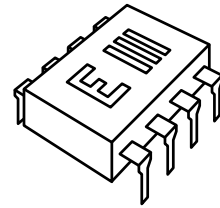




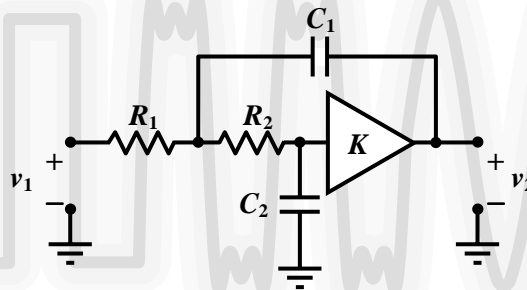
Universidad Nacional de Rosario  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Escuela de Ingeniería Electrónica  
Departamento de Electrónica



## ELECTRÓNICA III

# FILTROS ACTIVOS

Federico Miyara



**Segunda Edición - Año 2004**

B07.00

Código interno de la publicación: B07.00  
Primera edición: 1991  
Mecanografiado: Roger Delgado  
Segunda edición corregida y ampliada y Primera edición digital  
Abril de 2004  
<http://www.fceia.unr.edu.ar/enica3/filtros-t.pdf>

# FILTROS ACTIVOS

## 1. Introducción

Puede definirse un *filtro* como cualquier dispositivo que modifica de un modo determinado una señal que pasa a través de él. Algunos autores reservan la denominación de filtros para los dispositivos selectores de frecuencia, es decir, aquellos que “dejan pasar” las señales presentes en ciertas bandas de frecuencia y “bloquean” las señales de otras bandas. Aunque existen muchos filtros de interés práctico que no cumplen esa función, por lo que preferimos la definición más amplia, la mayoría de los filtros que trataremos son selectores de frecuencia. La excepción la constituyen los *filtros pasatodo* que, sin alterar la amplitud, modifican la fase.

Hay diversas clasificaciones de los filtros. Cuando la señal es una magnitud eléctrica (corriente o tensión), es un *filtro eléctrico*. Existen también *filtros mecánicos*, *filtros acústicos*, *filtros ópticos*, etc.

Otra clasificación es en *filtros lineales* y *filtros no lineales* según que su comportamiento pueda o no modelizarse matemáticamente con ecuaciones lineales. Un ejemplo de filtro no lineal es un comparador de tensión. Otro, un rectificador.

Otra clasificación es en *filtros analógicos* y *filtros digitales*. Los filtros analógicos son aquéllos en los cuales la señal puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo, y los digitales corresponden al caso en que la señal toma sólo valores discretos. También pueden clasificarse en *filtros continuos* y *filtros discretos* o *muestreados*, según que la señal se considere en todo instante o en instantes discretos. Dado que los filtros digitales en la práctica son siempre muestreados, el nombre “filtro digital” se refiere habitualmente a filtros discretos digitales. Sin embargo, existen filtros discretos no digitales, como los filtros de capacidades conmutadas.

Finalmente, los filtros también pueden clasificarse en *filtros activos* o *filtros pasivos* según empleen o no fuentes controladas (elementos activos, tales como amplificadores y sus derivados). Los filtros eléctricos pasivos se implementan en general con inductores y capacitores. Dado que los inductores son elementos, voluminosos, pesados y costosos, el empleo de filtros pasivos es poco conveniente excepto en frecuencias bastante altas. Los inductores pueden eliminarse mediante el uso de amplificadores y técnicas de realimentación.

En lo que sigue nos ocuparemos de los *filtros eléctricos*, *analógicos*, *lineales* y *activos*. Comenzaremos por los filtros continuos y luego daremos nociones de aplicación de un tipo particular de filtros discretos: los de capacidades conmutadas.

Nuestro objetivo será diseñar un filtro activo que satisfaga los requerimientos de un problema dado.

**Ejemplo 1:** Se tiene una onda cuadrada de amplitud fija y frecuencia variable entre 50 Hz y 60 Hz. Se desea convertirla en senoidal con distorsión armónica  $DTA < 1\%$  y una fluctuación de amplitud no mayor de  $\pm 5\%$ .

Como en todo problema de diseño, la solución no es única, debiéndose, en muchos casos, optar entre diversos caminos para avanzar en el diseño. La mayor sencillez, el menor costo, o la mayor independencia de tolerancias u otras no idealidades pueden ser criterios útiles para tomar una decisión.

## 2. Conceptos básicos

### 2.1. Función de transferencia y atenuación

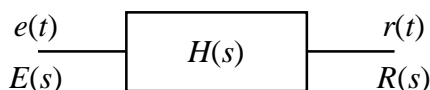
Emplearemos la representación mediante las transformadas de Laplace de la entrada y la salida. Entonces, para el sistema de la figura 1 se tiene

$$R(s) = H(s) E(s) \quad (1)$$

donde  $H(s)$  es la *función transferencia*. En la bibliografía se suele emplear también la *función de atenuación*:

$$A(s) = \frac{1}{H(s)} \quad (2)$$

Esta es una terminología heredada de la teoría de redes de transmisión y que ha resultado conveniente para el análisis de filtros pasivos, ya que el módulo en general resulta mayor que 1 y, en dB, positivo. En filtros activos no hay en principio una razón para continuar con el uso de la atenuación, excepto el aprovechamiento de las numerosas tablas y ábacos disponibles. En cambio el empleo de la función de transferencia o transmisión permite unificar la teoría de filtros con el resto de la teoría de sistemas lineales.



**Figura 1.** Un sistema lineal representable por medio de la función de transferencia que relaciona las transformadas de Laplace de la excitación y la respuesta

### 2.2. Módulo, fase y retardo de grupo

Nos interesará el comportamiento en  $s = j\omega$ , ya que corresponde a la respuesta en frecuencia. Podemos escribir

$$H(j\omega) = R(\omega) + j I(\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(j\omega)} \quad (3)$$

donde

$$|H(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \quad (4)$$

$$\varphi(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{I(\omega)}{R(\omega)} \quad (5)$$

Las funciones de transferencia sintetizables con una cantidad finita de componentes de circuito son siempre racionales. En particular esto implica que  $R(\omega)$  e  $I(\omega)$  son racionales. En cambio el módulo y la fase no lo son, lo cual dificulta su manejo analítico.  $|H(j\omega)|$  puede convertirse en racional elevándola al cuadrado:

$$|H(j\omega)|^2 = R^2(\omega) + I^2(\omega). \quad (6)$$

Asimismo, derivando  $\varphi(j\omega)$  respecto a  $\omega$  se obtiene:

$$\frac{d\varphi(j\omega)}{d\omega} = \frac{R(\omega) I'(\omega) - R'(\omega) I(\omega)}{R^2(\omega) + I^2(\omega)}, \quad (7)$$

que es, también, una función racional.

Se define el retardo de grupo  $\tau(\omega)$  como

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(j\omega)}{d\omega} \quad (8)$$

El signo y el nombre provienen de la interpretación siguiente. Si  $\varphi(0) = 0$ , entonces

$$\varphi(j\omega_0) = -\int_0^{\omega_0} \tau(\omega) d\omega. \quad (9)$$

Pero un desfase  $\varphi(j\omega_0)$  representa un retardo temporal

$$T(\omega_0) = -\frac{\varphi(j\omega_0)}{\omega_0}, \quad (10)$$

de donde

$$T(\omega_0) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^{\omega_0} \tau(\omega) d\omega. \quad (11)$$

De manera que el retardo que experimenta una senoide de frecuencia  $\omega_0$  es el promedio de  $\tau(\omega)$  entre 0 y  $\omega_0$ . En el caso particular en que  $\tau(\omega)$  es constante, representa el retardo que experimentan todas las frecuencias.

**Ejemplo 2:** En el caso de un filtro pasabajos de primer orden, es decir

$$H(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

resulta

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

Tomando módulo,

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

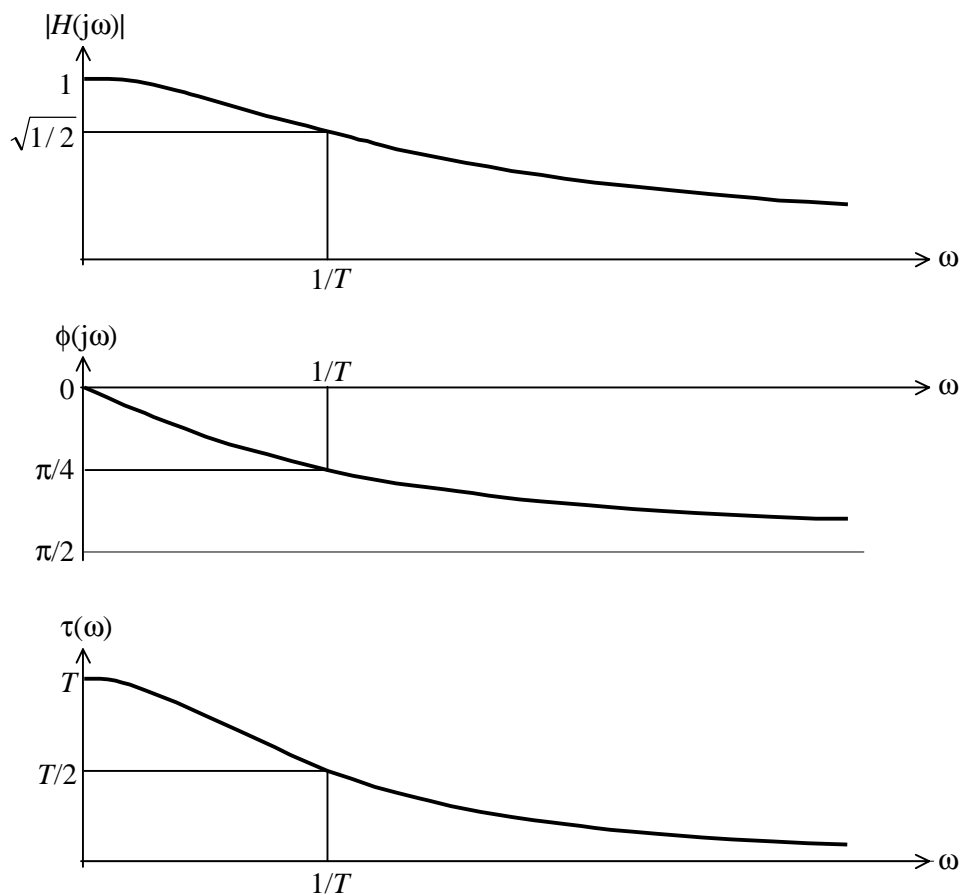
La fase vale

$$\phi(j\omega) = - \operatorname{arctg} \omega T$$

y el retardo de grupo,

$$\tau(\omega) = \frac{T}{1 + \omega^2 T^2}$$

Para  $\omega \ll 1/T$  el retardo de grupo es aproximadamente igual a la constante de tiempo  $T$ , lo cual puede interpretarse como que las bajas frecuencias se retardan un tiempo  $T$  al atravesar este sistema. En la figura 2 se ilustran estas respuestas.



**Figura 2.** Diagramas de amplitud, fase y retardo de grupo para un filtro de primer orden de frecuencia angular de corte  $1/T$ .

### 2.3. Transmisión sin distorsión

Un sistema transmite una señal sin distorsión cuando la forma de onda a la salida es igual a la de la entrada. Esto significa que la señal a lo sumo se retarda un tiempo  $T$  y queda multiplicada por una constante  $K$ :

$$r(t) = K e(t - T). \quad (12)$$

Transformando mediante el teorema del desplazamiento

$$R(s) = K e^{-sT} E(s), \quad (13)$$

por lo tanto se tiene la siguiente función de transferencia

$$H(s) = K e^{-sT}, \quad (14)$$

cuyos módulo, fase y retardo de grupo son, respectivamente,

$$|H(j\omega)| = |K| \quad (15a)$$

$$\arg H(j\omega) = -\omega T \quad (15b)$$

$$\tau(\omega) = T. \quad (15c)$$

El retardo de grupo es constante y coincide con el retardo que experimenta la onda. Esto concuerda con la interpretación obtenida antes, según la cual el promedio de  $\tau(\omega)$  es el retardo que experimenta cada armónico. En este caso todos los armónicos se retrasan el mismo tiempo  $T$ , que es precisamente el retardo de toda la señal.

#### Observaciones:

1) La transmisión sin distorsión corresponde a una función de transferencia no racional, por lo cual no puede lograrse con una cantidad finita de elementos de circuito. En la práctica, sólo es posible aproximarse a la misma.

2) Si se trabaja con señales contenidas en una banda de frecuencias (es decir, *señales limitadas en banda*) basta con que las expresiones anteriores se cumplan en esa banda. Esto puede facilitar la aproximación mencionada en la observación anterior.

### 2.4. Selectores de frecuencia

Los selectores de frecuencia son filtros que permiten el paso de las frecuencias dentro de ciertas bandas, llamadas *bandas de paso* y bloquean las frecuencias en otras bandas, denominadas *bandas de corte*. Idealmente en las bandas de paso debería haber transmisión sin distorsión, y en las bandas de corte la ganancia debería ser nula.

Existen cuatro tipos básicos de selectores de frecuencia: *pasabajos*, *pasaltos*, *pasabanda* y *rechazabanda*, que estudiaremos en las secciones siguientes. Hay también algunos selectores multibanda, como por ejemplo los filtros *peine*, que rechazan o permiten el paso de los armónicos de una frecuencia dada, utilizados para rescatar o eliminar componentes periódicas poliarmónicas de una señal espectralmente compleja. No obstante, estos filtros sólo se implementan digitalmente ya que su realización analógica supone dificultades y costo muy elevado.

## 2.5. Ecuallizadores

Los ecualizadores (del inglés *equalizers*, también traducidos a veces como *igualladores*) son filtros destinados a compensar irregularidades en la respuesta en frecuencia de determinados componentes o sistemas. En algunos casos tienen una respuesta normalizada prevista para un mejor aprovechamiento del rango de operación de un componente (por ejemplo, en el caso de los cabezales de los grabadores). En otros, son ajustables por el usuario, permitiendo compensar una respuesta arbitraria. Es el caso de los ecualizadores de bandas de octava o tercio de octava empleados en sistemas de audio.

## 2.6. Relación entre las respuestas transitoria y permanente

Si bien nuestra atención está dirigida principalmente al comportamiento de los filtros en el dominio frecuencial, su comportamiento temporal es, a veces, importante. Un ejemplo es la transmisión de pulsos, donde la función del filtro es limitar el contenido espectral alterando lo menos posible la forma de onda.

El comportamiento temporal de un filtro está fuertemente condicionado por su respuesta transitoria. Conceptualmente, el régimen transitorio es el recurso que tiene un sistema para llegar al régimen permanente (o definitivo) a partir de condiciones iniciales que no coinciden con las correspondientes a dicho régimen permanente.<sup>1</sup>

Nos preguntamos si existe alguna relación entre el régimen transitorio y la respuesta en frecuencia  $H(j\omega)$ . Para ello debe asimilarse el transitorio a un régimen permanente. Una de las excitaciones más utilizadas para el estudio del comportamiento transitorio es el escalón. Se puede lograr la asimilación mencionada reemplazando el escalón por un “escalón repetitivo”, es decir una onda cuadrada de muy baja frecuencia. Al estar las conmutaciones muy separadas en el tiempo, cada nueva conmutación encuentra el filtro con el transitorio anterior virtualmente extinguido y entonces la respuesta es enteramente comparable al transitorio producido por un escalón. Si la onda cuadrada se representa como una serie de Fourier,

$$v_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \operatorname{sen}(2k-1)\omega_1 t, \quad (16)$$

entonces la respuesta será

$$v_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|H(j(2k-1)\omega_1)|}{2k-1} \operatorname{sen}((2k-1)\omega_1 t + \varphi(j(2k-1)\omega_1)). \quad (17)$$

El transitorio correspondiente a un escalón unitario corresponde al límite cuando  $\omega_1 \rightarrow 0$ . Llamando  $\omega_k = (2k-1)\omega_1$  y  $\Delta\omega = 2\omega_1$  la sumatoria queda planteada en una forma cuyo límite es una integral. Puede verificarse que resulta

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow 0} v_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |H(j\omega)| \frac{\operatorname{sen}(\omega t + \varphi(j\omega))}{\omega} d\omega \quad (18)$$

<sup>1</sup> Cabe aclarar que sólo tiene sentido hablar de régimen permanente en el caso en que la señal excitadora es periódica.



Vemos, entonces, que una vez especificada una respuesta en frecuencia en amplitud y fase, la respuesta transitoria (ante un escalón) queda determinada unívocamente.

### 3. Etapas para el diseño de un filtro

El diseño de un filtro puede dividirse en cinco etapas:

- a) **Planteo:** descripción informal del problema
- b) **Especificación:** reformulación del problema en términos de una serie de parámetros cuantitativos característicos.
- c) **Aproximación:** obtención de una función de atenuación que satisfaga los parámetros especificados.
- d) **Síntesis:** obtención de un circuito que realice la función obtenida en la etapa de aproximación.
- e) **Verificación:** Confirmación del cumplimiento de las especificaciones funcionales y otras condiciones de proyecto (costo, tamaño, consumo, etc.)

Las etapas mencionadas no tienen una única solución ni siguen necesariamente un orden lineal o secuencial. A menudo, al llegar a cierto punto se comprueba que es necesario volver atrás para modificar alguna decisión previa. En algunos casos puede ser preciso inclusive reexaminar el planteo o flexibilizar algunas especificaciones.

#### 3.1. Planteo

El planteo es normalmente verbal y expresa lo que se quiere obtener más que la clase de dispositivo que lo hará posible, tal como en el enunciado del ejemplo 1. Así, puede ocurrir que algunos problemas que a primera vista parecerían resolverse por medio de un filtro terminen resolviéndose de otra manera más simple. Por ejemplo, si el problema consistiera en “medir la amplitud del primer armónico de una onda cuadrada”, aunque en primera instancia se podría usar un filtro para rescatar el primer armónico para luego medirlo, resulta más directo medir la amplitud de la onda cuadrada y amplificarla con una ganancia  $4/\pi$ . Será la experiencia del diseñador lo que lo orientará en la mejor estrategia para dar solución al problema.

#### 3.2. Especificación

Una vez decidido que el problema se resolverá con un filtro, se trata de traducir las especificaciones informales a la terminología estándar utilizada en el diseño de filtros que permita, entre otras cosas, aprovechar la información y otros recursos disponibles (por ejemplo software de diseño o análisis). El resultado de este proceso es una *plantilla* que debe ser satisfecha por el filtro a proyectar.

#### 3.3. Aproximación

Una vez determinada la plantilla es necesario proponer una función de transferencia (o de atenuación) que satisfaga la plantilla y que sea realizable circuitalmente. Exis-

ten diversas familias de funciones matemáticas capaces de resolver el problema. La selección se basa en las propiedades de cada familia. Por ejemplo, algunas permiten diseños muy económicos pero tienen respuestas temporales (transitorias) poco convenientes. Otras tienen un retardo de grupo casi constante en la banda de paso pero requieren muchos componentes para satisfacer las condiciones. Asimismo, dentro de cada familia hay infinitas funciones que cumplen con la plantilla y habrá que optar por la que conduzca al circuito más simple.

### 3.4. Síntesis

En esta etapa se selecciona una de las numerosas estructuras de circuito con las que es posible implementar la función de aproximación obtenida anteriormente y se determinan los correspondientes parámetros circuitales. La selección puede estar orientada por la mayor o menor complejidad, la mayor o menor sensibilidad con respecto a variaciones o derivas de los componentes, la mayor o menor facilidad de ajuste, etc.

### 3.5. Verificación

Una vez completado el diseño es necesario una revisión completa del proyecto, deteniéndose en cuestiones como la influencia de la tolerancia de los componentes, su disponibilidad comercial, su costo de fabricación según el volumen de producción,<sup>2</sup> su costo inicial y operativo para el usuario, su necesidad de mantenimiento, etc. Algunas de estas cuestiones pueden llevar a la conclusión de que el circuito no es viable y por lo tanto debe volverse atrás. En ciertos casos puede ser necesario inclusive reformular el planteo o flexibilizar las especificaciones.

En las secciones que siguen se analizarán en detalle las cuestiones relativas a la aproximación y a la síntesis.

## 4. Filtros ideales

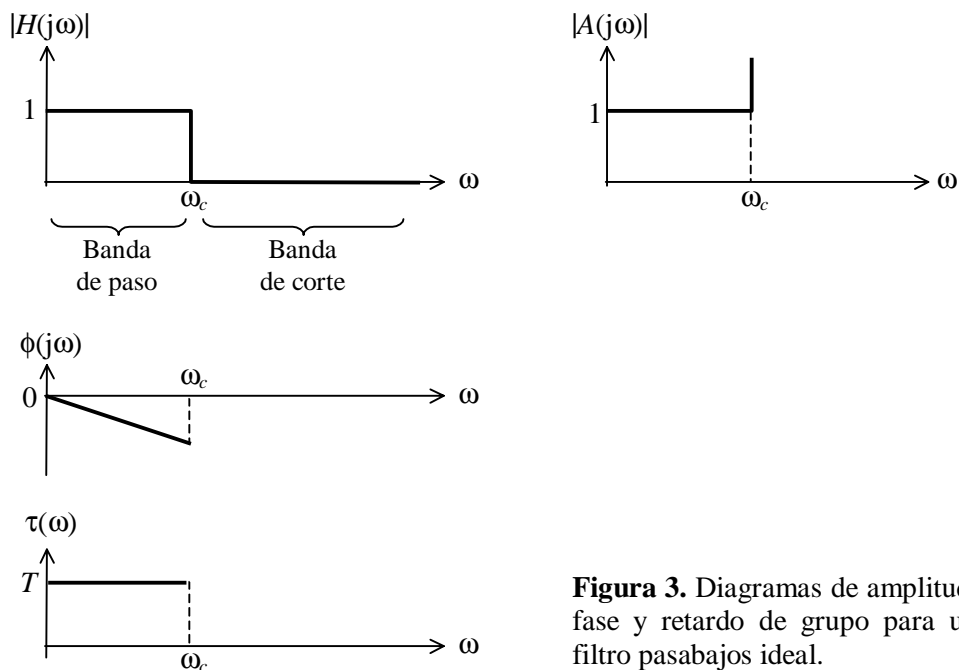
Los filtros ideales son selectores de frecuencia que permiten el paso sin distorsión de las componentes espectrales comprendidas en la o las bandas de paso, anulando completamente las componentes ubicadas fuera de ellas.

### 4.1. Pasabajos (PB)

Permite el paso de las frecuencias menores que cierta frecuencia  $\omega_c$ , denominada *frecuencia de corte* (o *frecuencia superior de corte*) y bloquea las mayores, como se muestra en la figura 3.

---

<sup>2</sup> Por ejemplo, un circuito que requiere ajustes durante la fabricación o control de calidad puede ser aceptable para la fabricación de unas pocas unidades pero no resulta apropiado para grandes volúmenes de producción. En este caso es preferible refinar el diseño, ya que el gasto extra en desarrollo se amortizará con el gran volumen comercializado.

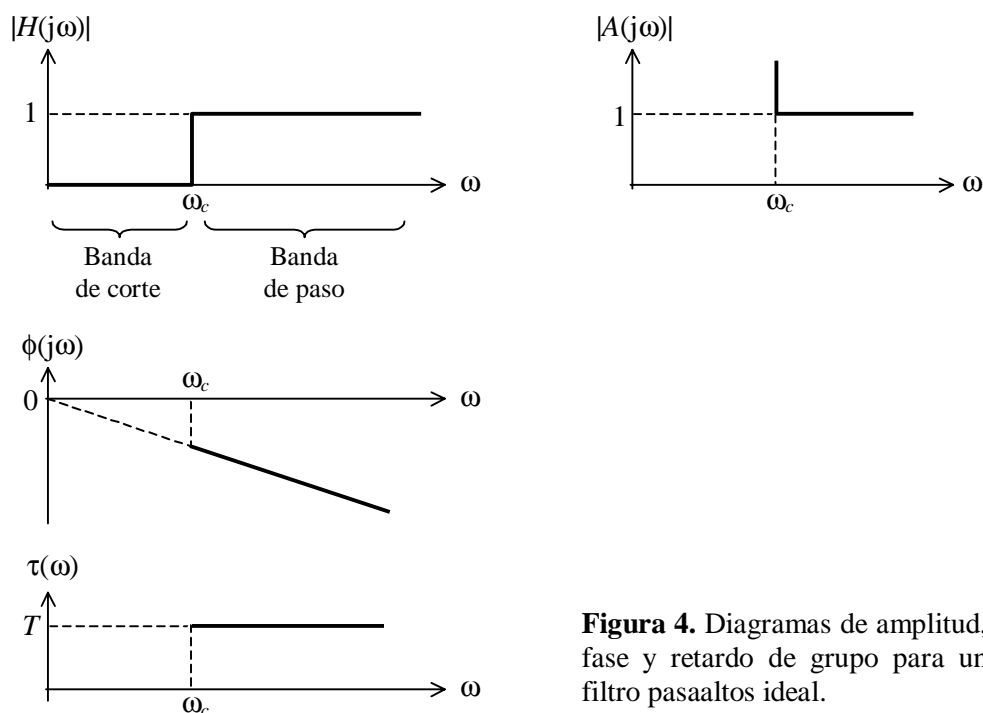


**Figura 3.** Diagramas de amplitud, fase y retardo de grupo para un filtro pasabajos ideal.

En la banda de corte la atenuación es infinita, en tanto que la fase y el retardo de grupo en la banda de atenuación están indefinidos, ya que el módulo es 0.

### 4.2. Pasaaltos (PA)

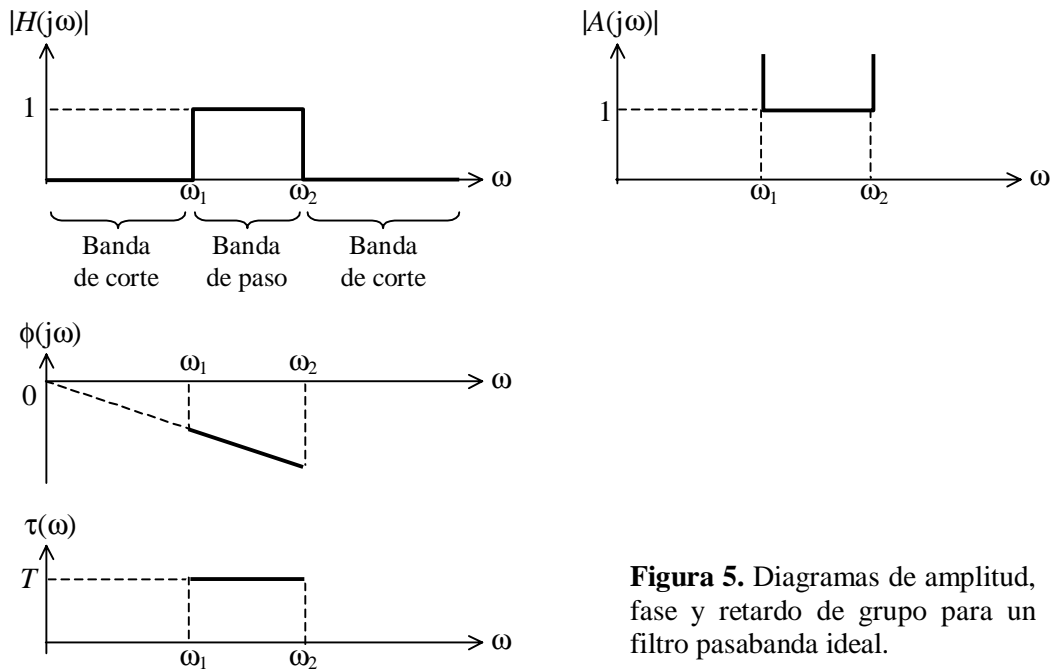
Permite el paso de las frecuencias mayores que cierta frecuencia  $\omega_c$ , también denominada *frecuencia de corte* (o *frecuencia inferior de corte*), y bloquea las menores. La respuesta se muestra en la figura 4.



