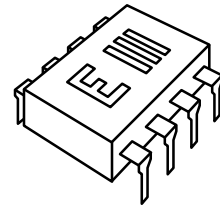




Universidad Nacional de Rosario  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Escuela de Ingeniería Electrónica  
Departamento de Electrónica

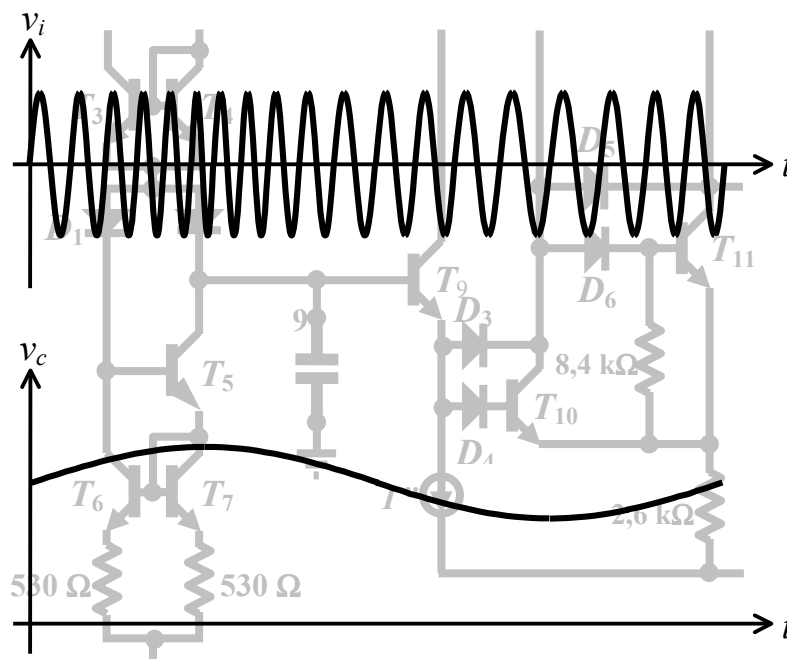


## ELECTRÓNICA III

# PLL

## LAZOS DE FIJACIÓN DE FASE

Federico Miyara



Segunda Edición - 2005

B04.01

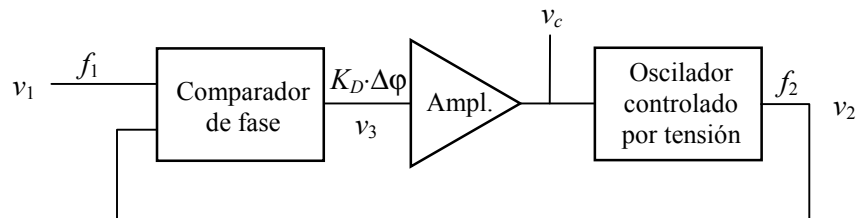
Código interno de publicación: B04.01  
Primera edición: 2000  
Segunda edición corregida y ampliada: 2005  
Publicado en Internet  
Rosario, Argentina  
Año 2005  
<http://www.fceia.unr.edu.ar/enica3/pll.pdf>

# PLL

## LAZOS DE FIJACIÓN DE FASE

### 1. Introducción

Un *lazo de fijación de fase* (PLL, siglas en inglés de *phase locked loop*) es un circuito capaz de generar una oscilación cuya fase con respecto a una señal de entrada se mantiene acotada, contando para ello con una realimentación que compara la fase de las dos señales y actúa modificando la frecuencia de la oscilación generada. En la figura 1 se muestra un esquema muy simplificado del mismo.



**Figura 1.** Diagrama esquemático de un lazo de fijación de fase

El comparador de fase produce, idealmente, una señal  $K_D \cdot \Delta\phi$  proporcional a la diferencia de fase entre la señal de entrada  $v_1$  y la señal  $v_2$  generada por el oscilador controlado por tensión (VCO, siglas en inglés de *voltage-controlled oscillator*) que, amplificada por el amplificador, se aplica a la entrada  $v_c$  del VCO. Este último produce una frecuencia  $f_2$  que varía linealmente con  $v_c$ .

La situación de equilibrio se alcanza cuando la señal  $K_D \cdot \Delta\phi$  amplificada por el amplificador es tal que, aplicada al VCO, hace que éste oscile exactamente a la misma frecuencia que la entrada. En efecto, si fuera, por ejemplo,  $f_1 > f_2$ , la diferencia de fase iría en aumento, lo cual haría que  $f_2$  aumentara, tendiendo a acercarse a  $f_1$ ; y a la inversa si  $f_1 < f_2$ .

Una primera aplicación interesante de este dispositivo es la demodulación de una señal de frecuencia modulada, ya que  $v_c$  es proporcional a  $f_2$ , y por lo tanto a  $f_1$ . Existen, como veremos más adelante, otras aplicaciones, como la multiplicación de frecuencias, o la recuperación del tono piloto en las señales de FM estereofónicas.

### 2. Estructura real de un PLL

En el esquema simplificado de la figura 1 supusimos la existencia de un elemento de circuito capaz de comparar directamente las fases de las dos señales, produciendo una señal proporcional a la diferencia de fases,  $K_D \cdot \Delta\phi$ . Desgraciadamente no es posible construir tal dispositivo, por lo cual se lo reemplaza por un circuito multiplicador (de-

nominado *detector de fase multiplicativo*) seguido por un filtro pasabajos. Si suponemos que las dos señales que ingresan al mismo son

$$v_1(t) = V_1 \text{sen } \omega_1 t \tag{1}$$

$$v_2(t) = V_2 \text{sen } \omega_2 t, \tag{2}$$

entonces la multiplicación de estas señales conduce, aplicando conocidas identidades trigonométricas, a

$$v_3(t) = K v_1(t) v_2(t) = \frac{K}{2} V_1 V_2 [\cos(\omega_1 - \omega_2)t - \text{sen}(\omega_1 + \omega_2)t]. \tag{3}$$

Si suponemos que  $\omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1 + \omega_2$ , y que el filtro pasabajos tiene su frecuencia de corte entre estas dos frecuencias, la frecuencia  $\omega_1 + \omega_2$  se elimina, y entonces podemos concluir que

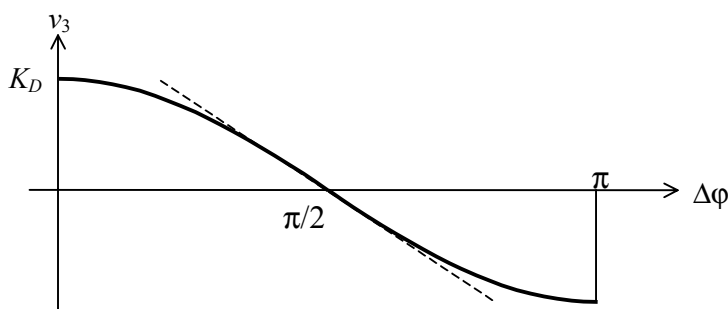
$$v_3(t) \cong \frac{K}{2} V_1 V_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t. \tag{4}$$

Pero  $(\omega_1 - \omega_2)t$  es precisamente la diferencia de fase  $\Delta\phi$  entre ambas señales, de donde

$$v_3(t) \cong \frac{K}{2} V_1 V_2 \cos \Delta\phi. \tag{5}$$

Esta relación se ha representado en la figura 2, donde se observa, además, que en las proximidades de  $\pi/2$  la relación es bastante lineal. En ese caso es posible aproximar aún más la ecuación (5), que queda:

$$v_3 \cong \frac{K}{2} V_1 V_2 (\pi/2 - \Delta\phi) = K_D (\pi/2 - \Delta\phi). \tag{6}$$



**Figura 2.** Relación cosenoidal entre la salida  $v_3$  y la diferencia de fase  $\Delta\phi$  entre la señal de entrada y la del VCO. La línea de trazos es la aproximación lineal

La alinealidad puede eliminarse si en lugar de utilizar un multiplicador lineal se utiliza un circuito de tipo OR-exclusivo, cuya respuesta es

$$v_3(t) = K \text{sg}(v_1(t)) \text{sg}(v_2(t)), \tag{7}$$

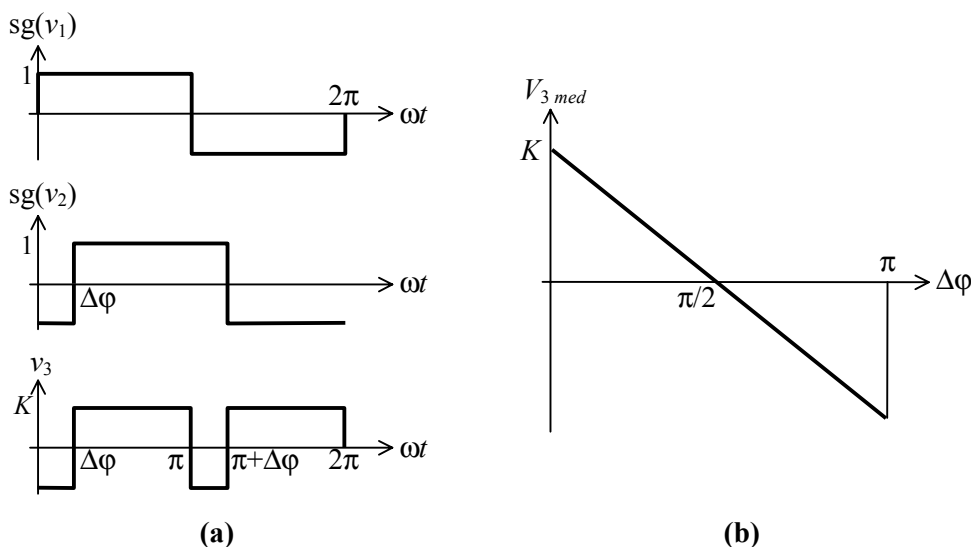
donde  $sg(x)$  es la función *signo*. Suponiendo que las dos señales tienen semiperíodos simétricos y que tienen un desfase  $\Delta\phi$ , como se muestra en la figura 3(a), podemos calcular el valor medio en un periodo como

$$V_{3\ med} = \frac{1}{T} \int_0^T v_3(t) dt = \frac{K(\pi - \Delta\phi) - K\Delta\phi}{\pi},$$

es decir

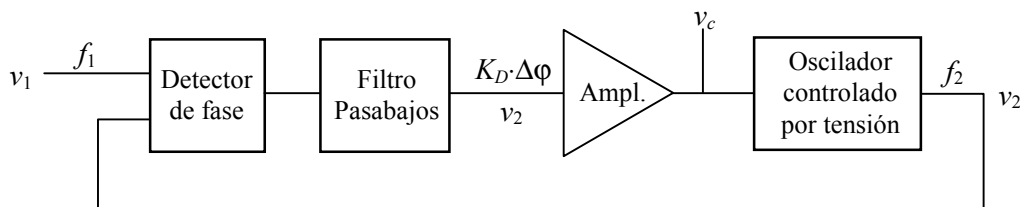
$$V_{3\ med} = \frac{2K}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \Delta\phi \right), \tag{8}$$

relación indicada en la figura 3b.



**Figura 3.** Operación de un detector de fase OR-exclusivo. **(a)** Forma de onda previa al filtrado. **(b)** Relación lineal entre la fase y la componente de baja frecuencia.

Lo anterior muestra que en la figura 1 podemos sustituir el comparador de fase por un detector de fase multiplicativo y un filtro pasabajos, como se ve en la figura 4.



**Figura 4.** Diagrama esquemático de un lazo de fijación de fase poniendo de manifiesto la estructura del comparador de fase.

**NOTA:** El razonamiento anterior se hizo suponiendo que tanto  $\omega_1$  como  $\omega_2$  eran constantes. Si son variables, ya no es cierto que  $\phi = \omega t$ , sino que  $\phi = \int \omega dt$ , o, lo que es lo mismo,  $\omega(t) = \phi'(t)$  (ver Apéndice 1).

La aproximación (6) es válida sólo cuando la diferencia de fase se encuentra próxima  $\pi/2$ . Para diferencias de fase cercanas a  $\pi$  o a 0 el comparador de fase exhibe un comportamiento alineal y tiende a saturarse. ¿Qué sucede en ese caso? Simplemente, la realimentación se interrumpe, las frecuencias dejan de ser iguales, y entonces la fase salta periódicamente entre valores positivos y negativos, tendiendo a un promedio nulo. Lo mismo sucede en el caso del detector OR-exclusivo cuando el defasaje intenta ir por debajo de 0 o por encima de  $\pi$ . En este caso se dice que el PLL funciona *desenganchado*. Dado que el VCO recibe una tensión nula, en el caso ideal produciría a su salida una señal de frecuencia también nula. Sin embargo, por razones de orden práctico que veremos enseguida conviene que, con entrada nula, genere alguna frecuencia *no nula*, que se denomina *frecuencia libre*.

