gravedad es respectivamente en esos puntos g_0 y g_1 , mientras que las superficies equipotenciales que pasan por ellos serán W_0 (geode) y W_1 .

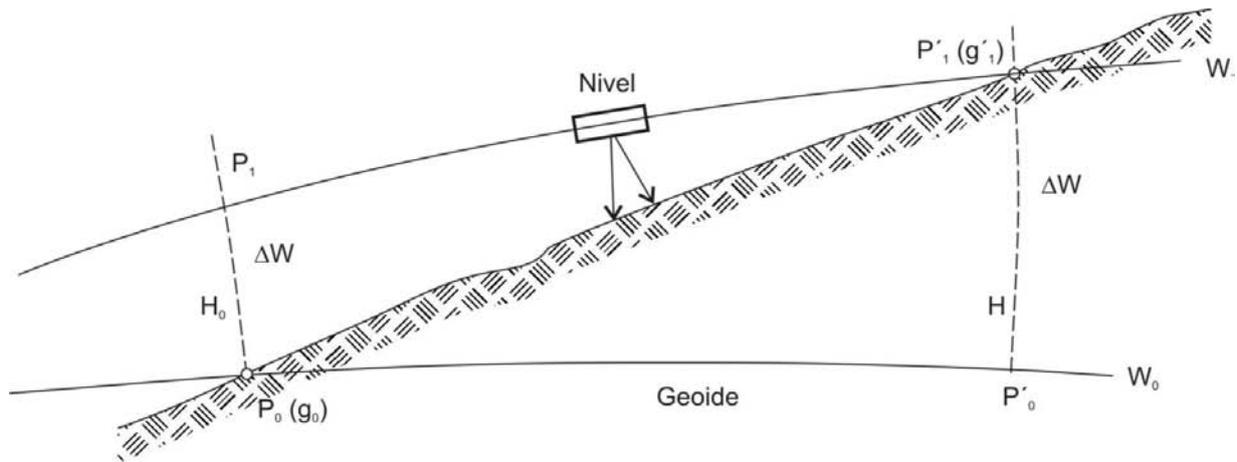


Figura 5.3. Esquema para ilustrar el cálculo de las cotas geopotenciales ($\Delta W = cte.$, $P_0P_1 \neq P'_0P'_1$, ó $H_0 \neq H$). $H_0 = P_0P_1$ es la altura que se obtiene usualmente con una nivelación tradicional.

Las trayectorias perpendiculares a las superficies de nivel son las líneas de fuerza; son en realidad curvas dado que, como se vió, las equipotenciales no son paralelas. Precisamente esa falta de paralelismo de las superficies de nivel determina que el resultado bruto de una nivelación de precisión dará valores distintos según el recorrido. Mientras la diferencia de potencial entre W_0 y W_1 es constante e independiente del camino ($P_0P'_1$, P_0P_1 , P'_0P_1 , etc.) la separación es distinta en lugares distintos ($P_0P'_1 \neq P'_0P_1$, ...). Así, se tendrá:

$$W_1 - W_0 = - \int_{P_0}^{P_1} g \, dz$$

$$W_0 = 6263977 \text{ kGal m}$$

siendo g : la gravedad y dz : el desplazamiento elemental del punto a lo largo de la línea de fuerza.

Para la diferencia de potencial entre un punto O del geode y un punto cualquiera P se tiene:

$$W_P - W_0 = \sum_{i=0}^P g_{m_i} \Delta z_i \quad (5.1)$$

con: g_{m_i} : gravedad media en cada tramo de la trayectoria; Δz_i : diferencias de altura obtenidas con nivelaciones geodésicas.

Siendo (5.1), C_p : la cota geopotencial (en alemán *geopotentielle kote*; en inglés *geopotential number*). Ella es una característica de la la superficie de nivel.

Para los puntos ubicados sobre el geode ΔC_p es nula ($W_0 - W_0 = 0$). Es positiva y negativa para los puntos ubicados sobre el geode y debajo del geode, respectivamente. Notemos que la cota geopotencial no tiene dimensiones métricas, se expresa en kGal m.

Para darle dimensiones métricas suele definirse la cota dinámica como la relación:

$$\frac{C_P}{\gamma_0^{45}} \text{ [metros]} \quad (5.2)$$

Siendo γ_0^{45} el valor de la gravedad sobre el elipsoide a 45° de latitud. En esta forma se obtiene una expresión proporcional a la anterior pero en metros. De ninguna manera estos resultados corresponden a altitudes verdaderas. Una mejor aproximación exige colocar en (5.2) el γ correspondiente a la latitud media de la zona.

Volvamos a la Fig. 5.3. El valor que realmente interesa es P_0P_1 ó longitud de la línea de fuerza entre el punto considerado y el geoide. Este valor es la altitud ortométrica H_p . Partiendo de la cota geopotencial

$$C_P = \sum_{P_0}^{P_1} g_m \Delta z_i \quad (5.3)$$

con P_0' sobre el geoide de potencial W_0 . P_0P_1 es el desnivel geométrico. Como bien podemos ver en Fig. 5.3, el no es la altura verdadera $P_0'P_1' = H$ ó altura ortométrica, que no es otra cosa que la longitud de la línea de fuerza que pasa por P_1' .

Ella se obtiene indirectamente desde:

$$H = \frac{C_P}{\bar{g}} \quad (5.4)$$

El problema de (5.4) es que la gravedad media \bar{g} sobre la línea de fuerza $P_0'P_1'$ no se conoce y por ello debemos plantear una hipótesis y asumir una densidad.

La propuesta de Helmert es encontrar el g medio ó \bar{g} en $H/2$, asumiendo que trasladar g_1^1 (Fig. 5.3) a la mitad de la longitud de la línea de fuerza, significa afectarlo de: (a) la mitad de la corrección de altura: $+0,1543 \times H$; (b) del doble de la corrección de Bouguer en $H/2$ (una vez retirando la masa de espesor $H/2$ y otra reponiéndola desde este punto) es decir, de una cantidad: $-0,1119 H$. Finalmente sumando (a) y (b), tendremos:

$$\bar{g} = g_1^1 + 0,0424H \quad (5.5)$$

Otra forma de encontrar un g medio sería tomar el promedio: $(g_1^1 + \gamma_0)/2$; aunque el elipsoide que contiene el γ_0 en la latitud de P_1^1 no coincide con el geoide.

5.4. Alturas normales H^N

En Fig. 5.2 hemos introducido la altura normal H^N tomada desde Q^N (elipsoide) a Q para diferenciarla de la altitud elipsoidal h . Con el objeto de no trabajar con hipótesis (cota ortométrica H) Molodenski introdujo en 1945 las denominadas *alturas auxiliares*, llamadas luego, en 1951 *alturas normales* H^N por estar referidos al elipsoide de referencia normal.

Si en (5.4) reemplazamos \bar{g} por $\bar{\gamma}$, H se transforma en H^N de acuerdo con:

$$H^N = \frac{C_P}{\bar{\gamma}} \quad (5.6)$$

con:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{H^N} \int_0^{H^N} \gamma \partial H \quad (5.7)$$

Recordemos que si γ en primera aproximación desde (4.3) es:

$$\gamma = \gamma_0 - \frac{2\gamma_0}{r} h, \text{ el valor medio de } \gamma \text{ en nuestro caso, reemplazando } h \text{ por } \frac{H^N}{2}, \text{ será:}$$

$$\bar{\gamma} = \gamma_0 \left(1 - \frac{H^N}{r}\right) \quad (5.8)$$

expresión independiente de la densidad σ ; dado que $\bar{\gamma} = \phi(H^N)$ en (5.6) deberemos proceder iterativamente.

Una mejor aproximación de $\bar{\gamma}$ puede lograrse reemplazando en (4.6) h por $H^N/2$ y despreciando el término cuadrático de H^N ,

$$\bar{\gamma} = \gamma_0 \left[1 - \frac{H^N}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi)\right] \quad (5.9)$$

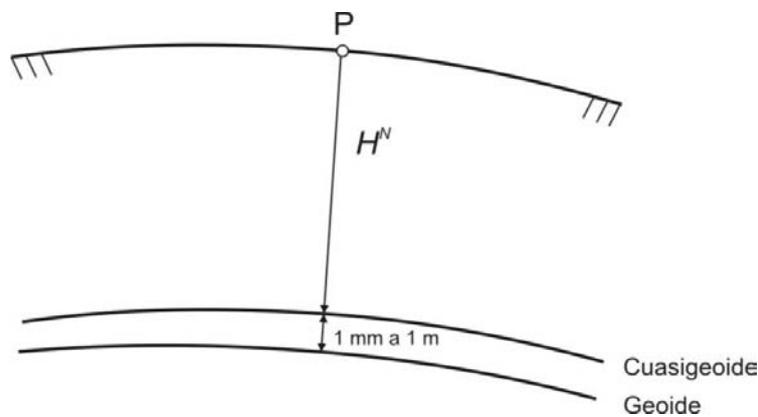


Figura 5.4. Ubicación del cuasi-geoide llevando la altura normal H^N desde P ubicado sobre la superficie terrestre.

Extendiendo desde P ubicado sobre la superficie terrestre, la longitud H^N hacia abajo obtenemos el cuasi-geoide (Fig. 5.4). El cuasi-geoide se localiza muy cercanamente al geoide. Difiere así en milímetros a centímetros en elevaciones bajas y puede alcanzar 1 metro en zonas montañosas. En los océanos ambas superficies prácticamente coinciden.

Debemos notar que h puede ser descompuesto por un lado en: $H + N$, con H : altura ortométrica y N : ondulación del geoide, y por otro en $H^N + \zeta$, con H^N : altura normal y ζ : anomalía de altura (Fig. 5.5).

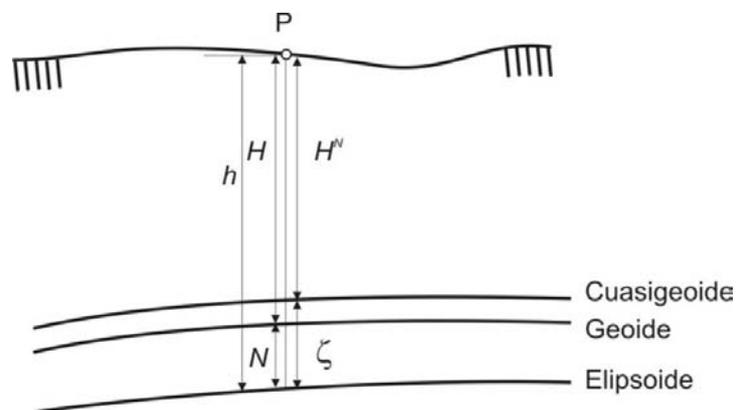


Figura 5.5. $H + N$ equivale a $H^N + \zeta$

En 1960 Hirvonen propuso definir el Teluroide (Fig. 5.6) llevando el H^N hacia arriba desde el elipsoide. El teluroide se localiza muy cerca de la superficie terrestre.

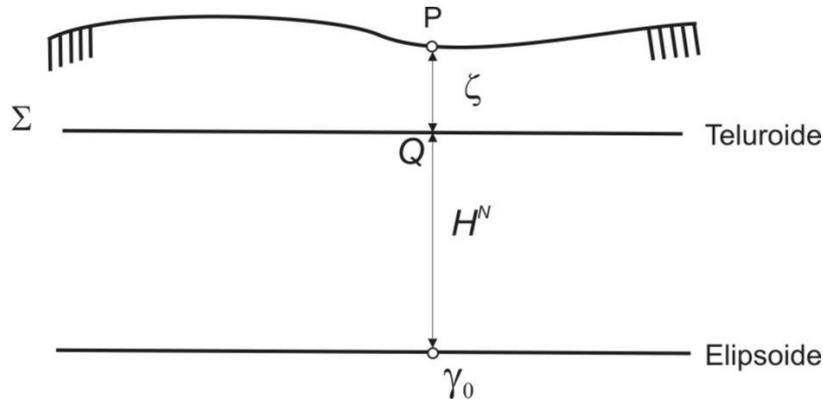


Figura 5.6. Llevando H^N hacia arriba desde el elipsoide, obtenemos el teluroide.

Una forma de calcular ζ , es condensando sobre el teluroide las masas ubicadas por encima de él. Si pensamos en obtener ζ en primera aproximación podemos emplear la expresión de Stokes, que veremos en el Cap. 6. Deberíamos así introducir la anomalía de aire libre, que de acuerdo con Fig. 5.6 será:

$$\Delta g = g_P - \left(\gamma_0 - \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} \cdot H^N \right)$$

No obstante dado que el teluroide no es una superficie de nivel, la expresión de Stokes para ζ deberá incorporar términos adicionales. Por ejemplo, Moritz (1980) agrega un término más a Δg (solución del gradiente).

Siendo $N + H = \zeta + H^N$; ó $N = H^N - H + \zeta$.

Como:

$$C_p = H^N \bar{\gamma} = H \bar{g} \quad \text{ó} \quad H^N = H \frac{\bar{g}}{\bar{\gamma}}, \text{ la ondulación } N \text{ será:}$$

$$N = H \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} + \zeta = \frac{\overline{\Delta g_B}}{\bar{\gamma}} H^N + \zeta, \text{ con } \overline{\Delta g_B} = \bar{g} - \bar{\gamma} \text{ (anomalía de Bouguer)}$$

En virtud que $\frac{\overline{\Delta g}}{\bar{\gamma}}$ es muy pequeño, del orden 10^{-4} a 10^{-5} , podemos reemplazar H por el valor conocido H^N .

Si $\Delta g = 50$ mGal y $H^N \approx 100$ m tendremos:

$$N - \zeta = 0,05 \times 100 = 5 \text{ mm}$$

Si $\Delta g = 100$ mGal y $H^N \approx 1000$ m tendremos:

$$N - \zeta = 0,1 \times 1000 = 10 \text{ cm}$$

6. INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DEL GEOIDE

Al finalizar 2.7 vimos que para calcular el potencial terrestre V , nos apoyábamos en la observación de g . En efecto con el g medio terrestre deducimos la masa terrestre M_T y con ella calculamos V . Lo mismo ocurre con el potencial magnético, desde las observaciones obtenemos los coeficientes necesarios para determinar el potencial V_m .

En 2.13 también vimos que los coeficientes del potencial perturbador $T(r)$ pueden deducirse desde el conjunto de anomalías de gravedad observadas.

En lo que sigue (6.1) veremos un ejemplo simple en el cual teniendo como dato de entrada a las anomalías de gravedad ubicamos y dimensionamos a la masa causante y con ella calculamos el potencial V . Finalmente con la fórmula de Bruns obtenemos la ondulación N .

En 6.2 y 6.3 veremos también que las ondulaciones N se obtienen desde Δg (las anomalías de “ g ”) o bien de las densidades superficiales equivalentes: $\Delta g / 2\pi G$ y $\Delta g / 4\pi G$. En 6.4 determinaremos N a partir de los desvíos de la vertical y en 6.5 obtendremos (al igual que en 6.4) N sin utilizar anomalías de gravedad. Esta vez, en base a diferencias de alturas. Finalmente en 6.6, daremos nociones sobre modelos geopotenciales.

6.1. Un ejemplo simple para el cálculo del geode a partir de anomalías de gravedad.

Veremos ahora cómo, a partir de las anomalías de gravedad observadas sobre un plano, es posible determinar el potencial (y la ondulación del geode) sobre el mismo o por encima de él en el espacio armónico. El ejemplo que veremos corresponde a la respuesta gravimétrica de una masa puntual equivalente (esfera) enterrada a profundidad z . Este es el caso más simple, con buena cantidad de aplicaciones. Luego veremos que un conjunto de fuentes puntuales equivalentes, de cálculo muy simple, nos permite obtener el geode desde las anomalías de g .

Para el caso de conocer a priori las cuatro incógnitas de una masa enterrada: forma, tamaño, densidad y profundidad, al calcular a partir de la fórmula de Newton los efectos gravimétricos sobre un plano xy (por ejemplo, la superficie terrestre), obtendremos una única respuesta de gravedad (método directo). Se dice entonces que existe unicidad entre la fuente conocida y la respuesta de g . Si procedemos al revés, es decir, si desde la respuesta de g queremos conocer la masa causante (método inverso), habrá infinitas combinaciones de las cuatro incógnitas (ó infinitas posibles masas causantes) que reproducen la respuesta de g . Se trata de la bien conocida ambigüedad gravimétrica, o falta de unicidad entre g y las masas buscadas. Haremos uso, luego, de esta circunstancia para obtener el geode.

Para el cálculo de la atracción que una esfera enterrada ejerce sobre el punto P de la superficie, consideraremos la masa de dicha esfera como concentrada en su centro, de acuerdo con lo demostrado en 2.3.

Estudiemos la variación en la superficie del suelo desde $-x$ a $+x$, de la componente vertical de gravedad originada por una esfera de densidad σ (Fig. 6.1a, arriba).

La profundidad se obtiene a partir de $z = 1.305 x_{1/2}$. En efecto, la gravedad g_v en P será:

$$g_v = \frac{GM}{r^2} \cos \theta = \frac{\frac{4}{3} \pi GR^3 \sigma}{r^2} \frac{z}{r} \quad (6.1)$$

$$g_v = \frac{\frac{4}{3} \pi GR^3 \sigma}{z^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right)^{3/2}} \quad (6.2)$$

Por la simetría de la función, el máximo tiene lugar cuando $x = 0$ y por lo tanto:

$$g_v = g_{\max} \left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right)^{-3/2} \quad (6.3)$$

Dada la continuidad, sabemos que existe un entorno donde $g_v \geq \frac{g_{\max}}{2}$. Los extremos de variación de x serán $\pm x_{1/2}$ y en esos puntos la profundidad de la masa es $z = 1.305 x_{1/2}$, como bien se desprende de igualar $\left(1 + x^2 z^{-2}\right)$ a 0.5 (valor

arbitrario). Para terminar de encontrar las características de la masa causante despejamos Gm de $g_{\max} = Gm / z^2$. Ahora tenemos todo lo necesario para calcular el potencial $V_i = \frac{Gm}{d_i}$ con $d_i = \sqrt{x_i^2 + z^2}$.

El objetivo de este ejemplo es demostrar que a partir de las anomalías de gravedad, o más precisamente de los g_i correspondientes a una esfera enterrada, es posible determinar las características de la fuente causante: z (profundidad vertical aproximada) y Gm (constante que caracteriza a la intensidad). Luego, a partir de esta fuente conocida (deducida) calculamos sobre o por encima del plano de la superficie terrestre el potencial V_i y $N_i = V_i / \gamma$.

Este ejemplo señala el camino a recorrer para determinar N_i . Así, con la fórmula de Stokes que luego veremos en sus dos formas (rigurosa y planar) es necesario disponer de anomalías de gravedad (anomalías de Faye, por ejemplo) para obtener N_i .

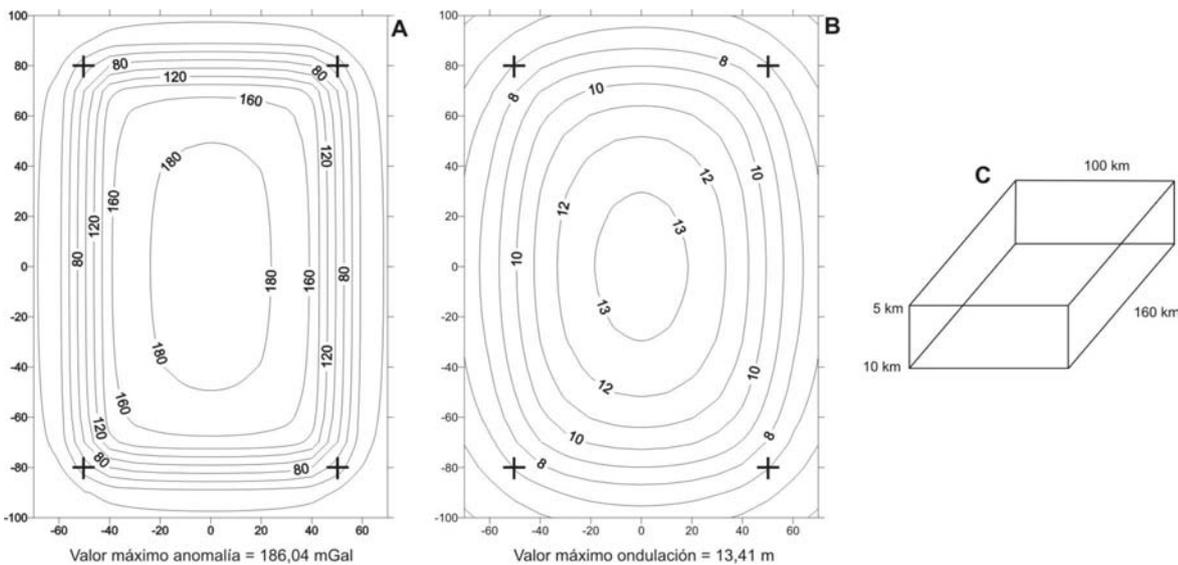
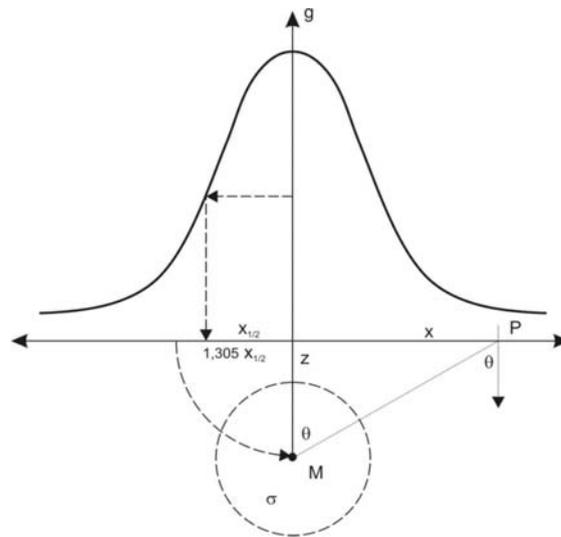


Figura 6.1. (a, arriba) Respuesta gravimétrica ‘g’ debida a una esfera de masa M ubicada a profundidad z . **(b, abajo)** Anomalías de aire libre en mGal (A) y ondulaciones en metros del geoide (B) producidas por un paralelepípedo (C) de 5 km de espesor y densidad 1 g/cm^3 , situado 5 km por debajo del nivel del mar y de dimensiones 100 km por 160 km. Las cruces en (A) y (B) indican las proyecciones de los límites del techo del paralelepípedo (C).