**Figura 4.** Diagramas de amplitud, fase y retardo de grupo para un filtro pasaaltos ideal.

### 4.3. Pasabanda (PBn)

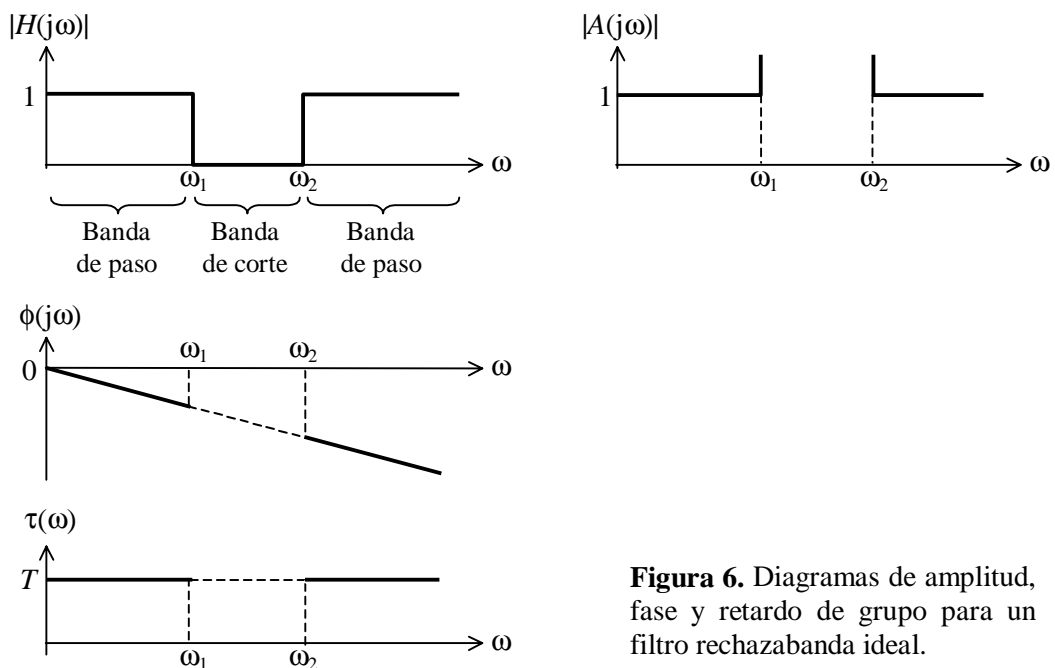
Permite el paso de las frecuencias comprendidas entre dos frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  ( $\omega_1 < \omega_2$ ), denominadas *frecuencia inferior de corte* y *frecuencia superior de corte*, bloqueando las restantes (figura 5).



**Figura 5.** Diagramas de amplitud, fase y retardo de grupo para un filtro pasabanda ideal.

### 4.4. Rechazabanda (RBn)

Bloquea las frecuencias comprendidas entre las frecuencias de corte  $\omega_1$  y  $\omega_2$ , dejando pasar las restantes.



**Figura 6.** Diagramas de amplitud, fase y retardo de grupo para un filtro rechazabanda ideal.

### 4.5. Respuesta transitoria de los filtros ideales

A fin de obtener una mayor comprensión de la naturaleza de los filtros ideales, determinaremos la respuesta transitoria de un filtro PB ideal ante un escalón  $u(t)$ . Para ello aplicaremos la ecuación 18 a la siguiente función de transferencia ideal

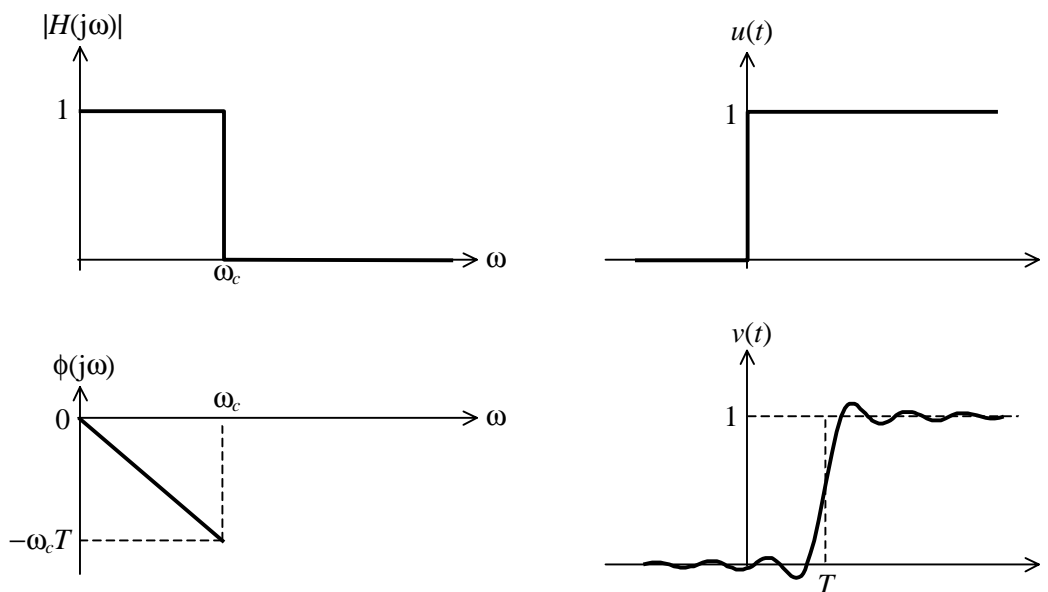
$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \end{cases} \tag{19}$$

$$\phi(j\omega) = -\omega T. \tag{20}$$

Entonces

$$v(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_c(t-T)} \frac{\text{sen } x}{x} dx. \tag{21}$$

Puede observarse (ver figura 7) que aún para  $t < 0$  esta función es  $\neq 0$  salvo si el retardo  $T$  es  $\infty$ . Esto significa que el filtro comenzaría a responder aún antes de que llegara el escalón, lo cual no es físicamente posible. En otras palabras, resulta *no causal*.



**Figura 7.** A la derecha, respuesta en frecuencia en módulo y fase de un filtro pasabajos ideal. A la izquierda, un escalón aplicado a la entrada y su respuesta transitoria. Obsérvese que la respuesta es distinta de 0 aún antes del escalón.

Hay dos interpretaciones:

- 1) Supusimos que el transitorio estaba virtualmente extinguido al llegar la nueva conmutación, lo cual es cierto para sistemas reales pero no para sistemas ideales;

2) No se sabe si la excitación es realmente un escalón hasta que no transcurre un tiempo  $\infty$ , por lo cual la respuesta real es un compromiso entre las respuestas a todas las excitaciones que comienzan igual que un escalón.

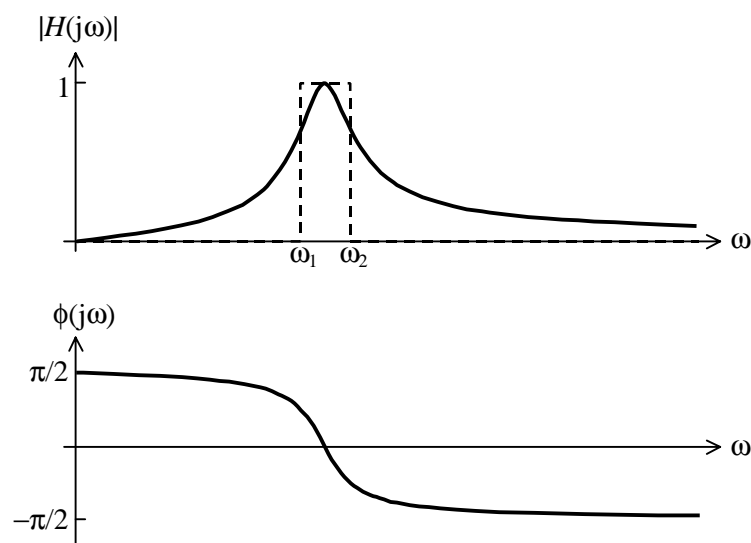
En conclusión, un filtro ideal, para ser compatible con el principio físico de causalidad, debería tener un retardo de grupo

$$\tau = \infty.$$

Además de irrealizable, este filtro sería inútil, dado que la respuesta ante cualquier señal demoraría un tiempo infinito.

## 5. Filtros reales

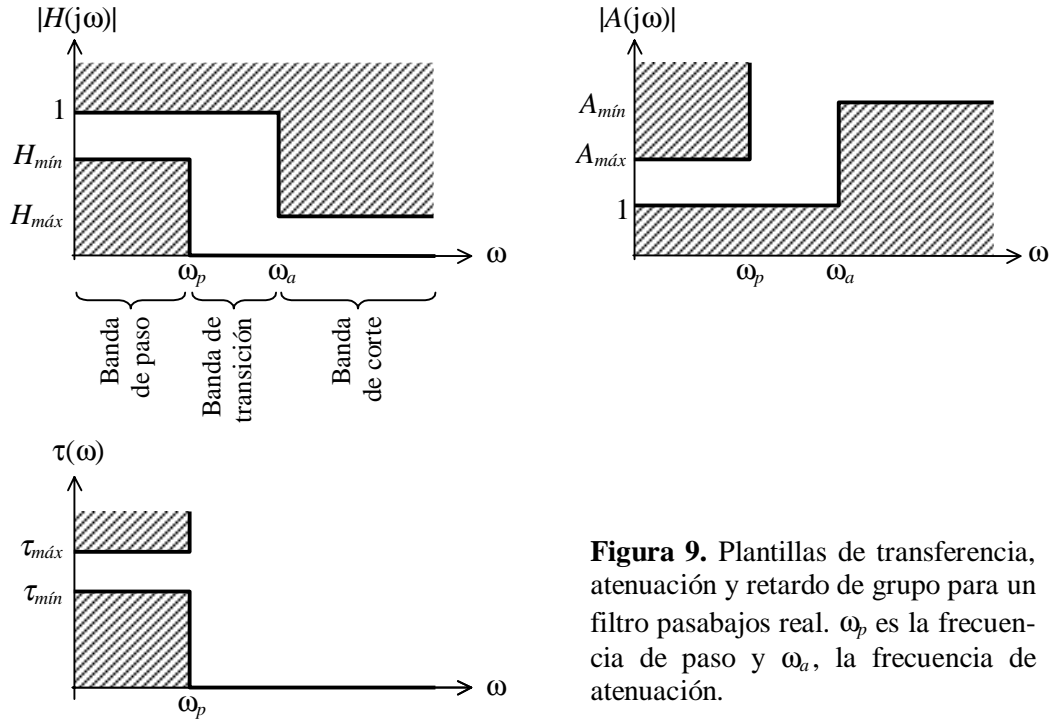
Las respuestas ideales indicadas anteriormente no pueden lograrse con una cantidad finita de componentes ya que no son representables como funciones racionales. Por consiguiente, los filtros reales sólo pueden aproximarse en mayor o menor grado a los filtros ideales. En la figura 8 se muestra un ejemplo de pasabanda real comparado con el correspondiente pasabanda ideal.



**Figura 8.** Amplitud y fase de un filtro pasabanda real. En línea de trazos la ganancia del filtro ideal correspondiente.

### 5.1. Plantillas

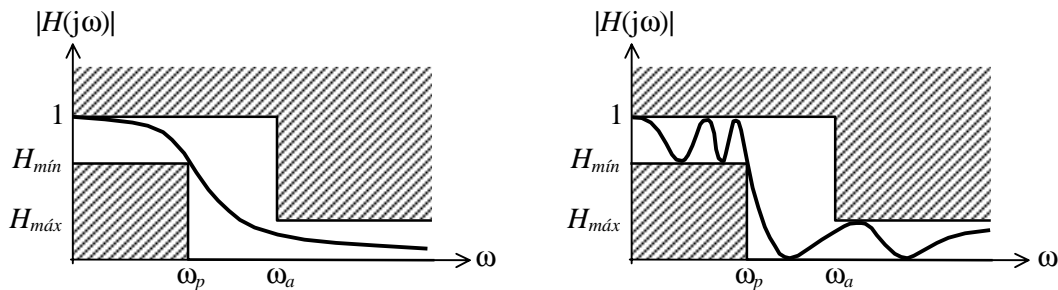
Según el problema, se requerirá una mayor o menor aproximación al ideal, por lo cual debe introducirse una forma de especificar dicha aproximación. Para ello se reemplazan los valores constantes de las bandas de paso y atenuación por cotas, y se introduce una banda de transición en lugar del salto abrupto. La especificación así obtenida se denomina *plantilla*. En la figura 9 se presenta la plantilla para un filtro pasabajos. Como



**Figura 9.** Plantillas de transferencia, atenuaci3n y retardo de grupo para un filtro pasabajos real.  $\omega_p$  es la frecuencia de paso y  $\omega_a$ , la frecuencia de atenuaci3n.

puede observarse, se especifican plantillas para el m3dulo de la funci3n de transferencia,  $|H|$ , o de la atenuaci3n,  $|A|$ , y para el retardo de grupo  $\tau$ . En algunos casos particulares podr3a especificarse una plantilla para la fase.

En cada una de las plantillas el 3rea sombreada no puede ser ocupada por la correspondiente curva. S3lo las 3reas claras son admisibles. En la figura 10 se muestran dos posibles curvas de respuesta en frecuencia que satisfacen una misma plantilla.



**Figura 10.** Dos curvas de respuesta en frecuencia que satisfacen la plantilla de amplitud de la figura 9.

Como se aprecia, la separaci3n de la frecuencia de corte en una frecuencia de paso,  $\omega_p$ , y otra de atenuaci3n,  $\omega_a$ , permite definir cotas independientes para las regiones de paso y de corte. As3,  $H_{m\acute{i}n}$  es el m3nimo valor de  $|H|$  admisible en la banda de paso, en tanto que  $H_{m\acute{a}x}$  es el m3ximo en la banda de corte. Esto significa que no se exige que  $|H|$  sea igual a  $1$  en la banda de paso, como suced3a con el filtro ideal, sino que se le permite bajar hasta  $H_{m\acute{i}n} < 1$ . La elecci3n de  $H_{m\acute{i}n}$  depender3 del problema a resolver, por ejemplo, del error de ganancia que se admita en la banda de paso. As3, por ejemplo, en un

filtro para audio se admite en general sin inconvenientes una tolerancia de entre 1 dB y 3 dB, que implica que  $H_{mín}$  podrá estar aproximadamente entre 0,7 y 0,9. En cambio, en un filtro para un instrumento de medición se requieren en general tolerancias menores al 1%, por lo que  $H_{mín}$  no podrá ser menor de 0,99.

Análogamente, no se exige que en la banda de atenuación  $|H|$  sea rigurosamente 0, sino que se admite que alcance un valor de hasta  $H_{máx}$ . Nuevamente, el valor apropiado de  $H_{máx}$  está fuertemente condicionado por la naturaleza de cada problema, y generalmente está asociado a la magnitud del ruido de alta frecuencia que puede aceptarse para la señal filtrada. Así, en el caso de un filtro antialias para digitalización de audio,<sup>3</sup> el valor de  $H_{máx}$  puede necesitar ser tan bajo como 0,0001, mientras que para el caso del instrumento de medición quizás sea suficiente con tomar un valor de 0,01.

Al disociar la frecuencia de corte en las frecuencias de paso y de atenuación aparece una banda de transición, dentro de la cual el módulo de la transferencia no debe cumplir otra condición que la de ser menor que 1. Esto implica que las frecuencias comprendidas entre  $\omega_p$  y  $\omega_a$  pueden bien ser eliminadas casi por completo o atravesar el filtro sin atenuación apreciable. La selección de esta banda impone por lo tanto un serio compromiso al diseñador, ya que un comportamiento tan imprevisible sólo puede aceptarse en un rango muy limitado de frecuencias, pero en ese caso el costo y las dificultades de ajuste del filtro aumentan.

Los comentarios anteriores se aplican también a la función de atenuación. En realidad, debido a que  $|A| = 1/|H|$ , es indistinto especificar las plantillas para  $|H|$  o para  $|A|$ , ya que son equivalentes si se toma:

$$A_{máx} = \frac{1}{H_{mín}} \quad (22)$$

y

$$A_{mín} = \frac{1}{H_{máx}}. \quad (23)$$

Por razones de tradición es más habitual especificar la atenuación, ya que existen numerosas tablas y ábacos disponibles en la bibliografía para el diseño de filtros que están expresados en términos de la atenuación.

El hecho de haber tomado 1 como cota superior en la banda de paso es puramente convencional. En caso de requerirse una ganancia distinta,  $H_{mín}$  y  $H_{máx}$  también deberán multiplicarse por esa ganancia.

Las plantillas de  $H(j\omega)$  y  $A(j\omega)$  se dan frecuentemente en dB, como se ilustra en la figura 11. En este caso, se cumple que

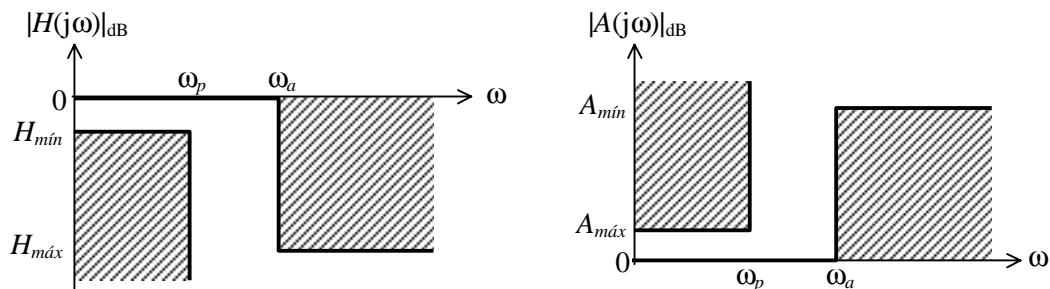
$$A_{mín}|_{dB} = -H_{máx}|_{dB} \quad (24)$$

$$A_{máx}|_{dB} = -H_{mín}|_{dB}. \quad (25)$$

Por último, con referencia a la figura 9, podemos observar que la plantilla del retardo de grupo  $\tau$  sólo tiene cotas en la banda de paso. Ello es porque los requisitos con respecto a  $\tau$  se proponen acotar la distorsión de fase, y no existen razones para evitar la distorsión de fase en el ruido residual fuera de la banda útil.

<sup>3</sup> El filtro antialias se utiliza en los sistemas de conversión analógico-digital para eliminar las frecuencias mayores que la mitad de la frecuencia de muestreo.





**Figura 11.** Plantillas para la función de transferencia y la función de atenuación de un filtro pasabajos cuando se expresan en dB.

En algunos casos la plantilla para el retardo de grupo sólo propone cotas para las variaciones de  $\tau$  y no con respecto al valor total. Ello sucede cuando lo importante no es el retardo en sí, sino que se mantengan dentro de ciertos límites las relaciones de fase entre las diferentes componentes espectrales.

**Ejemplo 3:** Obtener la plantilla correspondiente al filtro del ejemplo 1

Dado que se requiere una senoide de igual frecuencia que la onda cuadrada, y teniendo en cuenta que ésta puede desarrollarse en serie de Fourier como

$$v_1(t) = V \sin \omega t + \frac{V}{3} \sin 3\omega t + \frac{V}{5} \sin 5\omega t + \dots, \tag{26}$$

donde  $V = 4V_p/\pi$ , nuestro problema puede resolverse con un filtro que recoja el primer armónico,  $V \sin \omega t$ , y elimine los siguientes. Como éstos son de mayor frecuencia, bastará elegir un pasabajos. Debemos, pues, determinar los parámetros  $f_p$ ,  $f_a$ ,  $A_{m\acute{a}x}$ , y  $A_{m\acute{i}n}$ . La frecuencia de paso  $f_p$ , debe ser tal que cualquier frecuencia entre 50 Hz y 60 Hz sea menor o igual que  $f_p$  por lo tanto

$$f_p = 60 \text{ Hz.}$$

La frecuencia de atenuación  $f_a$  debe ser tal que el tercer armónico (que es el primero que aparece después de la fundamental) de cualquier frecuencia entre 50 Hz y 60 Hz sea mayor o igual que  $f_a$  por lo tanto

$$f_a = 150 \text{ Hz.}$$

Observemos que se tomó el valor más pequeño posible de  $f_p$  y el más grande de  $f_a$  compatible con las condiciones que debían satisfacer. De ese modo la banda de transición es mayor, y al ser el filtro menos ideal, resultará más sencillo y por consiguiente menos costoso.

$A_{m\acute{a}x}$  debe ser tal que las fluctuaciones que permite sean menores o iguales que  $\pm 5\%$ , por tanto

$$A_{m\acute{a}x} \text{ dB} = 20 \log 1,05 - 20 \log 0,95 \cong 0,87 \text{ dB.}$$

$A_{mín}$  debe ser tal que posibilite que el valor eficaz de los armónicos superiores se reduzcan en total a menos del 1% de la fundamental, es decir

$$\sqrt{V_3^2 + V_5^2 + \dots} \leq 0,01 V_1.$$

Mientras la fundamental será como mínimo  $V/A_{máx}$ , los armónicos valdrán como máximo  $V/(nA_{mín})$ , por lo cual bastará con que

$$\sqrt{\left(\frac{V}{3A_{mín}}\right)^2 + \left(\frac{V}{5A_{mín}}\right)^2 + \dots} \leq 0,01 \frac{V}{A_{máx}}$$

es decir

$$\frac{V}{A_{mín}} \sqrt{\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots} \leq 0,01 \frac{V}{A_{máx}}.$$

La serie dentro de la raíz vale<sup>4</sup>  $\pi^2/8 - 1$ , de modo que

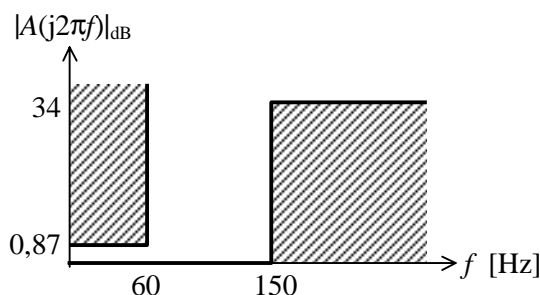
$$A_{mín} \geq 100\sqrt{\pi^2/8 - 1} A_{máx} = 48,34 A_{máx}.$$

Adoptamos

$$A_{mín} = 50 A_{máx}.$$

$$A_{mín}|_{dB} = 34 \text{ dB}.$$

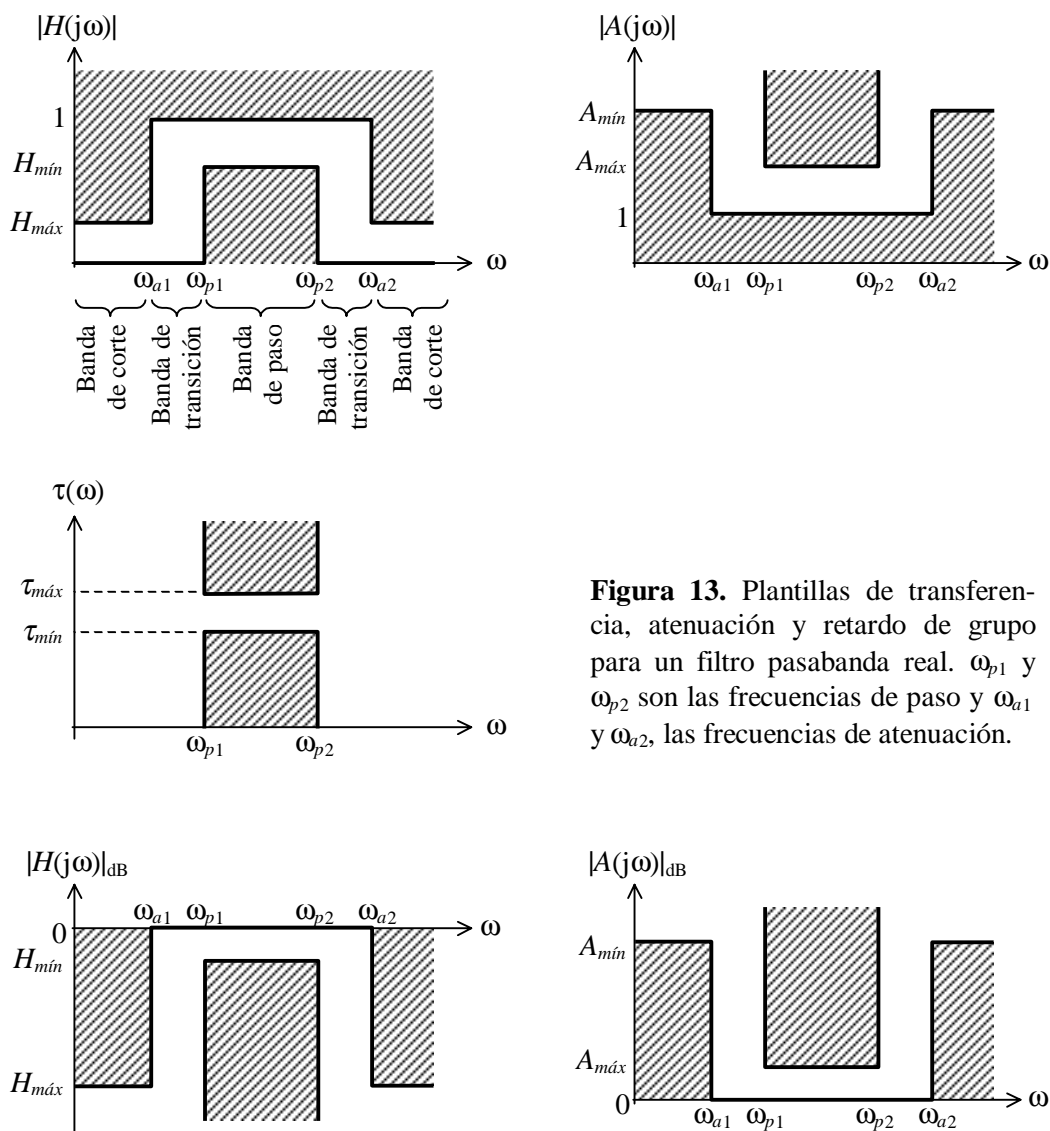
La plantilla resultante se ilustra en la figura 12.



**Figura 12.** Plantilla para la función de atenuación del filtro del ejemplo 3.

<sup>4</sup> Para verlo, notemos que al sumarle 1 se obtiene el doble del valor eficaz al cuadrado de una onda cuadrada de amplitud  $\pi/4$ , es decir,  $\pi^2/8$ .

En las figuras 13 y 14 se muestran las plantillas en escala lineal y en dB para el filtro pasabanda. Los restantes casos quedan como ejercicio para el lector.

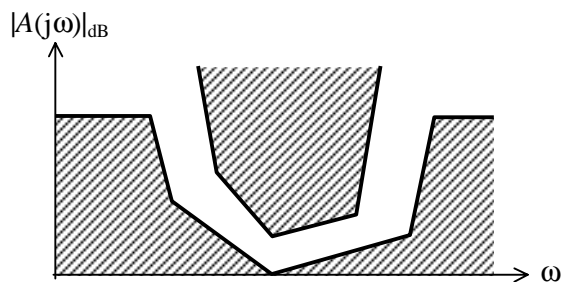


**Figura 13.** Plantillas de transferencia, atenuación y retardo de grupo para un filtro pasabanda real.  $\omega_{p1}$  y  $\omega_{p2}$  son las frecuencias de paso y  $\omega_{a1}$  y  $\omega_{a2}$ , las frecuencias de atenuación.

**Figura 14.** Plantillas para la función de transferencia y la función de atenuación de un filtro pasabanda cuando se expresan en dB.

### 5.1.1. Otras plantillas

Es posible generalizar el concepto de plantilla para filtros arbitrarios, como se muestra en la figura 15, pudiendo ser los límites de la plantilla rectos o curvos. En cada caso se darán las especificaciones necesarias. Algunos ejemplos prácticos son los filtros para simular un canal telefónico y los filtros normalizados de banda de octava y tercio de octava para mediciones acústicas. En ambos casos se especifican plantillas especiales.



**Figura 15.** Ejemplo de plantilla para la función de atenuación de un filtro no convencional.

## 5.2. Especificaciones de frecuencia complementarias

### 5.2.1. Selectividad

Vimos que la banda de transición merece especial consideración en la especificación de un filtro. Un parámetro conveniente para cuantificar la banda de transición es la selectividad. Es siempre menor que 1, y se define según el tipo de selector de frecuencias, como se muestra en la tabla 1.