### 3. PLL en seguimiento

En la zona de operación lineal del detector de fase (zona de *seguimiento*) el PLL se comporta como un sistema lineal y es posible determinar su transferencia frecuencia-tensión por medio de la teoría de sistemas lineales. Para ello es conveniente tener en cuenta la relación que existe entre la fase y la frecuencia, ya que la “entrada” del sistema será la frecuencia de la señal de entrada, mientras que la comparación se efectuará en fase. Tenemos (Apéndice 1):

$$\varphi(t) = \int \omega(t) dt \quad (9)$$

que en transformada de Laplace corresponde a

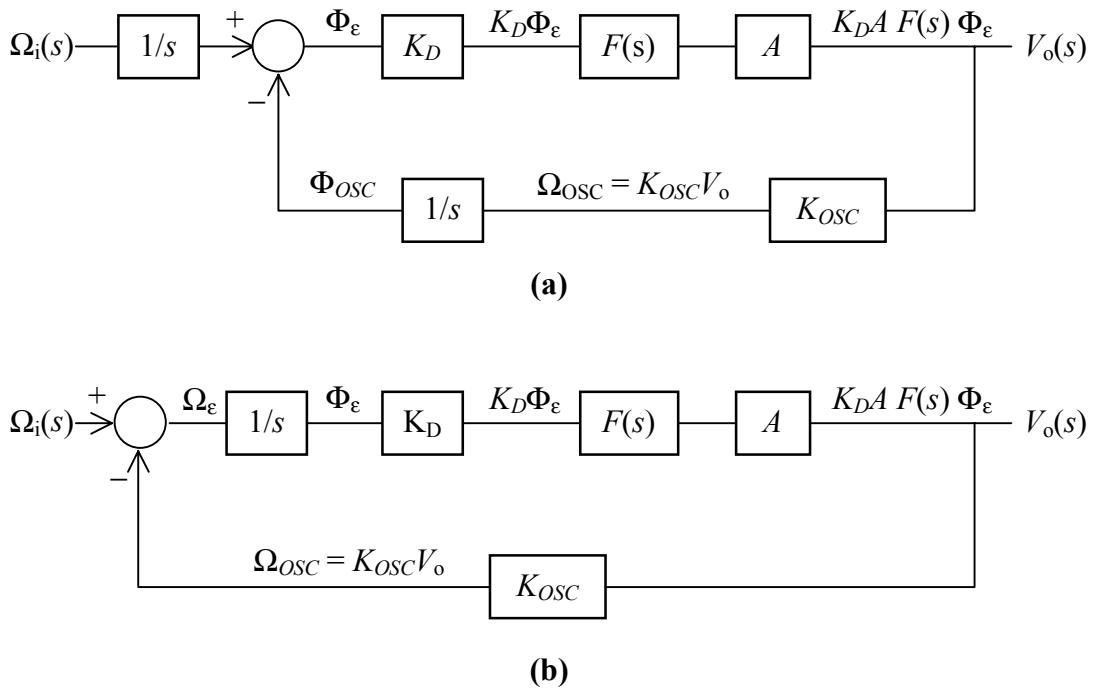
$$\Phi(s) = \frac{1}{s} \Omega(s). \quad (10)$$

A fin de evitar confusiones, es importante señalar que en este tipo muy particular de sistemas consideramos que la señal de entrada es una *frecuencia*, que a su vez podría variar periódicamente con otra frecuencia. Por ejemplo, físicamente podría tratarse de una señal senoidal cuya frecuencia varía entre 9 kHz y 11 kHz a razón de 100 veces por segundo, es decir, una portadora de 10 kHz modulada en frecuencia mediante una señal moduladora de 100 Hz. Para el PLL, la señal será la frecuencia variable entre 9 kHz y 11 kHz, y su frecuencia será 100 Hz. La frecuencia implícita en la variable de Laplace  $s$  corresponde a esta última, es decir, la *frecuencia con que varía la frecuencia*.

En la figura 5 (a) se muestra la interconexión de bloques que resulta, obtenida reordenando los bloques de la figura 3 e incluyendo la relación (10).  $F(s)$  es la función transferencia del filtro. En la figura 5 (b) las dos integraciones  $1/s$  han quedado absorbidas en una sola dentro del camino directo.

De esta figura puede obtenerse la función de transferencia del PLL aplicando la fórmula para la transferencia de un sistema realimentado:

$$\frac{V_O(s)}{\Omega_i(s)} = \frac{\frac{K_{DA}}{s} F(s)}{1 + \frac{K_{OSC} K_{DA}}{s} F(s)} = \frac{1}{K_{OSC}} \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{OSC} K_{DA}} \frac{1}{s} F(s)}. \quad (11)$$



**Figura 5.** Diagrama esquemático de un lazo de fijación de fase linealizado. **(a)** Poniendo de manifiesto la relación entre frecuencia y fase. **(b)** Reordenado para simplificar el análisis.

A fin de lograr una mejor comprensión de la fórmula anterior, analizaremos primero el caso ideal, que es más simple.

### 3.1. El caso ideal

En el caso ideal planteado en la sección 1, el comparador de fase producirá una tensión proporcional al error de fase sin necesidad de ningún filtrado posterior, por lo cual podríamos tomar  $F(s) = 1$ , resultando:

$$\frac{V_0(s)}{\Omega_i(s)} = \frac{1}{K_{OSC}} \frac{1}{1 + \frac{s}{K_{OSC}K_D A}} \tag{12}$$

Vemos que el PLL se comporta inherentemente como un pasabajos, cuya frecuencia angular de corte es

$$\omega_{PLL} = K_{OSC}K_D A \tag{13}$$

Como puede apreciarse, la frecuencia de corte será tanto mayor cuanto mayor sea la ganancia del lazo. Este comportamiento es coherente con el hecho de que estamos realimentando un sistema con un polo (la integración) y por lo tanto su producto ganancia por ancho de banda es constante.

**NOTA:** Observemos que esta frecuencia de corte no es relativa a la *señal física de entrada*, sino a su *frecuencia*. En otras palabras, si la frecuencia es constante (es decir, si la frecuencia de variación de la frecuencia es 0), no existirá atenuación con respecto a la transferencia ideal  $1/K_{OSC}$ . Si ahora la frecuencia empieza a variar, mientras la frecuencia de variación se mantenga por debajo de  $\omega_{PLL}$  no habrá atenuación, pero por encima de  $\omega_{PLL}$  (es decir, cuando la frecuencia varíe muy rápidamente), la amplitud de la tensión de salida comenzará a reducirse.

Supongamos ahora una señal cuya frecuencia varía senoidalmente alrededor de una frecuencia central  $\omega_0$ , alejándose de ésta en  $\pm \Delta\omega_{m\acute{a}x}$ :

$$\omega_i(t) = \omega_0 + \Delta\omega_{m\acute{a}x} \text{sen } \omega_m t, \quad (14)$$

donde  $\omega_m$  es la frecuencia de variación de la frecuencia. Si aplicamos la ecuación (12), podemos obtener la tensión de salida en régimen permanente:

$$v_0(t) = \frac{\omega_0}{K_{OSC}} + \frac{\Delta\omega_{m\acute{a}x}}{K_{OSC}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_m}{K_{OSC}K_{DA}}\right)^2}} \text{sen } (\omega_m t + \theta), \quad (15)$$

donde

$$\theta = -\text{arctg} \frac{\omega_m}{K_{OSC}K_{DA}}. \quad (16)$$

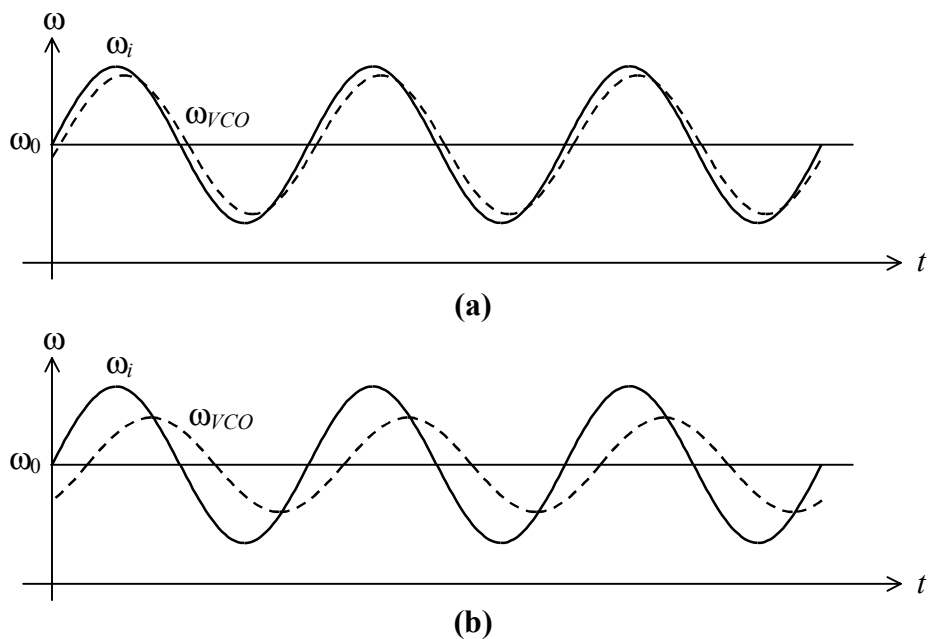
Es interesante ahora obtener la frecuencia generada por el VCO, que es la que resulta comparada con la de la entrada. Para ello basta multiplicar por  $K_{OSC}$ :

$$\omega_{VCO}(t) = \omega_0 + \Delta\omega_{m\acute{a}x} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_m}{K_{OSC}K_{DA}}\right)^2}} \text{sen } (\omega_m t + \theta), \quad (17)$$

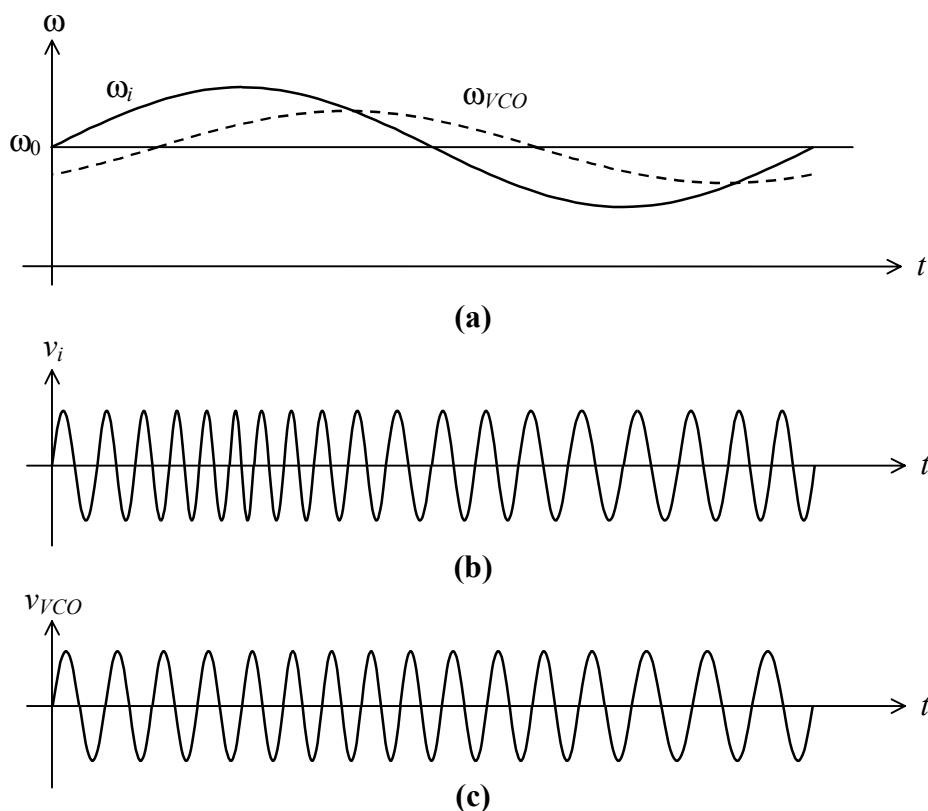
Si recordamos la ecuación (14) comprobaremos que  $\omega_{VCO} \neq \omega_i$  excepto si  $\omega_m \ll \omega_{PLL}$ , como se muestra en la figura 6. Esto parecería estar en contradicción con el análisis intuitivo que habíamos hecho en la sección 1, donde afirmábamos que en el equilibrio  $\omega_{VCO} = \omega_i$ . Pero no es así, dado que en este caso, en el cual la frecuencia de entrada no es constante, es más apropiado hablar de *régimen permanente* que de *equilibrio*. En la figura 7 se muestran, además de las frecuencias  $\omega_i$  y  $\omega_{VCO}$ , las correspondientes formas de onda.