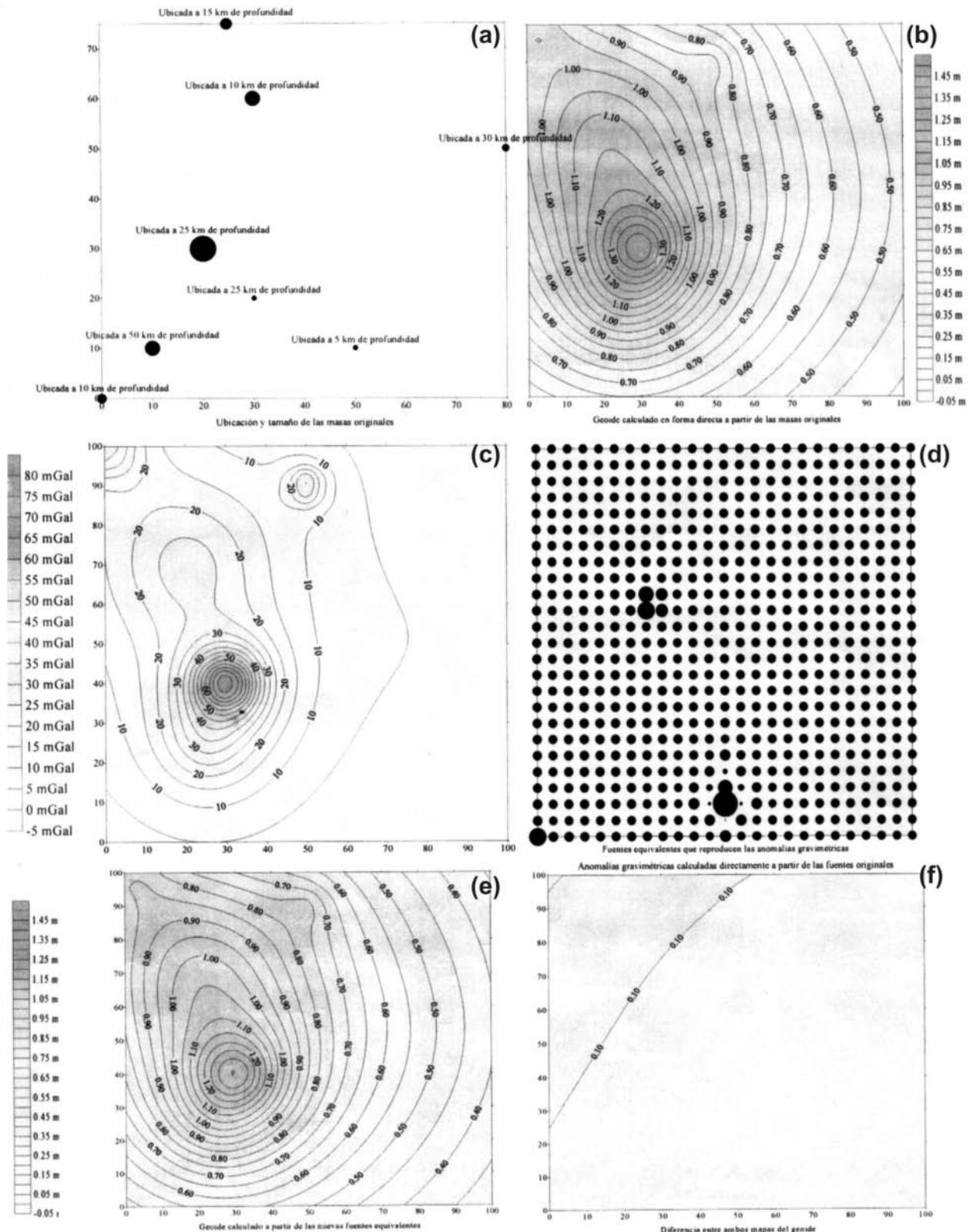


Figura 6.2. (a) Ocho masas ubicadas a diferentes profundidades; (b) geoide obtenido en forma directa desde (a); (c) anomalías de gravedad calculadas desde (a); (d) distribución de fuentes equivalentes; (e) geoide desde (d); (f) residuos (b) – (e).

Este ejemplo nos lleva a pensar que si desde las anomalías de aire libre regularizadas obtenemos por inversión el modelo cortical completo. Luego a partir de este podemos calcular T y $N (= T \cdot \gamma^{-1})$.

La Fig. 6.2b muestra que desde las anomalías de gravedad se encuentra por inversión un paralelepípedo (que las justifica) y desde el, se obtiene la solución para N .

El método de fuentes equivalentes que pasaremos a ver en 6.2 también utiliza la idea de la justificación de las anomalías observadas como paso previo al cálculo de N aunque con un conjunto de fuentes puntuales.

En el Apéndice 6.1 veremos que la obtención de la profundidad y de la intensidad de la masa causante puede hacerse también trabajando en el dominio frecuencial.

En el Apéndice 6.2 veremos la propuesta de Tsuboi que utiliza para la inversión una condensación plana interior y el método de Fourier.

6.2. Método de fuentes equivalentes

El ejemplo introductorio es muy simple, correspondía a una curva “campana”, simétrica de anomalías de “ g ” que puede ser invertida desde el medio ancho para obtener la fuente y su ubicación, y desde ella el potencial V_i (y N con la fórmula de Bruns).

Para el caso de isoanómalas cualesquiera (por ej. de distribución irregular) podemos poner sobre un plano α ubicado a una profundidad fija h , un conjunto de fuentes equivalentes (fuentes puntuales) ubicadas por ej. cada una sobre el plano α y exactamente por debajo de cada nodo de la grilla. A partir de estudios estadísticos se encontró que: $2,5 \Delta x \leq h \leq 6 \Delta x$, siendo Δx la separación de estaciones.

Normalmente la ambigüedad de la inversión gravimétrica se expresa por:

$$\Delta g \text{ (anomalía de "g" observada)} = \phi(F, T, h, \sigma) \quad (6.4)$$

con F : forma, T : tamaño, h : profundidad y σ : densidad.

Fijada ahora la profundidad h de las fuentes y asumiendo fuentes puntuales, forma y tamaño desaparecen de la ecuación (6.4). La anomalía Δg queda así solo en función de las intensidades de las fuentes puntuales.

Las anomalías Δg_i son las observables conocidas en cada intersección del grillado. Planteamos pues un sistema cuadrado $n \times m$ y definidos así el conjunto de fuentes puntuales equivalentes que justifican a las anomalías Δg_i observadas.

Luego con este conjunto de fuentes calculamos en forma rápida en cada intersección $N_i = V_i \cdot \gamma^{-1}$.

La Fig. 6.3 muestra en (a) 8 fuentes equivalentes a distintas profundidades y con distintas intensidades, en (b) el geoide ($N_i = \sum T_i / \gamma$) calculado con fuentes de a). En (d) las 625 fuentes equivalentes ubicadas a 8,3 km de profundidad que reproducen a las anomalías de (c). En (e) Geoide calculado con las fuentes (d) y en f), las diferencias entre ambas masas del geoide (b) y (e). La Fig. 6.3 reproduce el geoide para la Sierra de San Luis realizado con Stokes plano (izquierda) y fuentes equivalentes (derecha). La Fig. 6.4 muestra los contornos del geoide observado para la cuenca del Salado (izquierda) y calculado con el método de fuentes equivalentes (derecha). La Fig. 6.5 muestra el geoide de la Provincia de Buenos Aires antes del filtrado.

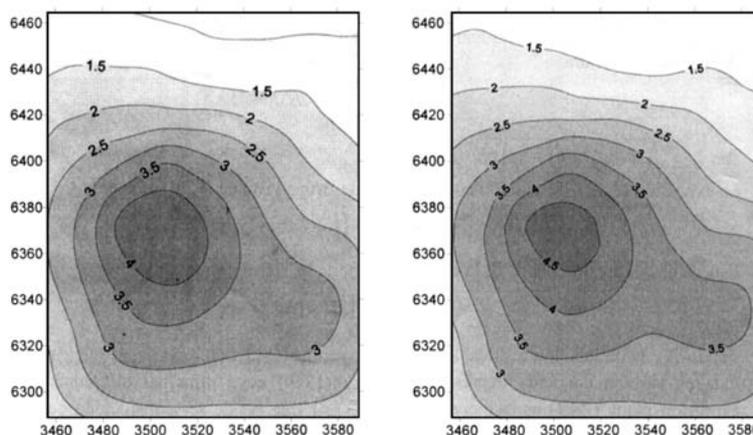


Figura 6.3. Geoide calculado para las Sierras de San Luis con la fórmula de Stokes plana (izquierda) y con fuentes equivalentes (derecha).

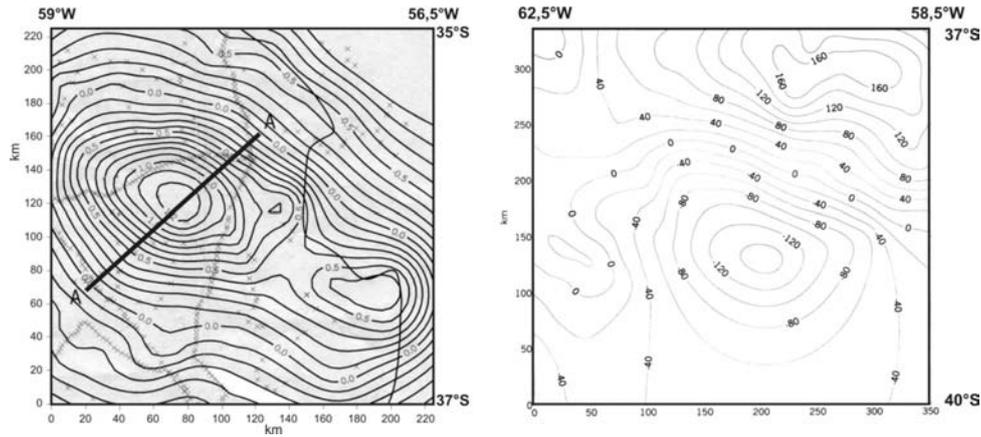


Figura 6.4. Izquierda: Geoide observado para la cuenca del Salado (provincia de Buenos Aires). AA: sección interpretada. Derecha: anomalías de gravedad sobre la cuenca.

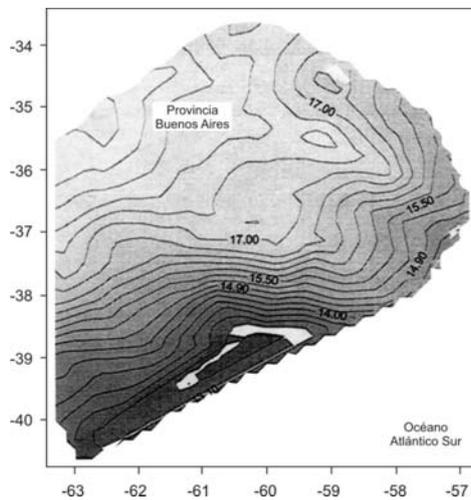


Figura 6.5. Geoide obtenido sobre la provincia de Buenos Aires.

6.3. La construcción del geoide con la fórmula de Stokes.

Veremos a continuación el caso plano y el global (expresión clásica) correspondiente a la fórmula de Stokes.

Caso plano. Distribución de densidades planas (ficticias).
 Vimos en (2.22) y (2.23) que:

$$\mu = \frac{\Delta g_p}{4\pi G} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{\Delta g(x, y)}{2\pi G}$$

A partir de la Fig. 2.11 y de la ecuación (2.23) tendremos: la expresión del potencial en un punto $P(x', y', z')$:

$$V(x', y', z') = \frac{1}{2\pi} \iint_D \frac{\Delta g(x, y, z)}{l'_i} \, dx dy \tag{6.5}$$

con $l'_i = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$, es decir en el plano donde se calcularon las anomalías. Considerando la fórmula de Bruns se tendrá:

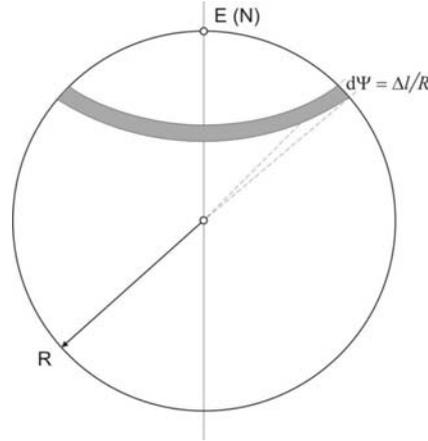


Figura 6.6. Subdivisión de la Tierra en anillos superficiales de espesor Δl para el cálculo de N usando la expresión de Stokes.

$$N = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_D \frac{\Delta g_i}{l_i} dx dy \quad (6.6)$$

A partir de esta expresión es fácil admitir la expresión rigurosa dada por G. Stokes (1849) para el total de la Tierra:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint F(\psi) \Delta g d\psi \quad (6.7)$$

Notemos que esta expresión contiene ahora a la densidad superficial esférica (2.22), es decir: $\mu = \Delta g/4\pi G$. La función $F(\psi)$ puede ser considerada como una función de peso de las anomalías de gravedad Δg . Ella depende del ángulo ψ entre el radio vector en la estación a calcular N y el elemento del geode con anomalía Δg . Finalmente, R es el radio terrestre.

La expresión (6.7) se obtiene resolviendo la ecuación diferencial fundamental de la geodesia (3.39). La función $F(\psi)$ es:

$$F(\psi) = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 6 \sin \frac{\psi}{2} - \dots \quad (6.8)$$

Si queremos pasar de la expresión rigurosa (6.7) a la expresión plana (6.6) consideremos que para ψ pequeños

$$F(\psi) \sim \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \sim \frac{1}{\frac{\psi}{2}} = \frac{2}{\psi}. \quad \text{Además:} \quad d\psi = \frac{dx dy}{R^2}. \quad \text{Reemplazando} \quad F(\psi) \text{ por } \frac{R}{l}; \quad d\psi \text{ por } \frac{dx dy}{R^2} \quad \text{y}$$

$\frac{\Delta g}{4\pi G}$ por $\frac{\Delta g}{2\pi G}$ se obtiene la expresión plana.

Veamos ahora las características de $F(\psi)$. Esta función presenta los mas altos valores para los mas pequeños ψ . Se anula en 39° y en $117,5^\circ$ y cambia de signo, las mas altas contribuciones se producen en los alrededores de la estación, pero el rol de las zonas mas lejanas no puede ser despreciado. Dado que en $\psi = 0$, $F(\psi)$ se hace infinito, Helmert buscó otra forma para (6.8), con la cual se obtiene la llamada integral modificada de Stokes. Dado que dS (elemento de superficie esférica) = $R^2 d\psi$, y dividiendo a la Tierra en anillos (Fig. 6.6) con: $dS = 2\pi R^2 \sin \psi d\psi$ se tendrá desde (6.7):

$$N = \frac{R}{\gamma} \int_0^\pi \frac{F(\psi) \Delta g}{2} \sin \psi d\psi \quad (6.9)$$

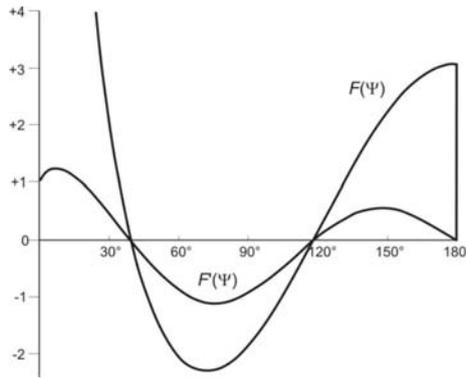


Figura 6.7. La indeterminación de la función de peso $I(\psi)$ en la expresión de Stokes se soluciona a partir de $F'(\psi)$ que contiene a $F(\psi)$ (véase texto).

Si hacemos $\frac{F(\psi)}{2} \sin \psi = F'(\psi)$ tendremos:

$$N = \frac{R}{\gamma} \int_0^\pi F'(\psi) \Delta g \, d\psi \quad (6.10)$$

De esta forma se elimina la indeterminación en los alrededores del origen (Fig. 6.6). Entre 0 y 1°, $F'(\psi) \approx 1$ dentro de un 8%; entre 1 y 10° dentro de un 21% (Fig. 6.7). Así para valores cercanos (ψ pequeño) desde (6.10) la expresión práctica será:

$$N \sim \frac{R}{\gamma} \sum_0^\psi \Delta \bar{g}(\psi) \Delta \psi \quad (6.11)$$

Si consideramos que $R\Delta\psi = \Delta l$ (Fig. 6.5), se tendrá:

$$N \sim \frac{1}{\gamma} \sum_0^l \Delta g \Delta l \quad (6.12)$$

La fórmula de Stokes es rigurosa, aunque desde el punto de vista práctico exige disponer de anomalías gravimétricas distribuidas homogéneamente y con buena resolución sobre todo el globo.

Este fue el principal obstáculo para su empleo. Hoy, y como veremos se usan a menudo métodos de interpolación que por supuesto involucran el uso de anomalías homogéneamente distribuidas.

Como viéramos hay distintas anomalías de gravedad. Nos preguntamos: ¿Cuáles son mas operativas? Pensemos en utilizar anomalías de aire libre. Ellas, descontaminadas de efectos topográficos (anomalías de Faye) presentan el mas pequeño efecto indirecto, si para cumplir con la condición: $\text{div } g = 0$ condensamos las masas por encima del geoide en su superficie.

Rigurosamente el efecto indirecto cambia la posición del geoide llevándolo al co-geoide; entonces la ondulación obtenida será N_c y $N = N_c + \eta(El)$. Las anomalías para el cálculo de N_c deberán llevarse al co-geoide mediante la llamada corrección de Bowie: $0,3086 \times \eta$.

6.4. Método astrogeodésico (morfología expeditiva del geoide).

A partir de la Fig. 6.8 tendremos para el ángulo ε'' que forman las verticales elipsoidica y geodica en el plano meridiano:

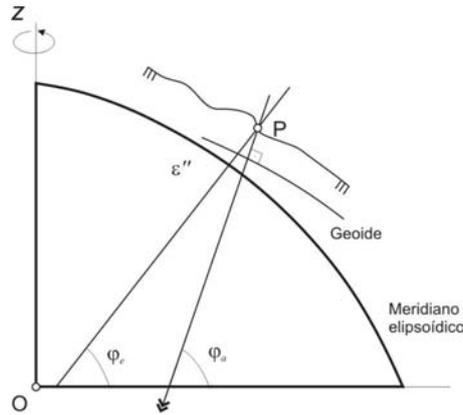


Figura 6.8. Desvío de la vertical ε'' sobre el meridiano.

$$\varepsilon'' = \varphi_a - \varphi_e \tag{6.13}$$

siendo φ_a : latitud astronómica, φ_e : latitud elipsoidal, y ε'' : desvío de la vertical en el meridiano.

De acuerdo con las Figs. 6.8 y 6.9 el desvío de la plomada en el primer vertical será:

$$\eta'' = (w_a - \omega_e) \cos \varphi \tag{6.14}$$

En efecto, en el triángulo esférico $ZaZePs$, si situamos un arco perpendicular desde Za hasta $ZePs$ que llamaremos η'' , se tendrá:

$$\frac{\sin \eta''}{\sin (w_a - \omega_e)} = \frac{\cos \varphi_a}{1} \tag{6.15}$$

siendo η'' el desvío de la vertical en el primer vertical, $(w_a - \omega_e)$ la diferencia de longitud entre los meridianos astronómico y elipsoidal.

Siendo los ángulos η'' y $(w_a - \omega_e)$ muy pequeños y $\cos \varphi_a \sim \cos \varphi_e$ la expresión finalmente tendrá la forma de (6.14).

Si disponemos de la vertical η_i'' en el medio de secciones de 2 km de longitud de una zona determinada podremos reconstruir *grosso modo* la ondulación del geoide morfológicamente, respecto de un elipsoide de referencia E_0E_3 .

La Fig. 6.11 ilustra la obtención de la forma del geoide GG respecto del elipsoide EE en base a los desvíos de la vertical η_{ij}'' . Se supone que en E_0 , geoide y elipsoide coinciden. Las direcciones de la plomada en la parte media de P_0P_1 , P_1P_2 y P_2P_3 permiten trazar perpendiculares a ellas encontrando el geoide que se va reconstruyendo por trozos. Si desde E_0 trazamos una perpendicular a la dirección de la plomada g_1 , obtendremos un trozo de geoide E_0G_1 , luego desde G_1 trazamos una perpendicular a g_2 y obtenemos el trozo de geoide G_1G_2 , etc.

6.5. Método $h - H$.

Vimos en Fig. 5.5 que $N = h - H$ o bien $\zeta = h - H^N$ con la primera expresión podemos conocer la ondulación N como función de h y H . Esta última deberá ser afectada por la corrección por falta de paralelismo de las equipotenciales.

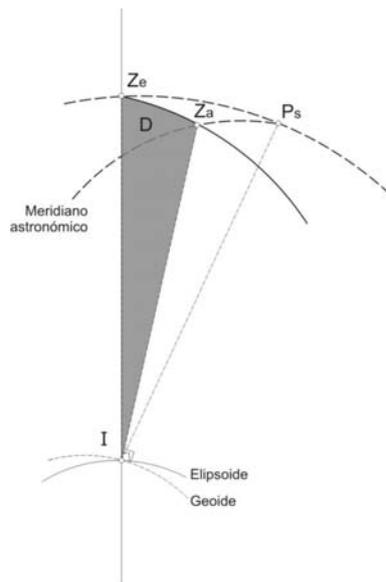


Figura 6.9. Desvío de la vertical en el espacio.

La segunda expresión nos da la anomalía de altura ζ en función de h y de H^N (Fig. 5.5). El paso de un sistema a otro puede hacerse con $N = \zeta + H^N \left(\overline{\Delta g_B} / \gamma \right)$.

En regiones bajas H y H^N difieren en milímetros o a lo sumo centímetros; en regiones montañosas la diferencia puede alcanzar el metro.