**Tabla 1.** Definición de la selectividad  $k$  para los diferentes selectores de frecuencia

Tipo de filtro	Selectividad
Pasabajos	$k = \frac{\omega_p}{\omega_a}$
Pasaaltos	$k = \frac{\omega_a}{\omega_p}$
Pasabanda	$k = \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{\omega_{a2} - \omega_{a1}}$
Rechazabanda	$k = \frac{\omega_{a2} - \omega_{a1}}{\omega_{p2} - \omega_{p1}}$

A iguales valores de  $A_{m\acute{a}x}$  y  $A_{m\acute{i}n}$ , la transición será tanto más abrupta cuanto mayor sea la selectividad. Para  $k \rightarrow 1$  la banda de transición tiende a 0. Sin embargo, al comparar dos filtros con diferentes especificaciones de  $A_{m\acute{a}x}$  y  $A_{m\acute{i}n}$  es necesario obrar con precaución, ya que podría suceder que el filtro con mayor  $k$  tuviera una transición menos abrupta.

Veremos más adelante que, por medio de ciertas transformaciones o cambios de variable, puede convertirse un filtro pasabajos en cualquiera de los otros tipos. Tal como se ha definido la selectividad, ésta resulta invariante frente a dichas transformaciones.

Vale decir que si, por ejemplo, se parte de un pasabajos con selectividad 0,8 el pasabanda obtenido con la transformación correspondiente también tendrá selectividad 0,8 .

### 5.2.2. Frecuencia central

Este parámetro se aplica a los filtros pasabanda. Se define como

$$\omega_o = \sqrt{\omega_{p1} \omega_{p2}} , \quad (27)$$

es decir que es la media geométrica o logarítmica entre los extremos de la banda de paso. Por lo general se toman  $\omega_{a1}$  y  $\omega_{a2}$  de modo que la plantilla resulte logarítmicamente simétrica respecto a  $\omega_o$ , es decir:

$$\omega_{a1} \omega_{a2} = \omega_{p1} \omega_{p2} = \omega_o^2 . \quad (28)$$

Esto es conveniente porque según se demuestra, la transformación mencionada anteriormente produce filtros logarítmicamente simétricos respecto a  $\omega_o$ .

### 5.2.3. Ancho de banda relativo

También es un parámetro propio de los filtros pasabanda. Se define como:

$$B = \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{\omega_o} . \quad (29)$$

Este parámetro es más significativo que el ancho de banda absoluto  $\omega_{p2} - \omega_{p1}$ , ya que evidentemente no es lo mismo un ancho de banda de 100 Hz en un filtro de frecuencia central 200 Hz que en uno de frecuencia central 1 MHz.

## 6. Aproximación

En esta etapa del diseño de un filtro se busca una función atenuación  $A(s)$  que satisfaga la plantilla propuesta. En general es raro que un problema tenga a la vez requerimientos de amplitud y fase. Lo más común es que tenga sólo requerimientos de amplitud, por lo tanto analizaremos este caso.

Dado que en la banda de paso sería deseable que la atenuación tuviera módulo 1, se trata de aproximar la función  $|A(j\omega)|$  a 1. Es formalmente más fácil aproximar una función a 0 que al, por lo cual el problema puede replantearse como

$$|A(j\omega)| = 1 + a(\omega),$$

donde  $a(\omega)$  deberá cumplir con una plantilla similar bajada una unidad, y por consiguiente se aproximará a 0 en la banda de paso. Sin embargo, es más sencillo trabajar con el cuadrado del módulo, ya que es una función racional. Entonces

$$|A(j\omega)|^2 = 1 + b(\omega).$$

Ahora bien, así planteado el problema, una vez propuesta una función  $b(\omega)$  que satisfaga la correspondiente plantilla no resulta sencillo obtener  $A(s)$ . Puede solucionarse esto expresando  $b(\omega)$  como el módulo al cuadrado de cierta función  $K(s)$ , llamada *función característica*:

$$|A(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2, \quad (30)$$

o bien, si  $A(s)$  y  $K(s)$  son funciones racionales a coeficientes reales,

$$A(j\omega) A(-j\omega) = 1 + K(j\omega) K(-j\omega), \quad (31)$$

que puede extenderse analíticamente a

$$A(s) A(-s) = 1 + K(s) K(-s). \quad (32)$$

Esta ecuación llamada *ecuación de Feldtkeller*, es la base de la aproximación. El procedimiento es el siguiente :

- A partir de la plantilla de  $A(s)$  se obtiene la plantilla que debe verificar  $K(s)$
- Se propone alguna función  $K(s)$  que satisfaga dicha plantilla de acuerdo a algún criterio (por ejemplo, extraerla de un repertorio o familia de funciones disponibles de propiedades conocidas);
- Se obtiene  $A(s) A(-s)$ . Esta función tiene ceros de la forma  $\pm\sigma \pm j\omega$ , por lo que podemos asignar a  $A(s)$  los que tienen parte real negativa ( $-\sigma \pm j\omega$ ) y a  $A(-s)$  los con parte real positiva ( $\sigma \pm j\omega$ ). De esta manera se asegura la estabilidad de  $H(s) = 1/A(s)$ .

**Ejemplo 4:** Obtener una aproximación para la plantilla con los parámetros siguientes:

$$A_{m\acute{a}x} = \sqrt{2} \qquad \omega_p = 1$$

$$A_{m\acute{i}n} = 5 \qquad \omega_a = 2$$

a) Teniendo en cuenta que

$$|K(j\omega)| = \sqrt{|A(j\omega)|^2 - 1}, \quad (33)$$

resulta:

$$K_{m\acute{i}n} = \sqrt{5^2 - 1} = 4,899,$$

$$K_{m\acute{a}x} = \sqrt{\sqrt{2}^2 - 1} = 1,$$

b) Proponemos una función característica potencial:

$$K(s) = C s^n.$$

Entonces

$$|K(j\omega)| = C \omega^n.$$

Debe ser

$$C \omega_p^n \leq K_{m\acute{a}x}.$$

Elegimos la igualdad, con lo cual resulta  $C = 1$  y, entonces,

$$K(s) = s^n$$

Debe cumplirse, por consiguiente,

$$\omega_a^n \geq K_{m\acute{i}n},$$

es decir

$$2^n \geq 4,989,$$

de donde

$$n \geq \log_2 4,989 = 2,29.$$

Elegimos el menor valor de  $n$  que satisfaga esta condición, es decir,  $n = 3$ .

c) Entonces

$$A(s)A(-s) = 1 + s^3(-s)^3 = 1 - s^6.$$

Los ceros de  $A(s)A(-s)$  son las seis raíces sextas de 1:

$$s_k = \cos \frac{2\pi k}{6} + j \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{6}, \quad k = 1, \dots, 6$$

de los cuales tienen parte real negativa los siguientes tres:

$$-1, \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j,$$

de modo que resulta

$$A(s) = (s + 1) \left( s + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} j \right) \left( s + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j \right),$$

es decir,

$$A(s) = (s + 1)(s^2 + s + 1).$$

### 6.1. Modos naturales, polos de pérdida y ceros de reflexión

Los *modos naturales* son, por definición, los polos finitos de la función de transferencia  $H(s)$  o bien los ceros de la función de atenuación  $A(s)$ . Si

$$A(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \tag{34}$$

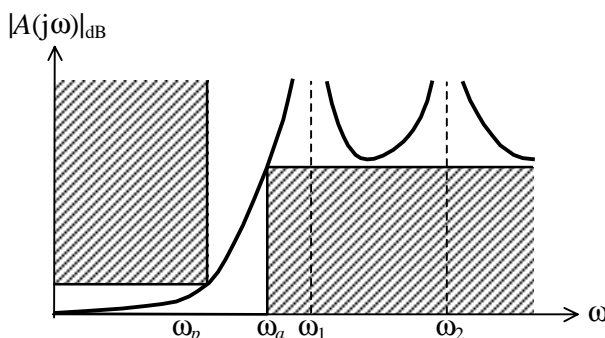
los modos naturales son, entonces, los ceros de  $Q(s)$ . Como es sabido, determinan el comportamiento transitorio y por lo tanto la estabilidad. Para que el filtro resultante sea estable los modos naturales deben tener parte real negativa. La cantidad de modos naturales es el *orden del filtro*, y es un índice de la complejidad del mismo, ya que coincide con la cantidad de almacenadores de energía ( $L, C$ ) independientes.

Los *polos de pérdida* son los polos de  $A(s)$ , es decir valores de  $s$  en los cuales la atenuación es  $\infty$ . Si son finitos, coinciden con los ceros de  $P(s)$ . Los polos de pérdida en  $0$  e  $\infty$  determinan el tipo de selector de frecuencias, como se muestra en la tabla 2.

**Tabla 2.** Ubicación de los polos de pérdida para los diversos selectores de frecuencia.

Tipo de filtro	Polos de pérdida	
	en 0	en $\infty$
PB	no	sí
PA	sí	no
PBn	sí	sí
RBn	no	no

Los polos de pérdida finitos no nulos se colocan a propósito sobre el eje imaginario, en la banda de corte. Su utilidad es doble: permiten lograr atenuación ideal ( $\infty$ ) en determinadas frecuencias (que son, por lo tanto, eliminadas totalmente), y proporcionan una gran pendiente en sus inmediaciones, por lo cual si están próximas a  $\omega_p$  permiten obtener gran selectividad ( $k \cong 1$ , es decir  $\omega_a \cong \omega_p$ ). En la figura 16 se muestra una curva de atenuación con polos de pérdida.



**Figura 16.** Función de atenuación con polos de pérdida  $\pm j\omega_1$  y  $\pm j\omega_2$  en la banda de corte.

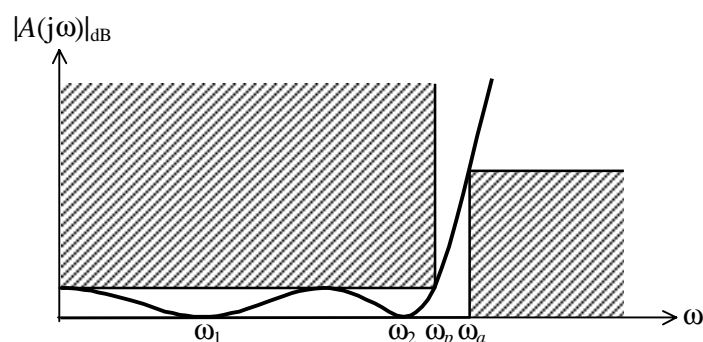


Según veremos, el agregado de polos de pérdida incrementa el orden del filtro y por lo tanto su complejidad.

Los *ceros de reflexión* son los ceros de la función característica  $K(s)$ . Dado que

$$A(s)A(-s) = 1 + K(s)K(-s),$$

resultan ser valores de  $s$  en los cuales la atenuación vale exactamente 1. Los ceros de reflexión se colocan sobre el eje imaginario en la banda de paso, ya que permiten lograr atenuación ideal (1) en las correspondientes frecuencias, como se puede observar en la figura 17.



**Figura 17.** Función de atenuación con ceros de reflexión  $\pm j\omega_1$  y  $\pm j\omega_2$  en la banda de paso.

El agregado de ceros de reflexión incrementa el orden del filtro y por consiguiente su complejidad y su costo.

## 6.2. Consideraciones sobre la función característica

De la ecuación de Feldtkeller.

$$A(s)A(-s) = 1 + K(s)K(-s). \quad (35)$$

puede concluirse que la función característica  $K(s)$  tiene los mismos polos que  $A(s)$ . Si

$$A(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad (36)$$

entonces puede escribirse,

$$K(s) = \frac{C(s)}{P(s)}, \quad (37)$$

donde, de acuerdo con las definiciones anteriores,  $C(s)$  contiene los ceros de reflexión finitos y  $P(s)$  contiene los polos de pérdida finitos. De esta forma,  $K(s)$  caracteriza el comportamiento cualitativo de la atenuación, de ahí su nombre de función característica. El aspecto cuantitativo puede tenerse en cuenta expresando

$$K(s) = \varepsilon \frac{F(s)}{P(s)}, \tag{38}$$

donde  $\varepsilon$  es una constante, y  $F(s)$  tiene los mismos ceros que  $C(s)$  y

$$\left| \frac{F(j\omega_p)}{P(j\omega_p)} \right| = 1. \tag{39}$$

Esto permite generar a partir de una única configuración de polos de pérdida y ceros de reflexión toda una familia de funciones características que permitirán obtener distintos valores de  $A_{m\acute{a}x}$ . En efecto:

$$\begin{aligned} A_{m\acute{a}x} &= |A(j\omega_p)|^2 = 1 + |K(j\omega_p)|^2 = \\ &= 1 + \varepsilon^2 |F(j\omega_p) / P(j\omega_p)|^2 = \\ &= 1 + \varepsilon^2, \end{aligned} \tag{40}$$

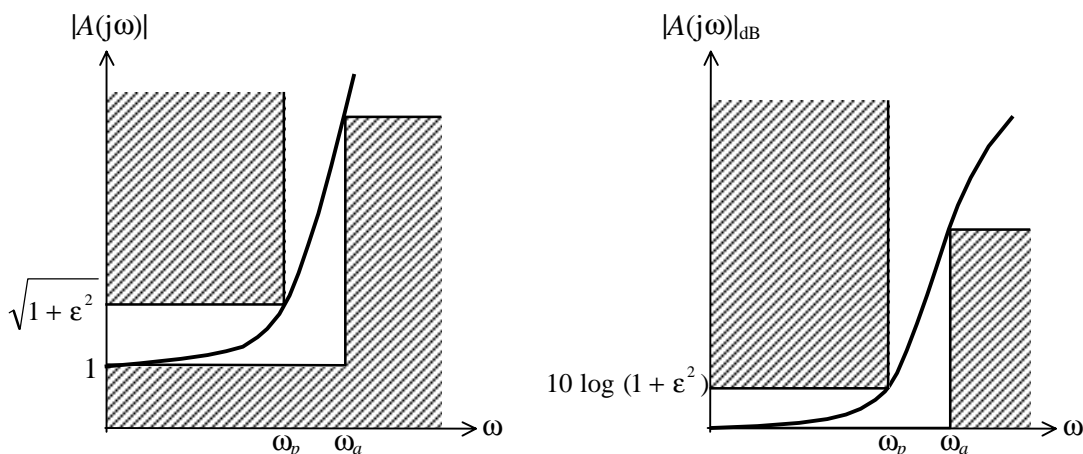
de donde

$$A_{m\acute{a}x} = \sqrt{1 + \varepsilon^2}, \tag{41}$$

o bien

$$\varepsilon = \sqrt{A_{m\acute{a}x}^2 - 1}. \tag{42}$$

En la figura 18 se muestra la aproximación de la función atenuación para un valor de  $\varepsilon$ , en diagrama lineal y en dB.



**Figura 18.** Función de atenuación obtenida a partir de una función característica y un valor de  $\varepsilon$  en gráficos lineal y logarítmico.

**Ejemplo 5:**  $A(s)$  tiene ceros de reflexión en  $\omega = 0$  y  $\omega = 1$  y un polo de pérdida en  $\omega = 3$ . Si  $\omega_p = 2$  y  $A_{m\acute{a}x|dB} = 1$  dB, hallar  $A(s)A(-s)$ .

En primer lugar, el cero de reflexión en  $\omega = 1$  está en realidad en  $j1$  y por ello hay otro en  $-j1$ . Lo mismo vale para el polo de pérdida. Entonces:

$$K(s) = \varepsilon \frac{a(s^2 + 1)s}{s^2 + 9},$$

donde

$$\frac{F(s)}{P(s)} = a \frac{(s^2 + 1)s}{s^2 + 9}.$$

Debe ser, según la definición de  $F(s)$  (ecuación 39)

$$\left| \frac{F(j\omega_p)}{P(j\omega_p)} \right| = 1,$$

Por lo tanto

$$\left| a \frac{((j\omega_p)^2 + 1)j\omega_p}{(j\omega_p)^2 + 9} \right| = 1.$$

Sustituyendo  $\omega_p = 2$ , resulta

$$a = 5/6.$$

Ahora, dado que  $A_{m\acute{a}x|dB} = 1$  dB,

$$A_{m\acute{a}x} = 10^{1/20} = 1,122,$$

de donde

$$\varepsilon = \sqrt{A_{m\acute{a}x}^2 - 1} = 0,509.$$

Entonces

$$A(s)A(-s) = 1 - (0,509)^2 \left( \frac{5}{6} \right)^2 \frac{(s^2 + 1)^2 s^2}{(s^2 + 9)^2}$$

El próximo paso consistiría en factorizar este polinomio y asignar a  $A(s)$  los ceros con parte real negativa, que son los que asegurarán la estabilidad. Para ello implementamos el siguiente script en Matlab:

```
P1 = [0,0,conv([1,0,9],[1,0,9])];
P2 = [conv([1,0,1],[1,0,1]), 0,0];
Q = roots(P1 - (10^(1/10) - 1)*(5/6)^2 * P2)
```

Se obtiene

$$Q = \begin{array}{r} -3.6653 \\ 3.6653 \\ -0.65351 + 2.3159i \\ -0.65351 - 2.3159i \\ 0.65351 + 2.3159i \\ 0.65351 - 2.3159i \end{array}$$

Elegimos los valores

$$s_{1,2} = -0,65351 \pm 2,3159 j$$

$$s_3 = -3,6653$$

Finalmente, mediante

$$q = \text{poly}([Q(3), Q(4)])$$

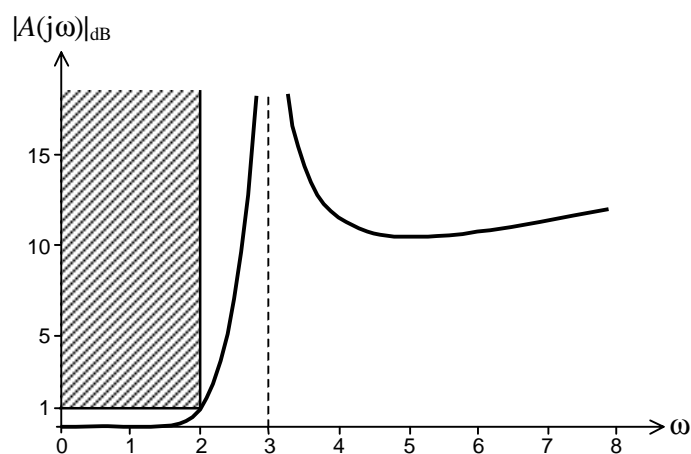
se obtienen los coeficientes del factor cuadrático

$$q = \begin{array}{r} 1 \quad 1.307 \quad 5.7906 \end{array}$$

Resulta, agregando el factor apropiado para igualar los coeficientes de los términos de mayor grado,

$$A(s) = 0,509 \frac{5 (s^2 + 1,307 s + 5,7906) (s + 3,6653)}{6 (s^2 + 9)}$$

Esta atenuación se encuentra representada en la figura 19. La presencia de los dos ceros de reflexión bastante próximos redujo la variación en la banda de paso, pero también redujo la atenuación en la banda de corte.



**Figura 19.** Función de atenuación correspondiente al filtro del ejemplo 4.

### 6.3. Orden del filtro

Puede reescribirse la ecuación de Feldtkeller expresando las funciones  $A(s)$  y  $K(s)$  como cociente de polinomios:

$$\frac{Q(s) Q(-s)}{P(s) P(-s)} = 1 + \epsilon^2 \frac{F(s) F(-s)}{P(s) P(-s)}, \quad (43)$$

o bien

$$Q(s) Q(-s) = P(s) P(-s) + \epsilon^2 F(s) F(-s). \quad (44)$$

Si llamamos:

$$\begin{aligned} n &= \text{grado } Q \text{ (orden del filtro)} \\ m &= \text{grado } P \text{ (cantidad de polos de pérdida finitos)} \\ r &= \text{grado } F \text{ (cantidad de ceros de reflexión finitos)} \end{aligned} \quad (45)$$

resulta, de la ecuación anterior, que

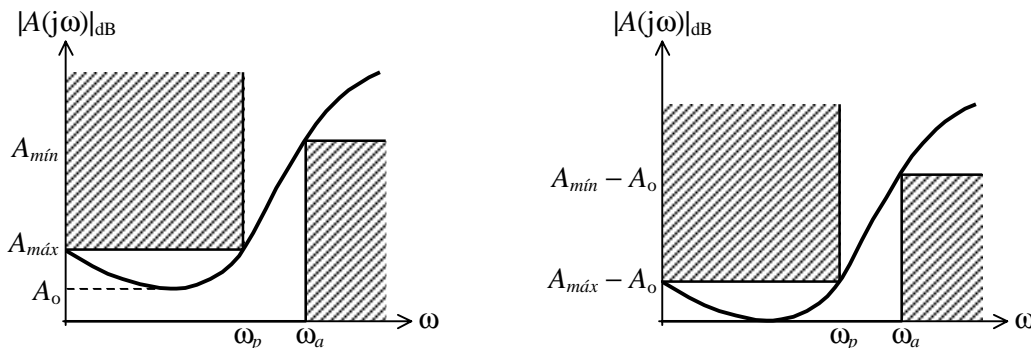
$$n \geq m, \quad n \geq r. \quad (46)$$

Es decir, el orden del filtro es como mínimo igual a la cantidad de polos de pérdida o ceros de reflexión finitos.

Si  $m < r$ , entonces  $K(j\omega) \rightarrow \infty$  para  $\omega \rightarrow \infty$ , por lo cual resulta un PB o un PBn. En ese caso  $n = r$ , es decir, el orden del filtro es igual a la cantidad de ceros de reflexión. Si  $m > r$  entonces  $K(j\omega) \rightarrow \infty$  para  $\omega \rightarrow \infty$ , resultando un PA o un RBn. En ese caso  $n = m$ , es decir, el orden del filtro es igual a la cantidad de polos de pérdida.

#### Observaciones:

1) Si en el eje imaginario no hay ningún cero de reflexión significa que en ninguna frecuencia de la banda de paso la atenuación es ideal ( $|A| = 1$ ). Por lo tanto se está desaprovechando la complejidad del filtro ya que el mismo es potencialmente mejor que lo requerido. En efecto, si el mínimo valor de  $|A(j\omega)|_{dB}$  es  $A_o$ , restando  $A_o$  a  $A_{mín}$  y  $A_{máx}$  se obtiene una plantilla mejor en la cual la atenuación tiene un cero de reflexión (figura 20).



**Figura 20.** A la izquierda, una atenuación sin ceros de reflexión. A la derecha, la misma atenuación desplazada para obtener un cero de reflexión en la banda de paso.

2) Si se requiere que la atenuación idealmente tome en la banda de paso un valor  $A_o \neq 1$  bastará con agregar una atenuación  $A_o$  a un filtro con atenuación ideal 1.

3) Si hay igual cantidad de polos de pérdida y ceros de reflexión ( $n = m = r$ ), entonces  $|K(j\omega)| \rightarrow C$  (cte) cuando  $\omega \rightarrow \infty$ . Si  $C \ll 1$ ,  $\omega = \infty$  está en la banda de paso, y si  $C \gg 1$ , está en la banda de atenuación. Esto depende mucho de los valores relativos de los ceros de reflexión y los polos de pérdida.

#### 6.4. Aproximación de la fase. Funciones pasa-todo (PT)

Las funciones de transferencia más fácilmente realizables son las de *mínima fase*, es decir, aquellas cuyos polos y ceros están en el semiplano real negativo. Para estas funciones el módulo y la fase no son independientes entre sí, sino que están vinculadas a través de la transformada de Hilbert:

$$\varphi(j\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(j\Omega)|}{\omega - \Omega} d\Omega, \quad (47)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(j\Omega)}{\omega - \Omega} d\Omega. \quad (48)$$

Esto significa que no puede exigirse simultáneamente de una función de mínima fase especificaciones de amplitud y fase. Si se especifica la amplitud, la fase quedará determinada por la aproximación elegida. Por supuesto que siempre pueden obtenerse distintas funciones que satisfagan una misma plantilla de amplitud, y entre ellas elegir la que tenga una fase más conveniente, pero este procedimiento no es sistemático.

Cuando se requieren especificaciones tanto en amplitud como en fase se recurre a funciones de *no mínima fase*. Normalmente, primero se obtiene una función de mínima fase que satisfaga la condición de amplitud y luego se la multiplica por una función pasatodo, es decir una función cuya amplitud es 1 para todas las frecuencias y su fase varía con la frecuencia.

Las funciones pasatodo se obtienen ubicando los ceros como imagen especular de los polos respecto al eje imaginario. Como los polos complejos siempre aparecen de a pares conjugados, bastará con tomar los ceros opuestos a los polos. Ello se logra así:

$$H_{PT}(s) = \frac{N(-s)}{N(s)} \quad (49)$$

donde  $N(s)$  contiene los modos naturales. Se cumple que

$$|H_{PT}(j\omega)| = \frac{|N(-j\omega)|}{|N(j\omega)|} = 1, \quad (50)$$

$$\arg H_{PT}(j\omega) = -2 \arg N(j\omega). \quad (51)$$

La forma de la función total es entonces:

$$H(s) = \frac{P(s) N(-s)}{Q(s) N(s)}. \quad (52)$$

La función pasa-todo  $N(-s) / N(s)$  se suele denominar también *ecualizador de fase*, ya que tiende a compensar las distorsiones de fase introducidas por  $P(s)/Q(s)$  de tal manera que el retardo de grupo resulte aproximadamente constante. La obtención de aproximaciones para la fase no es tan sencilla como en el caso de la amplitud.

Dada  $H(s)$ , puede escribirse:

$$R(\omega) = \operatorname{Re} H(j\omega) = \frac{H(j\omega) + H(-j\omega)}{2}, \quad (53)$$

$$I(\omega) = \operatorname{Im} H(j\omega) = \frac{H(j\omega) - H(-j\omega)}{2j}, \quad (54)$$

Trabajando con estas funciones y la ecuación

$$\tau = \frac{R'I - RI'}{R^2 - I^2}, \quad (55)$$

se llega a

$$\tau(j\omega) = -\frac{1}{2} \left( \frac{H'(j\omega)}{H(j\omega)} + \frac{H'(-j\omega)}{H(-j\omega)} \right), \quad (56)$$

que, por extensión analítica, puede llevarse a :

$$\tau(s) = -\frac{1}{2} \left( \frac{H'(s)}{H(s)} + \frac{H'(-s)}{H(-s)} \right), \quad (57)$$

En el caso particular de la función pasa-todo anterior resulta

$$\tau(s) = \frac{N'(s)}{N(s)} + \frac{N'(-s)}{N(-s)}, \quad (58)$$

Teniendo en cuenta que  $\tau(s)$  tiene el denominador de mayor grado que el numerador, conviene expresar:

$$\tau(s) = \frac{T}{1 + B(s) B(-s)}. \quad (59)$$

donde  $B(s)$  es la función característica para el retardo de grupo y  $T$  el retardo considerado ideal en la banda de paso. Se llega, así, a:

$$\frac{N'(s)}{N(s)} + \frac{N'(-s)}{N(-s)} = \frac{T}{1 + B(s) B(-s)}, \quad (60)$$

Esta ecuación, similar a la de Feldtkeller, no tiene el mismo valor práctico pues no hay un modo sencillo y sistemático de obtener  $N(s)$  a partir de una función  $B(s)$  propuesta. En realidad no siempre existe una  $N(s)$  que corresponda a  $B(s)$ . No intentaremos profundizar el análisis.

## 6.5. Normalización de frecuencia

Una misma función  $A(s)$  puede dar origen a través de cambios de escala en la variable  $S$  a diversos filtros en los cuales se conserva la selectividad  $k$ ,  $A_{máx}$ , y  $A_{mín}$ , y cambian proporcionalmente los límites de las bandas de paso y atenuación. Esto permite con una sola función resolver todos los problemas de aproximación con iguales  $k$ ,  $A_{máx}$ , y  $A_{mín}$ , y diversas  $\omega_p$ . Por comodidad se elige dicha función normalizada en frecuencia es decir con  $\omega_p = 1$  para el caso de PB y PA y con  $\omega_o = 1$  para el caso de PBn y RBn. Si llamamos  $A_1(s)$  a la función de atenuación normalizada, en caso de ser PA o FB se pasa a  $A(s)$  con  $\omega_p$  así:

$$A(s) = A_1(s / \omega_p); \quad (61)$$

y en caso de ser PBn o RBn se pasa a  $A(s)$  con  $\omega_o$  como se indica:

$$A(s) = A_1(s / \omega_o). \quad (62)$$

## 6.6. Transposición de frecuencia

De los cuatro tipos básicos de selectores de frecuencia el PB es el que permite obtener aproximaciones más simples. Es el único que admite atenuaciones polinomiales (en caso de no tener polos de pérdida finitos), es decir:

$$A(s) = Q(s), \quad (63)$$

o, lo que es lo mismo, cuya función de transferencia sólo tiene polos. Por este motivo se introducen transformaciones de variable que al aplicarse a una aproximación de un PB producen aproximaciones correspondientes a los otros tipos de selectores (PA, PBn, RBn). Las transformaciones se eligen de tal manera que las aproximaciones obtenidas conserven la selectividad  $k$ ,  $A_{máx}$ , y  $A_{mín}$ , del PB original.