Si la frecuencia de entrada fuera constante (y por consiguiente igual a  $\omega_0$ ), la frecuencia del VCO sería exactamente igual a la frecuencia de entrada, situación que sí puede considerarse como de equilibrio. Es interesante vincular esto con la Teoría del Control. En este caso, al haber una integración en la cadena directa (la que convierte frecuencia en fase), cabe esperar que el error en continua sea nulo, por lo cual el resultado obtenido antes intuitivamente y ahora por cálculo era esperable.





**Figura 6.** Frecuencias angulares de entrada (línea llena) y del VCO (línea de trazos) en función del tiempo. **(a)** Para  $\omega_m \ll \omega_{PLL}$ . **(b)** Para  $\omega_m > \omega_{PLL}$ .



**Figura 7.** **(a)** Frecuencias angulares de entrada (línea llena) y del VCO (línea de trazos) en función del tiempo. **(b)** Tensión de entrada. **(c)** Tensión del VCO. Compárese las gráficas (b) y (c) con la correspondiente frecuencia de la gráfica (a). Obsérvese cómo la variación de frecuencia en (c) es menor que en (b).

Finalmente, calculemos el régimen transitorio ante una conmutación o salto de frecuencia en la tensión de entrada. Este problema reviste importancia en la demodulación de señales digitales FSK (*frequency shift keying*). Para ello, tengamos en cuenta que la constante de tiempo del sistema es

$$\tau = \frac{1}{\omega_{PLL}} = \frac{1}{K_{OSC}K_{DA}} \tag{18}$$

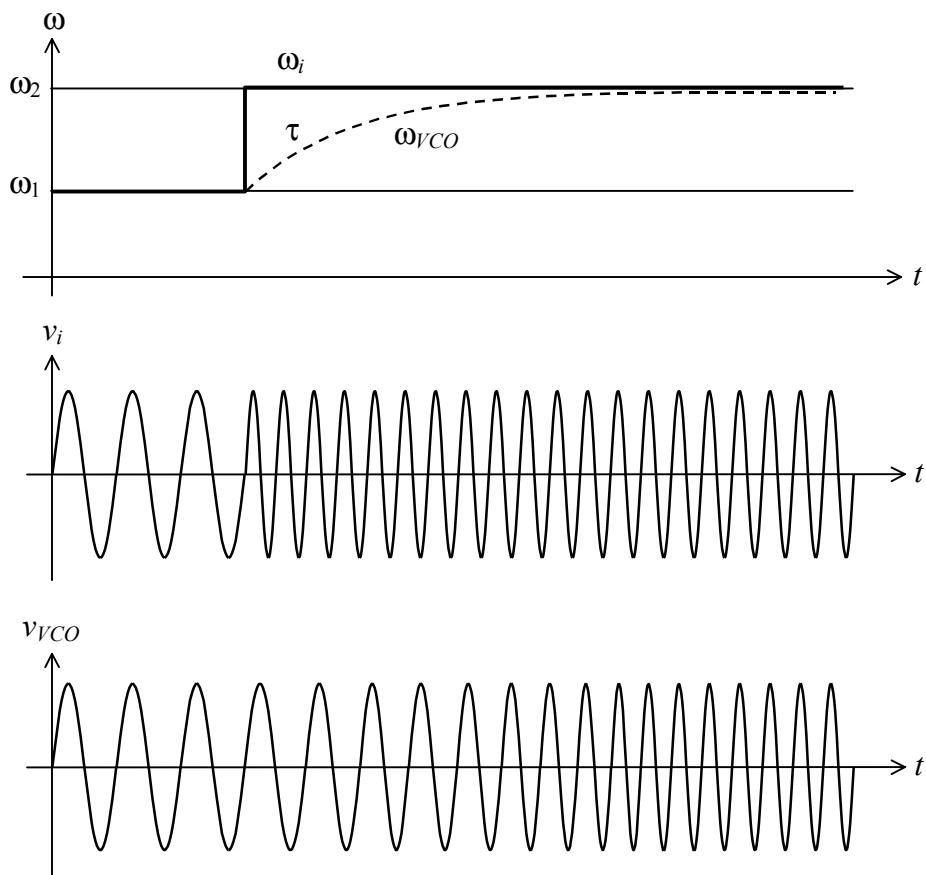
Entonces ante un salto de frecuencia desde  $\omega_1$  a  $\omega_2$  provocará una respuesta de tensión

$$v_0 = \frac{\omega_2 + (\omega_1 - \omega_2) e^{-t/\tau}}{K_{OSC}} = \frac{\omega_2 + (\omega_1 - \omega_2) e^{-\omega_{PLL}t}}{K_{OSC}}, \tag{19}$$

mientras que la frecuencia del VCO será

$$\omega_{VCO} = \omega_2 + (\omega_1 - \omega_2) e^{-\omega_{PLL}t}. \tag{20}$$

Vemos que el error final es nulo, como cabe esperar, nuevamente, de un sistema con una integración en el camino directo. En la figura 8 se ilustra lo anterior.



**Figura 8.** Transitorio de un PLL ante un salto de frecuencia, según la ecuación (20). En las gráficas de abajo se muestran respectivamente la forma de onda de la entrada, en la que se aprecia el cambio brusco de frecuencia, y la del VCO, donde el cambio es más gradual.

### 3.2. El caso real

Cuando el comparador de fase no es ideal el filtro pasa a ser necesario. El caso más simple es cuando se trata de un sencillo pasabajos RC como el de la figura 9 (a):

$$F(s) = \frac{1}{1 + RCs}. \quad (21)$$

Reemplazando en la ecuación (11) se obtiene

$$\frac{V_0(s)}{\Omega_i(s)} = \frac{1}{K_{OSC}} \frac{1}{1 + \frac{s}{K_{OSC}K_{DA}} (1 + RCs)}, \quad (22)$$

que puede reescribirse como

$$\frac{V_0(s)}{\Omega_i(s)} = \frac{1}{K_{OSC}} \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{OSC}K_{DA}}s + \frac{RC}{K_{OSC}K_{DA}}s^2}, \quad (23)$$

o bien

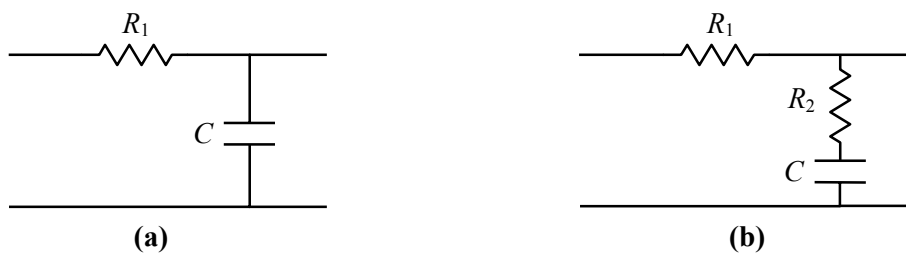
$$\frac{V_0(s)}{\Omega_i(s)} = \frac{1}{K_{OSC}} \frac{1}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}. \quad (24)$$

Esta transferencia es de segundo orden, siendo sus valores característicos

$$\omega_n = \sqrt{\omega_{RC} K_{OSC}K_{DA}}, \quad (25)$$

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_{RC}}{K_{OSC}K_{DA}}}. \quad (26)$$

Debe tenerse en cuenta que  $\omega_{RC}$  debe ser relativamente pequeño, para poder filtrar la frecuencia  $\omega_i + \omega_{VCO} \cong 2\omega_i$ . Al mismo tiempo, como  $\omega_n$  determina el ancho de banda resultante para el PLL, debe adoptarse lo suficientemente grande para permitir el paso



**Figura 9.** (a) Filtro pasabajos con un polo de primer orden. (b) Filtro alternativo con un polo y un cero.

de la máxima frecuencia de variación de la frecuencia de entrada. Esto en general impone limitaciones que se traducen en bajos valores de  $\xi$ . La consecuencia será un sistema con una respuesta muy subamortiguada, lo cual no es deseable.

Como ejemplo, supongamos que la frecuencia de entrada está en torno de los 10 kHz, pero varía entre 9 kHz y 11 kHz a razón de 100 veces por segundo (100 Hz). Para no provocar distorsiones sobre esta señal moduladora, podemos elegir  $f_n = 500$  Hz, y para eliminar la frecuencia  $2f_i$  (que es del orden de 20 kHz) elegimos  $f_{RC} \ll 20$  kHz; por ejemplo,  $f_{RC} = 250$  Hz. Para ello debe ser, según la ecuación (25),  $K_{OSC}K_{DA} = 2\pi \times 1000$  Hz. Resulta  $\xi = 0,25$ , que es demasiado bajo ya que produce transitorios muy oscilantes. Un buen compromiso es proponer una respuesta de Butterworth o máximamente plana, que se obtiene cuando  $\xi = 1/\sqrt{2}$ . En ese caso resulta

$$\omega_{RC} = 2K_{OSC}K_{DA}, \quad (27)$$

y, entonces,

$$\omega_n = \sqrt{2} K_{OSC}K_{DA}, \quad (28)$$

o bien, teniendo en cuenta que para este valor de  $\xi$  la frecuencia de corte es igual a la frecuencia natural,

$$\omega_{PLL} = \sqrt{2} K_{OSC}K_{DA}. \quad (29)$$

Esta ecuación es similar a la (13), con un factor multiplicativo  $\sqrt{2}$ . Según veremos, en algunos casos esta solución puede ser poco conveniente. Una segunda alternativa es utilizar un filtro con un cero y un polo, como el indicado en la figura 9 (b), cuya transferencia es

$$F(s) = \frac{1 + R_2Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs} = \frac{1 + s/\omega_2}{1 + s/\omega_1}. \quad (30)$$

Obsérvese que siempre es  $\omega_2 > \omega_1$ .

Si ahora reemplazamos la ecuación (30) en la (11) obtendremos la nueva expresión para la transferencia del PLL:

$$\frac{V_0(s)}{\Omega_i(s)} = \frac{1}{K_{OSC}} \frac{1}{1 + \frac{s}{K_{OSC}K_{DA}} \frac{1 + s/\omega_1}{1 + s/\omega_2}}, \quad (31)$$

es decir,

$$\frac{V_0(s)}{\Omega_i(s)} = \frac{1}{K_{OSC}} \frac{1 + s/\omega_2}{1 + \left( \frac{1}{K_{OSC}K_{DA}} + \frac{1}{\omega_2} \right) s + \frac{1}{\omega_1 K_{OSC}K_{DA}} s^2}. \quad (32)$$

Esta ecuación se diferencia de la (24) no sólo en que incorpora un cero, sino en que permite independizar  $\omega_{PLL}$  de  $K_{OSC}K_{DA}$  manteniendo un  $\xi$  razonable. En efecto, por simple inspección

$$\omega_{PLL} \cong \omega_n = \sqrt{\omega_1 K_{OSC} K_{DA}}, \tag{33}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \omega_n \left( \frac{1}{K_{OSC} K_{DA}} + \frac{1}{\omega_2} \right), \tag{34}$$

de donde se obtienen las siguientes ecuaciones de diseño para  $\xi = \sqrt{1/2}$  (respuesta máximamente plana):

$$(R_1 + R_2)C = \frac{K_{OSC} K_{DA}}{\omega_{PLL}^2} \tag{35}$$

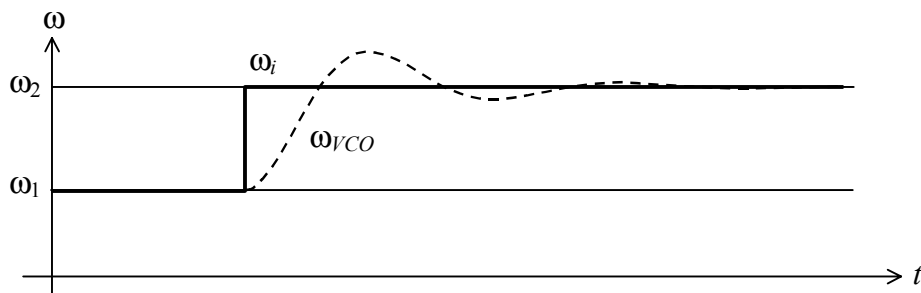
$$R_2 C = \frac{\sqrt{2}}{\omega_{PLL}} - \frac{1}{K_{OSC} K_{DA}} \tag{36}$$

Veremos luego que  $K_{OSC} K_{DA}$  está vinculado al rango de captura (es decir la banda de frecuencias dentro de la cual el enganche es posible), de allí la utilidad de poder seleccionarlo independientemente de la frecuencia de corte.