La principal característica de trabajar con H^N y con el cuasigeoide es que no se incorporan hipótesis sobre la distribución de gravedad en el interior de la Tierra.

Con $h - H$, Perdomo & Del Cogliano (1999) construyeron una carta de ondulaciones del geoide para la Provincia Buenos Aires (Fig. 6.5).

Las diferencias máximas entre el geoide y el cuasigeoide corresponden a las máximas altitudes de la Provincia Buenos Aires, que son de unos 300 m (Tandilia) y de unos 900 m? (Ventania), allí las anomalías de Bouguer son respectivamente de unos 30 mGal y -60 mGal. Con estos valores, las diferencias $|N - \zeta|$ son del orden de 9 mm (Tandilia) y 5,4 cm (Ventania). Ambos valores fueron obtenidos desde (5.4) con: $|N - \zeta| = H \left(\overline{\Delta g_B} / \gamma \right)$, ó bien $|N - \zeta| = H^N \left(\overline{\Delta g_B} / \gamma \right)$.

Antes de continuar, no está de más enfatizar que los métodos vistos en 6.4 y en este párrafo permiten obtener N sin necesidad de trabajar con anomalías de gravedad.

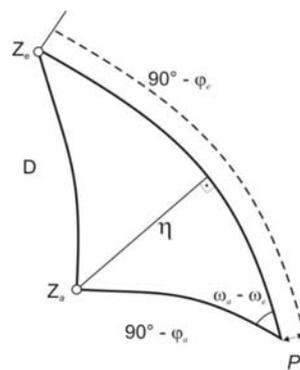


Figura 6.10. Descomposición del desvío D en ε'' y η'' (primera vertical).

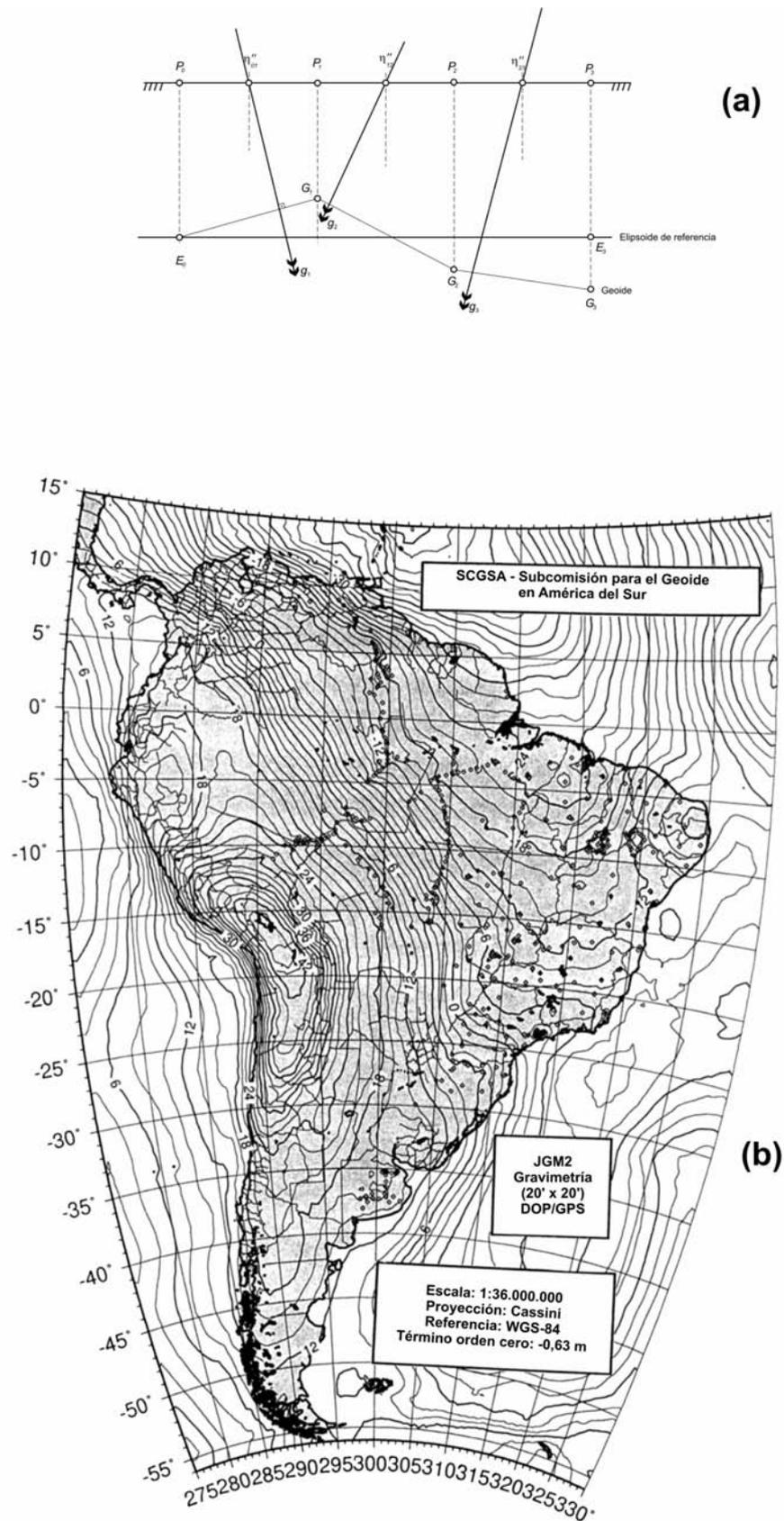


Figura 6.11. (a): Construcción expeditiva del geode a partir de los desvíos η'' (izquierda), e ídem con ε'' (derecha). (b): Geode para Sudamérica (Fuente: Blitzkow, 1999).

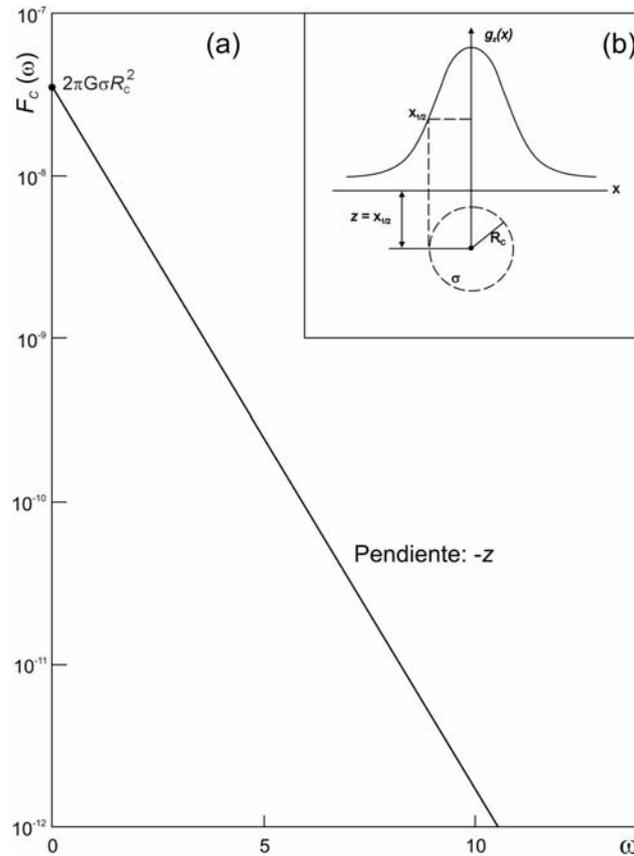


Figura 6.12. (a): obtención de la profundidad z y del tamaño R_c de un cilindro acostado a partir de $F(\omega)$. (b): detalle de la sección cilíndrica.

6.6. La construcción del geoide en longitudes de onda globales

A partir de los datos existentes pueden obtenerse soluciones globales (al metro), regionales (al decímetro) y locales (al centímetro).

Desde un principio los satélites artificiales orbitando a distancias cercanas, menores a 2000 km (con unos 1000 km como distancia típica) demostraron ser sensibles a la influencia de la gravedad. El abultamiento ecuatorial, como masa adicional, atrae con mayor fuerza al satélite cada vez que este pasa por el Ecuador. El satélite pierde altura, ante la mayor atracción, su órbita deja de ser kepleriana y se deforma. Otras reparticiones de masas tales como cadenas montañosas, fosas oceánicas etc. también influyen sobre las órbitas de los satélites. Además, los efectos luni-solares, el frenado atmosférico y la presión de la radiación solar, entre otros, deben ser considerados. Actualmente, para determinaciones con GPS, se utilizan satélites que orbitan a 20.000 km.

Comencemos considerando la ecuación del movimiento del satélite en un campo no perturbado. Ella obedece a la Segunda Ley de Newton:

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{Gm}{r^2} \tag{6.16}$$

con r : posición geocéntrica del vector al satélite (Fig. 6.12).

Resuelta (integrada) esta ecuación diferencial de segundo orden, sus parámetros keplerianos describen el movimiento de un satélite no perturbado. El tema en mecánica celeste corresponde a la teoría de los cuerpos.

La ecuación del movimiento de un campo perturbado agrega a (6.21) un término correspondiente a la perturbación:

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{Gm}{r^2} - \text{grad } R \tag{6.17}$$

con R : potencial perturbado. La ecuación (6.22) deriva de:

$$V = \frac{GM}{r} + R \quad (6.18)$$

R depende de los parámetros de las órbitas keplerianas variables con el tiempo y además de los coeficientes armónicos $J_{n,m}$, $K_{n,m}$.

Debido a que los efectos de los armónicos zonales (efectos acumulativos) sobre las órbitas de los satélites son mucho mayores que los armónicos teselares (perturbaciones oscilatorias con rápidos cambios de signo) suelen considerarse sólo los términos zonales. Entonces:

$$R = -\frac{GM}{a_e} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} J_n P_n(\cos \theta) \quad (6.19)$$

con a_e semieje mayor de la óptica elíptica. Así R es función de r y θ solamente. Los armónicos J_2 , J_3 , J_4 , ... se obtienen así desde las órbitas satelitales perturbadas.

En los primeros trabajos, las ondas largas que corresponden al geode global tuvieron un desarrollo armónico esférico entre $n = 2$ y $n = 36$. Las ondulaciones del geode para estas ondas largas se derivaron desde el análisis de las órbitas de los satélites artificiales. Este análisis omite las ondas de longitudes iguales o menores de $360/n = 10^\circ$ ó 1100 km. Su resolución se estima en 550 km. Luego los cálculos se extendieron hasta un grado y orden de alrededor de 70.

La posición del satélite en el espacio se determina con gran precisión con ayuda de mediciones de distancia entre el satélite y una red de mediciones en el suelo. Para ello se utiliza telemetría láser. Los satélites actuando pasivamente son equipados con retroreflectores láser (cubos, cuyos vértices de Sílice fundido reflejan la luz recibida). Así, la distancia al satélite s se obtiene con $\Delta t \cdot c / 2$. También se utilizan mediciones de velocidades trabajando con el efecto Doppler. Un transmisor a bordo del satélite (satélite activo) emite constantemente una frecuencia estable f_e , mientras la señal recibida en la estación terrestre tiene una frecuencia f_g . Hay una transmisión-recepción continua de ondas de radio moduladas. De su comparación se obtienen las distancias entre la estación y el satélite que se desplaza. Una vasta constelación de mas de 20 y 30 satélites ha permitido obtener los parámetros necesarios.

Veamos ahora las longitudes de onda emitidas (> 36). Las ondas medias cubren los grados desde $n = 37$ a 180 con longitudes de onda de 10° a 2° (ó desde 1100 km a 220 km). Luego las ondas cortas van desde $n = 180$ a 2000, con longitudes de onda de 2° a $10'$ (220 km a unos 20 km). Finalmente las ondas ultracortas van de $10'$ a $1''$ (20 km a 2 km).

En el mar para determinar el geode se usa un altímetro radar embarcado en el satélite que emite una onda radioeléctrica en dirección vertical a la superficie terrestre. La superficie oceánica refleja el pulso perpendicularmente y se mide el tiempo en ida y vuelta. La posición r de la órbita del satélite se conoce con ayuda de mediciones que utilizan estaciones terrestres.

Las técnicas satelitales hoy dominan los estudios globales y regionales, mientras las técnicas terrestres se usan como interpolaciones en el espacio y en el tiempo.

En el tiempo existen modelos que día a día van perfeccionándose. Por ejemplo algunos de ellos combinan bajos grados del campo de gravedad (datos satelitales); anomalías de aire libre en tierra y mar y altitudes geoidales medias obtenidas desde altimetría satelital.

El modelo geopotencial EGM96 (360, 360) alcanza precisiones de ± 1 m y $\pm 0,5$ m en tierra y mar respectivamente. Este modelo corresponde a una solución integrada: por un desarrollo de armónicos esféricos hasta el grado y orden 70; una solución de bloque diagonal para grados 71 a 359 y soluciones (quadratura numérica) para el grado 360.

APÉNDICE 6.1. Determinación de la profundidad y del tamaño de un cilindro horizontal indefinido trabajando en el dominio frecuencial.

Como sabemos, es usual realizar las interpretaciones de anomalías de gravedad en el dominio funcional. No obstante el análisis se enriquece considerablemente si razonamos alternativamente en ambos dominios: espacial y frecuencial.

Comencemos considerando la respuesta (anomalía de gravedad) de un cilindro indefinido acostado (Fig. 6.12). Tendremos:

$$g_z = C \frac{z}{z^2 + x^2} \quad (6.20)$$

con $C : 2\pi G\sigma R_c^2$, siendo G : constante universal, σ : densidad diferencial y z : mínima profundidad al eje del cilindro.

En el método tradicional la profundidad z se obtiene directamente del medio ancho ($z = x_{1/2}$, Fig. 6.14(a)) mientras al tamaño R_c , radio del cilindro, se deduce desde g_z máximo (en $x = 0$). En efecto desde (6.25) $\sqrt{[g_z(\text{máx}) \cdot z](2\pi G\sigma)^{-1}} = R_c$, aunque para conocer R_c debemos conocer (o asumir) la densidad σ .

Veamos ahora el análisis en el dominio frecuencial (véase parágrafo 2.17). Dado que el cilindro proporciona una respuesta par, la transformada de Fourier estará dada por una función en coseno:

$$F_c(\omega) = \frac{2Cz}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{z^2 + \zeta^2} \cos(\omega\zeta) d\zeta \quad (6.21)$$

con ω : frecuencia en ciclos por unidad de longitud.

Si resolvemos analíticamente (6.26) tendremos (Fig. 6.14(b)):

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} C e^{-z\omega} \quad (6.22)$$

Si representamos (6.22) en un gráfico semilogarítmico, pondremos en abcisas ω y en ordenadas:

$$\ln[F_c(\omega)] = \ln\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} C\right) - z\omega \quad (6.23)$$

Como vemos el gráfico proporciona la profundidad z desde la pendiente negativa de la recta.

$$-z = \left[\ln \frac{F_c(\omega)}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} C} \right] \cdot \omega^{-1} \quad (6.24)$$

En $\omega = 0$, tendremos:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} C = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (2\pi G R_c^2 \sigma) \quad (6.25)$$

Nuevamente, si conocemos la densidad σ , conocemos R_c .

El integrando de (6.26) expresa una convolución entre $h/(h^2 + \zeta^2)$ u operador de convolución y el término en coseno.

Si representamos a la señal gravimétrica cilíndrica $h/(h^2 + \zeta^2)$ y su espectro en número de onda tendremos los gráficos que se muestran en Fig. 6.13.

Como bien se observa cuanto mas estrecha es la señal, mas amplio es su espectro. Dicho de otra manera, las estructuras enterradas a mayor profundidad z atenúan sus frecuencias; e inversamente si ellos son superficiales sus frecuencias se destacan.

Es interesante destacar que a partir del espectro de potencia puede realizarse una interpretación para definir las masas causantes (Introcaso B. 1999). En efecto, elevando al cuadrado el módulo de la transformada de Fourier de la expresión cilíndrica (6.27) se obtiene el espectro de potencia: $P(\omega)$. Se grafica $P(\omega)$ en ordenadas logarítmicas versus frecuencias ω y resulta un gráfico del estilo de la Fig. 6.14 que ofrece una interpretación similar.

A partir de aquí se lo ha utilizado para separar efectos residuales de efectos regionales utilizando rectas medias. Cerca del origen (ω : pequeños) prevalecen los efectos regionales, mientras hacia la derecha (ω : grandes) dominan los efectos residuales. Finalmente al ruido se lo asocia a una horizontal (ver detalles en Introcaso B. 1999).

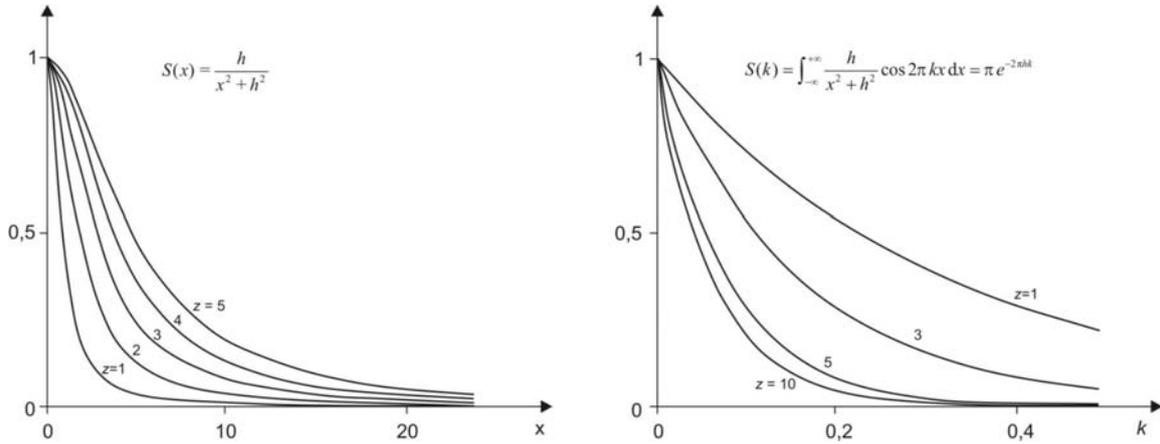


Figura 6.13. Señal gravimétrica $S(x)$ (izquierda) y su espectro (derecha) en número de onda $S(k)$.

Nota: El espectro asociado a la transformada de Fourier es una forma de caracterizar modelos de series de datos y extraer de él información. Otra forma de definirlo es considerándolo como la transformada de Fourier de la función de autocorrelación.

APÉNDICE 6.2. Interpretación de la ondulación del Moho, a partir de las anomalías de gravedad, utilizando el método de Fourier.

Tsuboi (1981) realizó una inversión calculando las distribuciones de las masas interiores responsables de las anomalías de gravedad en superficie. Para su interpretación utilizó el método de Fourier.

El partió del supuesto que las masas subterráneas pueden –en principio- condensarse sobre un plano horizontal (véase expresión 2.8) ubicado a una profundidad que debe asumirse en base a consideraciones matemáticas. Para un ejemplo de la isla de Honshu en Japón, el plano fue ubicado a una profundidad de 20 km. Si la densidad equivalente $\Delta\sigma(x, y)$ de las masas concentradas se convierte a densidad volumétrica podemos tomar (Fig. 6.14):

$$h(x) = \frac{\Delta\sigma(x, y)}{\sigma' - \sigma} \tag{6.26}$$

con σ' y σ densidad por debajo (manto superior) y por encima (corteza) del plano (discontinuidad de referencia).

Tsuboi asumió que la anomalía de gravedad observada, puede ser analizada en componentes individuales de Fourier, donde cada componente es interpretada en términos de una variación correspondiente de densidad sobre la placa de condensación. Luego sumando las componentes individuales, la distribución de densidad sobre la loza equivalente es sintetizada. Tsuboi despreció la curvatura terrestre.

Las anomalías de gravedad fueron proyectadas hacia el plano a profundidad h y con densidades superficiales variables, expresadas como una función armónica en s . Así:

$$\Delta\sigma(x, h) = \Delta\sigma_0 \cos kx \tag{6.27}$$

con $k = 2\pi / \lambda$ número de onda y λ : longitud de onda de la anomalía. Luego, la anomalía de gravedad sobre el plano será de acuerdo con (6.32) y con la conocida expresión de Bouguer:

$$\Delta g(x, h) = 2\pi G \Delta\sigma(x, h) = 2\pi G \Delta\sigma_0 \cos kx \tag{6.28}$$

Sabemos que la proyección ascendente de esta anomalía (que satisface a la ecuación de Laplace) es:

$$\Delta g(x, 0) = \Delta g(x, h) e^{-kx} = 2\pi G \Delta\sigma_0 \cos kx \cdot e^{-kx} \tag{6.29}$$

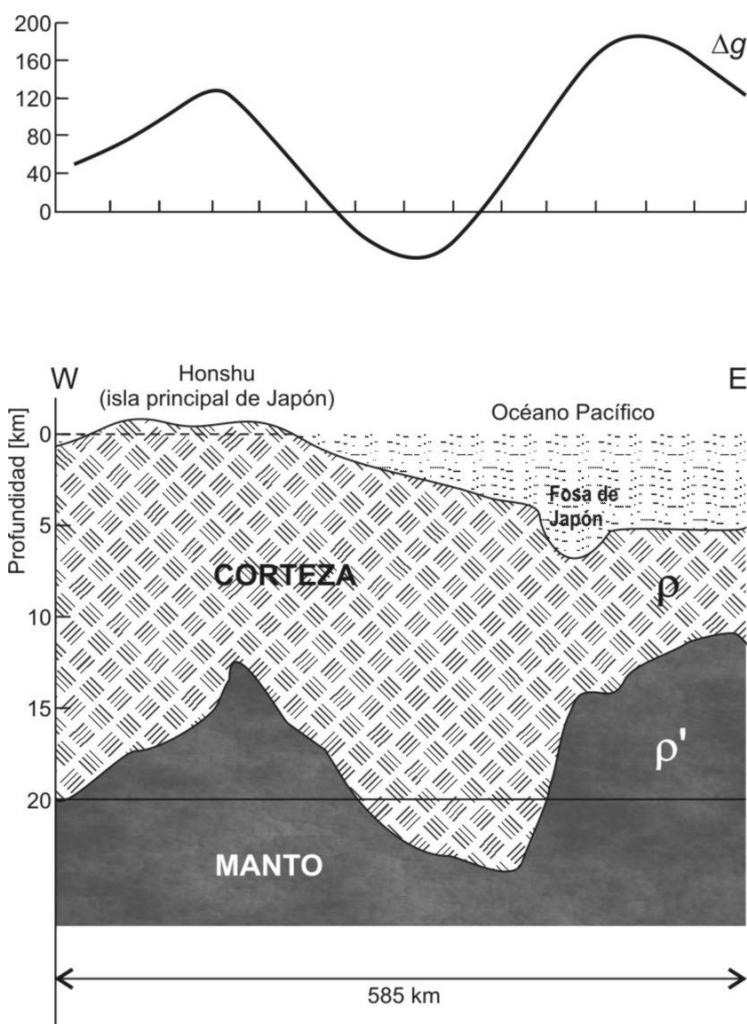


Figura 6.14. Interpretación dada por Tsuboi de la anomalía de gravedad Δg en Honshu - fosa de Japón. Se realizó una concentración de masas a 20 km de profundidad, empleando el análisis de Fourier.