Esto permite, dadas ciertas especificaciones, hallar una aproximación para un PB auxiliar con las mismas especificaciones, lo cual es más sencillo, y luego, aplicando la correspondiente transformación, obtener la aproximación buscada.

A continuación vemos las distintas transformaciones. En todos los casos se parte de un pasabajos normalizado  $A_1(s)$ .

### 6.6.1. PB a PA

Se desea obtener un PA con frecuencia de paso  $\omega_p$ . Para ello

$$A(s) = A_1(\omega_p / s). \quad (64)$$

La transformación



$$s \rightarrow \omega_p / s \quad (65)$$

se ha elegido de modo que las frecuencias bajas se transformen en altas y viceversa. Veamos que se conservan  $k$ ,  $A_{m\acute{a}x}$ , y  $A_{m\acute{i}n}$ . Para ello debe ser:

$$|A(j\omega_p)| = A_{m\acute{a}x}, \quad (66)$$

$$|A(j\omega_a)| = A_{m\acute{i}n}. \quad (67)$$

donde, por ser un pasaalto ,

$$\omega_a / \omega_p = k .$$

Verifiquemos lo, anterior:

$$|A(j\omega_p)| = |A_1(\omega_p / j\omega_p)| = |A_1(-1/j)| = |A_1(j)| = A_{m\acute{a}x} \quad (68)$$

$$|A(j\omega_p)| = |A_1(\omega_p / j\omega_a)| = |A_1(-j/k)| = |A_1(j/k)| = A_{m\acute{i}n}. \quad (69)$$

El cambio de signo en el argumento imaginario de  $A$  hace que se obtenga el conjugado de  $A_1$ , por lo cual la fase resulta opuesta a la del PB original. Esto no es de importancia en los casos en que sólo interesa el módulo.

### 6.6.2. PB a PBn

Se desea obtener un PBn con frecuencia central  $\omega_o$  y ancho de banda relativo  $B$ . Para ello,

$$A(s) = A_1 \left( \frac{1}{B} \left( \frac{s}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{s} \right) \right). \quad (70)$$

La transformación

$$s \rightarrow \frac{1}{B} \left( \frac{s}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{s} \right) \quad (71)$$

transforma la banda de frecuencias que se desea dejar pasar en bajas frecuencias, pasando por consiguiente a través de  $A_1$ , y las frecuencias menores y mayores en altas frecuencias (las menores debido a  $\omega_o/s$  y las mayores a causa de  $s/\omega_o$ ) siendo por lo tanto bloqueadas por  $A$ . Verifiquemos que se conservan  $k$ ,  $A_{m\acute{a}x}$ , y  $A_{m\acute{i}n}$ . Para ello tengamos en cuenta primero que:

$$B = \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{\omega_o}, \quad (72)$$

$$k = \frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{\omega_{a2} - \omega_{a1}}. \quad (73)$$

Entonces

$$|A(j\omega_{p1})| = \left| A_1 \left( j \frac{1}{B} \left( \frac{\omega_{p1}}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_{p1}} \right) \right) \right| \quad (74)$$

Pero

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} \left( \frac{\omega_{p1}}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega_{p1}} \right) &= \frac{\omega_o}{\omega_{p2} - \omega_{p1}} \frac{\omega_{p1}^2 - \omega_o^2}{\omega_{p1}\omega_o} = \\ &= \frac{1}{\omega_{p1}} \frac{\omega_{p1}^2 - \omega_{p1}\omega_{p2}}{\omega_{p2} - \omega_{p1}} = -1 \end{aligned} \quad (75)$$

de donde

$$|A(j\omega_{p1})| = |A_1(-j1)| = A_{m\acute{a}x} \quad (76)$$

y análogamente para  $\omega_{p2}$ . Queda como ejercicio verificar que:

$$|A(j\omega_{a1})| = |A(j\omega_{a2})| = A_{m\acute{i}n}. \quad (77)$$

### 6.6.3. PB a RBn

Se requiere obtener un RBn con frecuencia central  $\omega_o$  y ancho de banda relativo  $B = (\omega_{a2} - \omega_{a1}) / \omega_o$ . Para ello,

$$A(s) = A_1 \left( \frac{B}{\frac{s}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{s}} \right) \quad (78)$$

La transformación

$$s \rightarrow \frac{B}{\frac{s}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{s}}, \quad (79)$$

es la recíproca de la anterior por lo cual convierte las frecuencias en la banda central en frecuencias altas, que son rechazadas por  $A_1(s)$ . Queda como ejercicio verificar que se mantienen  $k$ ,  $A_{m\acute{a}x}$ , y  $A_{m\acute{i}n}$ .

**Ejemplo 6:** Obtener un PBn con frecuencia central 5 y ancho de banda relativo 0,1 a partir del PB normalizado

$$A_1(s) = s + 1. \quad (80)$$

Para ello reemplazamos:

$$A(s) = \frac{1}{0,1} \left( \frac{s}{5} + \frac{5}{s} \right) + 1 = \frac{2s^2 + s + 50}{s}. \quad (81)$$

#### 6.6.4. Determinación de los polos y ceros

Para determinar los polos de la nueva aproximación obtenida por alguna de las transformaciones anteriores, basta igualar la variable transformada a los polos del PB. Por ejemplo, si hemos obtenido un PBn a partir de un PB que tenía un par de polos en  $\sigma \pm j\omega$ , entonces los polos del PBn verifican

$$\frac{1}{B} \left( \frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right) = \sigma \pm j\omega, \quad (82)$$

es decir

$$s^2 - B\omega_0(\sigma \pm j\omega)s + \omega_0^2 = 0. \quad (83)$$

Los polos resultan, entonces:

$$s_i = \frac{B\omega_0}{2} \left[ (\sigma \pm j\omega) \pm \sqrt{(\sigma \pm j\omega)^2 - \frac{4}{B^2}} \right]. \quad (84)$$

La dificultad de cálculo aparece debido a que debe obtenerse la raíz de un número complejo:

$$\sqrt{a + jb} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 - b^2} + a)} \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 - b^2} - a)}. \quad (85)$$

Dicha dificultad se supera fácilmente si se dispone de una computadora.

El mismo procedimiento es válido para la determinación de los ceros.

### 6.7. Aproximaciones clásicas

El problema de la aproximación ha sido muy estudiado por diversos autores, lo cual ha dado origen a una serie de aproximaciones conocidas como *aproximaciones clásicas*. Las más utilizadas son las de Butterworth, Legendre, Tchebycheff, Bessel y Cauer. Cada una de ellas optimiza algún parámetro o especificación del filtro bajo ciertas condiciones. Siempre se plantean primero para PB, pudiendo luego generalizarse a los otros tipos de selectores por medio de las transformaciones anteriores.

#### 6.7.1. Aproximación de Butterworth

Se parte de una función característica:

$$K(s) = s^n. \quad (86)$$

Entonces

$$A(s)A(-s) = 1 + (-1)^n s^{2n}. \tag{87}$$

Si  $n$  es impar, los ceros son las soluciones de

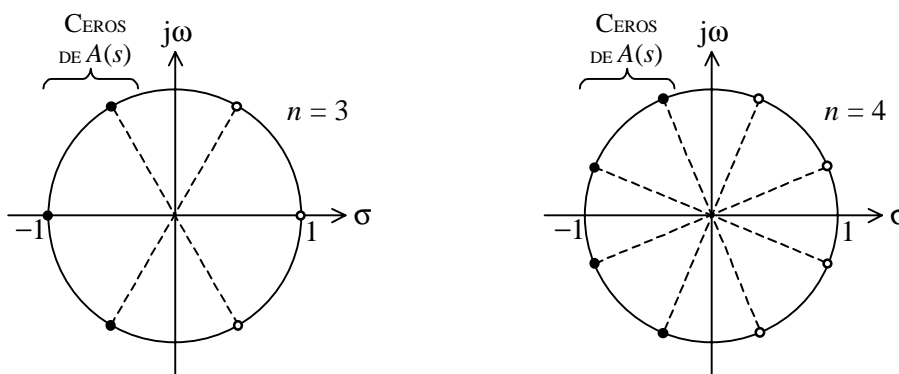
$$s^{2n} = 1. \tag{88}$$

Éstas se encuentran equiespaciadas angularmente sobre una circunferencia de radio unitario (figura 21). Están dadas por

$$s_m = \cos\left(m\frac{\pi}{n}\right) \pm j \operatorname{sen}\left(m\frac{\pi}{n}\right), \quad m = 0, \dots, n - 1 \tag{89}$$

De entre estos  $2n$  ceros deben elegirse, para  $A(s)$ , los ceros con parte real  $< 0$ . Reuniendo los pares de ceros conjugados se obtiene

$$A(s) = (s - 1) \prod_{m=1}^{(n-1)/2} \left( s^2 + 2 \cos\frac{m\pi}{n} s + 1 \right). \tag{90}$$



**Figura 21.** A la izquierda, las raíces  $2n$ -ésimas de 1 cuando  $n$  es impar sobre la circunferencia de radio 1. A la derecha, las raíces  $2n$ -ésimas de  $-1$  cuando  $n$  es par. En ambos casos, los ceros de la función de atenuación  $A(s)$  correspondiente son aquéllos con parte real negativa, para garantizar la estabilidad.

Si  $n$  es par, los ceros son las soluciones de

$$s^{2n} = -1. \tag{91}$$

es decir,

$$s_m = -\cos\left((2m + 1)\frac{\pi}{2n}\right) \pm j \operatorname{sen}\left((2m + 1)\frac{\pi}{2n}\right), \quad m = 0, \dots, n - 1 \tag{92}$$

Procediendo de forma análoga,

$$A(s) = \prod_{m=0}^{n/2-1} \left( s^2 + 2 \cos \frac{(2m+1)\pi}{2n} s + 1 \right). \tag{93}$$

Esta aproximación se conoce como *aproximación de Butterworth* o también *máximamente plana*. Su propiedad fundamental es que es máximamente plana en el origen, es decir que tiene el máximo número posible de derivadas nulas para  $\omega = 0$  compatible con el orden del filtro.

Obsérvese que la función  $A(s) = s^n$  también tiene el máximo número de derivadas nulas. Sin embargo, aunque sería realizable mediante  $n$  integradores, no resulta estable. La técnica de Feldtkeller tiene la virtud de permitir aprovechar funciones características con propiedades deseables convirtiéndolas en funciones realizables y estables.

### 6.7.1.1 Determinación del orden de la aproximación de Butterworth

Dado que

$$|K(j\omega)|^2 = |A(j\omega)|^2 - 1,$$

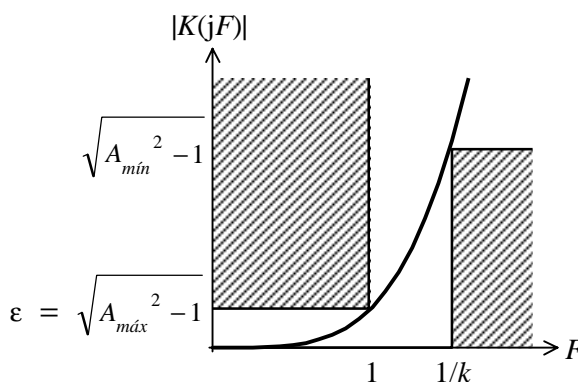
resulta

$$|K(j1)| = \sqrt{A_{m\acute{a}x}^2 - 1} = \epsilon, \tag{94}$$

$$\left| K\left(j\frac{1}{k}\right) \right| \geq \sqrt{A_{m\acute{i}n}^2 - 1}. \tag{95}$$

(ver figura 22) Entonces debe corregirse la definición de  $K(s)$  para que en  $\omega = 1$  se cumpla  $A_{m\acute{a}x}$ . Ello se logra simplemente con el cambio de escala  $s \rightarrow s/\sqrt[n]{\epsilon}$ :

$$K(s) = \sqrt{A_{m\acute{a}x}^2 - 1} s^n \tag{96}$$



**Figura 22.** Parámetros de la función característica a partir de los de la función de aproximación.  $F$  es la frecuencia normalizada.

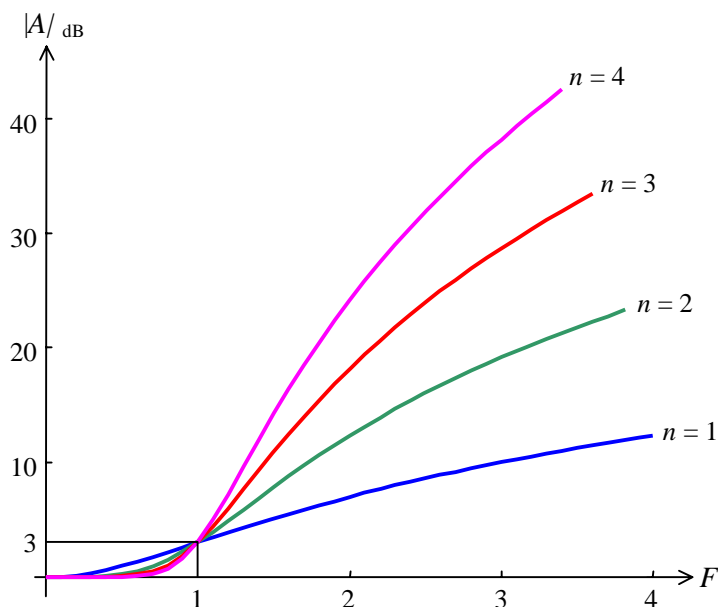
Entonces

$$\left| K \left( j \frac{1}{k} \right) \right| = \sqrt{A_{m\acute{a}x}^2 - 1} \frac{1}{k^n} \geq \sqrt{A_{m\acute{m}n}^2 - 1} \quad (97)$$

de donde el orden necesario resulta ser:

$$n \geq \frac{1}{2 \log k} \log \left( \frac{A_{m\acute{a}x}^2 - 1}{A_{m\acute{m}n}^2 - 1} \right) \quad (98)$$

Existen también ábacos que permiten obtener gráficamente el orden. En general se dan para  $\epsilon = 1$ , que corresponde a  $A_{m\acute{a}x} = \sqrt{2}$  (es decir, 3 dB), como se indica en la figura. Estos ábacos no son más que la representación de  $|A(j\omega)|$  en gráfica semilogarítmica (figura 23).



**Figura 23.** Atenuación de un filtro de Butterworth normalizado en función de la frecuencia normalizada  $F$ , para órdenes  $n = 1$  a 4.

En el ejemplo 4 se utilizó una aproximación de Butterworth. Las aproximaciones de orden 1, 2 y 3 de Butterworth son, para  $\epsilon = 1$

$$A(s) = s + 1 \quad (99)$$

$$A(s) = s^2 + \sqrt{2}s + 1 \quad (100)$$

$$A(s) = (s + 1)(s^2 + s + 1) \quad (101)$$

Las aproximaciones de Butterworth se encuentran tabuladas para filtros pasabajos y pasabanda de diversos órdenes y anchos de banda relativos, de manera que no es necesario realizar su cálculo para la posterior etapa de síntesis. Sólo se requiere, en general, determinar el orden de un pasabajos de igual selectividad y atenuaciones máxima en la banda de paso y mínima en la de corte, y luego buscar en la tabla las funciones respectivas, que se encuentran ya factorizadas en sus factores de primer y segundo orden.

### 6.7.2. Aproximación de Tchebycheff

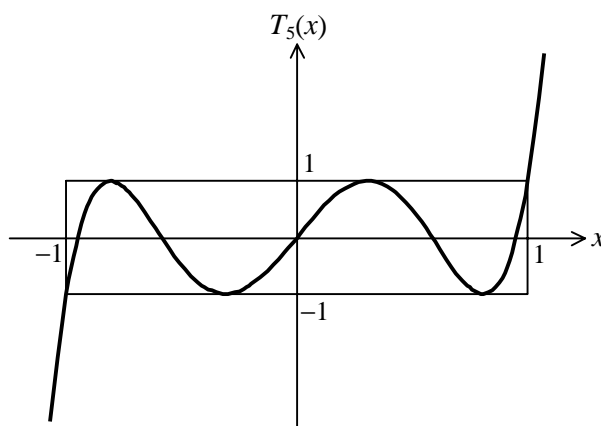
Es la aproximación polinomial que hace máximo el valor de  $A_{mín}$  para un orden  $n$  una selectividad  $k$  y un  $A_{máx}$  dados. Desde otro punto de vista, minimiza el error  $A_{máx}$  de la banda de paso dados  $n$ ,  $k$  y  $A_{mín}$ . Puede demostrarse que la función característica que permite obtener esta aproximación es el polinomio de Tchebycheff de orden  $n$ ,  $T_n(x)$ . Esta función puede calcularse, para  $|x| \leq 1$  como:

$$T_n(x) = \cos (n \arccos x) \tag{102}$$

y, para  $|x| > 1$ , como<sup>5</sup>

$$T_n(x) = \text{Ch} (n \text{argCh } x). \tag{103}$$

Si bien parecería que estas funciones son trascendentes, es posible verificar que se reducen a funciones polinomiales.



**Figura 24.** Polinomiode Tchebycheff de grado 5.

El polinomio de Tchebycheff de orden  $n$  tiene, sobre el eje real,  $n - 1$  máximos y mínimos de valor absoluto 1 y  $n$  ceros. Si se pretende que  $K(s)$  tenga este comportamiento en el eje imaginario, y que la oscilación sea verifique entre  $-\epsilon$  y  $\epsilon$ , debe ser

$$|K(j\omega)|^2 = \epsilon^2 T_n^2(\omega) = \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{j\omega}{j}\right). \tag{104}$$

<sup>5</sup> En realidad, si se hace uso de las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas, cualquiera de las dos expresiones es válida en toda la recta real.

Por extensión analítica,

$$K(s)K(-s) = \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j}\right), \quad (105)$$

de donde

$$A(s)A(-s) = 1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{s}{j}\right). \quad (106)$$

Para calcular los ceros de  $A(s)$  igualamos a 0, resultando:

$$T_n\left(\frac{s}{j}\right) = \pm \frac{j}{\varepsilon}, \quad (107)$$

$$\cos\left(n \arccos \frac{s}{j}\right) = \pm \frac{j}{\varepsilon}, \quad (108)$$

de donde

$$s_m = j \cos\left(\frac{1}{n} \arccos\left(\pm \frac{j}{\varepsilon}\right)\right). \quad (109)$$

Es más conveniente emplear funciones de variable real. Si expresamos:

$$\arccos\left(\pm \frac{j}{\varepsilon}\right) = x + jy, \quad (110)$$

resulta

$$\pm \frac{j}{\varepsilon} = \cos(x + jy) = \cos x \cdot \operatorname{Ch} y - j \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{Sh} y \quad (111)$$

de donde

$$\cos x \cdot \operatorname{Ch} y = 0, \quad (112)$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{Sh} y = \pm \frac{1}{\varepsilon}. \quad (113)$$

De la primera ecuación, dado que  $\operatorname{Ch} y \neq 0$ , debe ser  $\cos x = 0$ , para lo cual

$$x = (2m - 1)\frac{\pi}{2}, \quad m \text{ entero.} \quad (114)$$

Dado que, entonces,  $\operatorname{sen} x = \pm 1$ , de la segunda ecuación resulta

$$y = \pm \operatorname{arg} \operatorname{Sh} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (115)$$

Entonces

$$s_m = j \cos\left((1 - 2m)\frac{\pi}{2n} \pm j \frac{1}{n} \operatorname{arg} \operatorname{Sh} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (116)$$



es decir

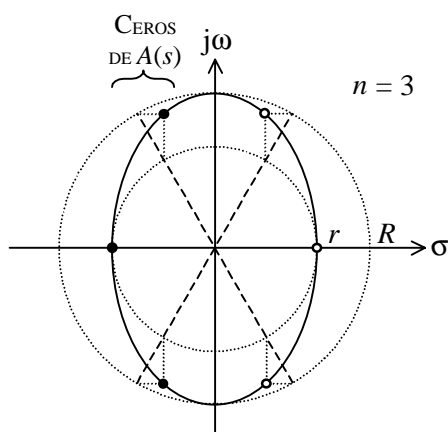
$$s_m = -\operatorname{sen}\left((2m-1)\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{Sh}\left(\frac{1}{n}\operatorname{argSh}\frac{1}{\varepsilon}\right) \pm j \cos\left((2m-1)\frac{\pi}{2n}\right)\operatorname{Ch}\left(\frac{1}{n}\operatorname{argSh}\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (117)$$

Una propiedad interesante de los ceros de  $A(s)$  es que se encuentran sobre una elipse con radios mayor y menor:

$$R = \operatorname{Ch}\left(\frac{1}{n}\operatorname{argSh}\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (118)$$

$$r = \operatorname{Sh}\left(\frac{1}{n}\operatorname{argSh}\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (119)$$

En la figura 25 se muestra la ubicación de los ceros



**Figura 25.** Ceros de la aproximación de Tchebycheff de orden 3. Los parámetros  $r$  y  $R$  están dados por las ecuaciones (118) y (119)

Entre los distintos ceros se eligen los que tienen parte real  $< 0$ , es decir los correspondientes a

$$0 \leq m < n - 1 \quad (120)$$

Debido a su complejidad algebraica, no calcularemos la expresión final de  $A(s)$ .

La aproximación de Tchebycheff también se suele llamar *equiripple* por tener una ondulación uniforme en la banda de paso; y también *minimax* o *maximin* por el hecho de minimizar  $A_{máx}$  o maximizar  $A_{mín}$ .

### 6.7.2.1 Determinación del orden de la aproximación de Tchebycheff

Igual que en el caso de la aproximación de Butterworth,

$$|K(j1)| = \sqrt{A_{máx}^2 - 1} = \varepsilon,$$

$$\left| K \left( j \frac{1}{k} \right) \right| \geq \sqrt{A_{\min}^2 - 1}.$$

En este caso

$$\left| K \left( j \frac{1}{k} \right) \right| \geq \varepsilon T_n \left( \frac{1}{k} \right) \quad (121)$$

Como  $1/k > 1$ , conviene utilizar la igualdad:

$$T_n(x) = \text{Ch}(n \arg \text{Ch } x) \quad (122)$$

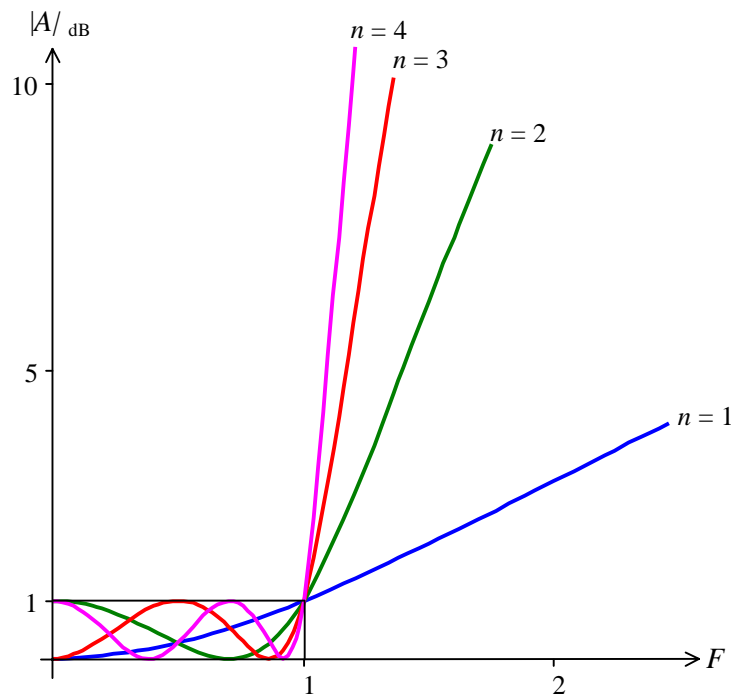
Entonces

$$\varepsilon \text{Ch} \left( n \arg \text{Ch} \frac{1}{k} \right) \geq \sqrt{A_{\min}^2 - 1} \quad (123)$$

de donde

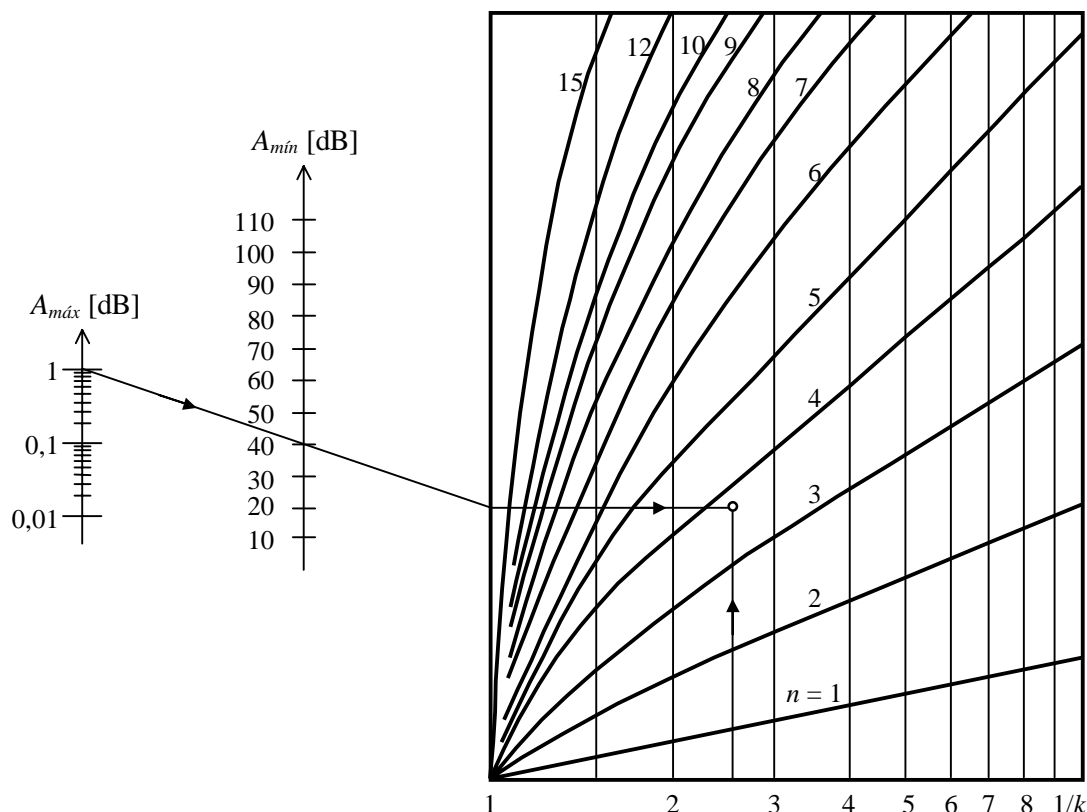
$$n \geq \frac{1}{\arg \text{Ch}(1/k)} \arg \text{Ch} \left( \frac{\sqrt{A_{\min}^2 - 1}}{\sqrt{A_{\max}^2 - 1}} \right) \quad (124)$$

En la figura 26 se muestran las curvas de atenuación de Tchebycheff para  $A_{\max} = 1$  dB y órdenes 1 a 4.



**Figura 26.** Atenuación de un filtro de Tchebicheff normalizado con ondulación de 1 dB en la banda de paso, en función de la frecuencia normalizada  $F$ , para órdenes  $n = 1$  a 4.

Existen también nomogramas que permiten obtener gráficamente el orden en función de  $A_{mín}$ ,  $A_{máx}$  y  $k$  (figura 27)



**Figura 27.** Nomograma para determinar el orden de un filtro de Tchebycheff a partir de  $A_{máx}$ ,  $A_{mín}$  y  $1/k$ . En el ejemplo, un filtro con  $A_{máx} = 1$  dB,  $A_{mín} = 40$  dB y  $k = 0,4$  requiere un orden superior a 3, por lo que se elige  $n = 4$ .

**Ejemplo 7:** Obtener el orden de una aproximación de Tchebycheff para  $A_{mín} = 40$  dB,  $A_{máx} = 1$  dB,  $k = 0,4$ .