Ante un escalón de frecuencia de entrada desde  $\omega_1$  a  $\omega_2$  (y suponiendo el cero despreciable), la frecuencia del VCO tendrá una evolución transitoria dada por

$$\omega_{VCO}(t) = \omega_2 + \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \cos\left(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t - \eta\right), \tag{37}$$

donde  $\eta = \arcsen \xi$ . Se aprecia una respuesta oscilatoria subamortiguada, que se ilustra en la figura 10. En el caso en que  $\xi = \sqrt{1/2}$ , el sobrepico es de 4,3 %, que es relativamente pequeño. Nuevamente, por ser el sistema integrativo, el error final es nulo, es decir que la frecuencia del PLL al alcanzar el estado de equilibrio coincide con la de entrada.



**Figura 10.** En línea de trazos, transitorio de frecuencia de un PLL con filtro ante un salto de frecuencia de entrada. Debido a la integración dentro del lazo, el error final es nulo.

**EJEMPLO 1**

*Un PLL integrado LM565 alimentado con ± 6 V y funcionando a 10 kHz tiene una constante  $K_{OSC} K_{DA} = 28200$  1/s. Seleccionar los componentes del filtro para tener  $\omega_{PLL} = 500$  1/s utilizando como criterio que la respuesta sea máximamente plana.*

**Solución:** Aplicando la ecuación (36) resulta que  $R_2C = 2,79$  ms. Con este valor y la ecuación (35) se obtiene  $R_1C = 110$  ms. Adoptando  $C = 1 \mu\text{F}$  resultan los valores de la serie del 1%  $R_1 = 110 \text{ k}\Omega$  y  $R_2 = 2,80 \text{ k}\Omega$ .

## 4. Rango de captura del PLL

Vimos en la sección 2 que si la diferencia de fase entre la entrada de un PLL real y la salida del VCO supera el rango del detector de fase el lazo de realimentación se corta y el PLL no puede engancharse. En este caso el VCO oscilará a su frecuencia libre  $\omega_0$ . Nos preguntamos ahora bajo qué condiciones el PLL vuelve a engancharse. Supongamos para ello que se aplica a la entrada una señal de frecuencia  $\omega_i$  muy próxima a la frecuencia libre  $\omega_0$ . En ese caso, de acuerdo con la ecuación (3), la salida del detector de fase tendrá una componente de muy baja frecuencia,  $\omega_i - \omega_0$ , y otra de alta frecuencia,  $\omega_i + \omega_0$ . Esta última será eliminada por el filtro pasabajos  $F(s)$ , quedando la otra aplicada a la entrada del VCO según la ecuación (4). Dado que esta tensión es oscilante, en algún momento la frecuencia del VCO coincidirá con la frecuencia de entrada. En ese momento la tensión aplicada al VCO dejará de variar y se habrá producido el enganche del PLL. Ahora supongamos que la frecuencia de entrada empieza a cambiar lentamente. ¿Hasta cuándo podrá hacerlo sin que el lazo se desenganche? Hasta que la frecuencia de entrada  $\omega_i$  sea tan diferente de la frecuencia libre que el VCO no pueda ya producirla, ya sea porque alcanzó su propio límite o porque el detector de fase (junto con el amplificador) no está en condiciones de suministrar la tensión requerida,  $(\omega_i - \omega_0)/K_{OSC}$ .

El valor preciso depende de la naturaleza del detector y coincide con la máxima tensión que éste puede producir. Para el caso del detector multiplicativo el límite será una tensión igual a  $K_DA$  (ver ecuación (6) y figura 2). En el caso del detector OR-exclusivo (ecuación (8) y figura 3), el límite será  $K_DA\pi/2$ . En este caso deberá ser

$$\frac{|\omega_i - \omega_0|}{K_{OSC}} \leq \frac{\pi}{2} K_DA,$$

es decir

$$|\omega_i - \omega_0| \leq \frac{\pi}{2} K_{OSC} K_DA. \quad (38)$$

Los valores de frecuencia de entrada que satisfacen esta desigualdad constituyen el *rango de enganche* o *rango de seguimiento* del PLL.

Determinemos ahora el *rango de captura*, un intervalo más restrictivo que indica la máxima separación entre la frecuencia de entrada y la frecuencia libre para que se produzca el enganche partiendo de una situación de desenganche (en el caso anterior suponíamos que partíamos con el lazo enganchado). Para ello tengamos en cuenta que si  $\omega_i - \omega_0$  es demasiado grande, la frecuencia de oscilación de la componente de baja frecuencia dada en la ecuación (4) (reescrita reemplazando aquí  $KV_1V_2/2$  por  $K_D$ ),

$$v_3(t) \cong K_D \cos(\omega_1 - \omega_0)t, \quad (39)$$

puede no ser tan baja, y de hecho puede caer fuera de la banda de paso del filtro pasabajos. A esa frecuencia la tensión de control del VCO, es decir, la salida del filtro amplificada, será

$$v_c(t) = K_D A |F(j(\omega_i - \omega_o))| \cos((\omega_i - \omega_o)t + \phi). \tag{40}$$

Para que se produzca el enganche deberá cumplirse que

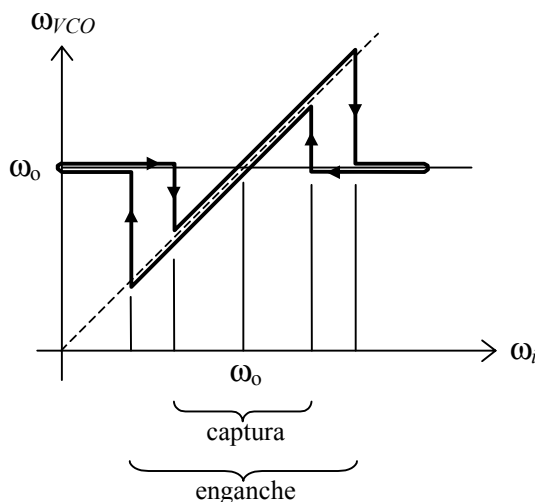
$$\frac{|\omega_i - \omega_o|}{K_{OSC}} \leq \frac{\pi}{2} K_D A |F(j(\omega_i - \omega_o))|,$$

es decir

$$|\omega_i - \omega_o| \leq \frac{\pi}{2} K_{OSC} K_D A |F(j(\omega_i - \omega_o))|. \tag{41}$$

Este rango de captura es menor en general que el rango de enganche, debido a la atenuación del filtro. Para un filtro sencillo con un polo y un cero esta desigualdad puede resolverse en forma exacta. El cálculo puede simplificarse, sin embargo, acotando la ganancia del filtro a su valor en infinito,  $\omega_1/\omega_2$ .

A la luz de los razonamientos anteriores, se concluye que dentro del rango de captura sólo es posible un estado de equilibrio, correspondiente al PLL enganchado. Fuera del rango de captura pero dentro del rango de enganche, son posibles dos situaciones: enganchado u oscilando a la frecuencia libre, dependiendo si se entra en esa región estando el PLL enganchado o no. Finalmente, fuera del rango de enganche, sólo funcionará desenganchado (figura 11)



**Figura 11.** Estados de equilibrio posibles para un PLL.  $\omega_o$  es la frecuencia libre del VCO (la separación entre los caminos de ida y de vuelta es sólo por claridad del dibujo).

### EJEMPLO 2

*En el PLL del ejemplo anterior determinar el rango de seguimiento y el rango de captura.*

**Solución:** Procederemos en forma aproximada. La función filtrante  $F(j\omega)$  tiene un máximo en continua y un mínimo en infinito igual a  $R_2/(R_1+R_2) = 2,8/112,8 = 0,0248$ . Con este valor, podemos aplicar la desigualdad (41), reconociendo que  $|F(j\omega)| > 0,0248$ . Entonces el rango de captura será, por lo menos,

$$|\omega_i - 2\pi \cdot 10000| \leq \pi/2 \cdot 28200 \cdot 0,0248 = 1098,6 \text{ 1/s,}$$

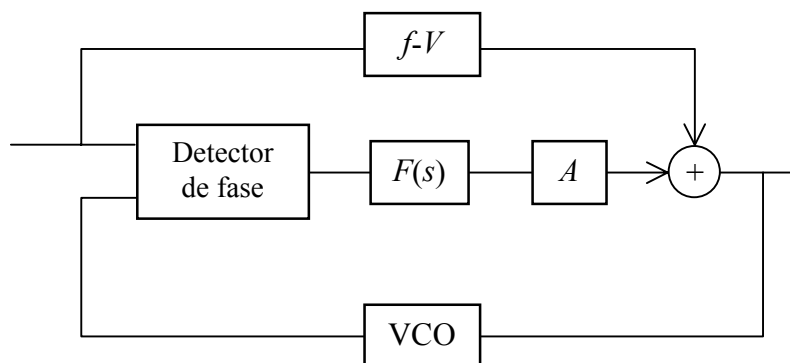
es decir 174,8 Hz. El valor obtenido resolviendo numéricamente (sin aproximar) la desigualdad (41) es 1149 1/s (es decir, 183 Hz). En cuanto al rango de enganche o seguimiento, resulta

$$|\omega_i - 2\pi \cdot 10000| \leq \pi/2 \cdot 28200 = 44296 \text{ 1/s,}$$

es decir, 7050 Hz. Si este rango fuera insuficiente, podría aumentarse  $A$ .

### 4.1. Extensión del rango de captura

Es posible extender el rango de captura de un PLL, sin recurrir a aumentar excesivamente la ganancia de lazo, por medio de un circuito *feedforward* con un convertor frecuencia-tensión ( $f-V$ ), como se indica en la figura 12. El convertor se elige de modo que su constante sea aproximadamente la recíproca de la constante  $K_{OSC}$  del VCO. Entonces la tensión que se aplica en la entrada del VCO ante una entrada dada es aproximadamente la misma que hace falta para que el VCO produzca una frecuencia igual a la de entrada, por lo cual ambas frecuencias serán muy parecidas, y por consiguiente el proceso de enganche será rápido y seguro cualquiera sea la frecuencia dentro del rango de enganche. Podría objetarse que, si se dispone de un convertor  $f-V$ , ya no es necesario el PLL. Sin embargo, la función del PLL no es sólo proporcionar una tensión lineal con la frecuencia sino conseguir el sincronismo entre la frecuencia generada remotamente y la frecuencia local. Por otra parte normalmente la conversión frecuencia-tensión lograda mediante un PLL es más lineal que la que se obtiene mediante otros mecanismos de conversión en lazo abierto (como lo es el convertir la entrada en un tren de pulsos de ancho constante mediante un multivibrador monoestable y luego filtrar las componentes de alta frecuencia).



**Figura 12.** Utilización de un lazo feedforward con un convertor frecuencia-tensión para aumentar el rango de captura.



## 4.2. Rechazo a ruido

El PLL puede ser utilizado con ventaja para recuperar o demodular señales o portadoras inmersas en ruido. Un efecto del ruido de entrada en un PLL es la aparición de fluctuaciones de fase aleatorias denominadas genéricamente *jitter*. Este jitter también se traduce en variaciones de frecuencia. Cuando las fluctuaciones de fase son suficientes para sacar al detector de fase de su zona operativa (entre 0 y  $\pi$ ) se produce el desenganche, perdiéndose el sincronismo entre la entrada y la salida del VCO. Dado que el ruido es una señal aleatoria, esta situación puede producirse o no, aunque si se deja transcurrir un tiempo suficiente, la probabilidad de que ocurra aumenta. Se ha demostrado mediante simulaciones digitales que por cada dB que se incrementa la relación señal/ruido el tiempo transcurrido antes de que se produzca el desenganche se multiplica por 20. Para garantizar que el enganche se produzca y mantenga, será necesario que la relación señal a ruido sea mayor que 6 dB.

## 4.3. Tiempo de captura

El tiempo requerido para que la captura (enganche) se produzca depende de la separación  $\Delta\omega$  entre la frecuencia de entrada y la frecuencia libre. Se encuentra que este tiempo vale aproximadamente

$$T_{captura} \cong \frac{(\Delta\omega)^2}{2 \xi \omega_n^3} \quad (42)$$

Como ilustración, en el PLL de los ejemplos 1 y 2, el tiempo requerido para engancharse a una frecuencia de 10,3 kHz es de 20 ms aproximadamente.