Como bien sabemos la anomalía de gravedad en superficie expresada en series de Fourier es:

$$\Delta g(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{6.30}$$

con:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Delta g \, dx; \quad a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Delta g \cos kx \, dx; \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Delta g \sin kx \, dx \tag{6.31}$$

Ahora, la componente de Fourier puede ser proyectada desde la superficie hacia abajo, a profundidad h , multiplicándolos por e^{kh} . Así:

$$\Delta g(x, h) = e^{kh} \cdot \Delta g(x, 0) = e^{kh} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] = 2\pi G \Delta \sigma_0 \cos kx \tag{6.32}$$

Desde esta expresión $\Delta \sigma(x, h)$ puede ser sintetizada y transformada en ondulaciones $h(x)$.

Este caso corresponde a una sección bidimensional. Se ha empleado también para una distribución 3D utilizando una grilla de estaciones equiespaciadas. La FFT (Transformada rápida de Fourier), facilita los cálculos.

Finalmente, debemos notar que la solución de la ecuación de Laplace, proporciona para el potencial V, la siguiente expresión:

$$V(x, z) = \sum_m A_m \frac{\cos mx}{\sin mz} \cdot e^{mz} \quad (6.33)$$

7. NOCIONES SOBRE SEPARACIÓN DE DISTINTAS LONGITUDES DE ONDA GEOIDALES (FILTRADO E INTERPRETACIÓN GEOFÍSICA)

7.1. Introducción

Comencemos señalando que la separación distintas longitudes de onda del geode, con el objeto de tratar de vincularlas con las masas causantes, no escapa a la bien conocida falta de unicidad de la inversión de N y g .

Hoy se sabe que las grandes ondulaciones se corresponden con causas profundas (por ejemplo que pueden llegar a casi 3000 km de profundidad) comúnmente asignadas a corrientes convectivas. Muchas anomalías del geode están relacionadas parcialmente con la topografía de superficie, como en el caso de zonas de subducción. Las longitudes de onda son allí de 300 a 500 km. Por ejemplo en los Andes, formados principalmente por fuerte compresión, el efecto de las masas visibles (emergentes) prevalece sobre los efectos de las raíces compensadoras y el geode con longitudes de onda compatibles con el ancho andino, se eleva unos 25 a 30 m sobre una longitud de onda larga.

Volviendo a las longitudes de onda cortas (300–500 km) ellas no son bien detectadas por las perturbaciones de las órbitas de los satélites. Este es pues el límite de sensibilidad del método satelital, que no tiene definiciones por debajo de las longitudes de onda citadas.

Los detalles menores de la superficie de la Tierra en áreas marinas son relevados en escala de 10 a 100 km utilizando desde hace algunas décadas sondeo acústico, con el fin de obtener las profundidades oceánicas. No obstante, muchas zonas (por ejemplo el Hemisferio Sur) están aún inexploradas.

Es auspiciosa la utilización de altimetría espacial para obtener con alta resolución la superficie de geode. Un altímetro radar emplazado en el satélite emite una señal radioeléctrica. Ella se refleja en la superficie del mar y regresa al satélite proporcionando la altura del satélite desde el nivel del mar. Si además, a partir del estudio de las perturbaciones se conoce la órbita del satélite referida al elipsoide, se obtiene de inmediato la ondulación del geode (superficie del mar) respecto del elipsoide. Los efectos indeseables: corrientes oceánicas, mareas (del orden del metro) pueden ser minimizados, mientras que las mediciones promediadas eliminan las perturbaciones del oleaje. El altímetro realiza una medición cada 5 a 7 km a lo largo de su órbita. La competencia entre Estados Unidos y Europa, establecida desde 1996 logró significativos avances sobre el relieve de los fondos oceánicos. De este modo, a las bien conocidas estructuras, dorsales oceánicas, zonas de subducción, etc., se agregaron hoy alineamientos largos, de cientos de kilómetros, que se ubican perpendicularmente a la dorsal del Pacífico, innumerables montes submarinos y estructuras fósiles que señalan antiguas actividades tectónicas.

Actualmente, y con el fin de lograr una mayor resolución, se agregan a la altimetría espacial mediciones in situ.

Volviendo a nuestro tema, las anomalías observadas del geode (ondulaciones N) contienen efectos de distintas fuentes. Por ejemplo, de existir anomalías térmicas litosféricas, habrá dos efectos contrapuestos sobre el geode. Si la anomalía térmica es $+\Delta T$ (materiales anómalos calientes), el geode descenderá como consecuencia de la pérdida de densidad (del orden de centésimos de g/cm^3), pero por otra parte, el estado expansivo lo elevará. Como este último efecto supera con amplitud al debido al déficit de densidad, el resultado neto será un ascenso del geode. En síntesis, las regiones calientes con densidades relativamente bajas, levantan al centro de gravedad y al mismo tiempo al geode.

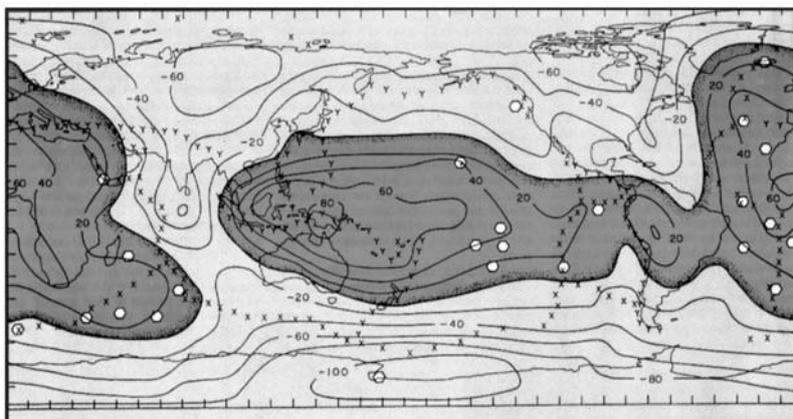


Figura 7.1. Ondulaciones del geode en escala mundial, referidas a un elipsoide hidrostático ($\alpha = 1/299,638$; $a = 6378,137$ m), es decir: corresponde a una Tierra fluída en rotación. Es muy clara la separación positiva (zona ecuatorial en oscuro, que encierra la mayor parte de los puntos calientes) de la región negativa en las zonas polares. Contornos cada 20 m. Fuente: Chase & Mc Nutt (1982).

Usualmente el geode sigue atenuadamente a la topografía, debido a que las masas excedentes visibles tienen en general una mayor influencia sobre otras fuentes, por ejemplo las masas de compensación. Así, las zonas de hundimiento del Moho (raíces corticales en zonas orogénicas por ejemplo) presentan ondulaciones ascendentes.

Kaula (1971), y Cazenave & Le Meur (1998) señalaron que las zonas de subducción se relacionan con fuertes anomalías positivas del geode. Esto, en principio, nos lleva a pensar en la influencia positiva que las placas oceánicas subductadas tienen sobre las ondulaciones N del geode.

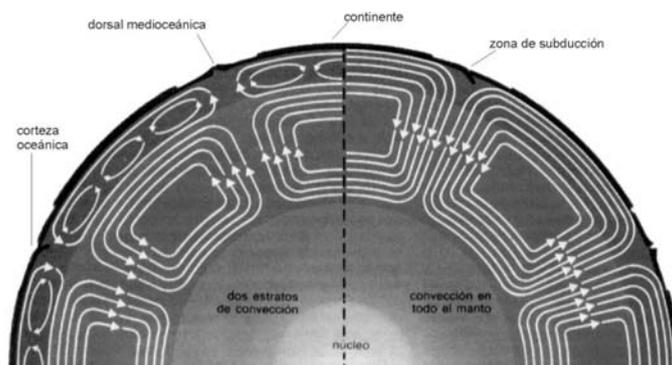


Figura 7.2. Convección como motor de la deriva continental. Derecha: convección total que afecta a todo el manto, y es sostenida por algunos investigadores. Izquierda: doble convección con convección secundaria extendida hasta los 700 km. Los datos de gravedad no son incompatibles con ella. Otros autores sostienen que la única convección es la de la zona superior.

Froideveaux & Isacks (1984) propusieron que la amplia anomalía del geode en toda América del Sur podría deberse a un patrón convectivo ubicado por debajo de la placa de Nazca. Sobrepuesta a esta gran anomalía, otra de menor longitud de onda está sin duda vinculada con la gran emergencia andina.

También ha sido informado que las ondulaciones del geode acompañan a la convergencia y divergencia de placas de gran escala (Seidler et al. 1983), aunque Drewes (1986) y Chase (1979) sostuvieron que en general el geode presenta sólo una muy débil correlación con las placas tectónicas.

Chase (1979) y Chase & Mc Nutt (1982) realizaron una separación de efectos a partir del geode global observado referido a un elipsoide hidrostático (con $\alpha = 1/299,638$). Se encontraron así zonas positivas o de máximos en la región ecuatorial, y zonas negativas o de mínimos en las zonas polares (-100 m sobre la Antártida y -60 m en el norte de Canadá).

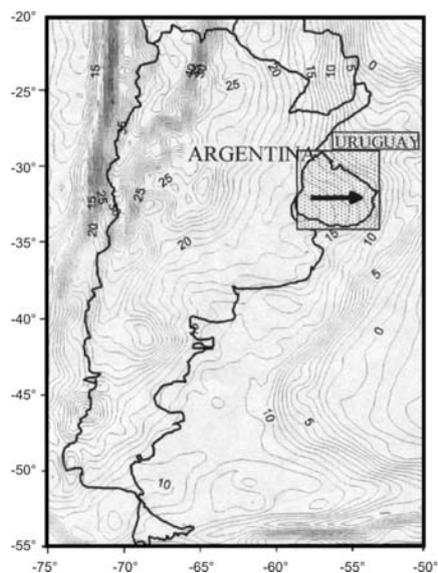


Figura 7.3. Geode para Argentina y en parte para países limítrofes (Fuente: Font et al. 1997). Sobre Uruguay, la flecha señala una tendencia que enmascara claros efectos positivos. Se impone pues un filtrado.

Casi todos los puntos calientes reconocidos (21 a 24) aparecen dentro de la zona positiva indicando una muy buena correlación (véase Fig. 7.1).

La protuberancia del geode con máximo al este del Atlántico coincide con la posición del supercontinente Pangea II que existía hace 200 Ma. Este supercontinente se habría comportado como un escudo térmico. El magma y los penachos habrían ascendido provocando la hinchazón del geode. El perímetro de Pangea coincide con el negativo observado. Allí, de acuerdo con Le Pichón et al. (1973) habría habido subducción.

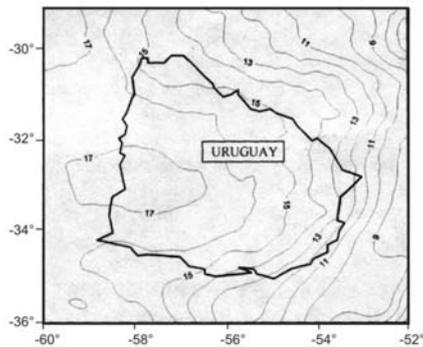


Figura 7.4. Geode sobre Uruguay calculado por Subiza et al. (2000) en base al modelo EGM96. Nótese la tendencia WE que merece una separación de anomalías.

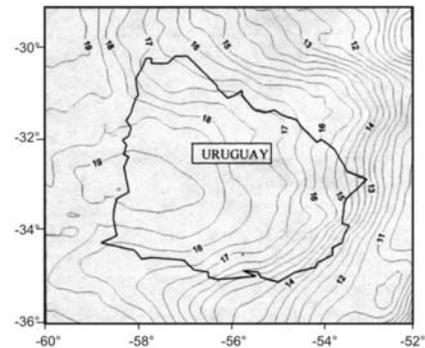


Figura 7.5. Geode detallado de Subiza et al. (2000) sobre Uruguay, que presenta diferentes amplitudes y es más rico que el de Fig. 7.4. Persiste la tendencia WE ya señalada en Figs. 7.3 y 7.4.

El modelo propuesto por los autores citados consta de cuatro corrientes convectivas ubicadas en el manto inferior, tal cual parece corroborarlo la tomografía sísmica. Él concuerda con el geode observado.

En términos generales, el geode está controlado por: a) la topografía, b) su masa compensadora, c) el límite litosfera-astenosfera y d) probables corrientes convectivas. El efecto conjunto de a) y b) proporciona el denominado geode topo-isostático o simplemente geode isostático.

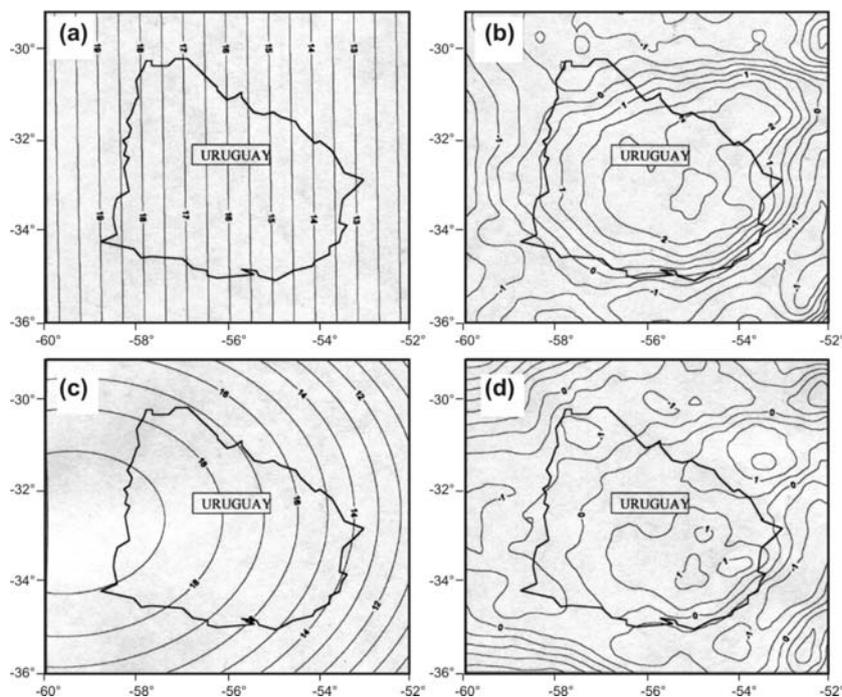


Figura 7.6. (a) filtro plano de tendencia NS. (c) filtro asimilado a una superficie de segundo grado. (b) y (d) ondulaciones residuales positivas sobre Uruguay obtenidas descontando de la carta de Fig. 7.4 las ondulaciones de larga longitud de onda (a) y (c).

Debido a que el efecto c) originado por la discontinuidad litosfera-astenosfera no es dominante, debemos ser cautelosos para interpretar placas tectónicas a partir del análisis del geode.

Mc Adoo (1981) informó que las cortas longitudes de onda (del orden de 200 a 300 km) son dominadas por efectos corticales, mientras longitudes de ondas intermedias (entre 600 y 4000 km) son controladas por los efectos de

losas subductadas (véase también Davies 1981 y Cazenave & Le Meur 1988). Estas anomalías, como también las mas amplias aún, estarían –como veremos luego– vinculadas también con convección profunda (Mc Kenzie et al. 1980). La propuesta de Drewes (1986) exhibe cuatro discontinuidades, la primera en el límite corteza-subcorteza, es decir en el Moho, la segunda a 100 km de profundidad en el límite litosfera-astenosfera, la tercera a 500 km de profundidad (transición de fase spinela-olivina) y la cuarta en la discontinuidad núcleo-manto, a 2900 km de profundidad.

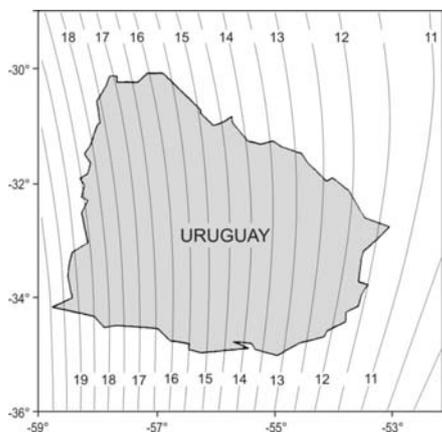


Figura 7.7. Filtro de larga longitud de onda (superficie de segundo grado) asumido en base al rumbo de las ondulaciones que en Fig. 7.3 exceden el norte y el sur de Uruguay.

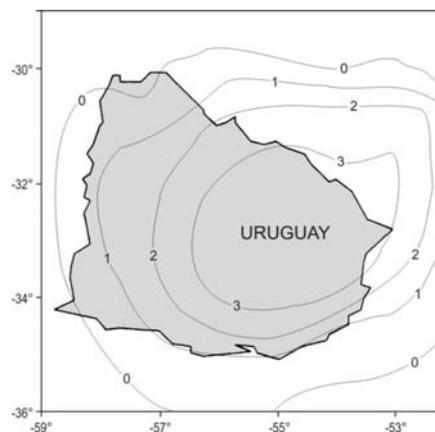


Figura 7.8. Ondulaciones geoidales locales para Uruguay obtenidas aplicando el filtro de Fig. 7.7 a la carta de Fig. 7.4.

De acuerdo con Balmino & Bernard (1986) la superficie de los océanos obtenida a partir de datos de satélite demostró que tanto los levantamientos como las depresiones del geode no se distribuyen al azar. Por el contrario, ellas se vinculan con grandes estructuras, como ocurre, por ejemplo, en el Océano Pacífico, donde las grandes ondulaciones del geode (con longitudes de onda de mas de 4000 km) fueron filtradas. Allí se encontraron:

- Levantamientos del geode de unos metros por encima de la cadena de volcanes submarinos de Hawaii, de las islas australes y Sociedad.
- Depresiones de unos -20 m con longitudes de onda de unos 200 a 300 km sobre las fosas de Tonga Kermadec y de Nuevas Hébridas.

De las dorsales oceánicas, sólo las lentas –por ejemplo la Atlántica, la Índica oeste– producen elevaciones del geode de unos metros. Respecto de las dorsales rápidas (por ejemplo, el Océano Pacífico), los cambios del geode son poco visibles.

Tanto las fallas de transformación como sus huellas fósiles y las fracturas, producen elevaciones escalonadas del geode de 3 a 4 m en distancias de unos 100 km. Observaciones análogas se han realizado en las zonas de transición entre corteza oceánica a continental en las cercanías de los continentes.

Sobre los mares, como ya fuera señalado, las ondulaciones del geode se detectaron utilizando radar satelital. De esta forma se logró además tener mejor conocimiento de la litosfera oceánica, y al mismo tiempo obtener los detalles ya mencionados.

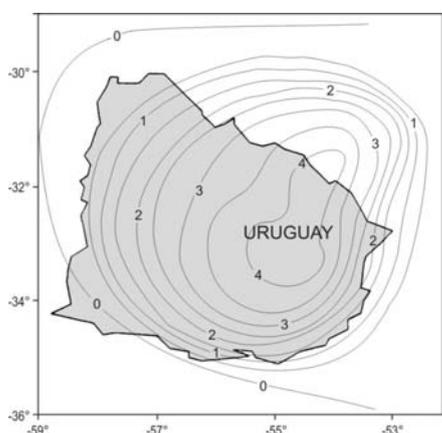


Figura 7.9. Ondulaciones geoidales locales para Uruguay obtenidas aplicando a la carta de Fig. 7.5 el filtro de Fig. 7.7. Fuente: Introcaso & Martinez (2002).

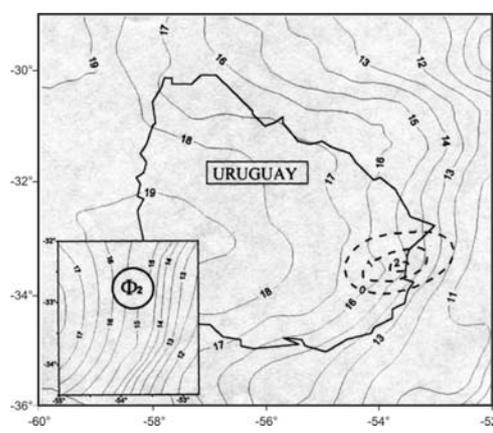


Figura 7.10. Aplicando a la carta general de ondulaciones del geode de Uruguay el filtro ϕ_2 , obtuvimos una ondulación positiva local (línea punteada). Fuente: Introcaso & Martinez (2002).

Separando las diferentes longitudes de onda en los mapas mundiales del geode oceánico se tienen:

1. Grandes longitudes de onda (de 4000 km y mayores) vinculadas con convección térmica en el manto inferior.
2. Longitudes de onda intermedias (1500 a 2000 km) vinculadas con convección secundaria en manto superior.

La Fig. 7.2 muestra las diferentes propuestas. Debemos señalar una vez más que longitudes de onda intermedias, han sido también vinculadas con los efectos de las placas oceánicas subductadas.