Obtenemos en primer lugar los valores lineales de  $A_{máx}$  y  $A_{mín}$ :

$$A_{máx} = 10^{1/20} = 1,115$$

$$A_{mín} = 10^{40/20} = 100$$

De aquí se obtiene, aplicando la ecuación (124), que  $n \geq 3,81$ , de donde resulta  $n = 4$ , resultado que coincide con el obtenido mediante el nomograma de la figura 27.

### 6.7.2.2 Obtención del módulo de la aproximación de Tchebycheff

Si se desea calcular  $|A(j\omega)|$  para una aproximación de Tchebycheff normalizada de orden  $n$  y  $A_{máx}$  dados, en lugar de hallar  $A(s)$  puede recurrirse a la expresión en términos de la función característica:

$$|A(ju)| = \sqrt{1 + \varepsilon^2 |K(ju)|^2} = \sqrt{1 + \varepsilon^2 T_n(u)^2}, \quad (125)$$

es decir

$$|A(ju)| = \sqrt{1 + \left(10^{A_{\max}/10} - 1\right) \text{Ch}^2(n \arg \text{Ch } u)}. \quad (126)$$

Para valores de  $u$  menores que 1 se reemplazan las funciones hiperbólicas por las correspondientes trigonométricas.

**Ejemplo 8:** a) Obtener el orden de una aproximación de Tchebycheff para  $A_{\min} = 50$  dB,  $A_{\max} = 1$  dB,  $k = 0,5$ . b) Determinar la función atenuación  $A(s)$  descompuesta en sus factores cuadráticos para la aproximación del ejemplo anterior. c) Hallar  $A_{\min}$  para la selectividad indicada y verificar que satisface la plantilla.

a) Obtenemos en primer lugar los valores lineales de  $A_{\max}$  y  $A_{\min}$ :

$$A_{\max} = 10^{1/20} = 1,115$$

$$A_{\min} = 10^{50/20} = 316,23$$

De aquí se obtiene, aplicando la fórmula anterior, que  $n \geq 5,41$ , de donde resulta  $n = 6$ .

b) A partir de  $A_{\max}$  determinamos la magnitud correspondiente de la oscilación en la banda de paso:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(10^{1/20}\right)^2 - 1} = 0,5088$$

Los polos vienen dados por la ecuación (117) poniendo  $2m - 1 = q$ :

$$s_m = -\text{sen} \frac{q\pi}{12} \text{Sh} \left( \frac{1}{6} \arg \text{Sh} \frac{1}{\varepsilon} \right) \pm j \cos \frac{q\pi}{12} \text{Ch} \left( \frac{1}{6} \arg \text{Sh} \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

con  $q = 1, 3, 5$ , ya que deben seleccionarse los que tienen parte real negativa. Se obtienen los siguientes pares de polos:

$$s_{1,2} = -0,06218 \pm j 0,99341$$

$$s_{3,4} = -0,16988 \pm j 0,72723$$

$$s_{5,6} = -0,23206 \pm j 0,26618$$

que proporcionan la siguiente atenuación:

$$A(s) = (1,0094s^2 + 0,12553s + 1) (1,7930s^2 + 0,60920s + 1) (8,0188s^2 + 3,7218s + 1)$$

c) Para calcular  $A_{\min}$  puede aplicarse la fórmula obtenida anteriormente con  $u = 1/k$ :

$$A_{mín} = \sqrt{1 + 0,5088^2 \text{ Ch}^2(6 \arg \text{Ch } 2)} = 687,45$$

de donde, en dB

$$A_{mín} = 56,7 \text{ dB} > 50 \text{ dB},$$

verificándose el cumplimiento de la plantilla.

Si bien las aproximaciones de Tchebycheff permiten una transición muy abrupta, su punto débil es su respuesta transitoria, que resulta fuertemente oscilante. No se adapta muy bien, por lo tanto, al filtrado de señales en las que la forma de onda tenga importancia.

Igual que para el caso de los filtros de Butterworth, las funciones atenuación de Tchebycheff se encuentran tabuladas, en este caso para diversos órdenes, ondulaciones en la banda de paso y anchos de banda relativos. Una vez determinado el orden se obtienen de tablas los factores de primer y segundo orden.

### 6.7.3. Otras aproximaciones clásicas

Además de las aproximaciones desarrolladas existen otras de frecuente aplicación, cada una caracterizada por el comportamiento óptimo de algún parámetro o relación entre parámetros. Si bien no abordaremos su estudio analítico como en los casos anteriores, sí presentamos un resumen de las características salientes de algunas de ellas.

La aproximación de Tchebycheff inversa tiene la particularidad de presentar un comportamiento máximamente plano en la banda de paso pero con una serie de polos de pérdida en la banda de corte, con una ondulación inversa constante, esto es, entre cada par de polos de pérdida aparecen mínimos de igual magnitud. El valor de esta atenuación mínima debe seleccionarse por encima de la atenuación mínima exigida por la plantilla. Por tener polos de pérdida finitos esta aproximación es no polinomial, exigiendo la presencia de ceros en la función de transferencia. Su ventaja es que además de poseer una respuesta máximamente plana en la banda de paso los polos de pérdida aceleran el crecimiento de la atenuación en la banda de transición, por lo que permite lograr un filtro mucho más selectivo. De hecho, de todos los filtros posibles de respuesta máximamente plana en la banda de paso es el que exhibe una transición más rápida para un orden determinado. Su desventaja es que posee transitorios mayores que los de la aproximación de Butterworth

La aproximación elíptica o de Cauer se caracteriza por ser equiripple (ondulación constante) tanto en la banda de paso como en la de corte. En otras palabras, exhibe tanto polos de pérdida como ceros de reflexión. Dados  $A_{máx}$  y  $A_{mín}$ , es la aproximación que más rápidamente crece en la banda de transición entre todas las realizables como funciones racionales. Se utiliza, por consiguiente, en aquellos casos en los que se requiere una selectividad excepcionalmente abrupta. El precio a pagar es una respuesta transitoria muy oscilante, la cual puede ser inaceptable para ciertas aplicaciones en las que la señal varíe en forma aleatoria permanentemente, o en las que la información esté contenida en la forma de onda o en las envolventes, como sucede con las señales acústicas en general. La razón de este comportamiento es la presencia de un pico muy importante en el retardo de grupo en las proximidades de la frecuencia de paso

En los casos en que se requiere, por el contrario, mantener la forma de onda de aquellas señales contenidas en la banda de paso, se impone utilizar aproximaciones con

muy buen comportamiento en el retardo de grupo. La aproximación de Bessel se caracteriza por tener un retardo de grupo máximamente plano en la banda de paso. Lamentablemente, su banda de transición es muy extensa, por lo que para una selectividad importante haría falta un orden prohibitivamente alto. Se utiliza cuando las exigencias de atenuación en la banda de corte no son muy severas pero, en cambio es preciso conservar en toda su integridad la forma de onda de un tren de pulsos.

## 7. Filtros activos

Los filtros LC son poco prácticos en baja frecuencia debido al tamaño, costo y baja calidad de los inductores, de allí la necesidad de contar con filtros sin inductores. Podría pensarse en redes RC, pero como sus polos están en el eje real negativo, no permiten obtener las aproximaciones clásicas, ni tampoco filtros muy selectivos. Surge la idea, entonces, de desplazar los polos originales de una red RC para reubicarlos en posiciones más favorables. Esto puede lograrse aplicando el concepto de realimentación, para lo cual hace falta agregar amplificadores que aporten la ganancia de lazo necesaria. Por este motivo, los filtros resultantes se denominan *activos*.

Existen dos enfoques para la síntesis de filtros activos:

- a) Síntesis por simulación parcial o total de un prototipo de filtro pasivo LC.
- b) Síntesis mediante métodos específicos para filtros activos, sin pasar por un filtro prototipo pasivo.

### 7.1. Síntesis por simulación

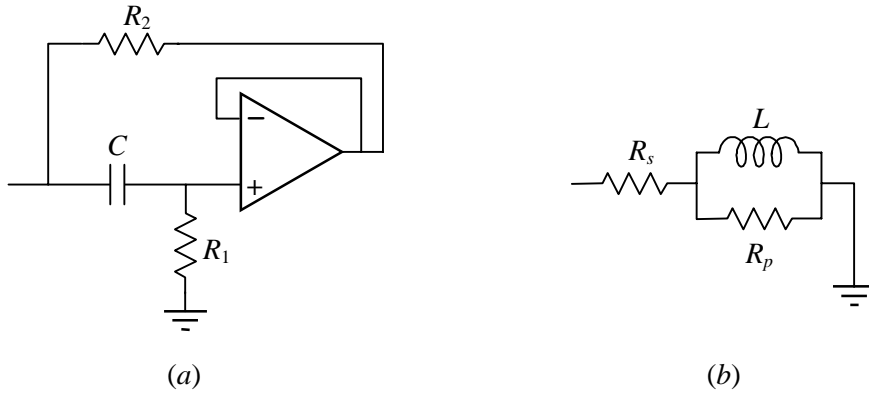
En este enfoque de síntesis se aprovechan la gran disponibilidad de recursos para el diseño de filtros LC (tablas, métodos, etc.) y su probada eficacia en los rangos de frecuencia en los cuales los componentes son bastante ideales. Pueden simularse entonces los componentes problemáticos como los inductores, o bien el circuito completo. En este último caso la técnica consiste en plantear un modelo en forma de grafo en el cual los arcos sean factores constantes o integraciones y los nudos, sumadores, y luego simular mediante amplificadores operacionales los integradores y sumadores.

#### 7.1.1. Simulación de componentes

En principio se simulan inductores, pero dado que es más económica la simulación de inductores referidos a masa, en los circuitos con inductores flotantes se aplica una transformación que los elimina sin modificar la transferencia. Esta transformación introduce componentes nuevos (de la forma  $1/Ds^2$ ), que también pueden simularse.

##### 7.1.1.1 Simulación de inductores

- a) El circuito más simple, indicado en la figura 28, utiliza un solo amplificador operacional y permite simular un inductor real con una resistencia en serie y otra en paralelo.



**Figura 28.** (a) Circuito sencillo con un amplificador operacional para simular un inductor real. (b) Inductor real equivalente.

Las ecuaciones de diseño son las siguientes:

$$R_2 = R_s, \tag{127a}$$

$$R_1 = R_s + R_p, \tag{127b}$$

$$C = L / R_p R_s. \tag{128c}$$

Es interesante explicitar las limitaciones de esta simulación, lo cual puede hacerse por medio del factor de calidad  $Q$  del inductor. Llamando  $\omega_1$  y  $\omega_2$  a las frecuencias del cero y el polo respectivamente, es decir,

$$\omega_1 = \frac{R_p R_s}{L (R_p + R_s)}, \quad \omega_2 = \frac{R_p}{L}, \tag{129}$$

resulta

$$Q = \frac{1 - \omega_1 / \omega_2}{\omega / \omega_2 + \omega_1 / \omega}. \tag{130}$$

El máximo valor se obtiene para

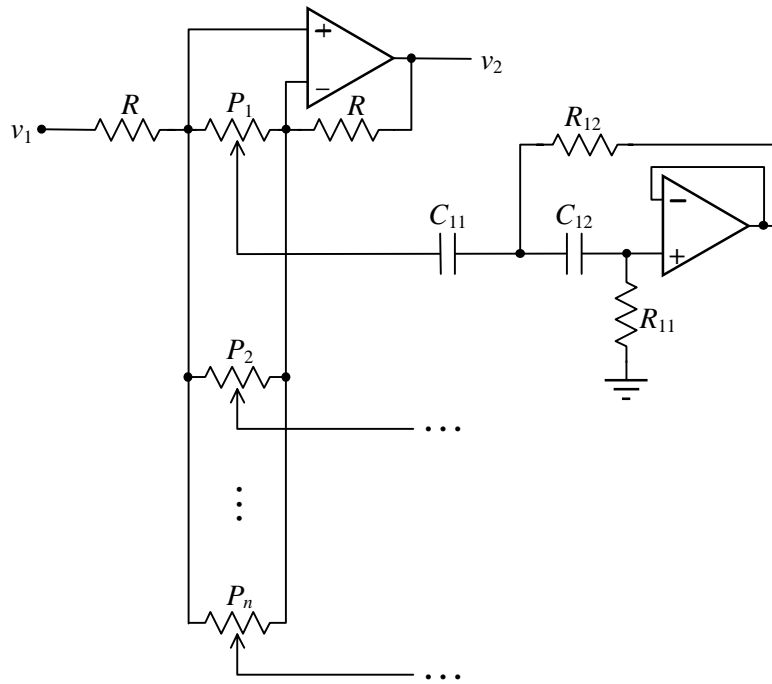
$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \frac{R_p}{L} \sqrt{\frac{R_s}{R_p + R_s}}, \tag{131a}$$

y vale

$$Q_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} (\sqrt{\omega_2 / \omega_1} - \sqrt{\omega_1 / \omega_2}). \tag{131b}$$

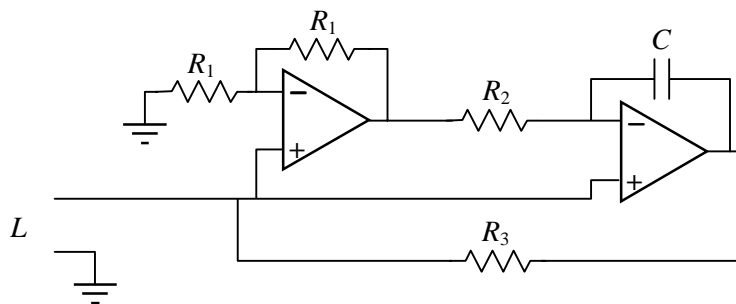
Este valor puede hacerse grande adoptando  $R_p \gg R_s$ . Dado que el circuito se emplea normalmente en serie con un capacitor formando un circuito resonante, debe tenerse en cuenta que  $Q_{m\acute{a}x}$  debe ser mucho mayor que el valor de  $Q$  requerido.

Este inductor simulado se suele utilizar en los circuitos ecualizadores gráficos, en serie con un capacitor, como circuito resonante. En la figura 29 se muestra esquemáticamente la estructura de un ecualizador.



**Figura 29.** Estructura de un ecualizador gráfico que utiliza el inductor simulado de la figura 28 formando parte de un circuito resonante. Cada una de las  $n$  bandas del ecualizador utiliza un circuito similar.

b) El circuito más elaborado de la figura 30 emplea dos amplificadores operacionales y permite simular un inductor ideal, también conectado a masa.



**Figura 30.** Simulación de un inductor ideal mediante un circuito RC con dos amplificadores operacionales.

El valor de la inductancia es

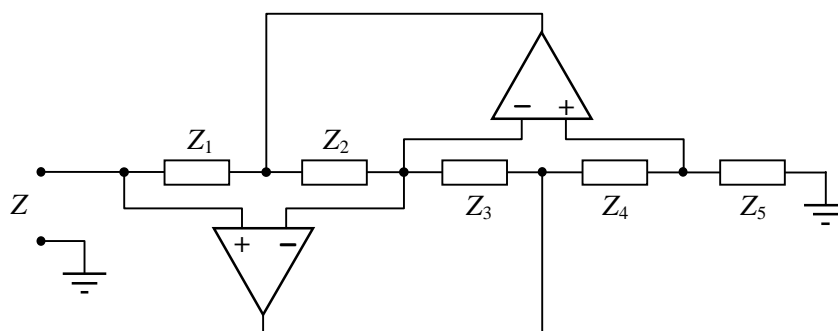
$$L = R_2 R_3 C. \tag{132}$$



En realidad, la calidad del inductor simulado depende del grado de idealidad de los amplificadores operacionales en el rango de frecuencias de utilización.

### 7.1.1.2 Girador de Antoniou

El siguiente circuito, conocido como *Girador de Antoniou* o *Convertidor de Impedancia Generalizado* (GIC, Generalized Impedance Converter) también utiliza dos amplificadores operacionales, pero es de superior calidad y versatilidad, ya que permite



**Figura 31.** El girador de Antoniou o conversor de impedancia generalizado permite simular una variedad de impedancias utilizando circuitos RC.

la simulación tanto de inductores como de otros componentes. Se verifica fácilmente que

$$Z = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}. \quad (133)$$

Si  $Z_1$ ,  $Z_3$  y  $Z_5$  son resistencias y  $Z_2$  o  $Z_4$  son capacitores, resultan las siguientes impedancias:

$$Z = \frac{R_1 R_3 R_5 C_2}{R_4} s \quad (134)$$

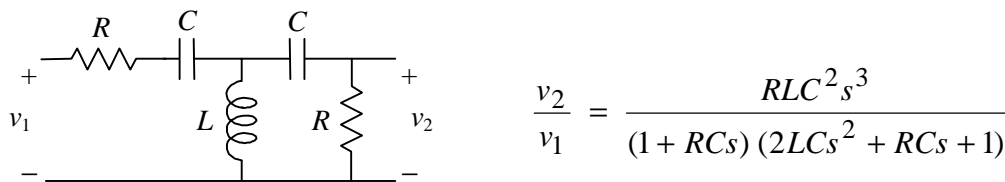
$$Z = \frac{R_1 R_3 R_5 C_4}{R_2} s. \quad (135)$$

La segunda opción tiene mejor respuesta en frecuencia, si se contemplan la respuesta en frecuencia no ideal de los amplificadores.

Esta configuración se ha fabricado como circuito integrado monolítico (AF120), en el cual algunas de las resistencias son provistas en el propio integrado con la ventaja adicional de su ajustado apareamiento y sus derivas elegidas para coincidir con las correspondientes a capacitores de poliestireno. Sin embargo, puede implementarse con cualquier circuito integrado que contenga dos o cuatro amplificadores operacionales con respuestas en frecuencia apareadas

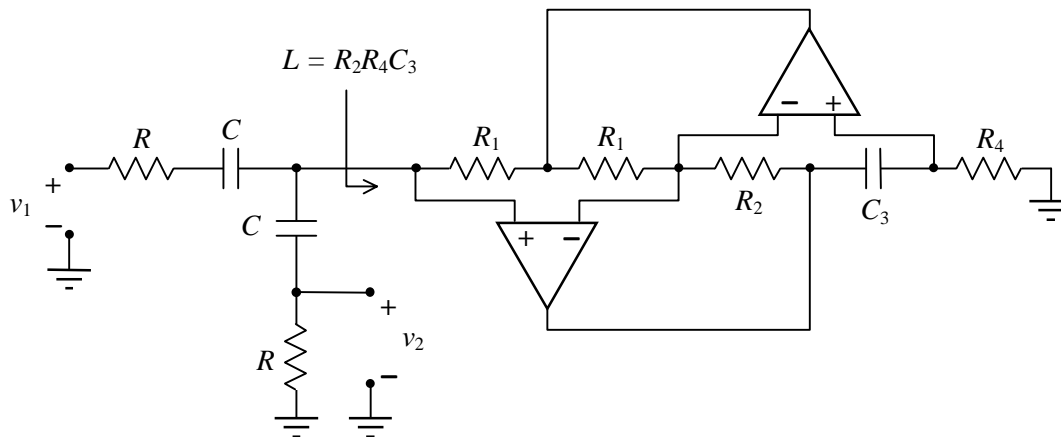
Dado que con el GIC se simulan fácilmente inductores conectados a masa, este circuito es apropiado para simular estructuras LC de tipo escalera escalera, características de los filtros pasaltos.

**Ejemplo 9:** Simular el circuito de la figura 32 con un girador de Antoniou.



**Figura 32.** El filtro RLC pasivo del ejemplo 9 a ser sintetizado simulando el inductor mediante un girador de Antoniou.

La función de transferencia correspondiente se indica en la propia figura 32. Se propone reemplazar el inductor por un girador de Antoniou, como se muestra en la figura 33.



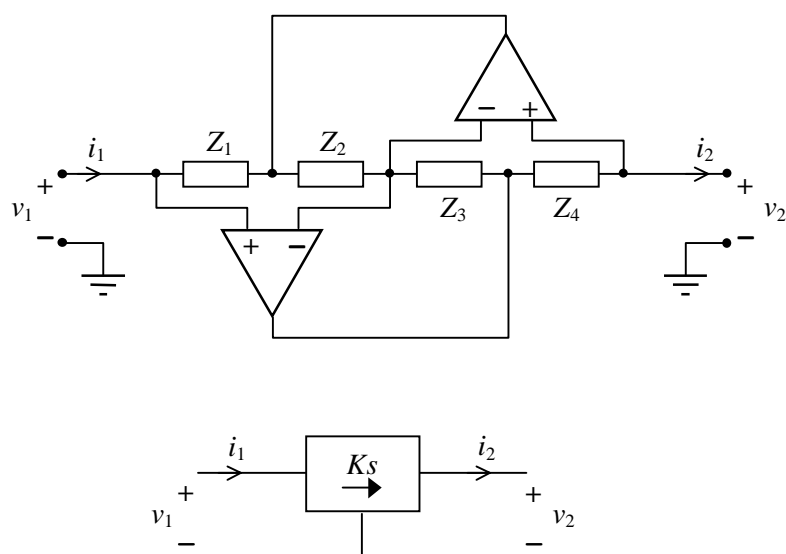
**Figura 33.** El filtro del ejemplo 9 con el inductor sustituido por un girador de Antoniou.

### 7.1.1.3 Simulación de inductores flotantes

Es posible simular inductores flotantes y, en realidad, cualquier subred inductiva (por ejemplo una configuración Y) mediante la técnica denominada *de inmersión de GIC's*. Para ello consideremos el girador como cuadripolo, eliminando la impedancia  $Z_5$  (figura 34). Debido a los ceros virtuales, se tiene

$$V_2 = V_1 \tag{136}$$

Además, dado que en la fórmula de la impedancia de entrada puede sustituirse  $Z_5$  por  $V_2/I_2$ , se tiene



**Figura 34.** El girador de Antoniou como cuadripolo y su modelo y su simbología circuital.

$$\frac{v_1}{i_1} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4} \frac{v_2}{i_2}, \tag{137}$$

de donde

$$i_2 = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4} i_1. \tag{138}$$

Por consiguiente, si \$Z\_2\$ es un capacitor, se tendrá

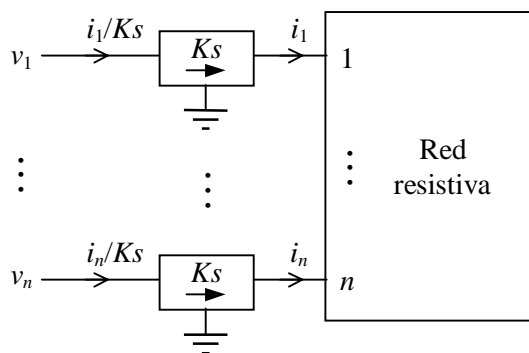
$$i_2 = K_s i_1, \tag{139}$$

donde

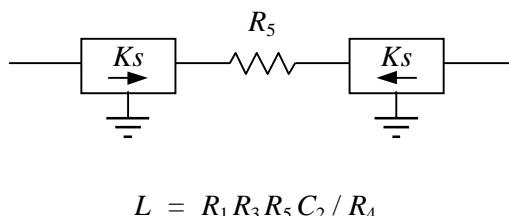
$$K = R_1 R_3 C_2 / R_4. \tag{140}$$

Ahora consideremos una red resistiva de \$n\$ terminales y conectemos a cada uno de ellos la salida de un GIC como el anterior (figura 35). Al aplicar tensiones \$V\_1, \dots, V\_n\$, las mismas tensiones quedan aplicadas a la red resistiva provocando una circulación de corrientes \$I\_1, \dots, I\_n\$. Dichas corrientes se reflejan a la entrada de los giradores divididas por \$K\_s\$. Equivale a que cada resistencia \$R\$ de la red fuera reemplazada por una inductancia de valor \$L = KR\$, por lo cual la red resistiva se transformó en una red inductiva de igual topología.

En el caso particular de un inductor flotante, puede simularse conectando a cada uno de sus terminales un GIC, como se indica en el circuito de la figura 36. Puede apreciarse que como cada GIC requiere dos amplificadores operacionales, la simulación de un inductor flotante no resulta económica.



**Figura 35.** Conversión de una red puramente resistiva de  $n$  terminales en una red puramente inductiva mediante el agregado de  $n$  giradores de Antoniou.



**Figura 36.** Simulación de un inductor flotante por medio de una resistencia y dos giradores de Antoniou..

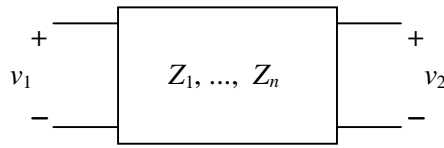
Lo anterior no sucede para todas las redes  $L$ , ya que, por ejemplo, simular una configuración Y con tres inductores requiere sólo dos giradores, ya que la Y tiene sólo dos terminales (sin contar el de masa). En realidad no interesa la cantidad de inductores sino de la cantidad de terminales.

### 7.1.1.4 Transformación para eliminar inductores

En las redes escalera pasabajos los inductores aparecen flotantes, por lo cual la aplicación directa del GIC para simular inductores no es económica. En su lugar, se procederá a modificar el prototipo a través de una transformación sencilla que consiste en multiplicar todas las impedancias de la red por  $K/s$ , donde  $K$  es una constante adecuada. Veremos que esta transformación de componentes no modifica la función de transferencia.

Dada una red compuesta por las impedancias  $Z_1, \dots, Z_n$ , uindicada esquemáticamente en la figura 37, se tiene

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{P(Z_i)}{Q(Z_i)}, \tag{141}$$



**Figura 37.** Una red compuesta por una interconexión arbitraria de  $n$  impedancias.

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios de varias variables en los que todos los términos tienen la misma cantidad  $m$  de factores, pues debe ser homogéneo dimensionalmente (no pueden aparecer sumados  $\Omega^2$  y  $\Omega^3$ , por ejemplo). Entonces ante la transformación anterior la nueva función de transferencia estará dada por:

$$\left( \frac{v_2}{v_1} \right)^* = \frac{P\left(\frac{K}{s}Z_i\right)}{Q\left(\frac{K}{s}Z_i\right)} = \frac{K^m}{s^m} \frac{P(Z_i)}{K^m Q(Z_i)} = \frac{v_2}{v_1} \quad (142)$$

Naturalmente, sí se modifican las impedancias de entrada y salida, que quedan afectadas por el factor  $K/s$ , pero ello no es importante en general, dado que los filtros activos utilizan amplificadores operacionales, que son excelentes adaptadores de impedancia.

Con dicha transformación se tiene la tabla de conversión de componentes dada en la tabla 3

**Tabla 3.** Conversión de componentes ante la transformación  $Z \rightarrow KZ/s$ .

	→		$C = 1/KR$
	→		$R = KL$
	→		$D = C/K$

Aparece un nuevo elemento,  $1/Ds^2$ , que se comporta como una resistencia negativa dependiente de la frecuencia (frequency-dependent negative resistance, FDNR) y que reemplaza a los capacitores que en estos circuitos pasabajos están a masa.