## 5. Error de fase en régimen permanente

Al diseñar un demodulador de frecuencia con un PLL es necesario tener en cuenta que dentro del rango de variación de la señal modulante el error de fase con respecto al valor de equilibrio  $\pi/2$  debe ser siempre menor que  $\pm \pi/2$ , ya que si dicho valor se excede se pierde el enganche. Supongamos una portadora de frecuencia  $\omega_p$ , modulada en frecuencia por una cosenoide de frecuencia  $\omega_m$  cuya máxima desviación con respecto a la portadora es  $\pm \Delta\omega_{m\acute{a}x}$ :

$$\omega_i(t) = \omega_p + \Delta\omega_{m\acute{a}x} \cos \omega_m t, \quad (43)$$

Si aplicamos esta señal a la entrada de un PLL cuya función de transferencia  $\Omega_{VCO} / \Omega_i$  es  $H(s)$ , la frecuencia del VCO en régimen permanente será:

$$\omega_{VCO}(t) = \omega_p + \Delta\omega_{m\acute{a}x} |H(j\omega_m)| \cos(\omega_m t + \arg H(j\omega_m)). \quad (44)$$

Nos proponemos calcular el error de fase  $\Delta\phi(t)$ , que estará dado por

$$\Delta\phi(t) = \int (\omega_i(t) - \omega_{VCO}(t)) dt. \quad (45)$$

Notemos que la fase total entre las dos señales (la de entrada y la del VCO) en realidad requiere la suma de una constante de integración igual a la diferencia de fase en equilibrio. Esta diferencia depende de la relación entre la frecuencia de la portadora y la frecuencia libre del VCO. Como normalmente se toman coincidentes ( $\omega_0 = \omega_p$ ) ya que así se maximiza el rango dinámico, la diferencia de fase de equilibrio será  $\pi/2$ .

Reemplazando 43 y 44 en 45, resulta

$$\Delta\phi(t) = \Delta\omega_{\text{máx}} \int (\cos \omega_m t - |H(j\omega_m)| \cos(\omega_m t + \arg H(j\omega_m))) dt. \quad (46)$$

Integrando,

$$\Delta\phi(t) = \frac{\Delta\omega_{\text{máx}}}{\omega_m} (\sin \omega_m t - |H(j\omega_m)| \sin(\omega_m t + \arg H(j\omega_m))). \quad (47)$$

Para calcular el máximo valor de esta fase bastará expresar esta suma como una única senoide cuya amplitud es el valor deseado. Se obtiene

$$\Delta\phi_{\text{máx}} = \frac{\Delta\omega_{\text{máx}}}{\omega_m} \sqrt{|H(j\omega_m)|^2 - 2 \operatorname{Re}(H(j\omega_m)) + 1}. \quad (48)$$

Para el caso de un filtro con polo y cero,  $H(s)$  viene dada por

$$H(s) = \frac{1 + s/\omega_2}{1 + \left( \frac{1}{K_{OSC}K_{DA}} + \frac{1}{\omega_2} \right) s + \frac{1}{\omega_1 K_{OSC}K_{DA}} s^2}. \quad (49)$$

Para  $\omega_m \rightarrow 0$ , se demuestra fácilmente que

$$\Delta\phi_{\text{máx}} \cong \frac{\Delta\omega_{\text{máx}}}{K_{OSC}K_{DA}}. \quad (50)$$

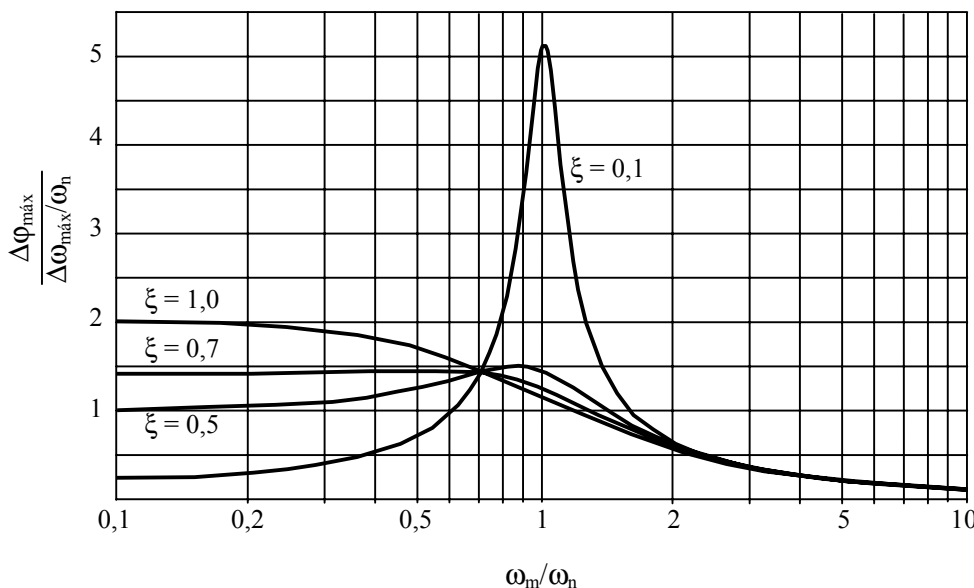
En el caso en que  $\omega_2 \gg K_{OSC}K_{DA}$ , la anterior puede reescribirse como

$$\Delta\phi_{\text{máx}} \cong \frac{\Delta\omega_{\text{máx}}}{\omega_n} 2\xi. \quad (51)$$

Por otra parte, si  $\xi$  es pequeño, el error de fase tiene un pico para  $\omega_m$  cerca de  $\omega_n$ , que viene dado por

$$\Delta\phi_{\text{máx}} \cong \frac{\Delta\omega_{\text{máx}}}{\omega_n} \sqrt{\frac{1}{4\xi^2} + \left( 1 - \frac{1}{2\xi} \frac{\omega_n}{\omega_2} \right)}. \quad (52)$$

En la figura 13 se muestra en forma gráfica el error de fase normalizado en función de la frecuencia modulante normalizada.



**Figura 13.** Amplitud del error de fase normalizado  $\Delta\phi_{\text{máx}}/(\Delta\omega_{\text{máx}}/\omega_n)$ , en función de la frecuencia modulante normalizada  $\omega_m/\omega_n$ , suponiendo que el cero es mayor que el polo.

### EJEMPLO 3

En el PLL de los ejemplos anteriores determinar el máximo error de fase para una desviación de frecuencia de 100 Hz.

**Solución:** Para  $\xi = \sqrt{1/2}$  el máximo error es apenas ligeramente mayor (3 %) que el error en baja frecuencia y vale  $\Delta\omega_{\text{máx}} / K_{OSC}K_{DA}$ . Si  $\Delta\omega_{\text{máx}} = 2\pi \cdot 100$  Hz, se obtiene un error de fase máximo de 0,0221 rad, que es menor que  $\pi/2$ .

El trabajar con  $\xi \geq \sqrt{1/2}$  garantiza que si se cumplió la inecuación (38) no se producirá el desenganche, ya que el peor error se presenta en baja frecuencia y la desigualdad (38) acota dicho error. Para valores pequeños de  $\xi$  ello puede no ser cierto, ya que cerca de  $\omega_n$  se produce un error de fase muy grande que puede superar fácilmente el valor máximo  $\pi/2$ .

## 6. Error de fase en régimen transitorio

En presencia de una conmutación desde un valor de frecuencia a otro podrían producirse errores de fase significativos capaces de desenganchar al PLL si el sistema es subamortiguado ( $\xi < 1$ ). Este problema puede presentarse en los sistemas de demodula-

ción de señales moduladas por FSK (*frequency shift keying*). Su análisis es similar al anterior. Suponemos que se produce una transición entre  $\omega_1$  y  $\omega_2$ . Luego de la transición tendremos

$$\omega_i(t) = \omega_2, \quad (53)$$

en tanto que el VCO responderá como en (37):

$$\omega_{VCO}(t) = \omega_2 + \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cos\left(\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n t - \eta\right), \quad (54)$$

donde  $\eta = \arcsen \xi$ . El error de fase  $\Delta\phi(t)$  vendrá dado por

$$\Delta\phi(t) = \int (\omega_i(t) - \omega_{VCO}(t)) dt. \quad (55)$$

Teniendo en cuenta que después de la conmutación  $\omega_i(t) = \omega_2$ , la solución de la integral anterior (obtenida considerando el coseno como la parte real de una exponencial compleja) arroja

$$\Delta\phi(t) = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cos\left(\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n t - \eta + \psi\right) + C_{int}. \quad (56)$$

donde

$$\psi = \arccos \xi. \quad (57)$$

La constante de integración debe tener en cuenta el cambio de fase necesario para acomodar el cambio de frecuencia una vez extinguido el transitorio. Su valor es

$$C_{int} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{K_{OSC} K_{DA}}. \quad (58)$$

Para encontrar el error de fase máximo derivamos la expresión (56) e igualamos a 0. Pero debido a que  $\Delta\phi(t)$  fue obtenida integrando  $\omega_i(t) - \omega_{VCO}(t)$ , resulta

$$(\Delta\phi)'(t) = \omega_2 - \omega_{VCO}(t) = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \cos\left(\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n t - \eta\right), \quad (59)$$

Si  $t_M$  es el primer instante en el que  $(\Delta\phi)'(t_M) = 0$ , debe cumplirse

$$\cos\left(\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n t_M - \eta\right) = 0.$$

Resulta

$$t_M = \frac{\pi/2 + \arcsen \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}\omega_n}.$$

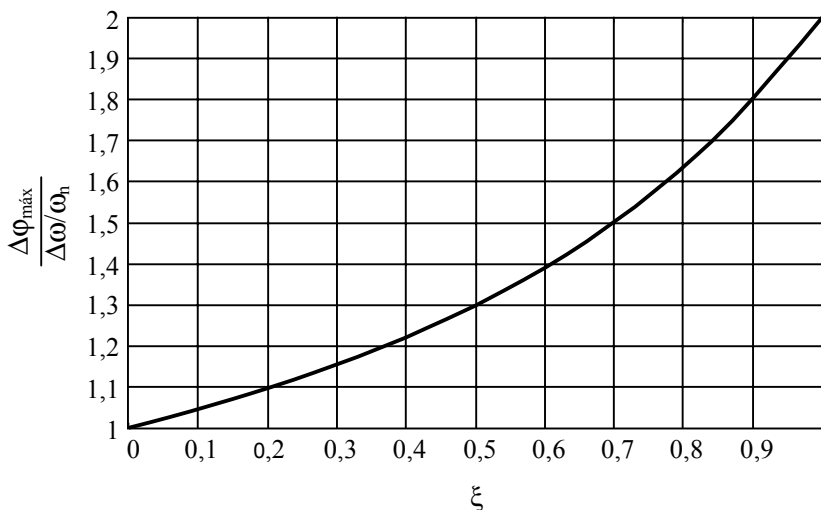
Reemplazando en (56)

$$\Delta\varphi_{\text{máx}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n \frac{\pi/2 + \arcsen \xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}} \cos(\pi/2 + \eta - \eta + \psi) + \frac{\omega_2 - \omega_1}{K_{OSC} K_{DA}},$$

es decir,

$$\Delta\varphi_{\text{máx}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} \left( e^{-\xi \frac{\pi/2 + \arcsen \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}} + 2\xi \right). \tag{60}$$

Podemos representar este valor normalizado con respecto a  $\Delta\omega/\omega_n = (\omega_2 - \omega_1)/\omega_n$ , en función de  $\xi$ , como se muestra en la figura 14.



**Figura 14.** Amplitud del error de fase normalizado  $\Delta\varphi_{\text{máx}}/(\Delta\omega/\omega_n)$ , en función del coeficiente de amortiguamiento  $\xi$ .

**EJEMPLO 4**

En el PLL de los ejemplos anteriores determinar el máximo salto de frecuencia  $\Delta f_{\text{máx}}$  para que el lazo no se desenganche a causa de un excesivo error de fase.