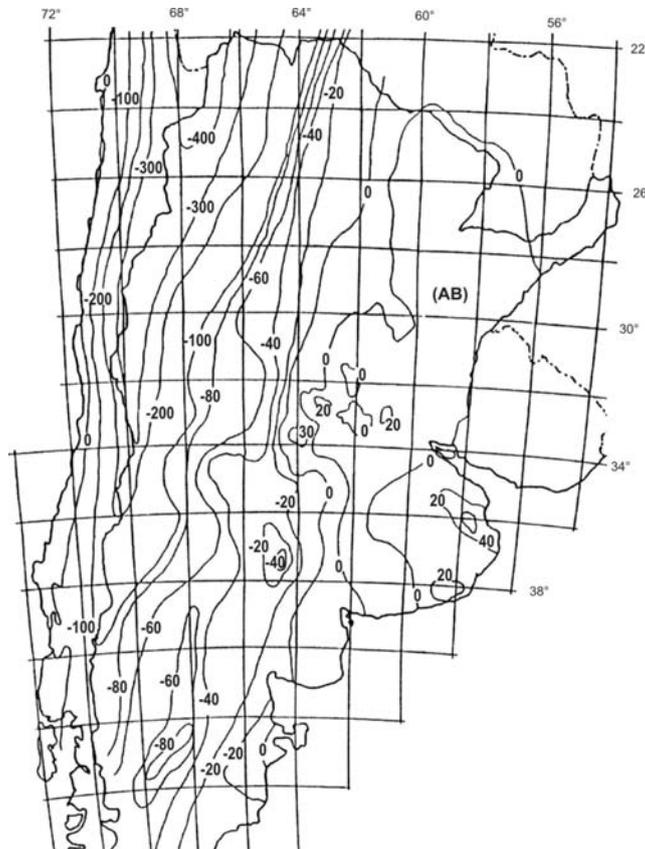


Figura 7.11. Carta de isoanómalas de Bouguer (AB) de Argentina y Chile construídas de 100 en 100 mGal en el sector andino (Fuente: IFIR 1988).

Es casi imposible escoger alguna de estas tres propuestas. Existen sí algunos resultados indirectos. Por ejemplo se ha argüido que la corteza superior liviana se encuentra emprobrecida respecto de ciertos elementos, y ello es posible sólo si esta región ha sido agitada por vigorosa convección.

Otra evidencia indirecta la aporta la tomografía sísmica. Con ella han logrado detectarse zonas de anomalías térmicas. En efecto, las ondas sísmicas que provienen de diferentes focos se lentifican al interceptar una zona 3D con incremento de temperatura.

Mc Kenzie y colaboradores (1980) han realizado tanto modelizaciones por computadoras como experimentos de laboratorio. Ellos observaron que:

- a. Las regiones de corriente de convección ascendente tienen anomalías positivas del geode debido a que, como fuera ya señalado, el efecto expansivo (hinchazón) es más significativo que la pérdida de densidad del material caliente.
- b. Por el contrario las corrientes convectivas descendentes presentan anomalías negativas del geode.
- c. En la región de Hawaii se ha observado una clarísima correlación entre las ondulaciones del geode de 1500 – 2000 km de longitud de onda y topografía submarina (protuberancias y depresiones) que parecen probar la convección secundaria. Esta convección secundaria de dimensiones bastante menores (inferiores a 4000 km) a las dimensiones de las placas coexistiría con la convección principal que movería las placas.

De acuerdo con resultados recientes, la tomografía sísmica confirmaría el origen profundo de la convección (en la discontinuidad núcleo-manto). Al comparar el geode con los mapas tomográficos, se advierte una correlación entre las depresiones y elevaciones con las regiones frías y calientes del manto inferior.

Otra cuestión importante es que las observaciones continuas y precisas permiten obtener las variaciones de la superficie del geode con el tiempo.

Con el sistema Doris (Tapley et al. 1996, Cazeneve-Le Meur 1998) se dispuso de una red de estaciones que cubría la casi totalidad de las placas tectónicas. La red Doris (determinación precisa de órbitas y radioposicionamiento) fue desarrollada en Francia a principios de la década de 1990. Los resultados de velocidades de placas obtenidos a partir del proyecto Doris son consistentes con los deducidos a partir de observaciones geológicas.

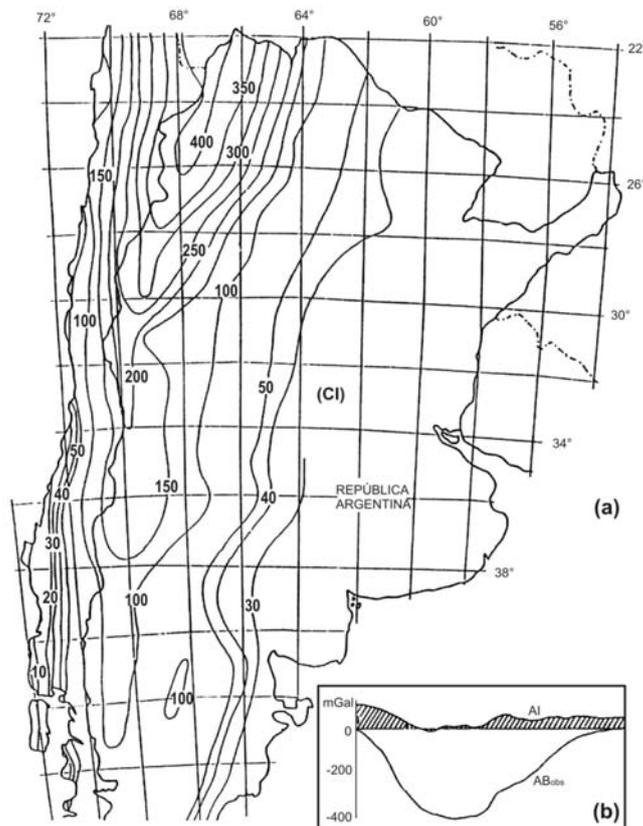


Figura 7.12. (a) carta para realizar correcciones isostáticas en el sector de la cordillera andina argentino-chilena (CI). (b) anomalías isostáticas (AI) en un sector EW ubicado en 30°S, obtenidas aplicando a las anomalías de Bouguer observadas (AB_{obs}) las correcciones isostáticas CI extraídas de la carta (a). Fuente: Introcaso (1991).

Los cambios con el tiempo del campo gravitatorio, se traducen en cambios del geoide. En particular se han detectado cambios en el aplastamiento α . Así, en los últimos diez años se ha advertido una disminución de α de 10^{-11} por año en valor relativo. Esta disminución se ha vinculado con la fusión del casquete polar que hace 20.000 años (última glaciación) cubría el hemisferio norte. Hace unos 8.000 años cambió la distribución de masas de la superficie de la Tierra y ello originó una descompresión viscosa del manto terrestre. El fenómeno se acompaña por un ascenso de los escudos Escandinavo y Canadiense, que continúa actualmente.

La disminución secular de α revelada a partir de la moderna geodesia satelital, permite estimar la viscosidad del manto, de primera significación para comprender la dinámica de nuestro planeta. Es sabido que tanto la dinámica terrestre como las heterogeneidades de masas determinan –como ya viéramos– las ondulaciones del geoide. Con el fin de aportar conocimientos sobre ambas, dinámica y masas, Drewes (1986) propuso realizar la inversión simultánea de N y Δg . Además, Geuthon & Sourian (1987) reafirmando la importancia de la inversión simultánea, sostuvieron que la inversión, utilizando sólo los datos de gravedad, es muy débil. De modo que es necesario incorporar información adicional, lo cual mínimamente valida los cálculos del modelo.

7.2. Separación de anomalías

Volviendo ahora al tema de separación de distintas longitudes de onda geoidales, comencemos considerando la siguiente expresión:

$$N_{total} = N_{global} + N_{corta} + N_{ultracorta} \quad (7.1)$$

Ya aludimos a la integración de diferentes longitudes de onda en la ondulación total. Debemos advertir que no hay una única forma de enfocar el problema. En (7.1), a la ondulación global N_{total} le corresponden las longitudes de onda intermedias y largas vinculadas con efectos profundos y muy profundos (por ejemplo manto inferior); a la ondulación N_{corta} se la vincula con efectos corticales; y finalmente a la ondulación $N_{ultracorta}$ se la relaciona con efectos topográficos, o bien con anomalías subsuperficiales menores.

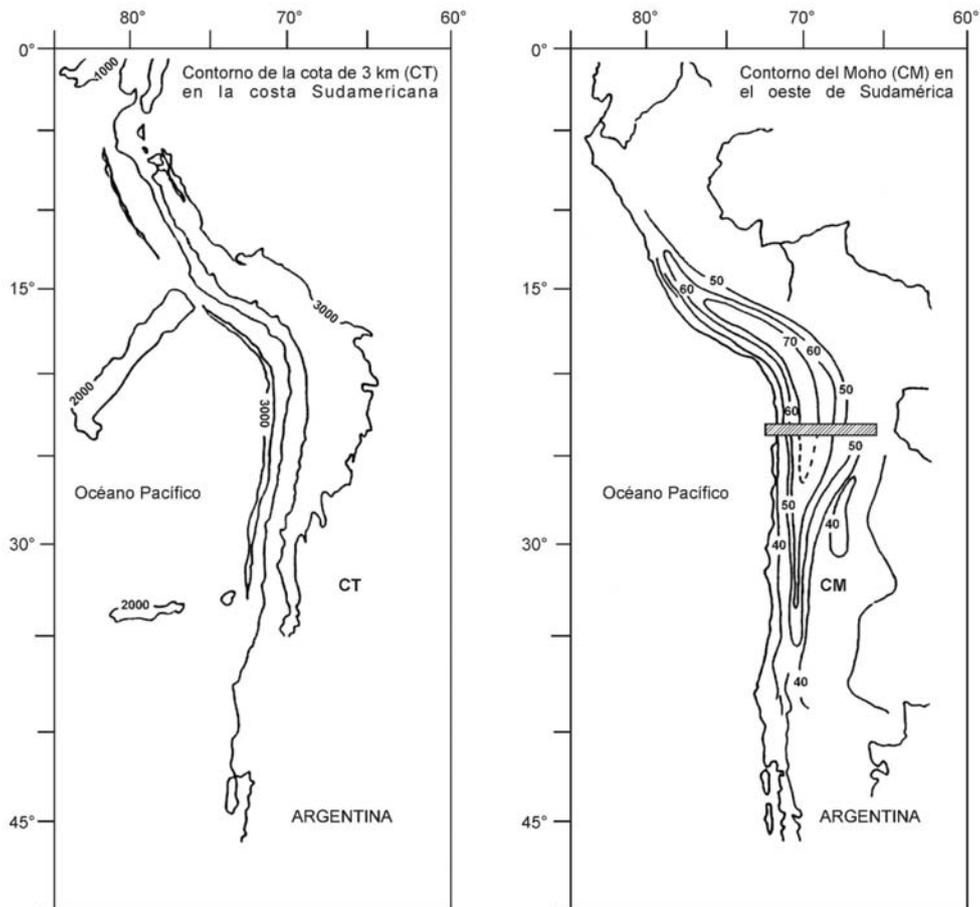


Figura 7.13. Derecha: contornos del Moho (CM) obtenidos con datos gravimétricos por debajo de 20°S de latitud. Por encima: contornos del Moho obtenidos por James (1971) a partir de datos sísmicos. Izquierda: contorno de la curva de 3000 m de la cordillera andina (CT). Nótese la correlación entre CM y CT.

De disponer de tres de los cuatro términos de (7.1), ya sea por cálculos o por inferencias, se deduce el término restante.

Supongamos trabajar en una zona llana en donde podemos despreciar las longitudes de onda ultracortas. Si además conocemos las ondulaciones global y total y queremos determinar la ondulación cortical, se tendrá:

$$N_{cortical} = N_{total} - N_{global} \quad (7.2)$$

Este sería también el caso de la cordillera andina que veremos mas adelante, en donde, si excluimos las ondulaciones topográficas, la ondulación total presenta la morfología de un sombrero, correspondiendo a las alas la ondulación global, y a la copa la ondulación cortical con la emergencia andina.

Numerosos autores han intentado separar los efectos de largas longitudes de onda truncando el desarrollo en serie de los primeros términos, por ejemplo 4, 9, 10. Esta manera de proceder consigue, en efecto, obtener sólo las largas longitudes de onda atribuibles a efectos corticales profundos.

Con el objeto de suavizar los cambios bruscos producidos por el truncamiento, Doin et al. (1996) propusieron filtrar el geoide satelital en la siguiente forma:

- Los grados 2 y 3 son directamente removidos. Los grados 4, 5, 6 y 7 son multiplicados por 0,17; 0,33; 0,66 y 0,83 respectivamente. Los grados 8 a 30 son retenidos.
- Los grados 2 a 7 son removidos. Los grados 8, 9, 10, 11 son multiplicados por 0,17; 0,33; 0,66 y 0,83 respectivamente. Los grados 12 a 30 son retenidos.

También Mc Kenzie et al. (1980) consideraron la remoción de los grados 2 a 10 (longitudes de onda larga), mientras Sandwell & Renkin (1988) extendieron el grado de 2 a 25 ó 2 a 50. Otros autores trabajaron con ventanas intermedias para destacar ciertas longitudes de onda. Por ejemplo Wang (1998) en Escandinavia, tabajó con una ventana $10 < l < 100$.

Todos estos intentos de remover, separar y enfatizar algunas longitudes de onda, en general no logran más que determinar tendencias y bosquejar interpretaciones. Estos métodos de separación y en general cualquier otro método, no pueden eludir las ambigüedades que le son propias al campo potencial. Al final de este capítulo volveremos sobre el tema.

Digamos que cualquiera de los métodos de separación de anomalías utilizados en gravimetría tradicional pueden ser empleados para separar longitudes de onda geoidales. Todos tendrán, en general, las mismas ventajas y limitaciones que son bien conocidas para cada uno de ellos.

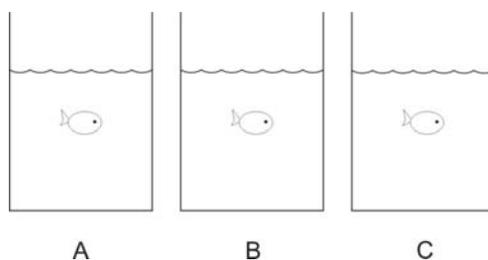


Figura 7.14. Superficie de nivel preparada con tres recipientes del mismo volúmen, de la misma forma, llenos con la misma cantidad de agua.

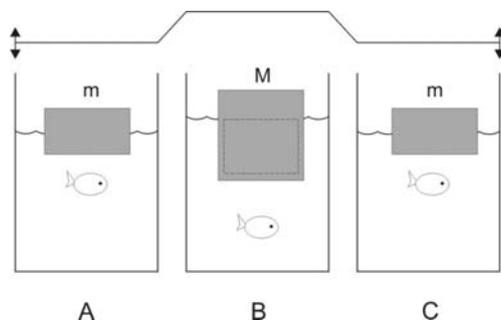


Figura 7.15. Si colocamos un cubo de madera M en B de espesor duplicado respecto de m (en A y C), la superficie de nivel se eleva. El líquido desalojado en B (línea cortada dentro de M) eleva el pelo de agua respecto del nivel alcanzado por el agua en A y C. Sobre los recipientes vemos el cambio de la superficie de nivel.

7.3. Algunos ejemplos sobre la separación de anomalías geoidales

Veremos ejemplos correspondientes a Uruguay, a la cordillera andina y a cuencas sedimentarias.

7.3.1. Uruguay

En la Fig. 7.3 tenemos la carta del geoide para la República Argentina y en parte para países limítrofes (Font et al. 1999). A partir de una simple observación de esta carta se notan claramente longitudes de onda locales bien correlacionadas con estructuras geológicas. Por citar sólo un par de ejemplos notemos en el oeste de Argentina un geoide local vinculado con el relieve de la cordillera y sobre Uruguay, una clara tendencia WE. Como la tendencia general por encima y por debajo del cuadro dibujado es aproximadamente NS, es necesario eliminarla. Con el fin de trabajar con mejores cartas de Uruguay, disponemos ahora de las de Figs. 7.4 y 7.5 preparadas por Subiza et al. (2000). La carta de Fig. 7.4 corresponde al modelo EGM96 para Uruguay y la carta de Fig. 7.5, al geoide detallado. Nótese que

este último, pese a mantener la morfología del geode de Fig. 7.4 tiene significativas diferencias de amplitudes. Por ejemplo en Fig. 7.5 el máximo es de 19 m, contra 17 m en Fig. 7.4. Además, como su nombre lo indica, el geode de Fig. 7.5 es más detallado que el de Fig. 7.4. En todas las figuras citadas se observa la tendencia WE que sin duda enmascara efectos sobre el potencial en la escala de Uruguay como un todo. Por ello es necesario aplicar filtros. La Fig. 7.6 contiene en (a) y (c) dos filtros: uno plano y otro correspondiente a una superficie de tendencia de segundo grado. En (b) y (d) aparece la carta de Uruguay (Fig. 7.6) una vez eliminadas las largas longitudes de onda asumidas para (a) y (c).

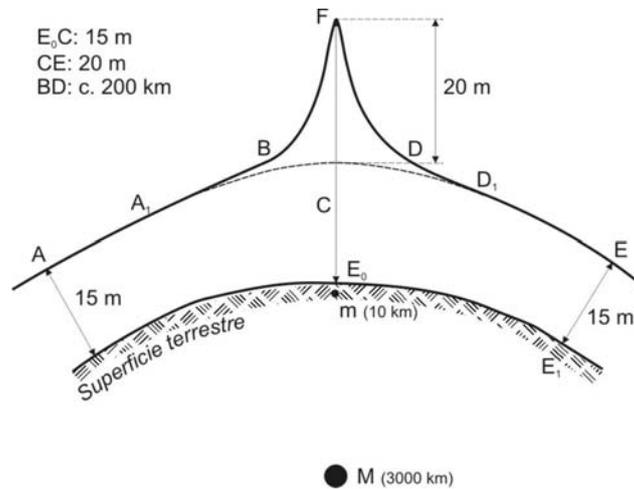


Figura 7.16. Dos masas, una profunda M con $GM = 6 \times 10^{11}$ u.c.g.s. a profundidad de 3000 km y otra somera m con $GM_2 = 2 \times 10^9$ u.c.g.s. a profundidad 10 km originan juntas una ondulación del geode AA₁BFDD₁ con máxima amplitud 35 m.

Finalmente hemos asumido un filtro como el de Fig. 7.7 inspirado en el rumbo de las ondulaciones del geode de largas longitudes de onda que exceden a Uruguay por sobre el norte y por debajo del sur.

Con él hemos eliminado, de las cartas de Figs. 7.4 y 7.5, las longitudes de onda que exceden el tamaño de Uruguay. Las Figs. 7.8 y 7.9 muestran las ondulaciones en exceso correspondientes sólo a Uruguay.

La Fig. 7.10 muestra (abajo a la izquierda) otro filtro ϕ_2 utilizado para desenmascarar la tendencia WE encontrada en el este de Uruguay (Fig. 7.5, reproducida en Fig. 7.10), la ondulación a escala estructural local. Aplicando a la carta general de Uruguay el filtro ϕ_2 , obtuvimos la ondulación positiva en forma de domo con máxima amplitud 2 m expresada con líneas cortadas. Esta máximo se corresponde con el significativo máximo gravimétrico de laguna Merin.

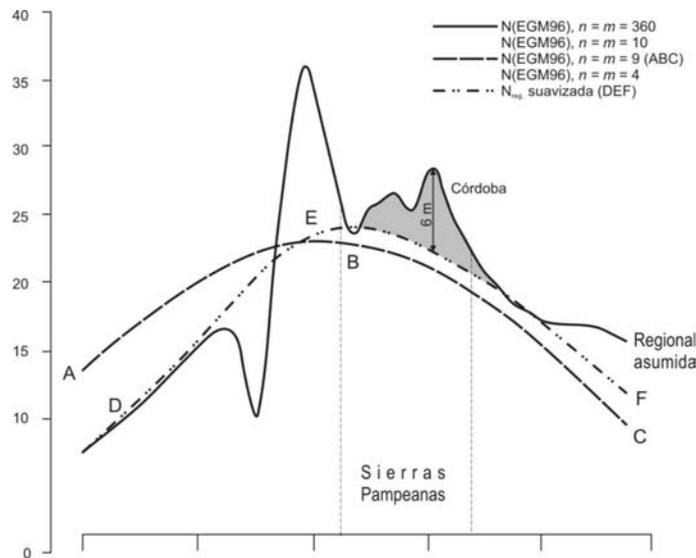


Figura 7.17. Ondulación del geode observado N_0 con EGM96. Una regional obtenida truncando el desarrollo en serie en $n = 9$ es morfológicamente consistente con la regional asumida sólo al este de los Andes. Modificado de Pacino, tesis doctoral, p. 76, fig. 75.

7.3.2. Ondulaciones del geode en la interpretación tectónica cortical. Cordillera andina y cuencas sedimentarias.

Visto en el Capítulo 5 la separación de ondulaciones del geode, nos ocuparemos ahora de las cortas longitudes de onda: 300-500 km, que como viéramos exigen eliminar las longitudes de onda intermedias y largas. Estas longitudes de onda son compatibles con anchos orogénicos (por ej. de los Andes o de grandes cuencas sedimentarias) mientras las amplitudes de las ondulaciones que aparecen frecuentemente vinculadas con las estructuras geológicas a investigar nos permiten invertir en busca de las características corticales buscadas.

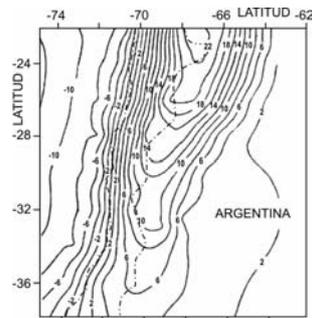


Figura 7.18. Mapa de ondulaciones (en metros) del geode isostático de Argentina obtenido para este trabajo a partir de la expresión (4.68).