Recordando que en el GIC se cumple que

$$Z = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}$$

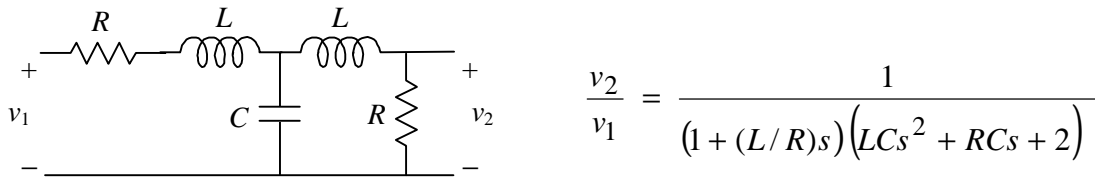
puede simularse una FDNR adoptando  $Z_1$  y  $Z_5$  como capacitores, y las restantes impedancias como resistencias. Se obtiene:

$$Z = \frac{R_3}{R_2 R_4 C_1 C_5 s^2}, \tag{143}$$

$$D = R_2 R_4 C_1 C_5 / R_3. \tag{144}$$

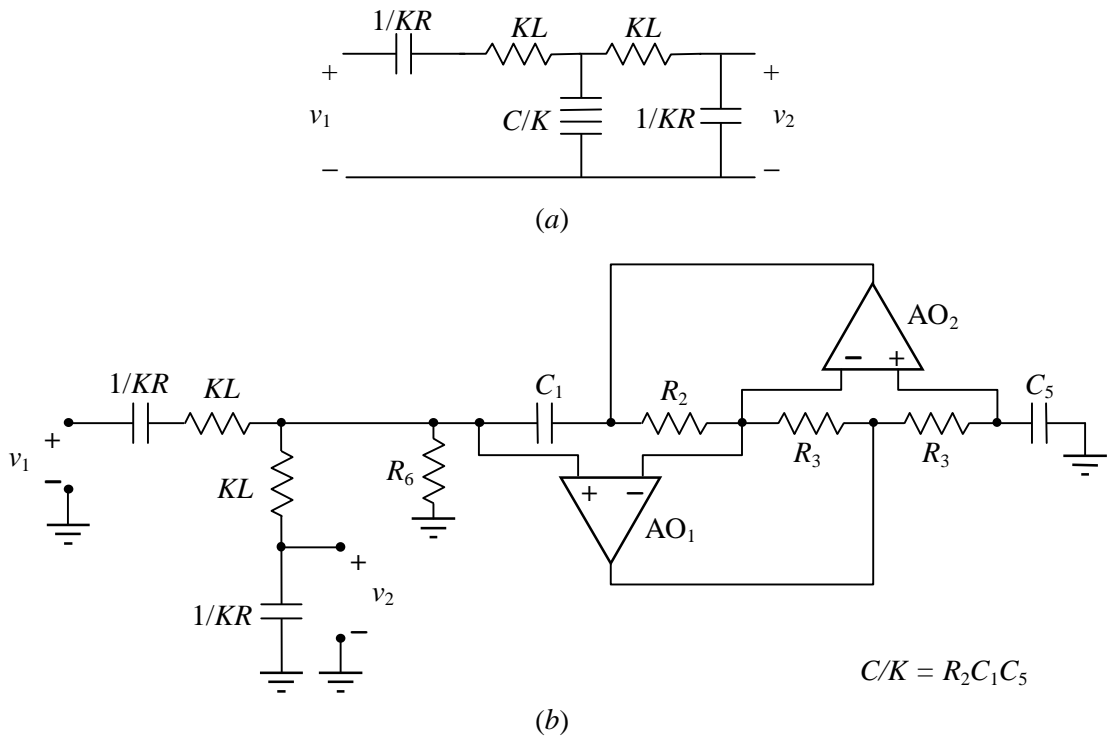
También podrían tomarse  $Z_1$  y  $Z_3$  como capacitores.

**Ejemplo 10:** Simular el filtro LC de la figura 38 priorizando el criterio de mayor economía.



**Figura 38.** El filtro RLC pasivo del ejemplo 10 a ser sintetizado aplicando la transformación que convierte los inductores en resistores.

El primer paso es transformar el circuito según se indica en la figura 39(a). Luego se reemplaza la FDNR por su simulación con GIC, como se ilustra en la figura 39(b).



**Figura 39.** (a) El filtro de la figura 38 transformado para eliminar inductores. (b) Su implementación por simulación de la FDNR

La resistencia  $R_6$  se ha colocado para polarizar la entrada no inversora del AO<sub>1</sub>. Su valor debe elegirse mucho mayor que  $KL$ , para no desmejorar el funcionamiento del filtro.

### 7.1.1.5 Comportamiento real de las simulaciones con GIC

Si se tienen en cuenta las ganancias finitas de los amplificadores operacionales del GIC, la impedancia de entrada vale:

$$Z_{ent} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} \frac{1 + \left(1 + \frac{Z_4}{Z_5}\right) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{1}{a_1 a_2} \left(1 + \frac{Z_2}{Z_3}\right)\right)}{1 + \left(1 + \frac{Z_5}{Z_4}\right) \left(\frac{1}{a_1} \frac{Z_3}{Z_2} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_1 a_2} \left(1 + \frac{Z_3}{Z_2}\right)\right)}. \quad (145)$$

Considerando que los términos en  $1/a_i$  son  $\ll 1$  y despreciando los términos de orden superior, puede escribirse

$$Z_{ent} \cong \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4} \left(1 + \left(1 + \frac{Z_4}{Z_5}\right) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \frac{Z_2}{Z_3}\right) \left(1 - \frac{Z_5 Z_3}{Z_4 Z_2}\right)\right). \quad (146)$$

Para el caso en que  $Z_2 = 1/C_2 s$  y las demás impedancias son resistencias

$$Z_{ent} \cong \frac{R_1 R_3 R_5 C_2}{R_4} \left(1 + \left(1 + \frac{R_4}{R_5}\right) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \frac{1}{R_3 C_2 s}\right) \left(1 - \frac{R_5}{R_4} R_3 C_2 s\right)\right). \quad (147)$$

Para frecuencias muy pequeñas (menores que unos pocos Hz) las ganancias  $a_1$  y  $a_2$  son constantes y bastante altas. Nos interesan las frecuencias mayores, ya que allí es más notorio el efecto de la ganancia finita. Para amplificadores compensados por polo dominante se tiene

$$a(s) = \frac{a_o}{1 + s/\omega_o} \cong \frac{a_o \omega_o}{s} = \frac{GB}{s}, \quad (148)$$

donde  $GB$  es el producto de la ganancia por el ancho de banda (en rad/s) del amplificador. Si  $s = j\omega$ , podremos escribir

$$Z_{ent} = R_{eq} + j\omega L_{eq}, \quad (149)$$

donde

$$L_{eq} \cong \frac{R_1 R_3 R_5 C_2}{R_4} \left(1 + \left(1 + \frac{R_4}{R_5}\right) \left(\frac{1}{GB_2 R_3 C_2} + \frac{\omega^2}{GB_1} R_3 C_2 \frac{R_5}{R_4}\right)\right) \quad (150)$$

$$R_{eq} \cong \frac{R_1 R_3 R_5 C_2}{R_4} \omega^2 \left(1 + \frac{R_4}{R_5}\right) \left(\frac{1}{GB_2} \frac{R_5}{R_4} - \frac{1}{GB_1}\right) \quad (151)$$

Entonces el factor de calidad  $Q_L$  del inductor simulado es

$$Q_L \cong \frac{1}{\omega \left( 1 + \frac{R_4}{R_5} \right) \left( \frac{1}{GB_2} \frac{R_5}{R_4} - \frac{1}{GB_1} \right)}. \quad (152)$$

Puede lograrse un  $Q_L$  alto adoptando

$$\frac{R_5}{R_4} = \frac{GB_2}{GB_1}. \quad (153)$$

El valor de  $Q_L$  obtenido realmente no es infinito, ya que la fórmula anterior es sólo aproximada.

Normalmente, los dos amplificadores están en un mismo chip, por lo cual las tolerancias de fabricación los afectan de igual modo, lográndose un excelente apareamiento tanto en el valor de  $GB$  como en su deriva. Por ello conviene adoptar

$$R_5 = R_4. \quad (154)$$

Entonces

$$Q_L \cong \frac{1}{2 \frac{\omega}{GB} \frac{\Delta GB}{GB}}. \quad (155)$$

La calidad del inductor simulado será mayor cuanto menores sean el desajuste y la frecuencia.

Interesa también el error relativo cometido en el valor de  $L_{eq}$  respecto al ideal. Para  $R_5 = R_4$  puede expresarse

$$\frac{\Delta L_{eq}}{L_{eq}} \cong 2 \frac{\omega}{GB} \left( \frac{1}{R_3 C_2 \omega} + R_3 C_2 \omega \right). \quad (156)$$

El mínimo error se verifica en

$$\omega_{mín} = \frac{1}{R_3 C_2}, \quad (157)$$

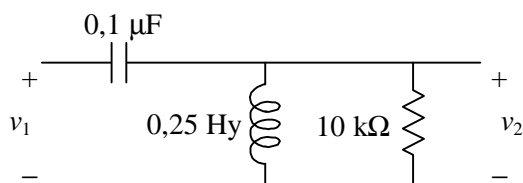
y vale

$$\min \left\{ \frac{\Delta L_{eq}}{L_{eq}} \right\} \cong 4 \frac{\omega_{mín}}{GB} = \frac{4}{R_3 C_2 GB}. \quad (158)$$

En un buen diseño se elige  $\omega_m$  de modo de coincidir con alguna frecuencia en la cual sea crítico el valor de la inductancia. El error cometido será menor cuanto más pequeña sea  $\omega_m$ .



**Ejemplo 11:** Elegir los componentes para simular el inductor del pasaltos RLC indicado en la figura 40 y obtener el error en la inductancia y su factor de calidad si se emplea un LM358 (AO dual) con  $GB = 3 \times 10^6$  1/s y un despareamiento entre los  $GB$  de los dos AO de un 3%.



**Figura 40.** El filtro RLC pasivo del ejemplo 11.

La frecuencia angular es  $1/\sqrt{LC} = 6300$  1/s. Esta será la frecuencia más crítica, de donde

$$R_3 C_2 \cong 1/6300$$

Adoptamos

$$R_3 = 3,3 \text{ k}\Omega, \quad C_2 = 47 \text{ nF}$$

y

$$R_1 = 0,25 \text{ Hy} / (3,3 \text{ k}\Omega \times 47 \text{ nF}) \cong 1620 \Omega (1\%)$$

Por último, los únicos requisitos para  $R_4$  y  $R_5$  son el de ser iguales y ser compatibles con las salidas y entradas de los amplificadores operacionales. Adoptamos

$$R_4 = R_5 = 10 \text{ k}\Omega.$$

El error en  $L$  debido a la respuesta en frecuencia de los amplificadores operacionales será, según (158),

$$\text{mín } \Delta L_{eq} / L_{eq} = 4 \times 6300 / 3 \times 10^6 = 0,8\%$$

y su factor de calidad, de acuerdo con (155)

$$Q_L = 3 \times 10^6 / (2 \times 6300 \times 0,03) = 7900.$$

Como se puede ver, el inductor simulado resulta bastante satisfactorio

## 7.2. Métodos específicos de síntesis de filtros activos

En los métodos de simulación, una vez obtenida la función aproximación, se diseña una red LC que la materializa y luego se procede a simularla, parcial o totalmente. En el enfoque de síntesis, en cambio, se ajustan los parámetros de una red o estructura activa RC de modo que su función de transferencia (o atenuación) coincida con la apro-

ximación obtenida. Existen tres alternativas: síntesis directa, en cascada, y por realimentaciones múltiples.

La síntesis directa fue históricamente la primera en surgir, ya que permite lograr filtros de órdenes altos con muy pocos amplificadores (típicamente 1 ó 2). Esto era muy conveniente debido al elevado costo de los amplificadores de entonces, a pesar de las dos grandes desventajas de este tipo de síntesis: la dificultad de ajuste y la sensibilidad a variaciones de componentes. En la actualidad la síntesis directa ha caído en desuso y por lo tanto no nos ocuparemos de ella.

La síntesis en cascada se basa en que las funciones racionales pueden descomponerse como producto de funciones de primero y segundo orden. Entonces se plantea una conexión en cascada de células de dichos órdenes. Dado que estas células se construyen con amplificadores operacionales cuya resistencia de salida es despreciable, no son cargadas por la célula siguiente. Por lo tanto sus funciones de transferencia son independientes, lo cual facilita notablemente el diseño y el ajuste, pero sensibiliza el filtro ante variaciones de parámetros. La síntesis en cascada es la más difundida en la actualidad, debido a su sencillez, a la gran variedad de circuitos para relizar células de segundo orden que se han desarrollado (muchas de ellas disponibles como circuitos integrados) y a las satisfactorias prestaciones que se obtienen en general.

Los métodos de síntesis por realimentaciones múltiples se han introducido para los casos en que la sensibilidad frente a variaciones de parámetros de los filtros en cascada es demasiado grande para ser viables, por ejemplo en los filtros pasabanda de orden elevado. Se utilizan también células de primer y segundo orden, pero introduciendo realimentaciones múltiples que hacen que la modificación de los parámetros de una de las células repercuta en todos los polos y no sólo en los propios, produciendo una suerte de compensación cuyo resultado global es una reducción en la sensibilidad.

### 7.2.1. Síntesis en cascada

La síntesis en cascada se realiza a partir de bloques circuitales que realizan funciones de transferencia de primer y segundo orden, denominados *células de segundo orden*. Comenzaremos el análisis revisando brevemente las funciones de segundo orden, denominadas *funciones bicuadráticas*.

#### 7.2.1.1 Funciones bicuadráticas

La forma más general de este tipo de funciones tiene la siguiente función de transferencia:

$$H(s) = \frac{as^2 + bs + c}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{s}{Q\omega_o} + 1}. \quad (159)$$

$Q$  es el *factor de calidad* y  $\omega_o$ , la *frecuencia natural* de la función. Según los valores de los coeficientes del numerador se pueden obtener diversos tipos de funciones de segundo orden.

### 7.2.1.2 Pasabajos (PB)

Se obtiene cuando en (159) se toman  $a = b = 0$ ,  $c = 1$ . La función de transferencia es de la forma

$$H_{PB}(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1}, \quad (160)$$

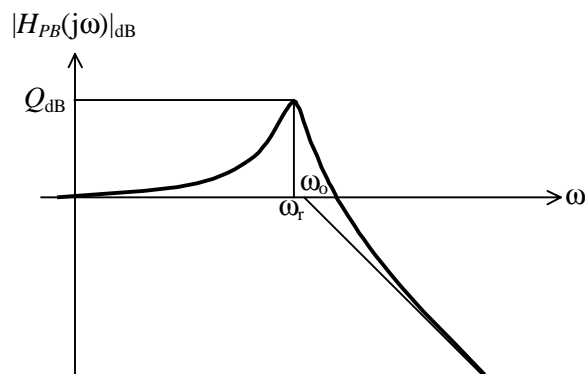
Tiene un máximo o resonancia en la frecuencia

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}, \quad (161)$$

cuyo valor es

$$|H_{PB}(j\omega_r)| = \frac{Q}{\sqrt{1 - 1/(2Q^2)}}. \quad (162)$$

La gráfica se muestra en la figura 41.



**Figura 41.** Respuesta en frecuencia de una función bicuadrática pasabajos

Para valores elevados del factor de calidad  $Q$ , valen las aproximaciones que siguen:

$$\omega_r = \omega_n, \quad (163)$$

$$|H_{PB}(j\omega_r)| \cong Q, \quad (164)$$

de modo que  $Q$  puede interpretarse como la relación entre el pico de resonancia y la ganancia en continua.

### 7.2.1.3 Pasaaltos (PA)

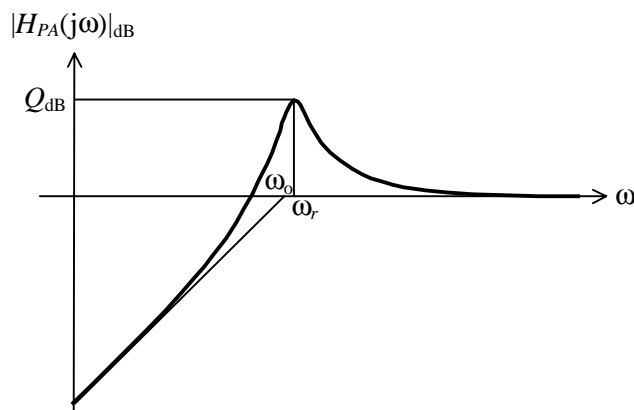
Corresponde al caso en que en (159) se toma  $a = 1/\omega_0^2$ ,  $b = c = 0$ . La función de transferencia es, ahora,

$$H_{PA}(s) = \frac{\frac{s^2}{\omega_0^2}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1}, \quad (165)$$

En este caso la resonancia se produce en

$$\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 1/(2Q^2)}}, \quad (166)$$

y alcanza el mismo valor que en el caso del pasabajos. Valen las mismas aproximaciones que para el PB, con una interpretación similar. En la figura 42 se muestra la correspondiente respuesta frecuencial.



**Figura 42.** Respuesta en frecuencia de una función bicuadrática pasabajos

#### 7.2.1.4 Pasabanda (PBn)

Se obtiene cuando  $a = c = 0$ ,  $b = 1/(\omega_0 Q)$ . La función de transferencia es

$$H_{PBn}(s) = \frac{\frac{s}{Q\omega_0}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1}, \quad (167)$$

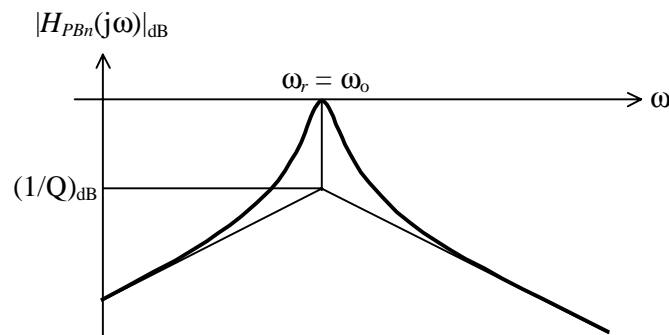
En este caso la resonancia se da exactamente en

$$\omega_r = \omega_n. \quad (168)$$

y su amplitud es

$$|H_{PBn}(j\omega_r)| = 1. \quad (169)$$

En la figura 43 se muestra la respuesta en frecuencia. Puede observarse que las asíntotas se cruzan en la frecuencia angular  $\omega_0$  en un valor  $1/Q$ .



**Figura 43.** Respuesta en frecuencia de una función bicuadrática pasa-banda.

Una interpretación interesante es que si se toma  $A_{m\acute{a}x} = 3$  dB, entonces el ancho de banda relativo vale

$$B = \frac{\omega_{p1} - \omega_{p2}}{\omega_0} \cong \frac{1}{Q} \tag{170}$$

Esto muestra que con un PBn de segundo orden pueden obtenerse anchos de banda relativos tan estrechos como se desee (al menos idealmente). Esto *no* equivale, sin embargo, a que este filtro sea muy selectivo. En efecto,  $H_{PBn}(s)$  puede interpretarse como el resultado de aplicar la transformación

$$s \rightarrow Q \left( \frac{\omega_0}{s} + \frac{s}{\omega_0} \right) \tag{171}$$

al PB de primer orden normalizado

$$H_1(s) = \frac{1}{1 + s}, \tag{172}$$

y como ya se vio, fijados  $A_{m\acute{i}n}$  y  $A_{m\acute{a}x}$ , la selectividad de  $H_{PBn}(s)$  coincide con la de este PB, que es baja por ser de primer orden.

### 7.2.1.5 Rechazabanda (RBn)

Resulta al tomar  $a = s^2/\omega_0^2$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ . Su funci3n de transferencia es

$$H_{RBn}(s) = \frac{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1}, \tag{173}$$

En forma análoga al PBn, este filtro se puede obtener mediante la transformación de frecuencia

$$s \rightarrow \frac{1}{Q \left( \frac{\omega_o}{s} + \frac{s}{\omega_o} \right)} \tag{174}$$

aplicada al PB de primer orden

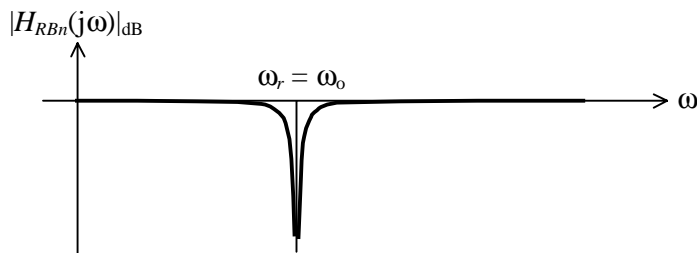
$$H_1(s) = \frac{1}{1 + s}$$

Puede concluirse, también, que el ancho de banda relativo es

$$B = 1/Q.$$

Este filtro tiene la particularidad de tener polos de pérdida ubicados en  $\pm j\omega_o$ , de modo que la frecuencia angular  $\omega_o$  se elimina por completo.

En la figura 44 se puede observar la respuesta en frecuencia del rechazabanda bicuadrático.

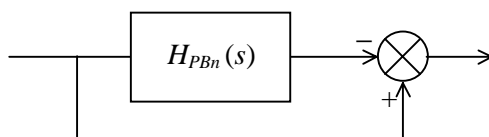


**Figura 44.** Respuesta en frecuencia de una función bicuadrática rechazabanda.

Es interesante, asimismo, observar que

$$H_{RBn}(s) = 1 - H_{PBn}(s). \tag{175}$$

Esta ecuación simplifica la obtención de los polos de pérdida finitos no nulos en la práctica, que de otro modo serían difíciles de lograr. La técnica, ilustrada en el diagrama de bloques de la figura 45, es un caso particular de conexión *feedforward*.



**Figura 45.** Estructura feedforward para implementar una célula rechazabanda bicuadrática a partir de una pasabanda.

### 7.2.1.6 Funciones “muesca” (*notch*)

Son similares a las funciones rechazabanda, sólo que las frecuencias naturales del numerador y el denominador son diferentes. Resulta al tomar  $a = s^2/\omega_p^2$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ . Su función de transferencia es de la forma

$$H_N(s) = \frac{\frac{s^2}{\omega_p^2} + 1}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{s}{Q\omega_o} + 1}, \quad (176)$$

La función rechazabanda es un caso particular cuando  $\omega_p = \omega_o$ . Este tipo de funciones presenta un polo de pérdida en la frecuencia angular  $\omega_r$  y tiene un pico de resonancia en

$$\omega_r = \omega_p \sqrt{\frac{1 - 1/(2Q^2) - (\omega_o/\omega_p)^2}{1 - 1/(2Q^2) - (\omega_p/\omega_o)^2}} \quad (177)$$

cuyo valor es

$$|H_N(j\omega_r)| = \frac{|1 - (\omega_r/\omega_p)^2|}{\sqrt{(1 - (\omega_r/\omega_o)^2)^2 + (\omega_r/\omega_o)^2/Q^2}}. \quad (178)$$

Si  $Q$  es alto, es decir,  $1/(2Q^2) \ll 1$ , entonces

$$\omega_r \cong \omega_o \quad (179)$$

y

$$H_N(j\omega_r) = |1 - (\omega_o/\omega_p)^2| Q. \quad (180)$$

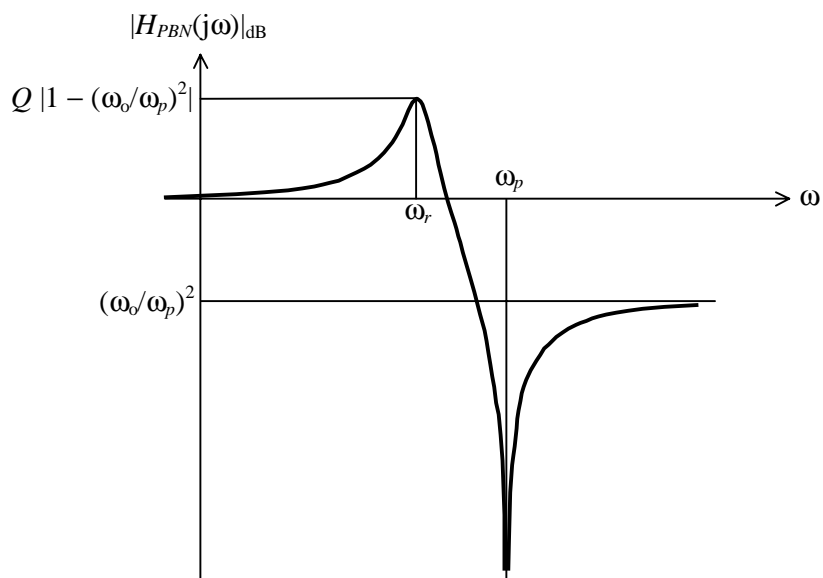
Si, en cambio,  $Q$  es bajo, puede no existir resonancia si  $\omega_o$  y  $\omega_p$  no difieren suficientemente.

Además del caso particular del rechazabanda, hay dos tipos de funciones *notch*, que se comentan a continuación.

#### a) Pasabajos *Notch* (PBN)

Se tiene para  $\omega_o < \omega_p$ . A diferencia del PB ordinario, no tiene polos de pérdida en  $\infty$ . Ello se debe a que dichos polos se han trasladado a  $\pm j\omega_p$ . Dado que el mayor provecho de los *notch* se tiene cuando  $\omega_o$  y  $\omega_p$  no difieren mucho, se ve que la atenuación en  $\omega = \infty$  no es muy alta. Si se requiere mayor atenuación se debe aumentar el orden.

En la figura 46 se da un ejemplo de un pasabajos *notch* bicuadrático.



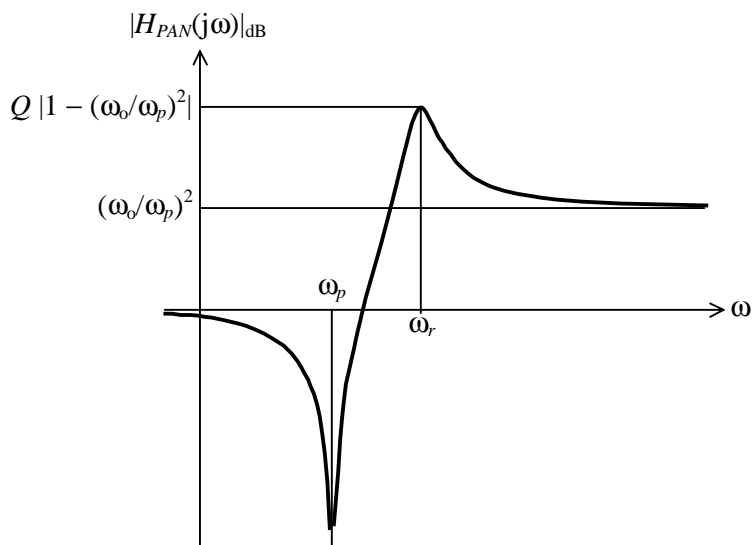
**Figura 46.** Respuesta en frecuencia de una función bicuadrática pasabajos notch.

**b) Pasaaltos Notch (PAN)**

Se verifica para  $\omega_p < \omega_0$ . Reescribiendo el numerador como

$$(s^2 + \omega_p^2) / \omega_0^2$$

(es decir, multiplicando  $H_N(s)$  por la constante  $\omega_p^2 / \omega_0^2$ ) se logra que para alta frecuencia la ganancia sea 1. Análogamente al PBN, los polos de pérdida en 0 se han trasladado a  $\pm j\omega_p$  y, por lo tanto, la atenuación en 0 no es muy alta.



**Figura 47.** Respuesta en frecuencia de una función bicuadrática pasabajos notch.



Las funciones *notch* en general forman parte de filtros de mayor orden que requieren polos de pérdida finitos y no nulos en la banda de atenuación, como en las aproximaciones de Cauer (filtros elípticos).

### 7.2.1.7 Funciones Pasatodo (PT)

Se obtienen cuando se adoptan  $a = 1/\omega_0^2$ ,  $b = -1/(\omega_0 Q)$  y  $c = 1$ . Se caracterizan por tener sus ceros (polos de pérdida) ubicados en el plano real positivo, simétricamente a los polos:

$$H_N(s) = \frac{\frac{s^2}{\omega_0^2} - \frac{s}{Q\omega_0} + 1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1}, \quad (181)$$

Como resultado de ello se tiene

$$|H_{PT}(j\omega)| = 1 \quad (182)$$

para todo  $\omega$ .

Estas funciones se utilizan como correctores de fase. Se tiene

$$\arg H_{PT}(j\omega) = -2 \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{Q} \frac{\omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \right). \quad (183)$$

La aparente discontinuidad en  $\omega = \omega_0$  surge de que la arcotangente representa el argumento sólo si éste está comprendido entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ . Dicho inconveniente se supera considerando el retardo de grupo:

$$\begin{aligned} \tau_{PT}(\omega) &= -\frac{d}{d\omega} \arg H_{PT}(j\omega) = \\ &= \frac{1}{Q\omega_0} \frac{1 + (\omega/\omega_0)^2}{\left(1 - (\omega/\omega_0)^2\right)^2 + (\omega/\omega_0)^2/Q^2} \end{aligned} \quad (184)$$

ya que todas las ramas de la arcotangente (considerada como función multivaluada) tienen la misma derivada.