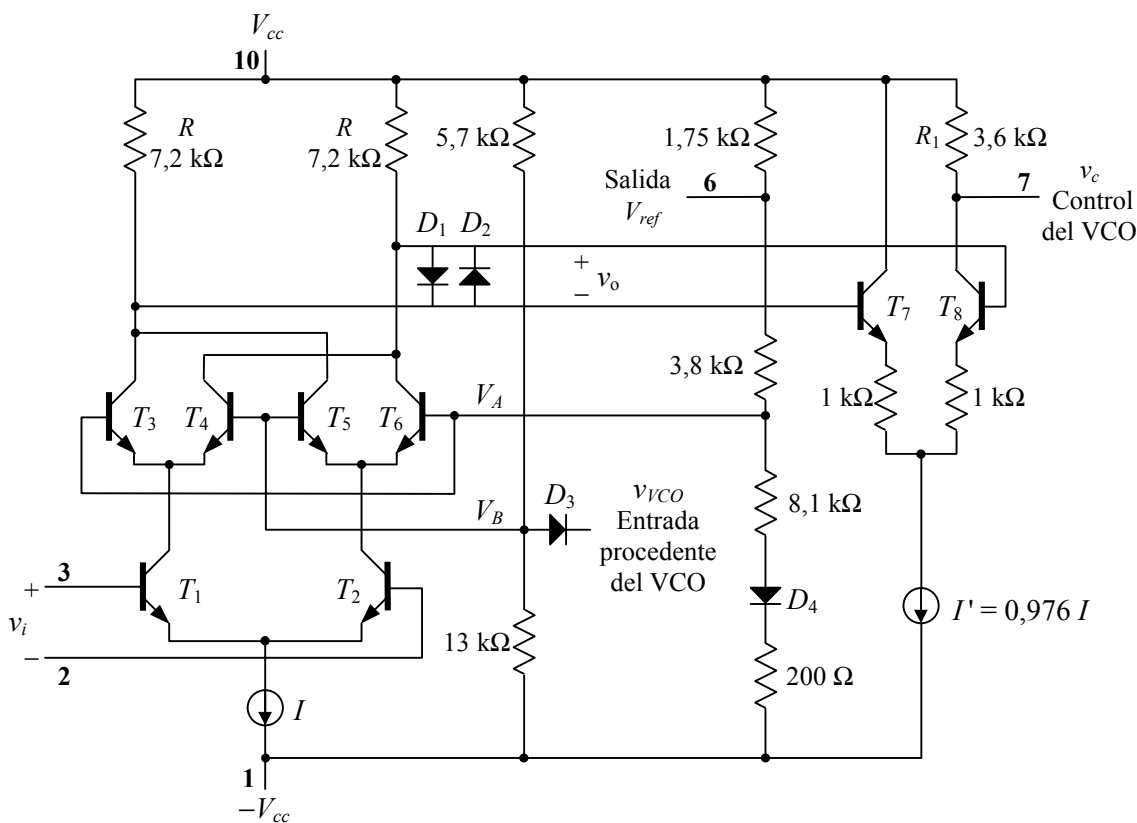
**Solución:** Para  $\xi = \sqrt{1/2}$  el máximo error normalizado es, según la ecuación (60) (o la gráfica) igual a 1,509. Debe ser

$$1,509 \frac{\Delta\omega}{\omega_n} = 1,509 \frac{\Delta\omega}{500/s} < \frac{\pi}{2},$$

de donde resulta  $\Delta\omega < 500 \times \pi/2/1,509 = 509/s$ , de donde  $\Delta f_{\text{máx}} = 81 \text{ Hz}$ .

### 7. El PLL monolítico LM565

Se han implementado diversos circuitos integrados monolíticos que realizan la función de un lazo de fijación de fase. Entre ellos se encuentran el CD4046 y el LM565, de los cuales estudiaremos el último. El diagrama de bloques corresponde esencialmente al indicado en la figura 4. El detector de fase es de tipo multiplicativo, basado en la estructura de un multiplicador de Gilbert (Apéndice 2) como se indica en la figura 15.



**Figura 15.** Diagrama esquemático de la sección detectora de fase del PLL LM565, basada en el multiplicador de Gilbert que se analiza en el Apéndice 2. Los números en negrita indican los terminales.

Las fuentes de corriente  $I$  están determinadas por un espejo de corriente que copia la corriente que circula por la rama de las resistencias de  $1,75\text{ k}\Omega$ ,  $3,8\text{ k}\Omega$ ,  $8,1\text{ k}\Omega$  y  $200\ \Omega$ . Para una alimentación de  $\pm 6\text{ V}$ , resulta

$$I = \frac{2 \times 6\text{ V} - 0,6\text{ V}}{1,75\text{ k}\Omega + 3,8\text{ k}\Omega + 8,1\text{ k}\Omega + 200\ \Omega} = 0,82\text{ mA}$$

$$V_A = -6\text{ V} + 0,82\text{ mA} \times (8,1\text{ k}\Omega + 200\ \Omega) + 0,6\text{ V} = 1,41\text{ V}$$

A su vez, en reposo,

$$V_B = -6\text{ V} + 12\text{ V} \frac{13\text{ k}\Omega}{13\text{ k}\Omega + 5,7\text{ k}\Omega} = 2,34\text{ V}$$

Según veremos, la entrada  $v_{VCO}$  proveniente de la salida del VCO puede tomar dos valores: 5,4 V y -0,6 V. En el primer caso el diodo  $D_3$  está polarizado inversamente e inhibe toda modificación de  $V_B$ , de modo que resulta  $V_B > V_A$ . En el segundo caso el diodo puede conducir y fuerza  $V_B$  a un valor 0, de modo que  $V_B < V_A$ .

Si no estuvieran los diodos  $D_1$  y  $D_2$ , la salida  $v_o$  del multiplicador sería, según el análisis realizado en el Apéndice 2 (ver ecuación (A2.9)),

$$v_o = R I Th\left(\frac{V_B - V_A}{2V_T}\right) Th\left(\frac{v_i}{2V_T}\right),$$

que, para valores grandes de  $V_B - V_A$  y  $v_i$  se reduce a

$$v_o \cong R I \operatorname{sg}(v_i) \operatorname{sg}(V_B - V_A) = R I \operatorname{sg}(v_i) \operatorname{sg}(v_{VCO}).$$

Dado que  $R I = 7,2 \text{ k}\Omega \times 0,82 \text{ mA} = 6,41 \text{ V}$ , siempre conduce uno de los diodos  $D_1$  y  $D_2$ , limitando dicho valor a  $\pm 0,6 \text{ V}$ , de manera que

$$v_o = V_D \operatorname{sg}(v_i) \operatorname{sg}(v_{VCO}). \quad (61)$$

Veamos el efecto de dicha tensión aplicada al par diferencial  $T_7$ - $T_8$ . Sin las resistencias degenerativas de emisor  $R_e = 1 \text{ k}\Omega$ , esta tensión sería suficiente para cortar alternativa-mente uno u otro transistor. Debido a estas resistencias, los transistores no llegan a cor-tarse. Se tiene

$$I_8 - I_7 = \frac{v_o}{R_e}$$

$$I_8 + I_7 = I'$$

de donde

$$I_8 = \frac{v_o + R_e I'}{2R_e}$$

En ausencia de un capacitor de filtrado, la tensión  $v_c$  de control del VCO (terminal 7) toma, por consiguiente, el siguiente valor:

$$v_c = V_{cc} - \frac{R_1}{2R_e} (V_D \operatorname{sg}(v_i) \operatorname{sg}(v_{VCO}) + R_e I') \quad (62)$$

Al colocar un capacitor en paralelo con  $R_1$  (o, para el caso, entre el terminal 7 y masa), se obtendrá un valor de continua que dependerá linealmente de la fase entre  $v_i$  y  $v_{VCO}$ . En efecto, recordando (7) y (8) resulta

$$v_{c \text{ med}} = V_{cc} - \frac{R_1}{2R_e} \left( \frac{2V_D}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + R_e I' \right)$$

es decir,

$$v_c \text{ med} = V_{cc} - \frac{R_1 I'}{2} + \frac{R_1 V_D}{\pi R_e} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right). \quad (63)$$

Para  $\varphi = \pi/2$ , es decir, cuando el oscilador oscila a la frecuencia libre, el valor medio de la tensión de control es  $V_{cc} - \frac{1}{2}R_1 I'$ . En el terminal 6 se provee una salida, denominada  $V_{ref}$ , que coincide con este valor:

$$V_{ref} = V_{cc} - \frac{1}{2} R_1 I'. \quad (64)$$

Obsérvese que la frecuencia libre no se obtiene para  $v_c = 0$ , como en el modelo idealizado, sino para  $v_c = V_{ref}$ , es decir, para  $v_c - V_{ref} = 0$ . Para una alimentación de  $\pm 6$  V resulta

$$V_{ref} = 6 \text{ V} - \frac{1}{2} 3,6 \text{ k}\Omega \times 0,82 \text{ mA} \times 0,976 = 4,56 \text{ V}. \quad (65)$$

Este valor es prácticamente coincidente con el valor típico de 4,50 V indicado en las especificaciones. El terminal 6 está previsto para referir a ella la tensión de entrada al VCO (que es la señal demodulada).

La ecuación (63) nos permite, asimismo, obtener la constante  $K_{DA}$  del detector de fase y el amplificador (conformado por el par diferencial):

$$K_{DA} = - \frac{R_1 V_D}{\pi R_e}. \quad (66)$$

Hecho el cálculo, resulta  $K_{DA} = -0,688$  V/rad, valor coincidente con el valor típico de  $-0,68$  V/rad dado en las especificaciones.<sup>1</sup>

En la figura 16 se muestra el diagrama esquemático del oscilador controlado por tensión (VCO). A grandes rasgos, la columna integrada por los transistores  $T_1$  a  $T_8$  constituye una fuente de corriente controlada por tensión y de polaridad conmutable cuyo fin es cargar y descargar el capacitor externo  $C$ , en tanto el resto de los transistores configuran un comparador con histéresis.

Observemos primero que los transistores  $T_1$  y  $T_2$  conforman un seguidor con muy baja caída entre la tensión de control  $v_c$  y el emisor de  $T_2$ . Ello implica que la corriente  $I_o$  que circula por la resistencia externa  $R$  estará dada por

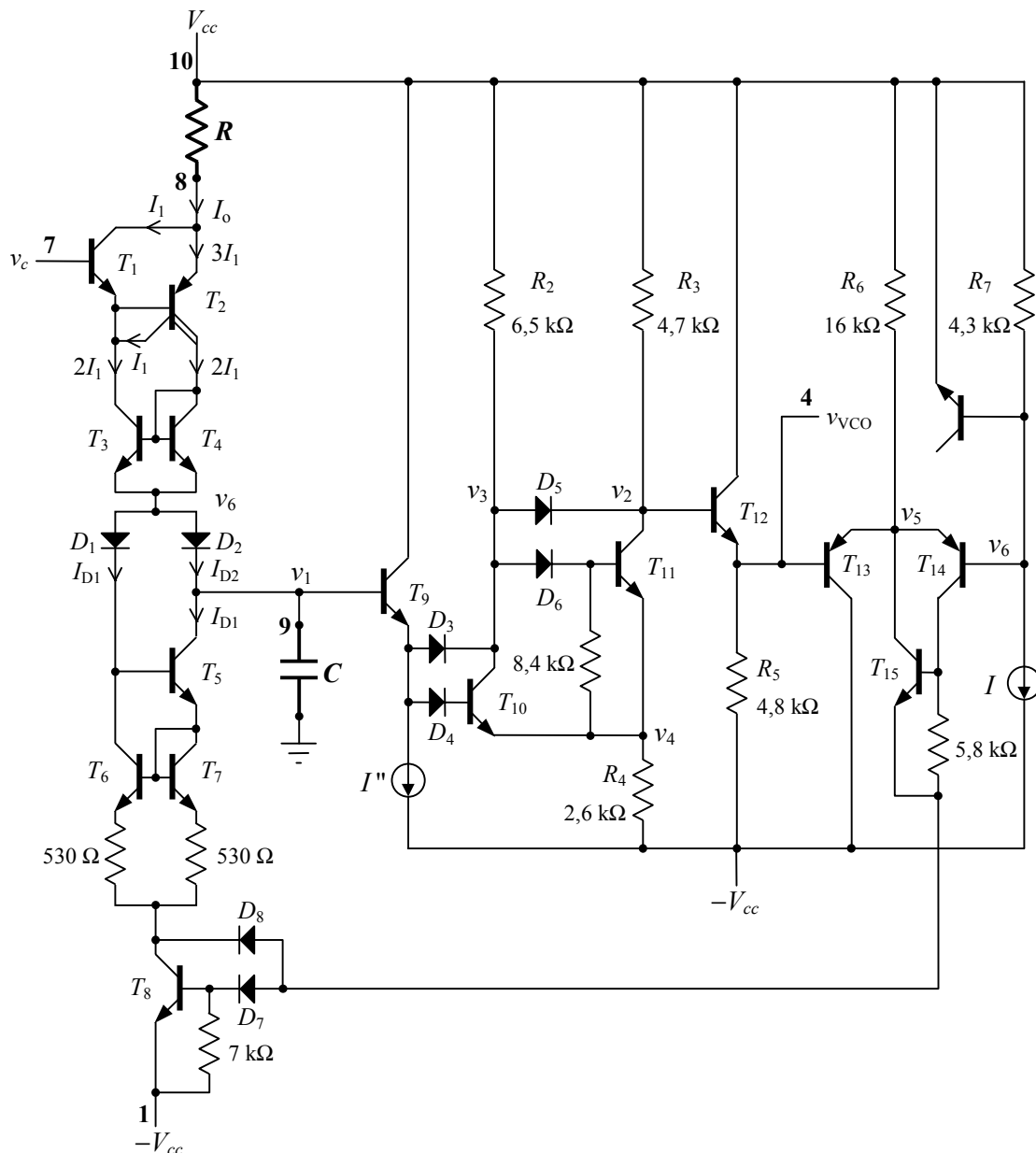
$$I_o = \frac{V_{cc} - v_c}{R}. \quad (67)$$

Dicha corriente atraviesa los transistores  $T_1$  a  $T_4$  y es descargada hacia la estructura inferior formada por  $D_1$ ,  $D_2$  y  $T_5$  a  $T_6$ .