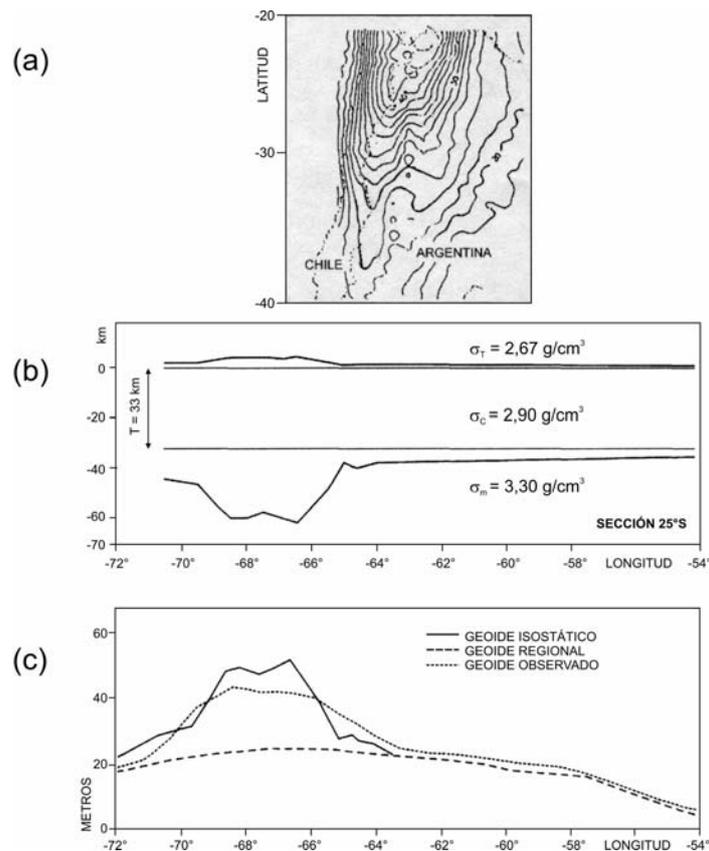


Figura 7.19. (a) izquierda: geode regional de Argentina; (a) derecha: geode isostático. (b) modelo de engrosamiento cortical andino en 24,5°S. (c) geode andino en 24,5°S, observado, regional e isostático. Fuente: Pacino & Introcaso (1997).

La incidencia del engrosamiento cortical andino en las ondulaciones del geode.- La cadena andina, de 8000 km de longitud, constituye una de las más significativas estructuras montañosas en escala global. Los máximos anchos exceden los 400 km y los picos más altos alcanzan los 7000 m. Su génesis y evolución resultan bien explicadas en el marco de la tectónica global (Kono 1989).

Mientras los Alpes y los Himalayas se formaron por colisión continente-continente, los Andes se originaron principalmente como consecuencia del proceso de subducción mesozoica (Isacks 1988, Giese & Reuter 1987, entre otros).

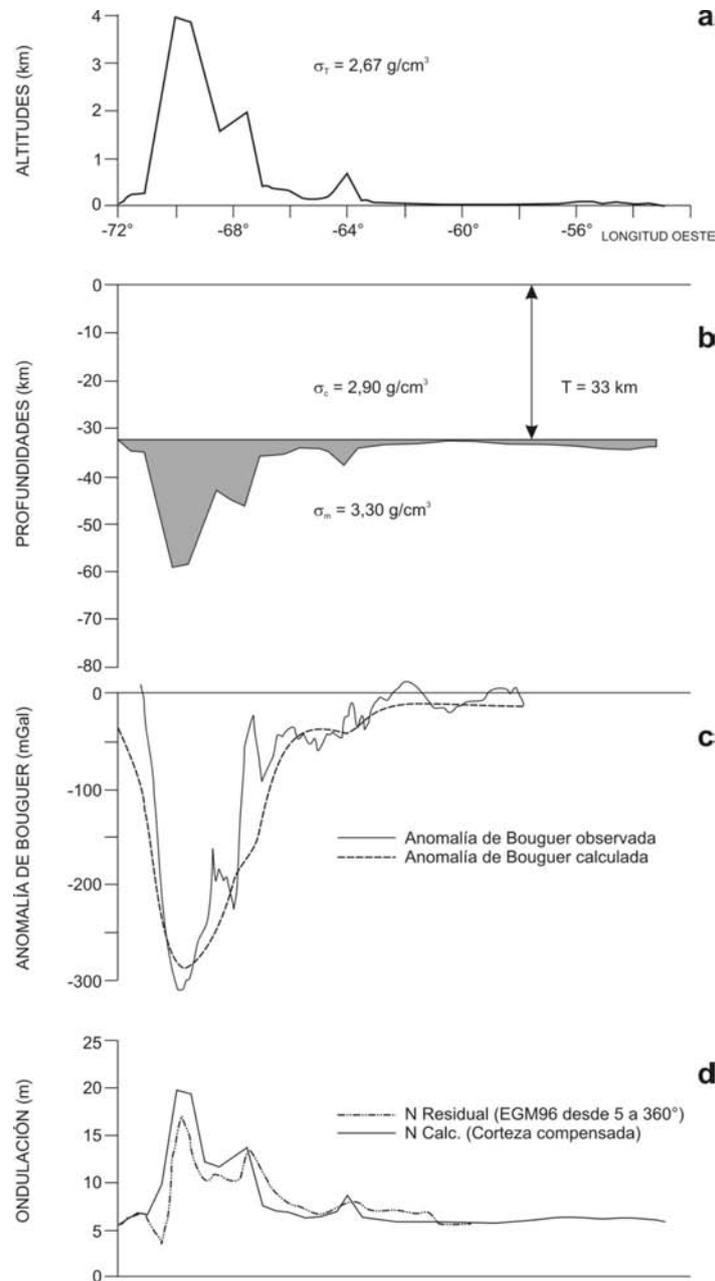


Figura 7.20. Modelos corticales andinos en 30°S. (a) y (b) altimetría y Moho. (c) anomalías de Bouguer observada y calculada. (d) N proveniente de EGM96 y N calculado. Fuente: Introcaso & Pacino (1999).

Entre 180 Ma y 135 Ma Sudamérica estuvo continentalmente bajo tracción con una muy baja tasa de convergencia e intensa actividad volcánica. La formación del océano Atlántico Sur, hace unos 125 Ma, constituyó el gatillo disparador de la subducción en el oeste de Sudamérica (Ramos 1989). Procesos intermitentes en tiempos cenozoicos (Frutos 1981) originaron estructuras muy diferentes (Wortel 1984). Durante el Mioceno, tuvo lugar el último período de intenso vulcanismo; por ejemplo en el norte de Argentina, en la bien conocida cadena de volcanes de la Cordillera del Oeste. Ellos también están presente por debajo de 35° de latitud Sur.

En los Andes de Argentina-Chile existen zonas tectónicamente caracterizadas por el tipo de subducción de la placa de Nazca:

- subducción “normal” entre 22°S y 27°S, y entre 33°S y 45°S, y

- subducción aplastada (casi horizontal, tipo “flat slab”) entre latitudes 27°S y 33°S.

Se incluye también la cordillera patagónica, por debajo de la cual la placa antártica subduce.

A partir de estudios gravimétricos realizados con los datos de 14 secciones EW que atraviesan a la cordillera andina (Introcaso et al. 2000) se obtuvieron las siguientes cartas:

- de isoanómalas de Bouguer (Fig. 7.11)
- de correcciones isostáticas en el sistema de Airy (Fig. 7.12)
- de ondulaciones del Moho (Fig. 7.13 derecha) en muy buena correlación con el contorno de 3000 m de altitud (Fig. 7.13 izquierda).

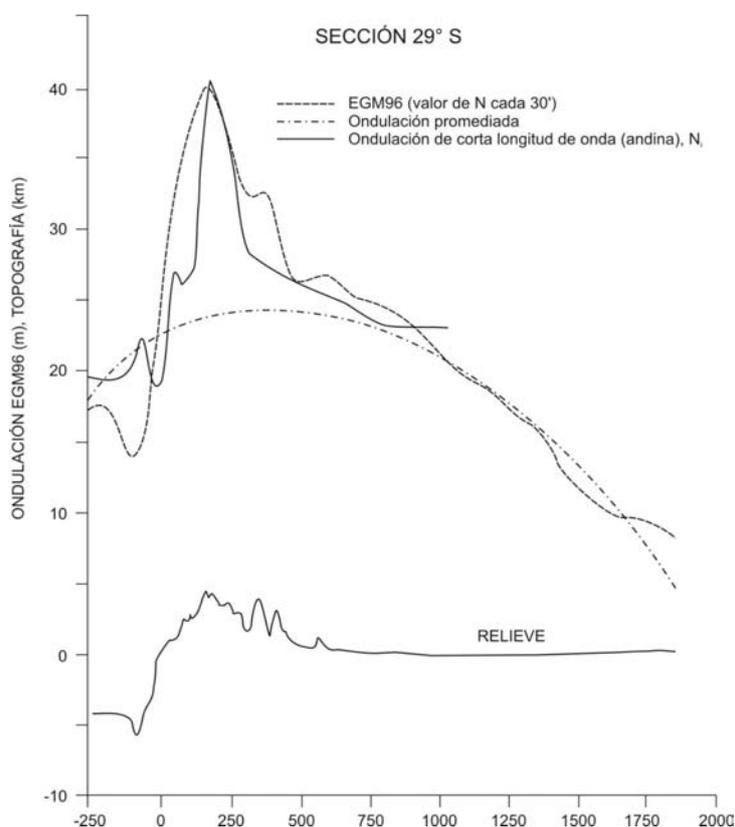


Figura 7.21. Ondulaciones y relieve de una sección 29°S de los Andes.

Las cartas señalan que las significativas altitudes positivas de la larga cadena andina (al menos excluyendo la porción austral) están compensadas en general con notables raíces corticales negativas. Así, las isoanómalas de Bouguer, fuertemente negativas, los contornos de Moho obtenidos por su inversión y la carta de correcciones isostáticas cambiadas de signo presentan una morfología similar denunciando el engrosamiento cortical de masas positivas (excedentes topográficos) balanceadas por masas negativas (en sentido relativo) correspondientes a las raíces compensadoras, que en muchas secciones duplican el espesor de corteza.

Dijimos que cualquier alteración en la repartición de masas del planeta origina tanto anomalías de gravedad como ondulaciones del geode. Unas se deducen de otras, de modo que al ser interpretadas ambas deberían proporcionar los mismos resultados o bien originar el mismo modelo. Para comprender cómo ondula el geode, elevándose en la zona andina, consideremos tres recipientes de vidrio, de la misma forma y volumen, llenos cada uno con el mismo volumen de agua (Fig. 7.14). Es obvio que la superficie de agua alcanza el mismo nivel en los recipientes A, B y C.

Coloquemos ahora en los recipientes A y C dos paralelepípedos de madera del mismo ancho a y del mismo espesor e que representan a la corteza “normal” (Fig. 7.15). En el centro ubicamos otro paralelepípedo de madera con el mismo ancho a , aunque con espesor duplicado. Debido a que la masa desalojada en B es mayor que en A y C, de acuerdo con el principio de Arquímedes, la superficie de agua se elevará.

En el caso de nuestro planeta, se ha reconocido que el geode se levanta ante el fuerte relieve montañoso, siguiendo atenuadamente a la topografía. Ya vimos que la fórmula plana dipolar (4.68) proporciona para el sistema de Airy una ondulación positiva N que depende fuertemente de la altitud h del terreno y del espesor cortical, o –con más precisión– de la distancia bipolar d (Fig. 2.9).

Es conveniente no perder de vista que si bien este experimento señala que un incremento de masas eleva la superficie de nivel, en el caso real el geoide se eleva por la mayor incidencia del relieve visible sobre la raíz andina. En Fig. 7.15, es el líquido desalojado por la raíz el que eleva el pelo de agua. Debemos entonces ser cuidadosos en la comprensión del modelo. La Fig. 7.16 es un modelo más representativo. El dipolo andino, relieve (+) y raíz (-), está simplemente representado por la masa $m \cong 3 \times 10^{15}$ u.c.g.s. ubicada a 10 km de profundidad. Esta masa produce una elevación de 20 m de amplitud (BFD). Se ubicó además una masa $M \cong 9 \times 10^{10}$ u.c.g.s. a 3000 km de profundidad que produce una máxima amplitud de 15 m en E_0 .

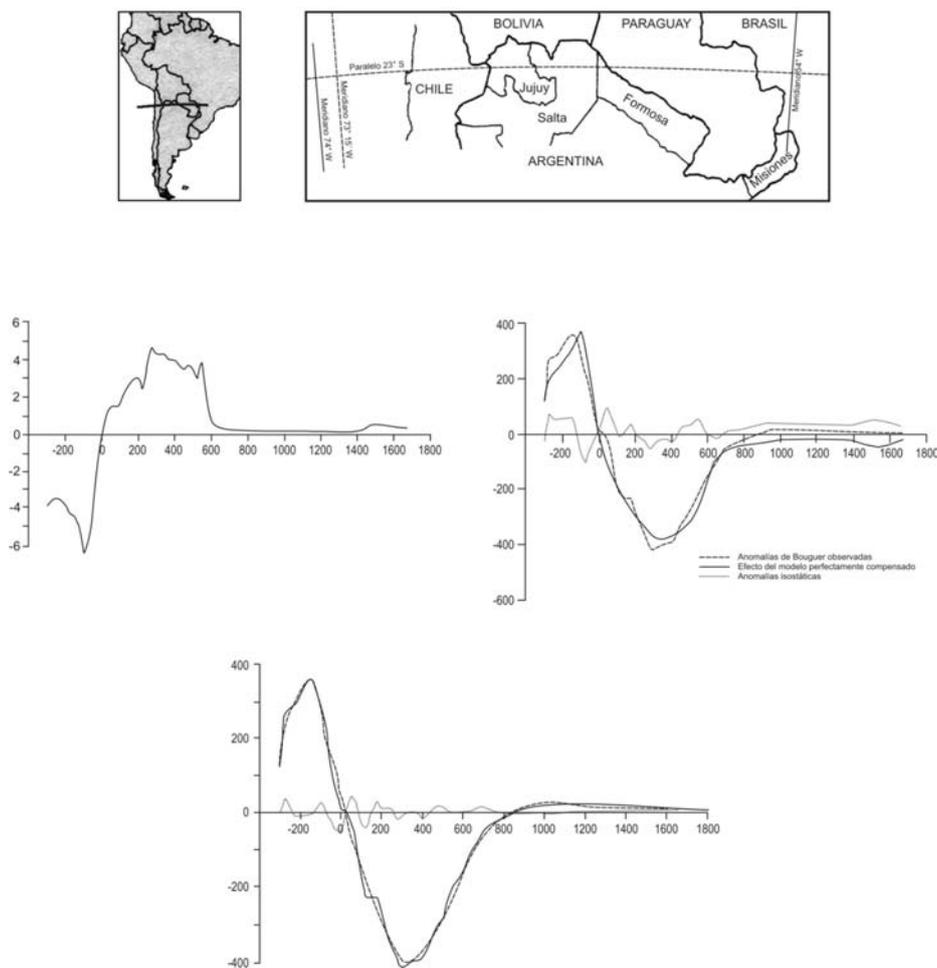


Figura 7.22. Arriba: ubicación geográfica de la sección EW en 23°S. Medio izquierda: batimetría oceánica y relieve topográfico; derecha: anomalías de Bouguer (observadas y provenientes del modelo perfectamente compensado) y anomalías isostáticas. Abajo: anomalías de Bouguer observadas, efectos del modelo de inversión y anomalías residuales. Fuente: Introcaso et al. (2000).

Si quisiéramos trabajar sólo con la estructura andina, deberíamos eliminar la larga longitud de onda AA_1CD_1E que obtendremos prolongando simplemente AA_1 hasta C y ED_1 hasta C.

La residual andina BFD será simplemente: $BFD = AA_1BFDD_1E - AA_1CD_1E$.

Si quisiéramos contrariamente la ondulación originada por el efecto profundo, tendríamos de la anterior: $AA_1CD_1E \cong AA_1BFDD_1E - BFD$.

Como ocurre con la gravimetría tradicional, la separación de anomalías –en este caso de longitudes de onda– no puede ser nunca rigurosa, dado que como ya fuera señalado no es posible sustraerse a las bien conocidas ambigüedades del campo potencial. La Fig. 7.17 muestra la ondulación del geoide en Sudamérica en 31,5° de latitud sur, calculada con el modelo EGM96 ($n = m = 360$). La mayor amplitud corresponde a los Andes. Hacia el Este aparece un positivo correspondiente al sector de las Sierras Pampeanas que involucra a las Sierras de Córdoba.

En un intento por eliminar las largas longitudes de onda, se calcularon las ondulaciones truncando el desarrollo en serie en $n = m = 4, 10$ y 9 . La Fig. 7.17 muestra la larga longitud de onda en $n = m = 9$ (ABC). El criterio seguido se basa, como ya fuera señalado, en eliminar los primeros términos del desarrollo en serie que corresponden a los efectos

más profundos, por ejemplo del manto inferior, de larga longitud de onda. Quedan entonces efectos más someros, especialmente corticales. No obstante no podemos determinar dónde corresponde truncar.

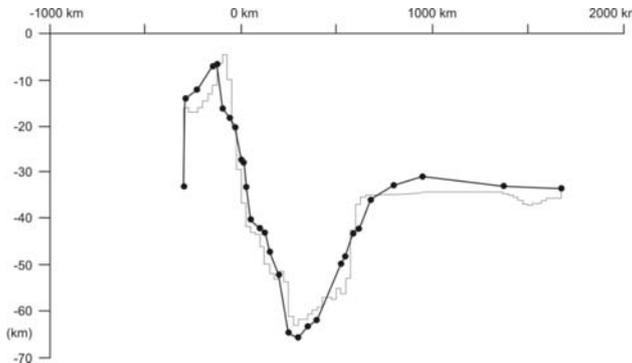


Figura 7.23. Modelo cortical isostático y modelo cortical de inversión originado por las anomalías de Bouguer observadas. Fuente: Introcaso et al. (2000).

Si procedemos por suavización la larga longitud de onda será DEF. Morfológicamente ambas longitudes de onda coinciden en el antepaís andino pero no hacia el oeste de los Andes. Esto da cuenta de las dificultades que presenta el filtrado. Una mejor solución para obtener una regional del tipo DEF consiste en aplicar el método ralo (Giuspi & Introcaso 19@@). Las ondulaciones en el sector continental que exceden o que están por encima de DEF corresponden a los Andes y a las Sierras Pampeanas. El negativo por debajo de DE está vinculado con la fosa oceánica.

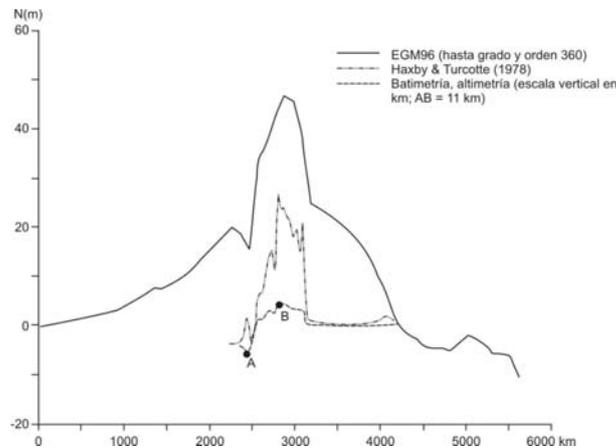


Figura 7.24. Ondulaciones del geoide a partir de EGM96 y del geoide isostático (Haxby & Turcotte 1978). Perfil topográfico. Fuente: Introcaso et al. (2000).

Las masas profundas originan, como vimos, las largas longitudes de onda, por ejemplo AA_1CD_1E de Fig. 7.16. El resto se corresponde bien con el relieve andino. Con el fin de estudiar esta ondulación local, disponemos de las expresiones ya vistas (4.25) y (4.81) que para operar necesitan altitudes del relieve como señal de entrada.

La Fig. 7.18 ha sido construida en base a las expresiones antes citadas (adecuadas en estas longitudes de onda) y al modelo digital de terreno correspondiente a los Andes. Puede verse una notable correlación con el modelo del Moho.

La Fig. 7.19 muestra en (a) la corteza en una sección EW ubicada en $24,5^\circ$ de latitud Sur. Notemos el engrosamiento de la corteza andina. Abajo en (b) mostramos el geoide observado (línea de trazos cortos), el geoide isostático (línea continua) y el geoide regional o geoide suavizado (línea de trazos largos). Existe consistencia entre las ondulaciones positivas de ambos geoides por sobre el geoide regional y además los dos están bien correlacionados con el engrosamiento cortical (+: relive y -: raíz). La más clara conclusión es que en esa latitud existe una corteza duplicada isostáticamente compensada, al menos en términos generales.

La Fig. 7.20 corresponde a una sección andina en $30^\circ S$ cercana a la sección de Fig. 7.17. Arriba y al medio (a y b) tenemos el relieve andino y su raíz cortical obtenida por inversión de la anomalía de Bouguer observada en trazo

continuo (c); en línea de trazos: anomalía calculada. Abajo, en (d), las ondulaciones N (EGM96) desde $n = 6$ hasta 360 (trazos y puntos), y N calculada desde el modelo (a y b), trazos continuos. La aceptable consistencia vuelve a certificar que los Andes en esta latitud presentan una corteza duplicada compensada.

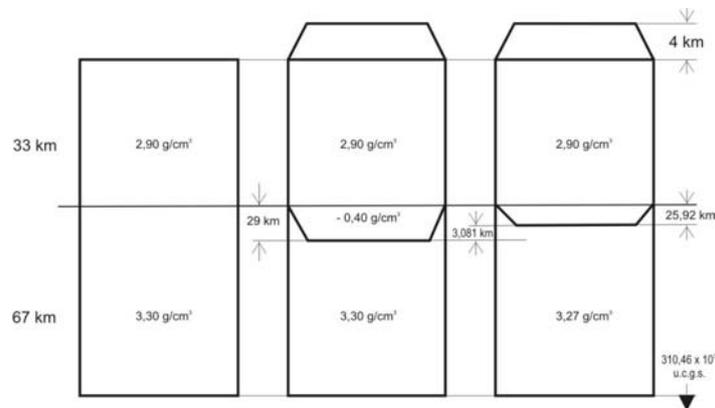


Figura 7.25. Modelos litosféricos compensados. A: modelo de comparación. B: modelo compensado en corteza ($2,9 \times 4 = 0,4 \times 29$). C: modelo compensado por una combinación de engrosamiento cortical con raíz de aproximadamente 25,92 km y expansión de manto litosférico de 376 m.