El retardo de grupo  $\tau_{PT}(\omega)$  tiene un máximo en

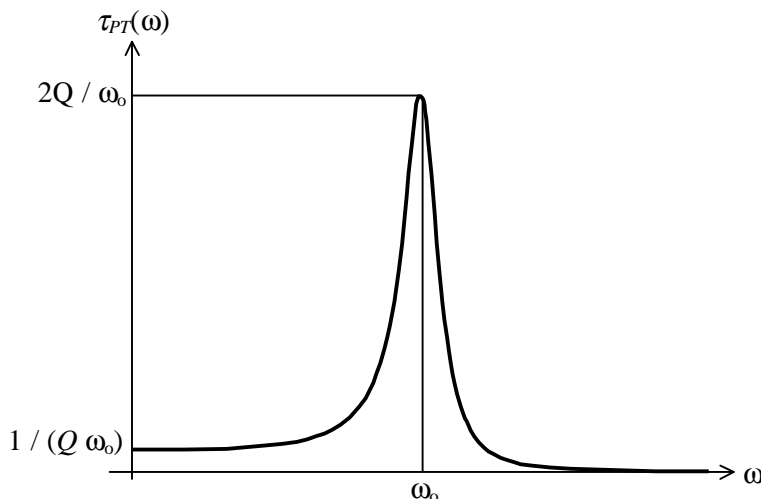
$$\omega_M = \omega_0 \sqrt{-1 + 2\sqrt{1 - 1/(2Q)^2}}. \quad (185)$$

Para  $Q$  elevado, valen las siguientes aproximaciones:

$$\omega_M \cong \omega_0 \quad (186)$$

$$\tau_{PT}(\omega_M) \cong \frac{2Q}{\omega_0} \tag{187}$$

Puede observarse que el pico es  $2Q^2$  veces mayor que el retardo en baja frecuencia (ver figura 48), lo cual significa un salto bastante brusco en la fase en la región de transición, para  $Q$  elevado. Cuando es infinito, el retardo de grupo es impulsivo, y la fase tiene un salto de  $2\pi$  en  $\omega_0$  que puede considerarse como inexistente ya que equivale a un salto de 0. Esto es lógico, ya que en ese caso desaparece el término central y la función de transferencia es idénticamente igual a 1.



**Figura 48.** Variación del retardo de grupo para un pasatodo bicuadrático.

### 7.2.1.8 Sensibilidad

Según veremos, cada una de las funciones bicuadráticas estudiadas puede realizarse con varios circuitos diferentes, por lo cual es necesario contar con criterios de comparación o evaluación que permitan, ante un determinado problema de diseño, seleccionar los más apropiados. Uno de los criterios más útiles es el de la sensibilidad de los parámetros del filtro frente a variaciones de los componentes, ya que incide tanto en la calidad como en la confiabilidad y el costo.

La sensibilidad de un parámetro  $Y$  respecto a otro parámetro  $X$  del cual depende se define como

$$S_X^Y = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X / X} = \frac{X}{Y} \frac{\partial Y}{\partial X} \tag{188}$$

Representa la variación porcentual en  $Y$  a causa de una variación del 1% en  $X$ , ya que

$$\frac{\Delta Y}{Y} \cong S_X^Y \frac{\Delta X}{X} \tag{189}$$

Se demuestran fácilmente las siguientes propiedades elementales que simplifican el cálculo de sensibilidades:

$$S_X^Y = \frac{\partial(\ln Y)}{\partial(\ln X)} \quad (190a)$$

$$S_X^{YZ} = S_X^Y + S_X^Z \quad (190b)$$

$$S_X^{YZ} = S_X^Y + S_X^Z \quad (190c)$$

$$S_X^{Y+Z} = \frac{Y}{Y+Z} S_X^Y + \frac{Z}{Y+Z} S_X^Z \quad (190d)$$

$$S_X^{Z(Y)} = S_Y^Z S_X^Y \quad (190e)$$

$$S_X^{Y^c} = c S_X^Y \quad (190f)$$

$$S_X^{e^Y} = Y S_X^Y. \quad (190g)$$

Si  $Y$  depende de varios parámetros  $X_1, \dots, X_n$ , su variación porcentual total puede obtenerse por superposición de las variaciones ocasionadas por cada parámetro:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = S_{X_1}^Y \frac{\Delta X_1}{X_1} + \dots + S_{X_n}^Y \frac{\Delta X_n}{X_n}. \quad (191)$$

Como parámetros dependientes se suelen considerar  $|H|$ ,  $\arg H$ ,  $\tau$ ,  $\omega_0$ ,  $Q$  y los polos y ceros, y como parámetros independientes, parámetros circuitales tales como resistencias, capacidades, ganancia y frecuencia de corte de los elementos activos, etc.

**Ejemplo 12:** Un filtro de segundo orden tiene la siguiente atenuación:

$$A(s) = R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 + R_2) C_2 s + 1.$$

Analizar la sensibilidad de  $\omega_0$  y  $Q$  respecto a los diversos elementos circuitales.

Tenemos:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}, \quad Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{(R_1 + R_2) C_2}.$$

Aplicando las propiedades anteriores resulta

$$S_{R_i}^{\omega_0} = -\frac{1}{2} S_{R_i}^{R_1 R_2 C_1 C_2} = -\frac{1}{2}$$

$$S_{R_i}^Q = \frac{1}{2} - S_{R_i}^{(R_1+R_2)C_2} = \frac{1}{2} - \frac{R_i}{R_1 + R_2}$$

$$S_{C_i}^{\omega_0} = -\frac{1}{2} S_{C_i}^{R_1 R_2 C_1 C_2} = -\frac{1}{2}$$

$$S_{C_1}^Q = \frac{1}{2} - S_{C_1}^{(R_1+R_2)C_2} = \frac{1}{2}$$

$$S_{C_2}^Q = \frac{1}{2} - S_{C_2}^{(R_1+R_2)C_2} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Puede anularse la sensibilidad de  $Q$  respecto a las resistencias tomando  $R_1 = R_2 = R$ .

Si suponemos ahora que se admite un error del 5% en  $\omega_0$  y  $Q$ , entonces

$$\left| \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \right| \leq \frac{1}{2} \left( \left| \frac{\Delta R_1}{R_1} \right| + \left| \frac{\Delta R_2}{R_2} \right| + \left| \frac{\Delta C_1}{C_1} \right| + \left| \frac{\Delta C_2}{C_2} \right| \right),$$

$$\left| \frac{\Delta Q}{Q} \right| \leq \frac{1}{2} \left( \left| \frac{\Delta C_1}{C_1} \right| + \left| \frac{\Delta C_2}{C_2} \right| \right),$$

Es suficiente con tomar tolerancias menores que 2,5% para satisfacer la cota de error requerida.

El análisis de sensibilidad resulta útil para dimensionar las tolerancias y derivas admisibles de los componentes. Puede concluirse que cuanto mayor sea la sensibilidad respecto a los componentes, estos deberán ser de mayor precisión, o inclusive ajustables. Resulta así que una solución circuitalmente simple pero bastante sensible puede ser más costosa que otra más compleja y menos sensible, debido al mayor costo de los componentes de precisión empleados.

### 7.2.1.9 Sensibilidad de $|H|$ respecto a $\omega_0$ y $Q$

Dado que  $H$  puede expresarse en función de  $\omega_0$  y  $Q$ , y estos en términos de los parámetros circuitales  $X$ , resulta

$$S_X^{|H|} = S_Q^{|H|} S_X^Q + S_{\omega_0}^{|H|} S_X^{\omega_0}. \quad (192)$$

Las sensibilidades respecto a  $\omega_0$  y  $Q$  no dependen del caso particular, y por lo tanto pueden calcularse en forma independiente e, inclusive, graficarse. Teniendo en cuenta que

$$|H|^2 = \frac{1}{\left(1 - (\omega/\omega_0)^2\right)^2 + (\omega/Q\omega_0)^2} \quad (193)$$

y aplicando las propiedades, se obtienen

$$S_{\omega_0}^{|H|} = \frac{-2(1 - (\omega/\omega_0)^2)(\omega/\omega_0)^2 + (\omega/Q\omega_0)^2}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\omega/Q\omega_0)^2}, \quad (194)$$

$$S_Q^{|H|} = \frac{(\omega/Q\omega_0)^2}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\omega/Q\omega_0)^2}. \quad (195)$$

$S_{\omega_0}^{|H|}$  tiene sus extremos en

$$\omega = \omega_0 \sqrt{-\frac{2Q^2}{1 - 2Q^2} \pm \sqrt{\left(\frac{2Q^2}{1 - 2Q^2}\right)^2 - 1}} \quad (196)$$

Para  $Q$  elevado se puede aproximar por

$$\omega \cong \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right), \quad (197)$$

y

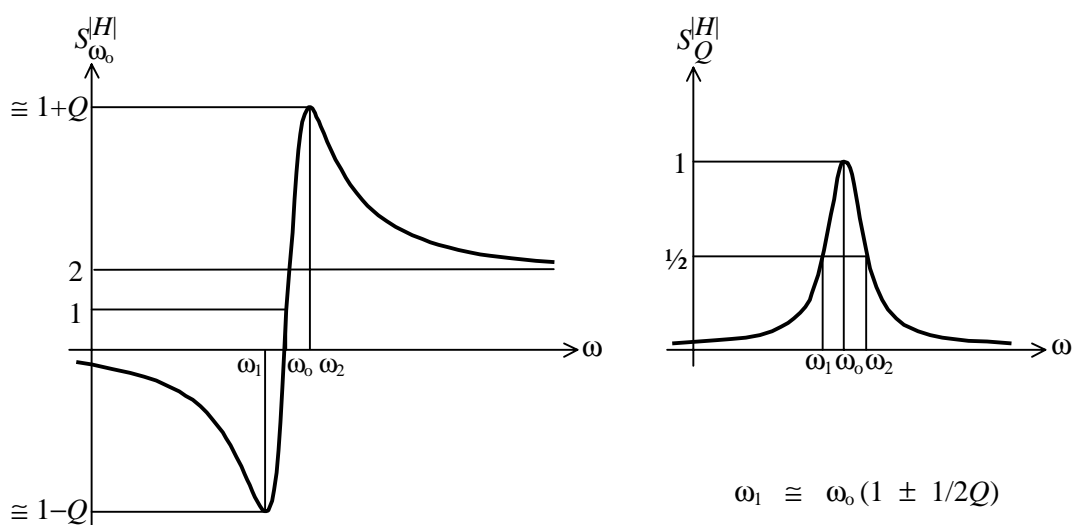
$$\text{máx } S_{\omega_0}^{|H|} \cong 1 \pm Q. \quad (198)$$

Análogamente,  $S_Q^{|H|}$  tiene un máximo en

$$\omega = \omega_0, \quad (199)$$

de valor

$$\text{máx } S_Q^{|H|} = 1. \quad (200)$$



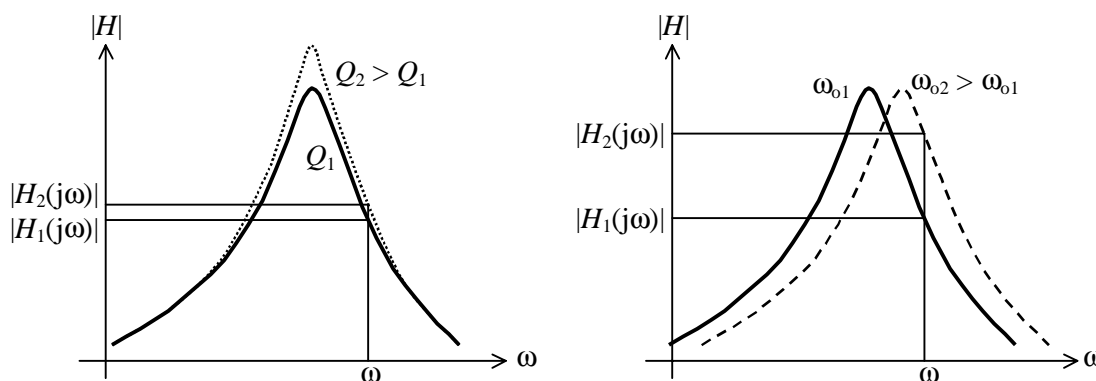
**Figura 49.** Sensibilidad de la ganancia con respecto a  $\omega_0$  y a  $Q$ , en función de la frecuencia.

De estos resultados, ilustrados en la figura 49, pueden obtenerse interesantes conclusiones. Ante una variación porcentual de  $Q$ , la variación porcentual de  $|H|$  es, a lo sumo, igual a la de  $Q$ . Pero si varía  $\omega_0$ , para algunas frecuencias, la variación porcentual experimentada por  $|H|$  es del orden de  $Q$  veces la de  $\omega_0$ :

$$\left. \frac{\Delta H}{H} \right|_{\text{máx}} = \frac{\Delta Q}{Q}, \tag{201}$$

$$\left. \frac{\Delta H}{H} \right|_{\text{máx}} = Q \frac{\Delta \omega_0}{\omega_0}. \tag{202}$$

Esto se ve en la figura 50, observando que el incremento de  $\omega_0$  produce un mayor efecto que el de  $Q$ . Este problema tiene particular importancia en los filtros de orden alto, ya que errores diferentes en cada célula pueden conducir a una respuesta muy diferente de la esperada. Por esta razón, en el diseño de células de segundo orden con elevado  $Q$  los mayores esfuerzos deben dirigirse a reducir la sensibilidad de  $\omega_0$  respecto de los componentes.



**Figura 50.** Para  $Q$  elevado, Un incremento relativo en  $\omega_0$  provoca un mayor error en  $|H|$  que un incremento relativo similar en  $Q$ .

### 7.2.1.10 Propiedad conservativa de las sensibilidades de $Q$ y $\omega_0$

Si todas las resistencias de una célula de segundo orden varían en igual proporción  $\Delta R/R$ ,  $Q$  no experimenta ningún cambio, ya que es adimensional en  $R$ , de modo que

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \left( S_{R_1}^Q + \dots + S_{R_m}^Q \right) \frac{\Delta R}{R}, \tag{203}$$

de donde,

$$\sum_{i=1}^m S_{R_i}^Q = 0. \tag{204}$$

Análogamente, si todas las capacidades varían en la misma proporción,

$$\sum_{i=1}^m S_{C_i}^Q = 0, \quad (205)$$

Con respecto a  $\omega_0$ , dado que es de la forma  $1/RC$ , una variación simultánea en todas las resistencias provocará una variación opuesta en  $\omega_0$ , es decir

$$\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = \left( S_{R_1}^{\omega_0} + \dots + S_{R_m}^{\omega_0} \right) \frac{\Delta R}{R} = -\frac{\Delta R}{R}, \quad (206)$$

de donde

$$\sum_{i=1}^m S_{R_i}^{\omega_0} = -1, \quad (207)$$

y, análogamente,

$$\sum_{i=1}^m S_{C_i}^{\omega_0} = -1 \quad (208)$$

Estas propiedades tienen importancia ante situaciones como las derivas térmicas, dado que si los componentes son de una misma tecnología, la variación porcentual es la misma. Ésta es una de las razones por la que es importante que los valores de los componentes no difieran en varios órdenes de magnitud, ya que la tecnología aplicable a cada rango de valores puede ser diferente.

Las ecuaciones (207) y (208) muestran que las derivas térmicas afectan en forma directa a las frecuencias naturales. No obstante, si se puede garantizar que las derivas afecten por igual a todas las células del circuito, no provocarán deformaciones de la respuesta sino sólo un corrimiento de las bandas de selección.

### 7.2.2. Células de segundo orden

Las células de segundo orden son circuitos activos RC (o de otra tecnología) que permiten realizar las funciones bicuadráticas. Actualmente el elemento activo básico que constituye la mayoría de las células de segundo orden es el amplificador operacional, ya sea como dispositivo de uso general o específicamente integrado junto a otros componentes que facilitan su uso en filtros.

La cantidad de amplificadores por célula varía entre 1 y 4. A mayor número, se obtienen mejoras en la sensibilidad y en la versatilidad. El costo adicional por emplear más amplificadores no es demasiado significativo, si se tiene en cuenta que un amplificador operacional dual o cuádruple tiene un costo no mucho mayor que uno simple. En cambio, se ve compensado con el ahorro de componentes de gran precisión o ajustables.

### 7.2.2.1 Células con un amplificador operacional

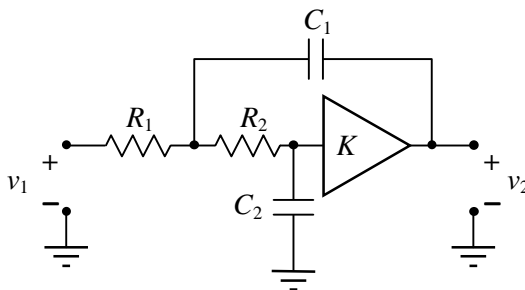
Existen numerosos circuitos con un amplificador. Sólo estudiaremos algunos casos particulares.

#### a) Células con realimentación positiva

Son células en general muy simples, propuestas por Sallen y Key. Son recomendables cuando las exigencias de sensibilidad no son demasiado grandes, y para valores de  $Q$  inferiores a 5.

#### al) Pasabajos

Esta célula, ilustrada en la figura 51 es, probablemente, la célula más simple posible. El amplificador no inversor empleado se obtiene con la configuración habitual con



**Figura 51.** Célula pasabajos de segundo orden de Sallen y Key.

un amplificador operacional. Según veremos, es conveniente adoptar la ganancia  $K = 1$ , reduciéndose entonces a un simple seguidor. La función de transferencia de esta célula vale:<sup>1</sup>

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{K}{1 + (R_1 C_1 (1 - K) + (R_1 + R_2) C_2) s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2} \quad (209)$$

Se tienen las siguientes ecuaciones de diseño:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}, \quad (210)$$

$$Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{R_1 C_1 (1 - K) + (R_1 + R_2) C_2}. \quad (211)$$

Las sensibilidades valen:

<sup>1</sup> El filtro del ejemplo 12 visto anteriormente corresponde al caso particular de esta célula pasabajos en el que  $K = 1$ .



$$S_K^{\omega_0} = 0, \quad (212)$$

$$S_{R_i, C_i}^{\omega_0} = -\frac{1}{2}, \quad (213)$$

$$S_K^Q = K Q \sqrt{R_1 C_1 / R_2 C_2}, \quad (214)$$

$$S_{R_2}^Q = -S_{R_1}^Q = \frac{1}{2} - Q R_2 C_2 / R_1 C_1, \quad (215)$$

$$S_{C_1}^Q = -S_{C_2}^Q = \frac{1}{2} + (K - 1) Q \sqrt{R_1 C_1 / R_2 C_2}. \quad (216)$$

Si las resistencias del amplificador no inversor son  $R_3$  y  $R_4$  entonces

$$K = 1 + \frac{R_4}{R_3}, \quad (217)$$

de donde

$$S_{R_3}^K = -S_{R_4}^K = \frac{1 - K}{K}, \quad (218)$$

y, entonces

$$S_{R_3}^Q = -S_{R_4}^Q = (1 - K) Q \sqrt{R_1 C_1 / R_2 C_2}, \quad (219)$$

Las sensibilidades fueron expresadas en términos de  $Q$  pues  $Q$  es uno de los datos de diseño de la célula.

Un diseño cuidadoso debe procurar minimizar las sensibilidades. Dado que  $K \geq 1$ , para no desmejorar las sensibilidades respecto a las capacidades, conviene elegir  $K = 1$ . Con esto además se anulan las sensibilidades respecto a  $R_3$  y  $R_4$ . Las ecuaciones de diseño pasan a ser

$$R_1 R_2 C_1 C_2 = 1 / \omega_0^2, \quad (220)$$

$$(R_1 + R_2) C_2 = 1 / (\omega_0 Q). \quad (221)$$

Tomando

$$R_2 = x^2 R_1, \quad C_2 = y^2 C_1, \quad (222)$$

pueden reescribirse así:

$$R_1 C_1 xy = 1 / \omega_0$$

$$(x + 1/x)y = 1 / Q.$$

Además

$$S_{R_2}^Q = \frac{1}{2} - Q xy$$

Para no desmejorar esta sensibilidad, deberá ser

$$xy < 1/Q.$$

Conviene que  $x$  e  $y$  tomen valores tan cercanos a 1 como sea posible, ya que entonces ambas resistencias (y ambos capacitores) pueden elegirse de igual tecnología (o igual proceso de fabricación), con lo cual las derivas serán similares, eliminando las derivas de  $Q$  (no así en  $\omega_0$ ). De la segunda ecuación de diseño resulta que

$$y = \frac{x}{1 + x^2} \frac{1}{Q}.$$

Dado que  $y < 1$ , su valor más próximo a 1 será su máximo, que se da para  $x = 1$  y vale  $y = 1/(2Q)$ . Un valor distinto de  $x$  producirá un valor de  $y$  todavía mas alejado de 1, de modo que esta es la mejor solución. Entonces

$$K = 1, \tag{223a}$$

$$R_1 C_1 = 2Q / \omega_0, \tag{223b}$$

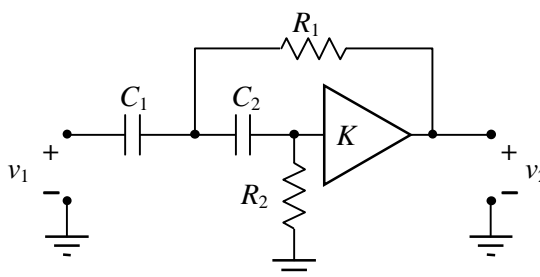
$$R_2 = R_1, \tag{223c}$$

$$C_2 = C_1 / (2Q)^2. \tag{223d}$$

Ninguna de las sensibilidades supera a 1/2 en valor absoluto. Si  $Q$  es elevado,  $C_1$  y  $C_2$  difieren bastante en orden de magnitud.

**a2) Pasaaltos**

La célula pasaaltos (figura 52) se obtiene intercambiando los capacitores y las resistencias en el circuito anterior.



**Figura 52.** Célula pasaaltos de segundo orden de Sallen y Key.

La función de transferencia resulta

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{K R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}{1 + (R_2 C_2 (1 - K) + (C_1 + C_2) R_1) s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2} \tag{224}$$

Como era de esperar, es formalmente idéntica a la anterior, salvo la presencia del numerador en  $s^2$ .

Las ecuaciones de diseño son

$$R_1 R_2 C_1 C_2 = 1 / \omega_0^2. \quad (225)$$

$$R_2 C_2 (1 - K) + (C_1 + C_2) R_1 = 1 / (\omega_0 Q) \quad (226)$$

y las sensibilidades

$$S_K^{\omega_0} = 0, \quad (227)$$

$$S_{R_i, C_i}^{\omega_0} = -\frac{1}{2}, \quad (228)$$

$$S_K^Q = K Q \sqrt{R_2 C_2 / R_1 C_1}, \quad (229)$$

$$S_{R_2}^Q = -S_{R_1}^Q = \frac{1}{2} + (K - 1) Q \sqrt{R_2 C_2 / R_1 C_1}, \quad (230)$$

$$S_{C_1}^Q = -S_{C_2}^Q = \frac{1}{2} - Q \sqrt{R_1 C_1 / R_2 C_2}. \quad (231)$$

Las conclusiones son análogas a las del pasabajos. En este caso conviene adoptar

$$K = 1, \quad (232a)$$

$$R_1 C_1 = 1 / (2Q\omega_0), \quad (232b)$$

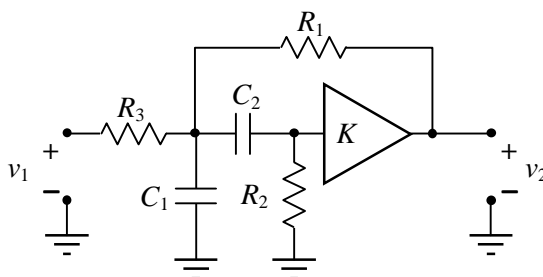
$$C_2 = C_1, \quad (232c)$$

$$R_2 = 4Q^2 R_1. \quad (232d)$$

En este caso son  $R_1$  y  $R_2$  las que difieren en orden de magnitud.

### a3) Pasabanda

En la figura 53 se ha representado la estructura de la célula pasabanda de segundo orden de Sallen y Key.



**Figura 53.** Célula pasabanda de segundo orden de Sallen y Key.

Llamando

$$\alpha = \frac{R_3}{R_1 + R_3}, \quad (233)$$

la función de transferencia puede expresarse como sigue:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{(1 - \alpha) K R_2 C_2 s}{1 + (R_2 C_2 (1 - \alpha K) + \alpha R_1 (C_1 + C_2)) s + \alpha R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}. \quad (234)$$

En este caso la obtención de las sensibilidades y su minimización resultan más tediosas que en los anteriores, por lo cual sólo incluiremos los resultados. Debe cumplirse que

$$K = 1, \quad (235a)$$

$$R_1 = R_3 = (9Q^2 - 1) R_2, \quad (235b)$$

$$C_2 = C_1, \quad (235c)$$

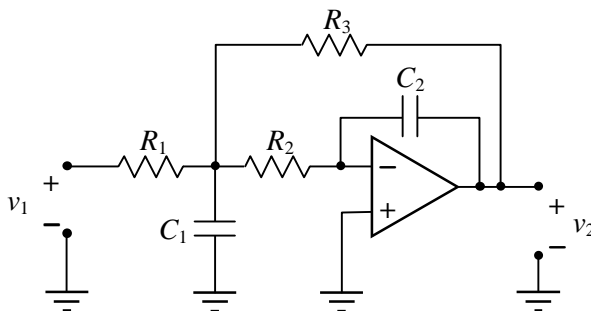
$$R_2 C_1 = 3Q / (9Q^2 - 1) \omega_0. \quad (235d)$$

### b) Células con realimentación negativa

Estas células tienen en general bajas sensibilidades respecto a los elementos pasivos, independientemente de la elección de parámetros, pero moderadamente altas respecto a los elementos activos. También quedan restringidos a aplicaciones con  $Q$  menor que 5. Existen células que requieren una ganancia definida, por lo cual debe utilizarse la configuración inversora habitual. El inconveniente de éstas está en que dicha configuración, a diferencia de la no inversora, tiene baja impedancia de entrada, y por lo tanto carga a la red de la cual forma parte. Otras células requieren una gran ganancia, y por lo tanto utilizan un amplificador operacional a lazo abierto. Veremos algunas de estas últimas.

#### bl) Pasabajos

En la figura 54 se muestra una célula pasabajos de segundo orden con realimentación negativa.



**Figura 54.** Célula pasabajos de segundo orden con realimentación negativa.

La función de transferencia es la que se indica a continuación.

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-R_3/R_1}{1 + (1 + R_3/R_1 + R_3/R_2)R_2C_2s + R_2R_3C_1C_2s^2} \quad (236)$$

Llamando

$$x = R_3/R_2, \quad (237a)$$

$$y = R_3/R_1, \quad (237b)$$

$$z = C_1/C_2, \quad (237c)$$

las ecuaciones de diseño pueden escribirse como

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{xz} R_2 C_2} \quad (238)$$

$$Q = \frac{\sqrt{xz}}{1 + x + y} \quad (239)$$

Las sensibilidades son

$$S_{R_2}^{\omega_o} = S_{R_3}^{\omega_o} = S_{C_1}^{\omega_o} = S_{C_2}^{\omega_o} = -\frac{1}{2}, \quad (240a)$$

$$S_{C_1}^Q = -S_{C_2}^Q = \frac{1}{2}, \quad (240b)$$

$$S_{R_1}^Q = \frac{y}{1 + x + y}, \quad (240c)$$

$$S_{R_2}^Q = \frac{1}{2} - \frac{1 + y}{1 + x + y}, \quad (240d)$$

$$S_{R_3}^Q = \frac{1}{2} - \frac{x + y}{1 + x + y}. \quad (240e)$$

Ninguna de estas sensibilidades frente a los parámetros pasivos es mayor que 1/2 en valor absoluto.