Cuando  $T_8$  está cortado, tanto  $T_6$  como  $T_7$  y  $T_5$  están también cortados. Ello implica que  $D_1$  está cortado y por consiguiente  $D_2$  conduce la totalidad de la corriente proveniente de  $T_3$  y  $T_4$ , que se dirige al capacitor cargándolo a pendiente constante y positiva  $I_o/C$ . Cuando, contrariamente,  $T_8$  conduce, tanto  $T_6$  como  $T_7$  y  $T_5$  conducen y forman un espejo de corriente. Dado que el potencial  $v_6$  de los emisores de  $T_3$  y  $T_4$  se vuelve muy negativo,  $D_2$  se corta y en consecuencia  $T_5$  absorbe del capacitor una corriente igual a  $I_o$ . Por consiguiente el capacitor se descarga ahora a pendiente constante negativa  $-I_o/C$ .

<sup>1</sup> En realidad se especifica el valor sin signo, debido a que la tensión de entrada al VCO se interpreta como  $V_{cc} - v_c$  en lugar de  $v_c$ .





**Figura 16.** Diagrama esquemático del oscilador controlado por tensión del PLL LM565. Los números en negrita indican los terminales. La resistencia  $R$  y el capacitor  $C$  son externos.

Supongamos que inicialmente  $T_{10}$  está cortado. Entonces también están cortados  $D_4$  y  $D_3$ . El potencial  $v_3$  tiende a subir debido a la resistencia  $R_2 = 6,5 \text{ k}\Omega$  conectada a  $V_{cc}$ , por lo cual  $D_5$ ,  $D_6$  y  $T_{11}$  conducen. A efectos de calcular el estado del resto del circuito determinemos los potenciales  $v_2$ ,  $v_3$  y  $v_4$ . Se verifica

$$v_2 = -V_{cc} + \left( \frac{V_{cc} - v_2}{R_3} + \frac{V_{cc} - (v_2 + 0,6 \text{ V})}{R_2} \right) R_4 + 0,6 \text{ V} \quad (68)$$

de donde podemos despejar  $v_2$ . Suponiendo  $V_{cc} = 6 \text{ V}$ ,

$$v_2 = \frac{\left(\frac{R_4}{R_3} + \frac{R_4}{R_2} - 1\right)V_{cc} + \left(1 - \frac{R_4}{R_2}\right)0,6 \text{ V}}{\left(\frac{R_4}{R_3} + \frac{R_4}{R_2} + 1\right)} = 0,04 \text{ V} \cong 0. \quad (69)$$

De allí,

$$v_3 \cong 0,6 \text{ V}, \quad (70)$$

$$v_4 \cong -0,6 \text{ V}. \quad (71)$$

Como el emisor de  $T_{12}$  está conectado a  $-V_{cc}$  por medio de la resistencia  $R_5$ , dicho transistor conduce, ubicándose el potencial de salida en

$$v_{vco} = v_2 - 0,6 \text{ V} = -0,6 \text{ V}. \quad (72)$$

El emisor de  $T_{13}$  está conectado a  $V_{cc}$  a través de la resistencia  $R_6$ , por lo que este transistor también está en conducción, fijando

$$v_5 \cong 0. \quad (73)$$

El potencial  $v_6$  está fijado por la caída de potencial en la resistencia  $R_7$  debida a la fuente de corriente  $I = 0,82 \text{ mA}$ :

$$v_6 = V_{cc} - 0,82 \text{ mA} \times 4,3 \text{ k}\Omega = 2,47 \text{ V}. \quad (74)$$

La juntura BE de  $T_{14}$  resulta, así, estar polarizada inversamente y por lo tanto  $T_{14}$  y  $T_{15}$  están cortados, lo cual corta también a  $T_8$ . Según vimos, esto implica que  $C$  se carga con pendiente positiva, dada por  $I_0/C$ . La tensión  $v_1$  aumentará, entonces, paulatinamente, hasta que la base de  $T_9$  llegue a estar aproximadamente a  $3V_{BE}$  por encima de  $v_4$ . Ello sucede cuando

$$v_1 = v_4 + 3V_{BE} \cong 1,2 \text{ V}. \quad (75)$$

En ese momento  $D_4$  y  $T_{10}$  entran en conducción. Al conducir  $T_{10}$  se cierra un lazo de realimentación positiva corriente-corriente alrededor de  $T_{11}$ . En efecto, si la corriente de colector de  $T_{11}$  disminuye,  $v_4$  tiende a disminuir. Como el potencial de la base de  $T_{10}$  está fijo por el potencial  $v_1$  del capacitor y las caídas  $V_{BE9}$  y  $V_{D4}$ ,  $T_{10}$  tiende a conducir más provocando una caída de  $v_3$  que despolariza aún más a  $T_{11}$ . Dicho lazo es fuertemente inestable tendiendo a cortar a  $T_{11}$ . Una vez cortado  $T_{11}$ , la corriente circulante por la resistencia  $R_4$ , es decir

$$\frac{-0,6 \text{ V} - (-V_{cc})}{2,6 \text{ k}\Omega} = 2,08 \text{ mA},$$

pasa a estar suministrada por  $T_{10}$ . Dicha corriente es la suma de la que viene por  $D_3$  desde  $T_9$  y la que viene por  $R_2$ . Esta última vale

$$\frac{V_{cc} - (v_4 + 0,6 \text{ V})}{6,5 \text{ k}\Omega} = 0,92 \text{ mA};$$

el resto,  $2,08 \text{ mA} - 0,92 \text{ mA} = 1,16 \text{ mA}$ , circula por  $D_3$  y  $T_9$ .

Al cortarse  $T_{11}$ ,  $v_2$  sube prácticamente hasta  $V_{cc}$  y  $T_{12}$  se polariza, fijando un potencial de salida

$$v_{VCO} \cong V_{cc} - 0,6 \text{ V} = 5,4 \text{ V} \quad (76)$$

Como  $v_6 = 2,47 \text{ V}$ ,  $v_5$  puede, a lo sumo, valer  $3,07 \text{ V}$  (en caso de que  $T_{14}$  conduzca). La base de  $T_{13}$  sube mucho más que eso, por lo que  $T_{13}$  se corta, pasando a conducir  $T_{14}$ ,  $T_{15}$  y  $T_8$ .

Como vimos, la conducción de  $T_8$  invierte la pendiente de la tensión en el capacitor  $C$ , comenzando el proceso de descarga, disminuyendo  $v_1$ . Dado que el conjunto  $T_9$ - $D_4$ - $T_{10}$  se comporta como un seguidor con caída  $3V_{BE}$ ,  $v_4$  también empieza a disminuir. Al hacerlo, por un lado disminuye la corriente por  $R_4$  y por otro aumenta la que circula por  $R_2$ . Cuando se igualan, el diodo  $D_3$  deja de conducir y entonces una ulterior reducción de  $v_1$  hará que la corriente por  $R_2$  empiece a disminuir, por lo que  $v_3$  aumenta. En el instante en que

$$v_3 - v_4 = 2V_{BE}, \quad (77)$$

tanto  $D_6$  como  $T_{11}$  empiezan a conducir y vuelve a cerrarse el lazo de realimentación positiva. Circula más corriente por la resistencia  $R_4$ , aumenta  $v_4$  y  $D_4$ - $T_{10}$  se despolarizan, cortándose rápidamente. Esto sucede cuando

$$V_{cc} - i_{R_4} R_2 - (v_1 - 3V_{BE}) = 2V_{BE}, \quad (78)$$

donde

$$i_{R_4} = \frac{v_1 - 3V_{BE} - (-V_{cc})}{R_4}. \quad (79)$$

Resulta

$$v_1 = \frac{-(R_2 - R_4)V_{cc} + (3R_2 + R_4)V_{BE}}{R_2 + R_4} = -1,11 \text{ V}. \quad (80)$$

A partir de este momento se vuelve a la situación inicial:  $T_8$  conduce y la pendiente de  $v_1$  se vuelve positiva, cargándose el capacitor.

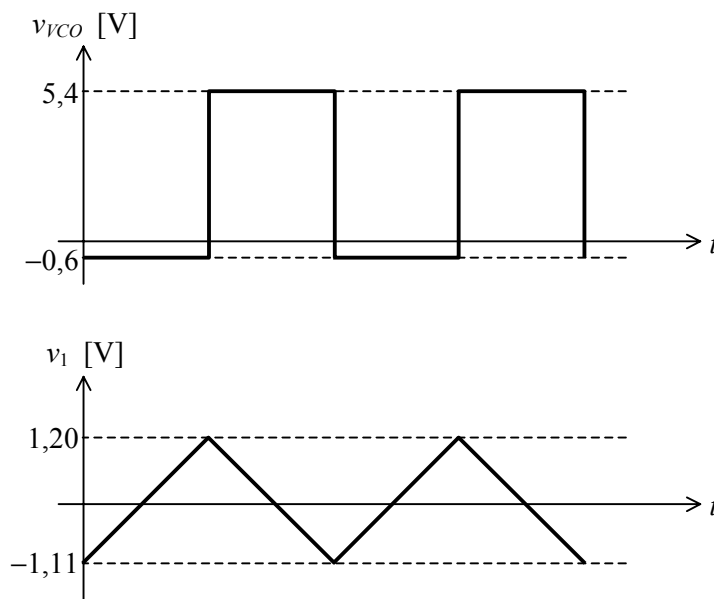
En resumen, el capacitor se carga y descarga con pendientes simétricas iguales a  $\pm I_0/C$ , oscilando entre  $1,2 \text{ V}$  y  $-1,11 \text{ V}$  (figura 17). La frecuencia resultante es la recíproca del periodo, es decir:

$$f_{VCO} = \frac{I_0}{2C(V_{\text{máx}} - V_{\text{mín}})} = \frac{V_{cc} - v_c}{2RC(V_{\text{máx}} - V_{\text{mín}})}. \quad (81)$$

Para  $V_{cc} = 6 \text{ V}$  la frecuencia libre se da cuando  $v_c = V_{ref} = 4,56 \text{ V}$ . Resulta

$$f_0 = \frac{6 \text{ V} - 4,56 \text{ V}}{2RC(1,2 \text{ V} + 1,11 \text{ V})} = \frac{0,312}{RC}. \quad (82)$$

valor bastante cercano al indicado ( $0,3/RC$ ). Podemos obtener la constante del oscilador  $K_{OSC}$  a partir de la ecuación (81):



**Figura 17.** Formas de onda en el oscilador controlado por tensión. Arriba, a la salida. Abajo, en el terminal 9 (conexión del capacitor C).

$$K_{OSC} = -\frac{2\pi}{2RC(V_{\text{máx}} - V_{\text{mín}})} = -\frac{2\pi f_o}{1,44 \text{ V}} = -\frac{4,36}{\text{V}} f_o, \quad (83)$$

valor bastante cercano al correspondiente a las especificaciones,  $-(4,15/\text{V}) f_o$ .

## 8. Aplicaciones del PLL

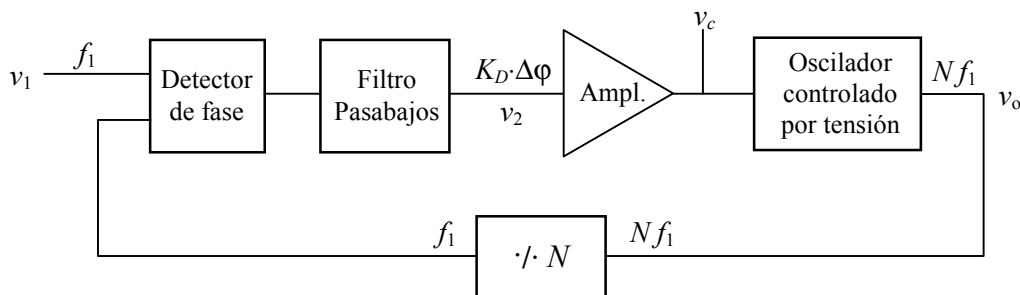
El PLL permite resolver diversos problemas de interés técnico. Las aplicaciones se dividen en dos grandes grupos: filtros (lineales y no lineales) y demoduladores.