La Fig. 7.21 corresponde a una sección andina ubicada en 29° de latitud Sur. Ella vuelve a mostrar correspondencia entre el geode isostático N_i y el geode residual obtenido como diferencia entre el geode observado N (EGM96) y el geode promediado N_p . Abajo el relieve andino bien correlacionado con N_i y con $[N(EGM96) - N_p]$.

La Fig. 7.22 muestra un modelo de inversión tradicional gravimétrico en una sección andina ubicada en 23°S. El mismo resultado puede obtenerse a partir de la ondulación del geode (e.g. Fig. 7.20) en 30°S.

La Fig. 7.23 contiene los Mohos de inversión (líneas con puntos) y del modelo perfectamente compensado (línea fina) para la sección graficada en 7.22.

La Fig. 7.24 muestra en la zona del Altiplano el acuerdo entre la ondulación isostática, calculada con expresiones planas, y la “copa de sombrero” que conforma la ondulación EGM96. Línea de trazos: batimetría oceánica y relieve andino. La distancia vertical entre la fosa A y el máximo relieve B es de 11 km.

Otros estudios recientes que pueden ser consultados en Crovetto & Introcaso (2005a, b).

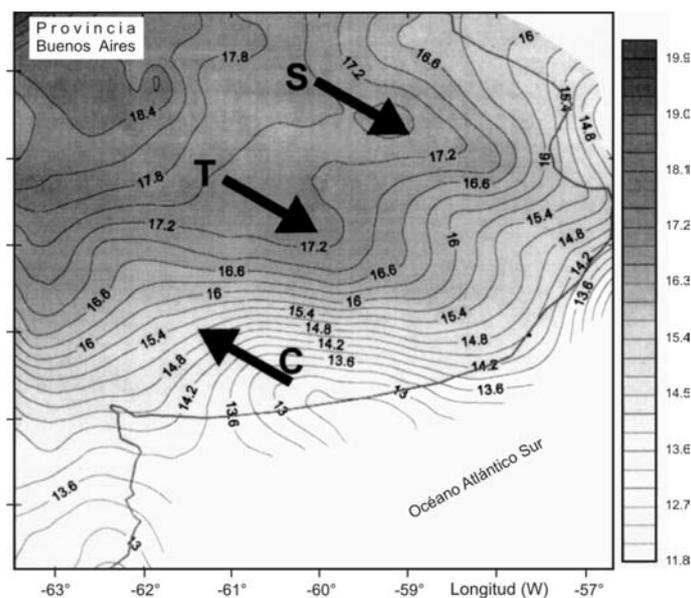


Figura 7.25. Mapa de ondulaciones del geode ($N = h - H$) publicado por Perdomo & Del Cogliano (1999). La flecha señala la tendencia a la deformación del mapa del geode. S (Salado) y T (Tandilia) presentan un rumbo NW-SE al contrario de C (Claromecó) donde la tendencia es SE-NW).

Influencia de la temperatura litosférica en las ondulaciones del geoide.- Demostraremos aquí que del mismo modo que las anomalías isostáticas tradicionales permiten plantear modelos isostáticos alternativos (cortical y cortical - manto litosférico), las ondulaciones del geoide N admiten también diferentes alternativas.

Tomemos tres litosferas: un modelo A con espesor $L = 100$ km (sin excesos topográficos); otro B con espesor $L = 104$ km (exceso topográfico $h = 4$ km) y compensación exclusivamente cortical, y finalmente un modelo C con $L = 104$ km (exceso topográfico $h = 4$ km) y compensación combinada entre engrosamiento cortical y expansión en manto litosférico. Todos los modelos verifican igualdad de presión a 100 km de profundidad (Fig. 7.24).

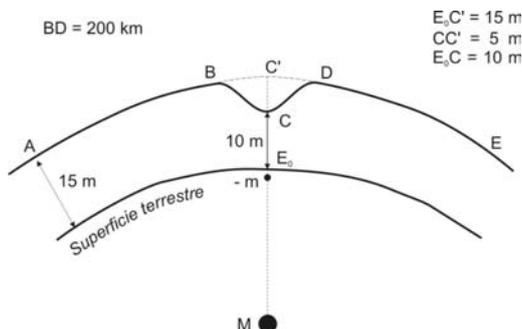


Figura 7.26. Dos masas, una profunda: $GM = 6 \times 10^{10}$ u.c.g.s. a profundidad de 3000 km y otra somera negativa: $GM = 5 \times 10^8$ u.c.g.s. a profundidad 10 km, originan juntas una ondulación del geoide de máxima amplitud 10 m.

Para el modelo C, en el cual la compensación se reparte entre M y $(L - M)$ es posible obtener expeditivamente la ondulación N utilizando la suma de dos dipolos equivalentes. Uno de ellos compensa el exceso topográfico $h = 3,62$ km con un dipolo con $\zeta = 4,47$ km, y el restante compensa el exceso $h = 0,376$ km con un dipolo con $\zeta = 80$ km. N resulta así de aproximadamente 25 m ó suma de $21,3$ m + $3,7$ m de las dos distribuciones dipolares.

El análisis realizado corresponde a las propuestas de Isacks (1988), Whitman et al. (1996) e Introcaso et al. (2000). Sin embargo, Springer & Foster (1998) presentaron resultados contradictorios con lo antes informado.

Mas allá de esto, lo importante es que hemos demostrado que la ondulación del geoide observada contiene efectos de diferentes fuentes, por ejemplo engrosamiento cortical, calentamiento, etc., que pueden ser claramente separados.



Figura 7.27. Ubicación de la cuenca del Salado (de acuerdo con Introcaso & Ramos 1984 y Ramos 1999). Ver localización en un marco de latitudes y longitudes en Fig. 7.26.

Ondulaciones del geoide en cuencas sedimentarias (Véase Introcaso & Martínez 2002).- Comenzaremos abordando el tema a partir de la carta de ondulaciones del geoide de la Provincia Buenos Aires (Fig. 7.25). Una simple inspección visual de esta carta nos indica tres tendencias: la que origina Tandilia (ver la flecha en T) y las correspondientes a las cuencas del Salado (flecha S) y de Claromecó (flecha C). Evidentemente estas tendencias (positivas en S y T, y negativa en C) ocultan o enmascaran ondulaciones residuales que son verdaderamente las que nos interesan. La obtención de estos residuales en las ondulaciones requieren filtrados.

Trataremos el caso de la Cuenca del Salado, ubicada en S (Fig. 7.25). Para comenzar analicemos la ondulación que debemos esperar sobre una cuenca sedimentaria (Fig. 7.26). En esta figura se mantuvo el efecto profundo de Fig. 7.16 que representa las largas longitudes de onda. La masa en defecto $-m' \sim 7,5 \times 10^{15}$ u.c.g.s., podría representar aproximadamente la suma de efectos (-) y (+) de un modelo dipolar próximo a la estructura de una cuenca estirada.

Nuevamente, si queremos aislar la ondulación de la cuenca deberemos descontar de la ondulación total ABCDE la larga longitud de onda ABC'DE obtenida por suavización como en el caso andino, así:

$$BCD = ABCDE - ABC'DE$$

Notemos que la masa somera, en valor absoluto, es 4 veces mayor aquí que la correspondiente a la masa somera del caso andino. En efecto la densidad de la cordillera andina es en valor absoluto 4 a 5 veces la densidad diferencial que originan los sedimentos de la cuenca. La fórmula dipolar plana (4.83) provee valores de N_i en correspondencia con lo aquí expresado.

Veamos ahora la interpretación del estado isostático de la Cuenca del Salado (Provincia Buenos Aires) utilizando un geode local obtenido mediante fuentes equivalentes a partir de anomalías de aire libre.

Es bien conocida la Cuenca del Salado que ha sido interpretada antes con gravimetría (Introcaso & Ramos 1984, Introcaso 1993, Introcaso et al. 2005) encontrándose un significativo exceso de masas en corteza estirada. La cuenca isostáticamente descompensada deberá subsidir para equilibrarse.

En este capítulo iremos por otro camino para realizar la interpretación cortical (ondulaciones locales del geode sobre la cuenca).

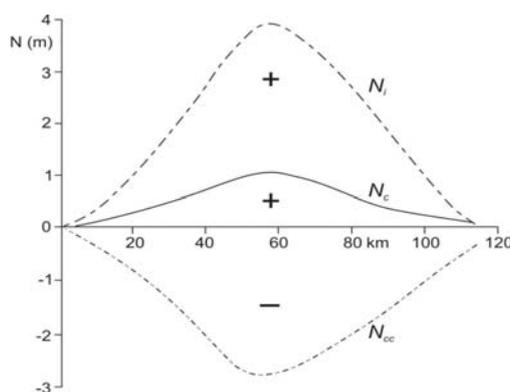


Figura 7.28. Ondulaciones del geode sobre la sección AA (Fig. 7.27) de la Cuenca del Salado. N_c : ondulación positiva correspondiente a la carta de Fig. 7.25; N_{cc} : ondulación calculada sobre un modelo de comparación perfectamente compensado con las siguientes características: corteza estirada con espesor "normal" $T_n = 35$ km y profundidad de los sedimentos $h_i \equiv \Delta R_i$ (antirraíz); N_i : indicador isostático = $N_c + |N_{cc}|$.

Breve descripción de la cuenca.- Siguiendo a Ramos (1999) digamos que la Cuenca del Salado se desarrolla entre la Sierra de Tandil y el umbral de Martín García (Fig. 7.27). Presenta un basamento metamórfico sobre el cual descansa una secuencia de sedimentos conglomerádicos de edad Jurásico Superior a Cretácica Inferior que marca el inicio de la formación de una cuenca tafrogénica de origen extensional asociada con el desarrollo del margen atlántico. La sedimentación continuó durante el Cretácico Inferior con secuencias clásticas continentales que en su parte más externa presentan una intercalación marina de edad Cretácico Superior. Su relleno excede ampliamente los 6000 m. Estas series están cubiertas por depósitos clásticos continentales y marinos de edad terciaria que, a diferencia de los anteriores, no están controlados por fallas, definiendo así una sineclisa.

Estos rellenos sedimentarios con algunos remanentes de actividad basáltica fueron interpretados por Introcaso & Ramos (1984) como una cuenca aulacogénica sobre la base de una anomalía de Bouguer positiva, su escasa actividad magmática, su relleno sinrift mesozoico, sus depósitos cenozoicos de hundimiento térmico y sus relaciones geométricas y temporales con el margen continental (Fig. 7.27). Las secuencias cenozoicas translanan los márgenes orientales de la cuenca y se depositan directamente sobre el basamento metamórfico precámbrico.

Si aplicamos un filtro plano de inclinación NW-SE como lo sugieren las cartas de Fig. 7.3, a la carta de Fig. 7.25, obtendremos la carta residual de ondulaciones locales. Una sección NE-SW trazada sobre la parte media de la cuenca (AA en Fig. 7.27), proporciona la ondulación residual positiva que denominaremos N_c (Fig. 7.28). Ahora con (4.83) los h_i provenientes de las isóbatas de basamento de la cuenca (archivo de YPF), calculamos la ondulación $-N_{cc}$ del modelo de comparación perfectamente compensado (Fig. 7.28). Finalmente comparando N_c y $-N_{cc}$ obtenemos la ondulación isostática N_i que es significativamente positiva. Podríamos trabajar con una expresión mas ajustada que (4.83, expresión plana). Por ejemplo con: $N_i = (V_T - V_C) / \gamma$, con V_T potencial debido a las masas topográficas y V_C

potencial originado por las masas de compensación. Ambos calculados, por ejemplo, a partir de (2.50). En este caso N_{CC} puede variar, aunque siempre será negativo con lo cual N_i seguirá siendo positivo.

Síntesis del Capítulo 7.

Cualquier masa anómala enterrada produce dispersiones del campo de gravedad, por ejemplo deformaciones de las equipotenciales y variaciones en la intensidad de las líneas de fuerza. Se suele trabajar básicamente: a) con las ondulaciones de una sola equipotencial, el geoide, y b) con los distintos tipos de anomalías de gravedad.

En ambos casos debemos separar efectos (filtrado) para poder operar sólo con las longitudes de onda que nos interesan.

El análisis de estructuras geológicas ha sido frecuentemente realizado a través de modelos contruídos por inversión de anomalías de “ g ”, mientras el equilibrio isostático ha sido analizado comparando cualquiera de las observadas con las respectivas anomalías teóricas provenientes de un modelo perfectamente compensado.

Si disponemos de ondulaciones del geoide, el procedimiento metodológico es completamente similar al arriba mencionado, aunque ahora debemos trabajar desde el potencial perturbador T para obtener $N = T / \gamma$.

Nos preguntamos cuales son las ventajas de modelar en N o g si en realidad una se deriva de la otra.

Sabemos que en los procesos de cálculo de los modelos se acumulan errores. Así, una doble inversión proporciona una mayor consistencia a los modelos.

Si disponemos sólo de ondulaciones N obtenidas con $(h - H)$, es decir sin valores de anomalías de gravedad, podemos desde ellos llegar a obtener el modelo geológico-estructural. Si hacemos numéricamente la derivada vertical de la carta de N (véase Introcaso & Crovetto 2005) obtendremos las anomalías de aire libre que pueden compararse con las anomalías de aire libre observadas buscando el grado de concordancia y además con las anomalías de aire libre teóricas, provenientes de un modelo perfectamente balanceado, buscando en este caso el grado de compensación isostática.

REFERENCIAS

- Airy G.B., 1855. On the computation of the effect of the attraction of mountain masses as disturbing of the apparent astronomical latitude of stations in geodetic surveys. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **145**: 101-104.
- Arias F., 1999. El sistema de referencia celeste. In: Contribuciones a la Geodesia en la Argentina de fines del Siglo XX. Homenaje a Oscar Parachú. U.N.R. Editora (Rosario): 49-64.
- Auboin J., Brousse R., Lehman J.P., 1981. Tratado de Geología-Petrología. Tomo 1. Omega, p. 602.
- Balmino G.K., Bernard A., 1986. Satellite gravity gradiometry for the determination of the geopotential. In: Proceedings of a special workshop on *Solid Earth Sciences*: 95-101.
- Belousov V., 1971. Problemas básicos de geotectónica. Omega, p. 854.
- Boido G., 1996. Noticias del planeta Tierra. Galileo Galilei y la Revolución Científica. A.Z. Editora. Buenos Aires, p. 398.
- Bomford G., 1962. Geodesy. Clarendon Press, Oxford, p. 561.
- Bondi H., 1962. El Cosmos. EUDEBA, 159.
- Born N., 1960. El inquieto universo. EUDEBA, p. 322.
- Bouguer P., 1749. La Figure de la Terre. Paris, p. 364.
- Bowie W., 1917. Investigations of Gravity and Isostasy. *United States Coast Geodesy Survey Special Publication* **40**.
- Bruns, H., 1878. Dir Figur der Erde. Pub. Preuss. Geodesy Institut Berlin, p. 98.
- Bunge M., 1989. La investigación científica. Ariel métodos, p. 955.
- Casenave A. & Le Meur H., 1998. The Earth's deformations. *La Recherche* **188**: 48-51.
- Chase C., 1979. Subduction, the geoid and lower mantle convection. *Nature* **282**: 464-468.
- Chase C. & Mc Nutt M., 1982. The geoid: effect of compensated topography and uncompensated oceanic trenches. *Geophysical Research Letters* **9(1)**: 29-32.
- Claireaut A., 1743. Théorie de la Figure de la Terre tirée des principes de l'hydrostatique. Coursier, Paris.
- Cohen B., 1961. El nacimiento de una nueva física. EUDEBA, p. 230.
- Cohen B., 1981. El descubrimiento newtoniano de la gravitación. *Investigación y Ciencia* **56**: 111-120.
- Cornaglia L. & Introcaso A., 2002. Morfología del geoide sobre la Sierra de San Luis. Estudio Preliminar. *21 Reunión Científica de la Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas*. Rosario (Argentina). Formato digital.
- Cornaglia L. & Introcaso A., 2004. Exceso de gravedad en la Sierra Grande de San Luis obtenido a partir de ondulaciones del geoide. Estudio preliminar realizado sobre una sección transversal centrada aproximadamente en 32° 50' latitud Sur. *Geoacta* **29**: 1-9.
- Crovetto C. & Introcaso A., 2003. Método alternativo para el análisis isostático de la corteza terrestre utilizando ondulaciones del geoide. *Resúmenes de la 88 Reunión Nacional de Física AFA 2003 San Carlos de Bariloche (Argentina)*: 208-209.
- Crovetto C. & Introcaso A., 2004. Indicadores isostáticos geoidicos. Un ejemplo para la Sierra de San Luis. *Geoacta* **29**: 49-54.
- Crovetto C. & Introcaso A., 2005. Estudio isostático en una sección andina en 20°S utilizando ondulaciones del geoide y anomalías de gravedad. *Resúmenes de la 90 Reunión Nacional de la Asociación Física Argentina, La Plata*: 225-226.
- Darwin G. H. 1884. On the feature of equilibrium of a planet of heterogeneous density. *Proceedings of the Royal Society* **36**: 158-166.
- Davies G.F. 1981. Regional compensation of subducted lithosphere, hotspots and the geoid. *Earth and Planetary Science Letters* **48**: 15.
- Del Cogliano D. & Introcaso A., 2004. Anomalías de gravedad y altura para el análisis del geoide en Tandil. *22 Reunión Científica de Geofísica y Geodesia de la Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas, Buenos Aires*. Formato digital [CD-ROM].
- Del Cogliano D. & Introcaso A., 2005. Gravity and GPS for geoid interpolation in Sierras de Tandil. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini. Istituto Geografico Militare* **64(3)**: 147-165.
- Drewes H., 1986. Evidence from physical geodesy for geodynamics in the Caribbean Area. *Tectonophysics* **130**: 49-59.
- Einstein A. & Infeld L., 1939. La Física. Aventura del pensamiento. Ed. Losada, Buenos Aires, p. 366.
- Froidevaux C. & Isacks B.L., 1984. The mechanical state of the lithosphere in the Altiplano-Puna segment of the Andes. *Earth and Planetary Science Letters* **71**: 305-314
- Frutos J., 1981. Andean tectonics as a consequence of sea floor spreading. *Tectonophysics* **72** : 21-32.
- Gamow G., 1963. Gravedad. EUDEBA, p. 139.
- Geuthon P. & Sourian M., 1987. New consideration about the Andean subduction from seasat altimetry. *Journal of Geophysical Research* **B92**: 619-632.
- Giese H. & Reuter K. J., 1987. Movilidad de los márgenes continentales activos en los Andes Centrales. *Investigaciones alemanas recientes en Latinoamérica. Geología. Deutsche Forschungsgemeinschaft (Bonn) & Instituto de Colaboración Científica (Tubingen)*, p. 35-38.

- Gingerich O., 1982. El caso Galileo. *Investigación y Ciencia* **73**: 87-96.
- Goldman T., Hughes R.J. & Nieto N.M., 1988. Gravedad y antimateria. *Investigación y Ciencia* **140**: 22-30.
- Guspí F., Introcaso A. & Introcaso B., 2002. Representación del geoide combinando mediciones GPS y anomalías de Aire Libre. Aplicación a la cuenca del Salado. *21 Reunión Científica de la Asociación Argentina de Geofísicos y Geodestas. Rosario (Argentina)*. Formato digital [CD-ROM].
- Guspí F., Introcaso A. & Introcaso B., 2004. Gravity-enhanced representation of measured geoid undulations using equivalent sources. *Geophysical Journal International (RAS)* **158**: 1-8.
- Hammer S., 1939. Terrain correction for gravimetric stations. *Geophysics* **4**: 184-194
- Hawking S., 1988. Historia del Tiempo. Editorial Crítica, Barcelona, p. 245.
- Hayford J.F., 1909. The figure of the earth and isostasy from measurements in the United States. *United States Coast and Geodesy Survey*.
- Heiskanen W.A., 1938. New Isostatic Tables for the reduction of gravity values calculated on the basis of Airy's hypothesis. *Publication of the Isostasy Institute - I.A.G. 2*.
- Heiskanen W.A. & Moritz H., 1967. Physical Geodesy. Freeman, p. 364.
- Heiskanen W.A., 1931. Tables isostatiques pour la réduction dans l'hypothèse de Airy des intensités de la pesanteur observées. *Bulletin de Géodesie* **30**: 23-69.
- Heiskanen W.A., 1938. Investigations on the gravity formula. *Publication of the Isostasy Institute - I.A.G.1*.
- Heiskanen W.A. & Vening Meinez F.A., 1958. The earth and its gravity field. Mc Graw-Hill. N.York, p. 470.
- Helmert F. R., 1901. Der normale Teil der Schwerkraft im Meeresniveau. *Ber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* **14**: 1-328.
- Hertz H., 1884. On equilibrium of floating elastic plates. *Wiedemanns Annalen* **22**: 449.
- Hoffmann B., 1985. Einstein. Salvat, Barcelona, p. 231.
- International Association of Geodesy, 1971. Geodetic Reference System 1967. *Publication Special* **3**.
- Introcaso A., 1993. Predicción del movimiento vertical de una cuenca sedimentaria utilizando el método gravimétrico. *Actas del 12 Congreso Geológico Argentino* **1**: 1-4.
- Introcaso A., 1997. Gravimetría. UNR Editora, p. 355.
- Introcaso A., 1999. Introducción a la inversión desde las ondulaciones del geoide. *In: Contribuciones a la Geodesia en la Argentina de fines del siglo XX. Homenaje a Oscar Parachú*. UNR Editora: 135-164.
- Introcaso A., Cornaglia L. & Pacino M.C., 2001. Análisis isostático de la Cordillera Andina a partir de gravimetría tradicional y ondulaciones del geoide. *Actas del 11 Congreso Latinoamericano de Geología (Simposio sobre evolución tectónica de los Andes), Montevideo*: 1-6.
- Introcaso A. & Cornaglia L., 2002. Estudio cortical de una sección andina EW ubicada en 23° de latitud Sur utilizando un geoide obtenido a partir de fuentes equivalentes. *Actas de la Asamblea de Geofísica y Geodesia, Valencia*: 18-23.
- Introcaso A., Guspí F. & Introcaso B., 2002. Interpretación del estado isostático de la cuenca del Salado utilizando un geoide local obtenido mediante fuentes equivalentes a partir de anomalías de Aire Libre. *15 Congreso Geológico Argentino, Calafate (Argentina)*. Formato digital [CD-ROM].
- Introcaso A. & Introcaso B., 2004. Estudio cortical en una sección de los Andes Bolivianos a partir de ondulaciones del geoide. *Actas del 16 Congreso Geológico Boliviano, Oruro*: 47-52.
- Introcaso A. & Croveto C., 2005. Introducción a la Construcción del Geoide. *Temas de Geociencia* **12**: 1-56.
- Introcaso A. & Ruiz F., 2005. El uso del geoide para determinar las características estructurales de una cuenca sedimentaria. *Resúmenes del 3 Congreso Cubano de Geofísica, La Habana*: 23.
- Introcaso B., Croveto C. & Introcaso A., 2005. Obtención de una carta de g desde las ondulaciones del geoide. Aplicaciones al estudio de la cuenca del Salado (Argentina). *Resúmenes del 3 Congreso Cubano de Geofísica, La Habana, Cuba*: 23.
- Isacks B., 1988. Uplift of the Central Andes plateau and bending of the Bolivian orocline. *Journal of Geophysical Research* **93**: 3211-3231.
- Jaffe B., 1961. Michelson y la velocidad de la luz. EUDEBA, p. 180.
- Jeffreys H., 1959. The Earth. Cambridge University Press, p. 438.
- Koestler A., 1963. Los sonámbulos. EUDEBA, p. 598.
- Kono K., Fukao Y. & Yamamoto A., 1989. Mountain building in the Central Andes. *Journal of Geophysical Research* **94**: 3891-3905.
- Koyré A., 1994. Pensar la ciencia. Editorial Piados, Barcelona, p. 145.
- Lemoine F., et al., 1996. The development of the NASA. GSFC and Nima Joint Geopotential Model. *IAG Symposium Gravity, Geoid and Marine Geodesy, Tokio*.
- Le Pichon X., Francheteau J. & Bonnin J., 1973. Plate tectonics. *Developments in Geotectonics* **6**: 1-300.
- Mateo J., 1968. El potencial terrestre. *Observatorio Astronómico de la Universidad Nacional de La Plata (Serie N° 1)*: 1-120.

Mc Adoo D.C., 1981. Geoid anomalies in the vicinity of subduction zone. *Journal of Geophysical Research* **86**(B7): 6073-6090.

Mc Kenzie D., Watts A., Pearson B. & Roufousse M., 1980. Platform and mantle convection beneath the Pacific Ocean. *Nature* **288**: 442-446.

Mc Millan W. D., 1930. The theory of the potential. McGraw Hill, p. 469.

Molodenski M.S., 1945. Grundbergriffe der geodätischen. Gravimetrie [en ruso]. Moscú.

Moritz H., 1980. Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe (Germany), p. 500.

Newton I., 1687. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Royal Society, London.

Pascoli G., 1989. La gravitation. Que sais je. Presse Universitaire de France, p. 128.

Pratt J.H., 1855. On the attraction of the Himalaya Mountains and of the elevated regions beyond the plum line in India. *Royal Society London B*: 145-153.

Rudzki M.P., 1905. Sur la détermination de la figure de la terre d'après les mesures de la gravité. *Bulletin Astronomie B*: 22-49.

Saavedra J., 1982. El espacio y la física. In: El Espacio y las ciencias. Ed. Universitaria, Consejo de Rectores de Universidades Chilenas, p. 47-80.

Seidler E., Lemmens T. & Jacoby W.R., 1983. On the global gravity field and plate kinematics. *Tectonophysics* **96**: 181-202.

Stokes C.G., 1849. On the variation of gravity and the surface of the Earth. *Cambridge Philosophical Society Transactions* **8**: 672.

Talwani M., Worzel J.L. & Landisman M., 1959. Rapid gravity computations for two-dimensional bodies with application to the Mendocino submarine fracture zone. *Journal of Geophysical Research* **64**: 49-59.

Talwani M., Sutton G.H. & Worzel J. L., 1959. Colección DINA, México, p. 196.

Tapley B.D., Watkins M.M. & Ries J.C., 1996. The joint Gravity model 3. *Journal of Geophysical Research* **101**: 28029-28049.

Torge W., 1989. Gravimetry. De Gruyter, Berlín-New York, p. 465.

Torge W., 2001. Geodesy. Third edition, Walter de Gruyter-New York, Berlín, p. 416.

Turcotte D.L. & Schubert G., 1982. Geodynamics. John Wiley & Sons, p. 450.

Vening Meinesz F.A., 1939. Tables fondamentales pour la réduction isostatique régionale. *Bulletin de Géodesie* **63**: 15-29.

Walker M., 1974. El pensamiento científico. Colección DINA, Editorial Grijalbo, México, p. 196.

INDICE TEMÁTICO

Airy, 17, 61, 62, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 78, 79, 80, 116

alturas, 8, 13, 30, 49, 51, 52-54, 59, 62, 67, 71, 83-86, 88-89, 97, 99, 105

anomalía, de aire libre, 57, 60, 72, 73

de Bouguer, 58, 60, 70, 72, 73, 74

de Faye, 60

de gravedad observada, 32, 37, 51, 60, 73

isostática, 70, 72, 73

antirraíz, 68, 73-75, 79-80, 121

aplastamiento, 17, 24, 34, 38, 47, 48, 49, 52, 110

armónicos, coeficientes, 49, 100

esféricos, 32, 33, 36, 37, 41, 100

teserales, 36, 37, 100

zonales, 33, 36, 37, 100

astrogeodésico, método, 95

astronomía, 3, 10, 16, 38

Astronómica Internacional, Unión 3,15

astronómica, latitud, 61

astronómico, anteojo, 7

astronómicas, determinaciones, 62

observaciones, 7

unidades, 29

atracción, 8, 9, 18, 19, 21, 29, 53, 56, 62, 89, 99

autocorrelación, 102

Bouguer, 17, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 70, 72, 73, 74, 80, 81, 85, 97, 102, 116, 118, 121

Bruns, fórmula, 23, 31, 47, 59, 60, 78, 80, 89, 92, 93

centrífuga, aceleración, 52

Claireaut, 10, 24, 35, 47, 48, 49

co-geoide, 23, 59, 60, 61, 95

colatitud, 35

compensación, 62-73, 76-78, 80, 81, 106, 120, 122

condensación, 23, 55, 59, 60, 70, 92, 102

coordenadas geodésicas, 52

corteza, 53, 61, 62, 64-68, 70-73, 75-77, 80, 82, 102, 108, 109, 116, 118, 119, 121, 123

cuasi-geoide, 86, 97

deflexión de la vertical, 60

densidad, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 38, 39, 47, 53, 54, 55, 58, 59, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 72, 73, 76, 77, 78, 79, 80, 85, 86, 89, 90, 101, 102, 105, 109, 121

cortical, 65, 66, 79

cósmica, 15

de compensación, 63, 64, 76, 77

del agua, 79

del aire, 30

del magma, 66

de magnetización, 27

equivalente, 26, 102

litosférica, 65

media, 23, 66

superficial, 26, 28, 59, 94

derivada segunda, 30

vertical, 122

desviación, 41, 42, 62

dinámica, 18, 30, 31, 49, 110

cota, 84

litosférica, 22

dipolo, 120

andino, 117

magnético, 27, 68

discontinuidad, 102

litosfera-astenosfera, 107

núcleo-manto, 108, 109

divergencia, Teorema, 25

de placas, 106

doble capa, 27, 28, 78

inversión, 122

elipsoide, 17, 24, 30, 34, 36-38, 47-52, 57, 58, 60, 61, 63, 83, 85, 87, 96, 105, 106

equipotencial, 14, 20, 23, 29-31, 47, 50, 51, 122

error, 55, 62

excentricidad, 37

flexural, modelo, 71

- parámetro, 69
- rigidez, 68-70
- sistema, 61, 68
- fuerza, 7, 8, 10
 - axífuga, 47, 48
 - centrípeta, 8, 9
 - de rotación, 24
 - gravitatoria, 15, 17, 18
 - líneas de, 14, 20, 29, 30, 84, 85
- Gauss, 46
 - ley de, 24, 25
- geodesia, 25, 37, 38, 45, 47, 49, 51, 61, 70, 94
 - Asociación Internacional de, 29
 - Congreso Internacional de, 49
 - objetivo de la, 17, 47
 - satelital, 110
- geodésicas, 15
 - coordenadas, 52
 - mediciones, 62, 72
 - nivelaciones, 84
- geodésico, levantamiento, 47
 - sistema de referencia, 47, 49, 50
- geoide, 19, 23, 25, 29, 30, 31, 47, 49, 51, 57, 58, 59, 60, 63, 70, 84, 85, 86, 94, 95, 96, 97, 100, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 112, 116, 117, 118
 - anomalía del, 81, 105, 106, 109
 - cálculo del, 41, 50, 57, 83, 89-92
 - construcción del, 25, 28, 83, 93, 98, 99
 - continental, 30
 - isostático, 107, 114, 118, 119
 - oceánico, 30
 - ondulación del, 31, 61, 78, 80, 86, 96, 105, 106, 108, 109, 110, 113, 114, 116, 117, 118
 - satelital, 111
- geopotencial, campo, 17, 83
 - cota, 84-85
- gradiente, 29, 87
- gravedad, 3, 10, 15-20, 22-25, 28-32, 35-38, 41, 47-54, 56-57, 59-61, 70-73, 77-78, 80-83, 84-85, 89-95, 97, 99-100, 102-103, 105-106, 116, 122
- Green, 28
- Haxby & Turcotte, 118
- Hayford, 17, 63, 70, 71
- Helmert, 47, 49, 55, 59-61, 70, 85, 94
- hidrostático, elipsoide, 105-106
 - equilibrio, 64
- indirecto, cálculo, 30
 - efecto, 23, 58-60, 70, 95
 - resultados, 109
- integral, 40, 42, 45
 - cálculo diferencial e, 10
 - de convolución, 45
 - de Fourier, 45
 - de Stokes, 94
 - descomposición, 37
 - de masa, 32, 36, 38
 - elíptica, 38
 - indeterminada, 24
- interpolación, 95
- inversión, 38, 60, 76, 89, 91, 92, 102, 105, 110, 116-119, 122
- isostasia, 61-63, 71, 75, 80
 - térmica, 76, 77
- isostática, anomalía, 70, 72, 73-74, 81, 110, 117, 120
 - compensación, 62, 71, 72-74, 78, 122
 - corrección, 57, 59, 70, 110, 116
 - descompensación, 73, 121
 - hipótesis, 17
 - ondulación, 78-79, 119, 121
 - reducción, 70
- isostático, ajuste, 72, 76
 - balance, 60, 67, 71, 78, 80-81
 - comportamiento, 78
 - equilibrio, 122
 - estado, 121
 - geoide, 107, 114, 118-119
 - topo-, 107
- indicador, 121
- modelo, 118, 120
- problema, 28
- sistema, 66, 67
- Kepler, 7, 9, 10, 18
- kepleriana, órbita, 99, 100
- Laplace, ecuación de, 24, 25, 102, 104
- latitud, 24, 34, 35, 48, 51, 54, 57, 61, 85, 111, 115-121
 - astronómica, 61, 96
 - elipsoidal, 61, 96
- Legendre, polinomios de, 33
- línea de fuerza, 14, 20, 29-30, 84-85, 122
 - de gravedad, 17, 24
 - geodésica, 15
- lineal, dilatación, 76
 - excentricidad, 37
 - velocidad, 7, 32
- longitud, 36, 54, 86, 96
 - astronómica, 61
 - de onda, 37, 42, 68, 70, 82, 99, 100, 102, 105-122
 - elipsoidal, 61
- marea, 10, 18, 31, 47, 105
- masa, 3-6, 8-16, 18-20, 22-23, 51, 58-59, 62-63, 72, 77, 81, 85, 89, 99, 101-103, 105-106, 110, 113, 116-118, 120
 - 2D, 41
 - anómala, 37, 61, 72, 122
 - atractiva, 24
 - cilíndrica vertical, 38-39, 54, 59, 81
 - compensadora, 70, 78, 80, 107
 - continental, 30
 - corrección por, 56, 58
 - de la atmósfera, 49
 - de la capa esférica, 19-20
 - de hielo, 65, 72
 - del sol, 9, 10
 - de yacimientos, 25, 31
 - equivalente, 28
 - litosférica, 70
 - montañosa, 68
 - newtoniana, 18, 26
 - perturbadora, 31
 - puntual, 23, 89
 - reducción de, 53
 - terrestre, 15, 19, 24, 30, 37-38, 47, 49, 51, 89
 - topográfica, 64-67, 70, 80, 121
- medición
 - de altura, 49
 - de ángulos y longitudes, 17
 - de arcos de meridiano, 17, 62
 - de la intensidad de gravedad, 17
 - de la velocidad de la luz, 6, 12
 - geodésica, 62, 72
 - geométrica, 17
 - red de, 100
 - satelital, 105
 - técnicas de, 83
- modelo
 - de Airy, 72
 - de compensación, 71, 80, 117, 119, 121-122
 - de corteza, 66, 71, 91, 114-115, 118
 - del geoide, 30, 107
 - de inversión, 60, 117, 119
 - del Moho, 118
 - de referencia, 31
 - de series de datos, 102
 - digital de terreno, 60, 118
 - dipolar, 121
 - distensivo, 75
 - EGM96, 107, 112, 117
 - elipsoidal, 34
 - físico, 64
 - geológico-estructural, 122
 - geopotencial, 89, 100
 - hidráulico, 58
 - isostático alternativo, 120
 - litosférico, 69, 119

- simplificado de la teoría de Pratt, 63
 - sísimo-gravimétrico-térmico, 77
 - terrestre, 47
- Moho, 106, 108, 111, 115, 118, 119
 - normal, 80
 - ondulación del, 102, 116
- Molodenski, 52, 57, 85
- Nazca, placa de, 106, 115
- Newton, 3-10, 12, 14-15, 17-18, 26, 29, 32, 41, 43, 47, 69, 89, 99
- nivel, curvas de, 56
 - de burbuja, 17, 47
 - elipsoide de, 47, 49, 52, 83
 - medio del mar, 30, 31, 47, 53-54, 61, 63-65, 68, 70-71, 90, 105
 - superficie de, 26, 29-31, 47, 58-59, 84, 87, 112, 117
- nivelación, 84
- números, de onda, 101, 102
- potenciales, 29
- onda, de radio, 100
 - longitudes de, 37, 42, 68-70, 82, 99-100, 102, 105-112, 114, 117-118, 120-122
- ondulación, cortical, 111
 - del co-geoide, 59
 - del geoide, 31, 58-61, 81, 86-87, 89, 96, 105, 108, 111, 113, 116-121
 - del Moho, 102
 - isostática, 78
- órbitas, de asteroides, 46
 - de los planetas, 7-10, 15-16
 - de satélites, 18, 31, 37, 99-100, 105, 109
 - kepleriana, 100
- parámetro, de sistemas de referencia geodésicos, 50, 83
 - del elipsoide de 1909, 63
 - dinámico, 48
 - flexural, 69
 - kepleriano, 99-100
- período, 3, 4, 7
- placa, antártica, 116
 - de Bouguer, 58
 - de condensación, 102
 - de Nazca, 106, 115
 - intermedia, 57
 - oceánica, 106, 109
- resistencia de la, 69
- tectónica de, 31, 106-107, 109
- velocidad de, 110
- viscosidad de la, 70
- potencial, campo, 25, 36, 112, 117, 121
 - de atracción, 29
 - de cuerpos simples, 38-41
 - de doble capa, 27, 78
 - del geoide, 84-85
 - de simple capa, 20, 26, 28
 - de un dipolo, 78
 - de un elipsoide, 34
 - de una capa esférica, 19-24
 - de una capa superficial, 26
 - desarrollo en serie del, 41
 - determinación del, 89-90, 92-93, 104
 - diferencia de, 84
 - gravitatorio, 27, 29, 78
 - magnético, 78, 89
 - newtoniano, 26
 - normal, 37
 - perturbador, 19, 28, 32, 37, 78, 89, 100, 122
 - real, 37
 - terrestre, 19, 24, 30-32, 38, 59-60, 89
- precisión, de la dirección de la vertical, 17
 - de relojes atómicos, 16
 - de la velocidad de rotación, 49
 - del radio de la Tierra, 17
 - de una triangulación, 62
 - en las observaciones, 3
 - nivelación de, 84
- raíz, andina, 117-119
 - área de, 75
 - cortical, 78, 80
 - de compensación, 72, 81
 - de la masa de hielo flotante, 65
 - defecto de, 74, 81
 - efecto de, 73
 - espesor de, 67, 71, 74-75
 - exceso de, 74, 81
 - térmica, 77
- red de estaciones, 109
 - de mediciones, 100
 - Doris, 109
- reducción, 45, 53
 - de altura, 52
 - de Bouguer, 56
 - de gravedad, 48
 - de masa, 53
 - isostática, 70
 - simplificada de Bouguer, 54
 - topográfica, 55
- regional, 118
 - compensación, 68
 - efecto, 101
 - estudio, 100
 - geoide, 114, 118
 - ondulación, 113
 - sistema de Vening-Meinesz, 68
 - solución, 99
- residual, andina, 117
 - anomalía, 117
 - efecto, 101
 - geoide, 119
 - ondulación, 107, 120-121
- rigidez flexural, 68-70
- satélite, activo, 100
 - altura del, 105
 - artificial, 17, 30, 37, 49, 99, 100
 - de Júpiter, 7, 12
 - movimiento de, 99
 - órbita de, 18, 37, 99, 100, 105
- sedimentos, 73-74, 80, 121
- separación de anomalías, 107, 110, 112, 117
 - de distintas longitudes de onda, 105-106, 110, 112
 - de efectos, 106
 - de ondulaciones del geoide, 114
 - entre estaciones, 92
 - entre geoide y elipsoide, 51
- serie de armónicos esféricos, 41
 - de datos, 102
 - de Fourier, 41-42, 103
 - de Taylor, 52
 - de registros mareográficos, 31
 - desarrollo en, 24, 31-32, 34, 37, 39, 41, 111, 113, 117
- sísmicos, datos, 111
- sísmico-gravimétrico, modelo, 77
- sobrecompensación, 74, 81
- subcompensación, 74, 81
- subducción aplastada, 116
 - normal, 115
 - mesozoica, 115
 - zonas de, 105-107
- superficie
 - armónicos esféricos de, 33
 - cerrada, 30
 - cóncava, 4
 - de compensación, 78
 - de condensación, 23
 - de igual presión, 22
 - de nivel, 26, 29-31, 47, 58-59, 84, 87, 112, 117
 - de referencia, 30, 47, 51, 60-61, 70, 73, 84
 - de segundo grado, 107-108
 - de tendencia, 113
 - de un líquido, 29
 - del mar, 105
 - del Sol, 12
 - elipsoidal, 30, 47, 51, 83
 - equipotencial, 20, 22, 29-30, 58, 83-84

- esférica, 30, 32, 94
- exterior, 47
- física de la Tierra, 17, 25, 30, 47, 49
- gravedad en, 102-103
- interior, 23
- irregular, 24
- lisa, 5
- oceánica, 100, 108
- terrestre, 9, 21, 30, 47, 52-53, 63, 71, 86-87, 89-90, 100, 105, 110
- topográfica, 47, 51, 53-54, 65, 84
- tangencial, aceleración, 9
- tectónica, actividad, 105
 - de placas, 31
 - global, 114
 - interpretación, 114
 - fuerza, 71
 - placa, 106-107, 109
- temperatura, cambios de, 76, 109
 - del anillo de Fourier, 41
 - distribución de, 43
 - litosférica, 120
- tensión compresiva, 75
 - de corte, 70
- terreno, altitud de, 56, 116
 - correcciones de, 58, 60
 - efectos de, 57
 - irregularidades del, 56
 - modelos digitales de, 60, 118
- tiempo absoluto, 10, 13
 - curvatura del, 15
 - de carga, 70
 - de oscilación, 4
 - de relajación, 70
 - dilatación del, 16, 18
 - einsteiniano, 18
 - medida del, 13, 100
 - newtoniano, 18
 - relativo, 13, 16, 18
 - unidad de, 29
- Tierra, 7-15, 17, 19, 21-24, 29, 30-32, 36-38, 51, 52, 71, 94, 97, 105, 110
 - centro de gravedad de la, 50
 - densidad media de la, 23
 - forma de la, 47
 - masa de la, 36
 - superficie física de la, 17, 25, 30, 47, 48
 - radio de la, 17
 - velocidad angular de rotación de la, 23
- tracción, 115
- transformada de Fourier, 41-45, 101-104
- unidad de longitud, 70, 101
 - de masa, 18-19
 - de sección, 63, 65
 - imaginaria, 42
- unidades, 29
- valor de 'g', 32, 49, 51, 53, 81, 85
 - de γ_0 , 48, 51
- variación de densidad, 80, 102
 - de la componente vertical de gravedad, 89
 - de la superficie del geoide, 109
 - de masas, 22
 - de potencial, 25
 - teórica de gravedad, 17
- velocidad angular, 8, 23, 31, 34, 47, 49
 - componente horizontal de, 5
 - constante, 5, 9, 13-14
 - de la luz, 3, 6, 10, 12-14, 16, 42
 - de los electrones, 12
 - de los planetas, 7
 - de placas, 110
 - infinita, 6-7, 18
 - lineal, 7-8
 - rectilínea y uniforme, 5-6, 8, 13
- vertical, ángulo, 61
 - atracción, 53
 - columna, 63
 - componente, 5, 38, 41, 89
 - contracción, 62
 - coordenada, 47
 - deflexión de la, 60
 - derivada, 122
 - desplazamiento, 69
 - desvíos de la, 61-62, 89, 96-97
 - dilatación, 62
 - dirección, 17, 56, 100
 - eje, 33, 35-36, 47
 - elipsoidal, 95
 - engrosamiento, 74
 - gradiente, 29
 - gravedad, 38
 - masa cilíndrica, 38
 - movimiento, 65, 71-72, 74
 - prisma, 65
 - profundidad, 90