### 8.1. Filtros

El PLL permite, en primer lugar, la realización de filtros de fase. Su finalidad es recuperar o reconstruir una señal de entrada corrupta por ruido de fase, es decir, fluctuaciones aleatorias de frecuencia o fase causadas por la intermodulación con ruido en algún punto de su recorrido o bien por un fenómeno ruidoso de modulación de fase o de frecuencia. Esta fluctuación se denomina *jitter*. Un ejemplo se da en las grabaciones en medios digitales (CD, DAT, MD). La velocidad de reproducción tiene habitualmente variaciones debidas a fenómenos electromecánicos, por ejemplo vibraciones, ruido o ripple en la alimentación de los motores, lo cual se traslada a la señal en forma de jitter. El efecto del jitter, si no es corregido, incrementa el ruido equivalente de la señal. El PLL puede reconstruir la base de tiempo (reloj) a partir de la frecuencia fluctuante así obtenida, manteniendo la frecuencia media y reduciendo considerablemente las fluctuaciones de fase mediante un filtro de baja frecuencia de corte.

En segundo lugar, dado que el PLL tiene por un lado la capacidad de rechazar ruido y por otro tiene un rango acotado de captura y enganche, puede engancharse a una frecuencia a pesar de que existan otras presentes simultáneamente. Ello sucede en el caso de varias señales moduladas en frecuencia con diversas portadoras. El PLL tendrá una acción selectiva, enganchándose sólo a la frecuencia que se encuentre dentro de su rango de captura.

Por último, utilizado en conjunto con un divisor de frecuencia en el lazo de realimentación, como se muestra en la figura 18, el PLL permite obtener una señal de frecuencia múltiplo de la frecuencia de entrada. Si  $f_1$  es la frecuencia de entrada y se desea



**Figura 18.** Diagrama esquemático de un multiplicador de frecuencia obtenido insertando un divisor de frecuencia en el lazo de realimentación.

obtener una frecuencia  $Nf_1$  la frecuencia deseada, el VCO debe estar diseñado para funcionar con una frecuencia libre próxima a  $Nf_1$ . El divisor de frecuencia la convertirá en  $f_1$  y será éste el valor que se comparará con la entrada.

El divisor de frecuencia se implementa normalmente con un circuito lógico basado en un contador. Existen muchos modelos, inclusive algunos cuya cuenta máxima es programable mediante conexiones externas, como el CD4018, o a través de una entrada digital, como el CD4522 (binario) o el CD4526 (decimal).

Si el filtro no está bien diseñado, puede suceder que la señal obtenida contenga una modulación de frecuencia periódica debida al ripple residual. Mientras que en el PLL original dicho ripple podría causar una ligera asimetría de la forma de onda (al ser la tensión de control media diferente en cada semiperíodo), en el multiplicador la tensión de control continúa variando en la misma dirección durante  $N$  ciclos.

## 8.2. Demoduladores

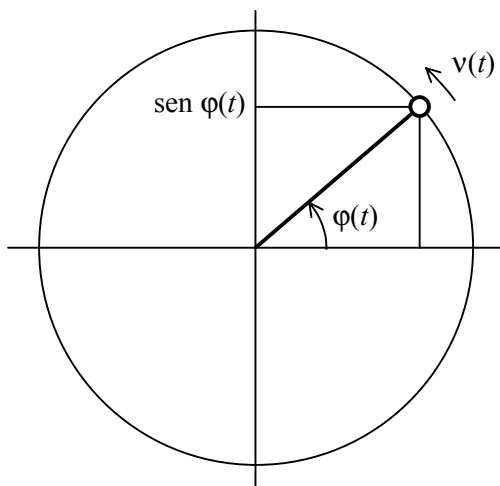
Los demoduladores pueden ser de tipo analógico o digital. Los demoduladores analógicos requieren que el VCO sea muy lineal. En efecto, el lazo de realimentación de fase sólo involucra la relación entre las frecuencias. Si es de ganancia considerable permite una buena linealidad entre las frecuencias (de hecho, la constante teórica es 1), pero la relación entre  $v_c$  y la frecuencia depende exclusivamente de la linealidad del VCO.

Los demoduladores digitales se utilizan para demodular señales FSK (frequency shift keying). En este caso, normalmente la señal contiene saltos de frecuencia entre un valor mínimo y uno máximo. La precaución a tomar es que la respuesta transitoria no produzca sobrepicos que pudieran alterar la señal decodificada.

## APÉNDICE 1

### Relación entre la frecuencia y la fase

Para encontrar la relación entre la fase y la frecuencia, tengamos en cuenta que la función senoidal puede pensarse como la proyección sobre un eje vertical de un vector que gira con una velocidad angular  $v$ , que puede o no ser constante, como se muestra en la figura A.1. En este contexto, la frecuencia puede definirse como la cantidad de



**Figura A.1.** Diagrama para obtener la relación entre la fase y la frecuencia .

vueltas por unidad de tiempo. Dado que una vuelta equivale a un ángulo de  $2\pi$ , entonces la cantidad de vueltas en un intervalo  $[t, t + \Delta t]$  es igual al ángulo recorrido dividido por  $2\pi$ :

$$\Delta vuela = \frac{1}{2\pi} \Delta\varphi = \frac{1}{2\pi} [\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)]. \quad (\text{A.1})$$

Entonces la frecuencia es

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta vuela}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \varphi'(t), \quad (\text{A.2})$$

de donde

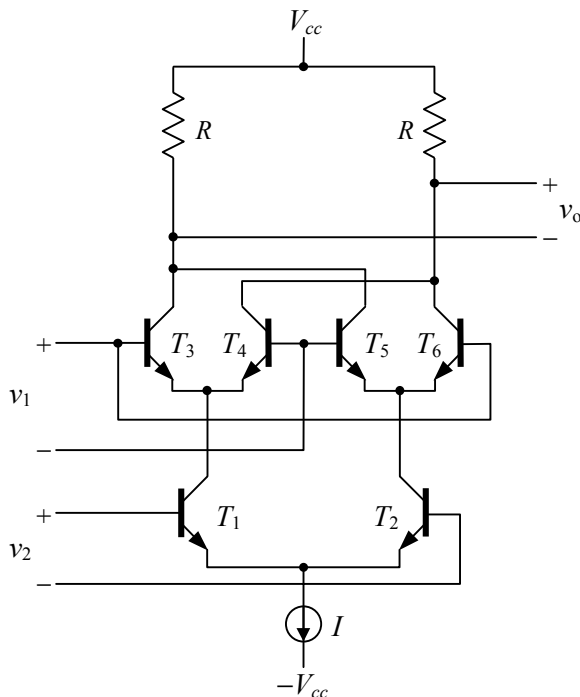
$$\omega(t) = 2\pi f(t) = \varphi'(t), \quad (\text{A.3})$$

con lo cual queda demostrado que la pulsación instantánea es la derivada de la fase. Esta última relación muestra, además, que la velocidad angular  $v$  y la pulsación  $\omega$  son iguales.

## APÉNDICE 2

### Análisis del multiplicador de Gilbert

En la figura A.2 se reproduce la estructura esquemática de un multiplicador de Gilbert.



**Figura A.2.** Diagrama esquemático de un multiplicador de Gilbert.

Planteemos primero las relaciones básicas entre las variables fundamentales del circuito. Las corrientes de colector de los transistores cumplen:

$$i_{C1} = i_{C3} + i_{C4}, \tag{A2.1a}$$

$$i_{C2} = i_{C5} + i_{C6}, \tag{A2.1b}$$

$$i_{C1} + i_{C2} = I. \tag{A2.1c}$$

Además, las ecuaciones simplificadas de Ebers y Moll indican que

$$i_{Cn} = I_s e^{v_{BE_n}/V_T}, \quad n = 1, \dots, 6 \tag{A2.2}$$

donde  $V_T = kT/q$ , siendo  $k$  la constante de Boltzmann ( $k = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K),  $q$  la carga eléctrica del electrón ( $q = 1,6 \times 10^{-19}$  C), y  $T$  la temperatura absoluta. Además,

$$v_1 = v_{BE3} - v_{BE4} = v_{BE6} - v_{BE5}, \tag{A2.3a}$$

$$v_2 = v_{BE1} - v_{BE2}, \tag{A2.3b}$$

Por último,

$$v_o = (i_{C3} - i_{C4} + i_{C5} - i_{C6})R. \quad (\text{A2.4})$$

De las ecuaciones (A2.2) se deduce que

$$\frac{i_{C3}}{i_{C4}} = e^{\frac{V_{BE3} - V_{BE4}}{V_T}} \quad (\text{A2.5a})$$

$$\frac{i_{C6}}{i_{C5}} = e^{\frac{V_{BE6} - V_{BE5}}{V_T}} \quad (\text{A2.5a})$$

y de (A2.3a),

$$\frac{i_{C3}}{i_{C4}} = \frac{i_{C6}}{i_{C5}} = e^{\frac{v_1}{V_T}} \quad (\text{A2.6a})$$

Análogamente,

$$\frac{i_{C1}}{i_{C2}} = e^{\frac{v_2}{V_T}} \quad (\text{A2.6b})$$

Por otra parte,

$$I = i_{C1} + i_{C2} = i_{C2} \left( 1 + \frac{i_{C1}}{i_{C2}} \right) = i_{C2} \left( 1 + e^{v_2/V_T} \right),$$

de donde

$$i_{C2} = \frac{I}{1 + e^{v_2/V_T}}. \quad (\text{A2.7a})$$

Análogamente,

$$i_{C1} = \frac{I}{1 + e^{-v_2/V_T}}. \quad (\text{A2.7b})$$

En forma similar,

$$i_{C4} = \frac{i_{C1}}{1 + e^{v_1/V_T}}, \quad i_{C6} = \frac{i_{C2}}{1 + e^{-v_1/V_T}}, \quad (\text{A2.8})$$

$$i_{C3} = \frac{i_{C1}}{1 + e^{-v_1/V_T}}, \quad i_{C5} = \frac{i_{C2}}{1 + e^{v_1/V_T}}.$$

Sustituyendo en éstas las (A2.7) y restando  $i_{C3} - i_{C4}$  se obtiene



$$i_{C3} - i_{C4} = \frac{I}{1 + e^{-v_2/V_T}} \frac{e^{v_1/V_T} - 1}{e^{v_1/V_T} + 1} = \frac{I}{1 + e^{-v_2/V_T}} Th\left(\frac{v_1}{2V_T}\right),$$

Análogamente,

$$i_{C5} - i_{C6} = \frac{I}{1 + e^{v_2/V_T}} \frac{1 - e^{v_1/V_T}}{1 - e^{v_1/V_T}} = -\frac{I}{1 + e^{v_2/V_T}} Th\left(\frac{v_1}{2V_T}\right).$$

Finalmente, reemplazando en (A2.4),

$$v_o = R I Th\left(\frac{v_1}{2V_T}\right) Th\left(\frac{v_2}{2V_T}\right). \quad (A2.9)$$

Para  $v_1, v_2 < V_T$

$$v_o = R I \frac{v_1}{2V_T} \frac{v_2}{2V_T} = \frac{R I}{4V_T^2} v_1 v_2. \quad (A2.10)$$

La aproximación es muy buena dado que la tangente hiperbólica tiene un desarrollo de Taylor  $Th x \cong x - x^3/3$  en el cual no aparece el término cuadrático. Si  $v_1$  y  $v_2$  son del orden de  $V_T$  el error es menor del 4%.

Si, en cambio,  $v_1, v_2 \gg V_T$  se ingresa en la zona no lineal y entonces

$$v_o \cong R I sg(v_1) sg(v_2), \quad (A2.11)$$

donde  $sg(x)$  es la función signo.

## Bibliografía

- Gray, Paul; Mayer, Robert. "Analysis and Design of Analog Integrated Circuits". Editorial John Wiley & Sons. Singapur, 1993 (Hay versión castellana)
- Kuo, Benjamin. "Sistemas Automáticos de Control". Editorial C.E.C.S.A. Barcelona, España, 1974.
- Mills, Thomas B. "The Phase Locked Loop IC as a Communication System Building Block". National Semiconductor Application Note 46 June 1971
- Miyara, Federico. "Amplificadores realimentados". Publicación interna de la cátedra. 2005. Disponible en Internet: <http://www.fceia.unr.edu.ar/enica3/realim.pdf>
- Miyara, Federico. "Estabilidad de amplificadores realimentados". Publicación interna de la cátedra. Disponible en Internet: <http://www.fceia.unr.edu.ar/enica3/estab.pdf>
- National Semiconductor. Linear Databook. 1995
- National Semiconductor. Audio Radio Handbook. 1980
- National Semiconductor. Linear Application Handbook. 1986
- Sheingold, Daniel H. (editor). "Nonlinear circuits handbook. Designing with analog function modules and IC's". Analog Devices. Norwood, 1974.
- Watkinson, John. "Audio Digital". Editorial Paraninfo. Madrid, 1994.