Si se tiene en cuenta la ganancia finita del amplificador operacional, resulta

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-y}{1 + \frac{1+x+y}{a} + \left( \left(1 + \frac{1}{a}\right)(1+x+y) + \frac{xz}{a} \right) R_2 C_2 s + xz R_2^2 C_2^2 s^2} \quad (241)$$

Se obtienen las siguientes sensibilidades:

$$S_a^{\omega_0} \cong -\frac{1}{a} \frac{1+y}{2}. \quad (242a)$$

$$S_a^Q \cong \frac{1}{a} \left( -\frac{1+y}{2} + Q^2(1+x+y) \right). \quad (242b)$$

La obtención de un  $Q$  grande requiere que  $z$  sea elevado. Por otra parte, según la aplicación quedará definido  $y$ , ya que dicho valor es la ganancia en continua.<sup>2</sup> Normalmente,  $y = 1$ . La reducción de  $x$  producirá una leve mejora en  $S_a^Q$ , pero en cambio exigiría aumentar  $z$  para lograr determinado valor de  $Q$ . Una buena solución intermedia se obtiene adoptando  $x = 1$ . Resulta, así:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{z} R_2 C_2} \quad (243)$$

$$Q = \frac{\sqrt{z}}{3} \quad (244)$$

de donde

$$C_1 = 9 Q^2 C_2, \quad (245a)$$

$$R_1 = R_2 = R_3, \quad (245b)$$

$$R_2 C_2 = \frac{1}{3 Q \omega_0}, \quad (245c)$$

y

$$S_{R_1}^Q = \frac{1}{3}, \quad S_{R_2}^Q = S_{R_3}^Q = -\frac{1}{6}, \quad (246a)$$

$$S_a^{\omega_0} \cong -\frac{1}{a}, \quad S_a^Q \cong \frac{3 Q^2}{a}. \quad (246b)$$

Puede parecer que para las ganancias normales de los amplificadores operacionales estos valores son suficientemente bajos. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que  $a$  se reduce mucho con la frecuencia, y además en general  $\Delta a/a$  es mucho mayor que las tolerancias pasivas.

**Ejemplo 13:** Estimar  $\Delta H/H$  para el filtro anterior con  $\omega_0 = 2\pi \times 3$  kHz y  $Q = 10$ , si se emplea un LM741.

A la frecuencia de 3 kHz, se tiene  $83 \leq a \leq 333$ , de modo que

$$a = 208 \pm 60\%$$

<sup>2</sup> Aunque, llegado el caso, es posible modificar la ganancia final por medio de una etapa amplificadora insertada en un punto apropiado.

$$S_a^Q \cong 3 \times 100^2 / 208 \cong 1,44$$

Entonces

$$\Delta H/H \cong \Delta Q/Q \cong S_a^Q \Delta a/a \cong 86\%,$$

que es una tolerancia inadmisibles. Debe observarse que al ser  $\Delta a/a$  tan grande, la aproximación es bastante gruesa, y por lo tanto es válida sólo como indicativa del orden de magnitud. También es de destacar que si bien la variación de  $\omega_0$  repercute en  $H$  más que una variación similar de  $Q$ , en este caso la variación de  $\omega_0$  debido a la ganancia  $a$  es muy inferior a la variación de  $Q$  de allí su escasa influencia.

Conceptualmente,  $S_a^Q$  es grande pues  $z$  es muy elevado, introduciendo un error importante en el término en  $s$ , del cual depende  $Q$ .

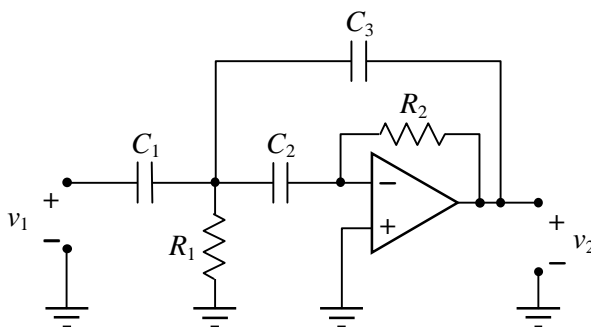
**Nota:** A veces se suele emplear el *producto ganancia por sensibilidad*,  $GS$ , que permite una comparación de estructuras con independencia del elemento activo utilizado (así como el producto ganancia por ancho de banda permite evaluar amplificadores independientemente de la cantidad de realimentación aplicada). En este caso

$$GS^{\omega_0} = a S_a^{\omega_0} \cong -1, \tag{247a}$$

$$GS^Q = a S_a^Q \cong 3 Q^2. \tag{247b}$$

**b2) Pasaltos**

Se obtiene intercambiando los capacitores y las resistencias en el pasabajos anterior. El circuito se muestra en la figura 55.



**Figura 55.** Célula pasaltos de segundo orden con realimentación negativa.

La función de transferencia es la siguiente:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-R_1 R_2 C_1 C_3 s^2}{1 + R_1(C_1 + C_2 + C_3)s + R_1 R_2 C_2 C_3 s^2} \tag{248}$$

Un inconveniente de este circuito es que su impedancia de entrada en alta frecuencia es  $1/C_1s$ , de modo que se reduce mucho precisamente en la banda de paso,

donde debería ser alta para no atenuar la fuente de señal. Otra dificultad se deriva de la reducción de la ganancia del amplificador en dicha banda. De modo que este circuito funciona como pasaaltos si la frecuencia de la señal a filtrar no es demasiado grande.

Un análisis similar al anterior permite concluir que las sensibilidades respecto a los elementos pasivos son inferiores a 1/2 para cualquier elección de éstos, y la sensibilidad de  $Q$  respecto a la ganancia es considerable para valores altos de  $Q$ . Una solución aceptable es

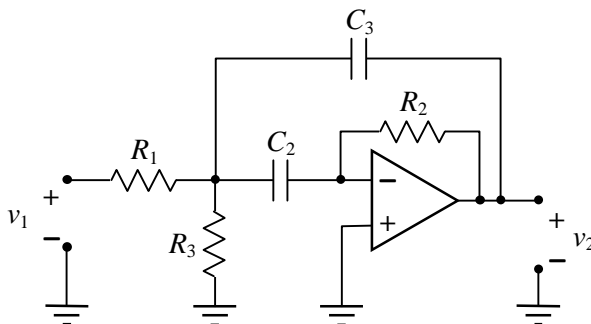
$$C_1 = C_2 = C_3, \tag{249a}$$

$$R_2 = 9 Q^2 R_1, \tag{249b}$$

$$R_1 C_3 = 1 / (3Q\omega_0). \tag{249c}$$

**b3) Pasabanda**

Existen algunas variantes alternativas para la célula pasabanda, una de las cuales se muestra en la figura 56.



**Figura 56.** Célula pasabanda de segundo orden con realimentación negativa.

La variante considerada tiene la siguiente función de transferencia:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-R_2 C_1 s}{1 + R_1 / R_3 + R_1 (C_1 + C_2) s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2} \tag{250}$$

Llamando

$$x = C_1 / C_2, \tag{251a}$$

$$y = R_1 / R_2, \tag{251b}$$

$$z = R_1 / R_3, \tag{251c}$$

las ecuaciones de diseño son:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1+z}{xy}} \frac{1}{R_2 C_2}, \tag{252}$$



$$Q = \sqrt{\frac{x}{y}} \frac{\sqrt{1+z}}{1+x}. \quad (253)$$

Resultan las siguientes sensibilidades frente a elementos pasivos:

$$S_{R_2}^{\omega_o} = S_{C_1}^{\omega_o} = S_{C_2}^{\omega_o} = -\frac{1}{2}, \quad (254a)$$

$$S_{R_1}^{\omega_o} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+z}, \quad S_{R_3}^{\omega_o} = -\frac{1}{2} \frac{z}{1+z} \quad (254b)$$

$$S_{C_1}^Q = -S_{C_2}^Q = \frac{1}{2} - \frac{x}{1+x}, \quad S_{R_2}^Q = \frac{1}{2}, \quad (254c)$$

$$S_{R_1}^Q = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+z}, \quad S_{R_3}^Q = -\frac{1}{2} \frac{z}{1+z}, \quad (254d)$$

Considerando la ganancia finita del amplificador:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-R_2 C_1 s}{\left(1 + \frac{1}{a}\right)(1+z) + \left((1+z)\frac{x}{a} + y(1+x)\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right)R_2 C_2 s + xy\left(1 + \frac{1+x}{a}\right)R_2^2 C_2^2 s^2} \quad (255)$$

se obtienen las siguientes sensibilidades respecto a la ganancia del amplificador:

$$S_a^{\omega_o} \cong \frac{1}{a} \frac{x}{2}, \quad (256a)$$

$$S_a^Q \cong \frac{1}{a} \left( -\frac{x}{2} + Q^2(1+x) \right). \quad (256b)$$

Si se desea que en la frecuencia central la ganancia sea  $-1$ , deberá cumplirse (para  $a$  grande) que

$$R_2 C_1 = R_1 (C_1 + C_2), \quad (257)$$

es decir

$$y = \frac{x}{1+x}, \quad (258)$$

de donde

$$Q^2 = \frac{1+z}{1+x}. \quad (259)$$

Si se elige  $x$  pequeño se reducen (aunque no muy significativamente) las sensibilidades activas, y el valor de  $z$  no es tan alto (recuérdese que cuanto menos dispares sean los valores de los componentes menor es el problema de derivas térmicas). Por ejemplo

$$C_2 = 10 C_1, \quad (260a)$$

$$R_3 = R / (1,1 Q^2 - 1), \quad (260b)$$

$$R_2 = 11 R_1, \quad (260c)$$

$$R_1 C_1 = Q / (10 \omega_0). \quad (260d)$$

En este circuito suele adoptarse  $C_1 = C_2$ , con lo cual se obtiene el juego de valores siguiente:

$$C_1 = C_2, \quad (261a)$$

$$R_2 = 2 R_1, \quad (261b)$$

$$R_3 = R_1 / (Q^2 - 1), \quad (261c)$$

$$R_1 C_1 = Q / \omega_0. \quad (261d)$$

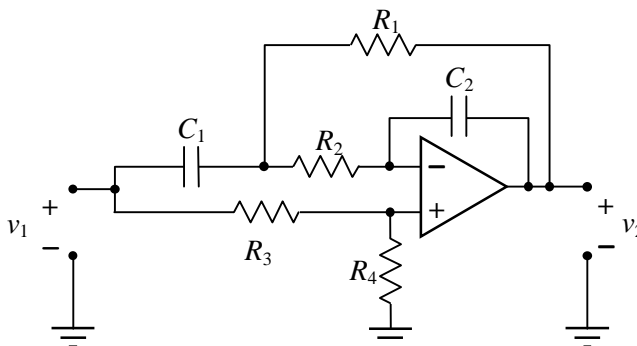
Finalmente, el circuito se suele presentar sin  $R_3$  (es decir con esa resistencia de valor infinito), con lo cual no es posible elegir independientemente  $Q$  de la constante en la frecuencia central.

Una variante frecuentemente utilizada de este pasabanda se obtiene agregando una realimentación positiva. Para ello se conecta el terminal no inversor del amplificador operacional a un divisor resistivo entre la salida y masa. Con esto se logra aumentar la ganancia equivalente del amplificador, con lo cual disminuyen las sensibilidades activas, pudiendo aumentarse algo  $Q$ . Esta versión se debe a Delyiannis.

También se obtiene un pasabanda intercambiando los capacitores y resistencias.

#### b4) Rechazabanda y Pasatodo

Con el circuito de la figura 57 pueden realizarse las funciones rechazabanda y pasatodo, eligiendo adecuadamente los componentes. Utiliza el concepto de feedforward,



**Figura 57.** Célula rechazabanda y pasatodo de segundo orden con realimentación negativa.

ya que la entrada se aplica también en un punto posterior de la red. La función de transferencia es:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1 + \left( (R_1 + R_2)C_2 - \frac{R_3}{R_4}R_1C_1 \right) s + R_1R_2C_1C_2s^2}{1 + (R_1 + R_2)C_2 s + R_1R_2C_1C_2s^2} \quad (262)$$

Por medio de  $R_3/R_4$  puede controlarse el coeficiente central del numerador. Si

$$\frac{R_3}{R_4} = \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{C_2}{C_1}, \quad (263)$$

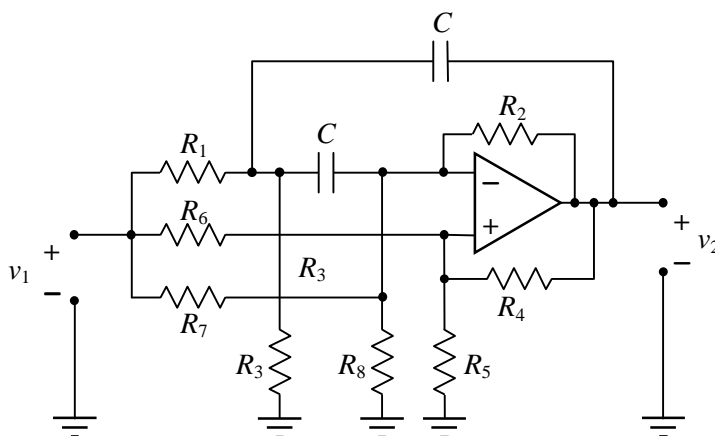
se tiene un rechazabanda, y si

$$\frac{R_3}{R_4} = 2 \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{C_2}{C_1}, \quad (264)$$

se logra una célula pasatodo. En el primer caso, los ceros están en el eje imaginario, creando polos de pérdida, y en el segundo caso los ceros son la imagen especular de los polos. Las ecuaciones de diseño son similares a las del pasabanda anterior ya que el denominador es formalmente muy parecido (en realidad es el denominador de la versión con capacitores y resistencias intercambiados). También son análogos los criterios de optimización, observándose que aquí se agrega la dificultad adicional de tener que lograr apareamientos entre las relaciones de componentes señaladas, lo cual en la práctica puede requerir el empleo de componentes ajustables.

### b5) Célula general de Friend

Este circuito, expuesto en la figura 58, permite obtener varias funciones de segundo orden, según cómo se elijan los componentes. Es similar al circuito de Delyiannis



**Figura 58.** Célula general de Friend para obtener diversas las funciones de segundo orden.

mencionado en b3) con el agregado de varios caminos de feedforward para lograr los ceros. La función de transferencia es

$$\frac{v_1}{v_2} = K \frac{s^2 + A s + B}{s^2 + F s + G} \quad (265)$$

donde

$$\begin{aligned} K &= \frac{R_5}{R_5 + R_6}, \\ A &= \frac{1}{C} \left( \frac{1}{R_1 // R_2 // R_3 // R_7 // R_8} + \frac{1}{R_2 // R_7 // R_8} - \frac{R_6}{R_4 // R_5 // R_6} \frac{1}{R_1 // R_8} \right), \\ B &= \frac{1}{C^2} \frac{1}{R_1 // R_3} \left( \frac{1}{R_2 // R_7 // R_8} - \frac{R_6}{R_7} \frac{1}{R_4 // R_5 // R_6} \right), \\ F &= \frac{1}{C} \left( \frac{2}{R_2} - \frac{3}{R_4} \frac{R_5 // R_6}{R_7 // R_8} \right), \\ G &= \frac{1}{C^2} \frac{1}{R_1 // R_3} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4} \frac{R_5 // R_6}{R_7 // R_8} \right). \end{aligned} \quad (266)$$

Este circuito es útil para obtener pasabajos y pasaaltos *notch*, y pasatodo. Es posible integrarlo con tecnología híbrida con capacitores de tantalio y resistencias de nitruro de tantalio. Se lo emplea para procesamiento de señales vocales y de audio.

### 7.2.2.2 Células con dos amplificadores operacionales

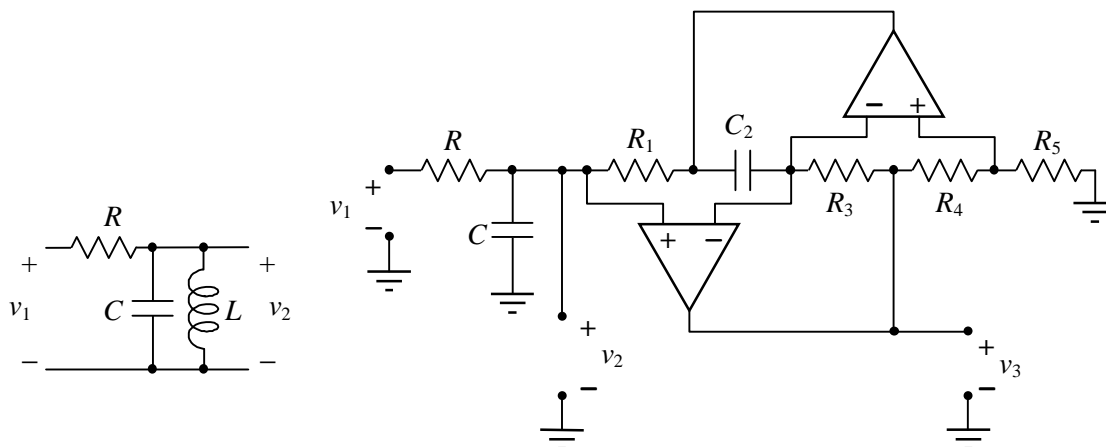
Al igual que en el caso de las células con un operacional, existen diversas estructuras propuestas. Las mejores están basadas en la simulación de componentes mediante el girador de Antoniou en células pasivas RLC de segundo orden, y serán las únicas que estudiaremos. Su empleo en una síntesis en cascada constituye una conjunción de ambos enfoques de diseño (simulación y síntesis), y podría considerarse como un enfoque mixto. Comenzaremos por las estructuras que surgen más naturalmente.

#### a) Pasabanda

Se parte de una célula RLC pasabanda de segundo orden, y se reemplaza el inductor por su simulación, como se muestra en la figura 59.

De las dos estructuras RLC posibles, se eligió aquella con el inductor a masa, ya que es más fácil de simular. El valor del inductor simulado es

$$L = R_1 R_3 R_5 C_2 / R_4. \quad (267)$$



**Figura 59.** Un filtro pasabanda RLC y su implementación utilizando un girador de Antoniou para obtener una célula pasabanda de segundo orden para su uso en síntesis en cascada.

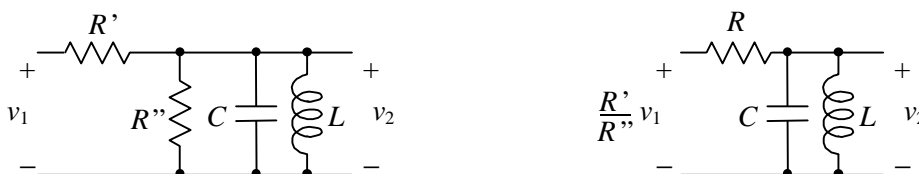
La función de transferencia resulta

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{L}{R}s}{1 + \frac{L}{R}s + LCs^2}. \tag{268}$$

Observemos que si bien el punto más lógico para tomar la salida parecería ser entre los terminales de  $C$ , resulta que no es posible colocar allí una carga sin alterar la función filtrante (a menos que se agregara allí un seguidor, lo cual llevaría el número de amplificadores a 3). Este inconveniente puede subsanarse tomando la salida en  $V_3$  y no en  $V_2$ , ya que entre ellas existe proporcionalidad. En efecto, debido a los ceros virtuales entre los terminales de entrada de los amplificadores la tensión en  $R_5$  es igual a  $V_2$ . Como  $R_4$  y  $R_5$  forman un divisor cargado sólo por la entrada de un amplificador operacional, se tiene:

$$v_3 = (1 + R_4 / R_5) v_1 \tag{269}$$

Resulta así que la salida del filtro activo es mayor que la del prototipo pasivo. Esto se puede corregir reemplazando la resistencia de entrada del filtro por un divisor, como se indica en la figura 60. De este modo la tensión de Thévenin vista a la entrada se reduce.



**Figura 60.** Modificación del filtro prototipo pasivo para compensar la ganancia que aplica el girador y su equivalente de Thévenin.

Eligiendo las resistencias de modo tal que  $R'//R'' = R$ , la resistencia vista desde el tanque LC no cambia. Un inconveniente de esta solución es que aunque la atenuación del filtro resultante es igual que la original, su impedancia de entrada no lo es. Particularmente, la impedancia de entrada en la frecuencia de resonancia (frecuencia central del filtro) no es infinita, aunque ello no es demasiado importante ya que se está trabajando con amplificadores operacionales.

Las ecuaciones de diseño son:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{R_4}{R_1 R_3 R_5 C_2 C}} \quad (270)$$

$$Q = R \sqrt{\frac{R_4 C}{R_1 R_3 R_5 C_2}} = R'//R'' \sqrt{\frac{R_4 C}{R_1 R_3 R_5 C_2}} \quad (271)$$

Las sensibilidades respecto a  $R'$  y  $R''$  son menores que 1, y las restantes son todas 1/2 ó -1/2.

Tomando en consideración el ancho de banda finito de los amplificadores operacionales, de acuerdo al análisis realizado sobre el girador de Antoniou, conviene elegir

$$R_4 = R_5, \quad (272)$$

$$\frac{1}{R_3 C_2} = \omega_0. \quad (273)$$

Esto se logra adoptando

$$C_2 = C, \quad (274)$$

$$R_3 = R_1, \quad (275)$$

con lo cual las ecuaciones de diseño (ideales) se reducen a

$$\omega_0 = \frac{1}{R_1 C}, \quad (276)$$

$$Q = \frac{R}{R_1}. \quad (277)$$

Los valores reales,  $\omega_0'$  y  $Q'$ , se obtienen reemplazando la inductancia por la impedancia efectivamente obtenida con el girador. Suponiendo que la ganancia de los amplificadores operacionales es  $a(s) \cong GB/s$ , la función de transferencia resulta ser de cuarto orden. Un par de polos es parásito, y de alta frecuencia (aproximadamente  $GB/\sqrt{2}$ ), de modo que su efecto sobre la ganancia en las proximidades de  $\omega_0$  es despreciable. El otro par de polos es muy cercano a lo esperado, y sus valores característicos pueden aproximarse por

$$\omega_o' \cong \omega_o \left( 1 - 2 \frac{\omega_o}{GB} \right), \quad (278)$$

$$Q' \cong Q \left( 1 - 4Q \left( \frac{\omega_o}{GB} \right)^2 \right). \quad (279)$$

Se observa que si la frecuencia central  $\omega_o$  no es suficientemente pequeña respecto a GB, el error puede ser considerable. Lo mismo sucede con  $Q$  si éste es grande. También aparece un cero parásito de alta frecuencia (aproximadamente GB) que compensa algo el efecto de los polos parásitos (ver Apéndice).

Con las aproximaciones anteriores se pueden obtener versiones más exactas de las ecuaciones de diseño. Para ello se reemplazan  $\omega_o'$  y  $Q'$  por los valores que se desea obtener y  $\omega_o$  y  $Q$  por sus expresiones ideales. Resultan las ecuaciones siguientes:

$$R_1 C = \frac{1}{\omega_o} \left( 1 - 2 \frac{\omega_o}{GB} \right), \quad (280)$$

$$\frac{R}{R_1} = Q \left( 1 + 4Q \left( \frac{\omega_o}{GB} \right)^2 \right). \quad (281)$$

Con estos valores, se cumple

$$\omega_o' \cong \omega_o, \quad (282)$$

$$Q' \cong Q. \quad (283)$$

Este procedimiento de diseño en el cual se corrigen los valores ideales requeridos de  $\omega_o$  y  $Q$  para compensar el efecto de la respuesta en frecuencia finita de los amplificadores se denomina *predistorsión*.

Los efectos ulteriores de las derivas de GB pueden evaluarse por medio de las sensibilidades, que valen

$$S_{GB}^{\omega_o'} \cong 2 \frac{\omega_o}{GB}, \quad (284)$$

$$S_{GB}^{Q'} \cong 8Q \left( \frac{\omega_o}{GB} \right)^2. \quad (285)$$

**Ejemplo 14:** Diseñar una célula pasabanda con  $Q = 50$ ,  $f_o = 5$  kHz, empleando el LM741, con un producto ganancia por ancho de banda, de 1,5 MHz, y determinar el error porcentual ocasionado cuando este varía por derivas en un 20%.

Adoptamos  $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 10,00$  k $\Omega$ . Se tiene

$$\omega_o = 2\pi \times 5 \text{ kHz},$$

$$GB = 2\pi \times 1,5 \text{ MHz}.$$

Entonces

$$C = \frac{1}{R_1 \omega_0} \left( 1 - \frac{2\omega_0}{GB} \right) = 3,162 \text{ nF},$$

$$R = R_1 Q \left( 1 - 4Q \left( \frac{\omega_0}{GB} \right)^2 \right) = 501,1 \text{ k}\Omega.$$

Para obtener los errores calculemos las sensibilidades:

$$S_{GB}^{\omega_0'} \cong 6,7 \times 10^{-3},$$

$$S_{GB}^{Q'} \cong 4,4 \times 10^{-3}.$$

Entonces

$$\frac{\Delta \omega_0'}{\omega_0'} \cong S_{GB}^{\omega_0'} \frac{\Delta GB}{GB} \cong 0,13 \%,$$

$$\frac{\Delta Q'}{Q} \cong S_{GB}^{Q'} \frac{\Delta GB}{GB} \cong 0,089 \%.$$

Debe notarse que el error de  $\omega_0'$  se traduce en un error  $Q$  veces mayor en  $|H|$ , esto es, un 6,7% (0,56 dB), error que puede ser significativo al trabajar con atenuaciones máximas del orden de 1 dB en la banda de paso.

También es interesante señalar que el *slew-rate* del amplificador puede ocasionar distorsiones a menos que se restrinja la máxima excursión a la salida. Deberá ser

$$V_{m\acute{a}x} < SR / \omega_0.$$

Para el LM741, con  $SR \geq 0,3 \text{ V}/\mu\text{s}$ , corresponde a 9,5V. Para frecuencias mayores que  $\omega_0$  el problema no es demasiado importante en general, ya que la amplitud decrece mucho por la propia acción filtrante.

### b) Pasaaltos

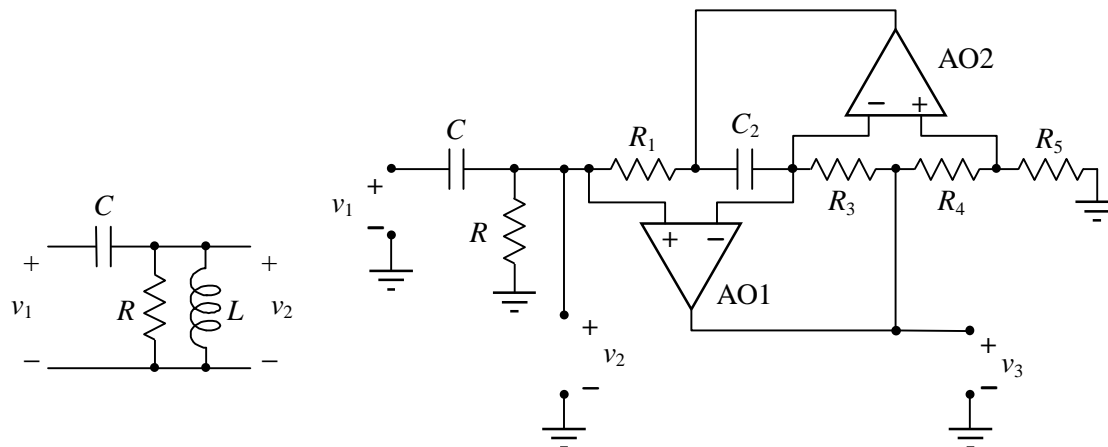
Se obtiene simulando el inductor de una célula RLC con un girador de Antoniou. El circuito se muestra en la figura 61.

Al igual que en el pasabanda, es más conveniente tomar la salida en  $V_3$ . La ganancia en la banda de paso es 2, pero puede modificarse, si dicho valor resultara inconveniente, sustituyendo  $C$  por un divisor capacitivo.

En general se elige  $R_1 = R_3 = R_4 = R_5$  y  $C_2 = C$ . La inductancia simulada vale

$$L = R_1^2 C,$$





**Figura 61.** Un filtro pasaaltos RLC y su implementación utilizando un girador de Antoniou para obtener una célula pasabanda de segundo orden para su uso en síntesis en cascada.

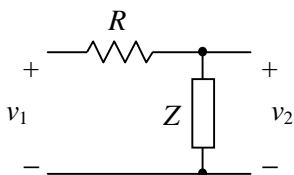
y la función de transferencia ideal

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{LCs^2}{1 + \frac{L}{R}s + LCs^2} \tag{286}$$

La función real se obtiene multiplicando la del pasabanda por RCs. Las ecuaciones de diseño ideales y reales son las mismas que para el pasabanda, al igual que las sensibilidades pasivas y activas.

**c) Pasabajos**

A diferencia de las células anteriores, no es posible obtener la célula pasabajos simulando el inductor con un girador, ya que los dos circuitos pasivos posibles tienen el inductor flotante. Puede implementarse un pasabajos utilizando el girador de Antoniou para simular una impedancia, tal que conectada como divisor como se indica en la figura 62 se tenga un pasabajos.



**Figura 62.** Estructura de un pasabajos de segundo orden a partir de un divisor entre una resistencia y una impedancia apropiada.

Igualando la transferencia del divisor y la respuesta deseada,

$$\frac{Z}{R + Z} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \tag{287}$$

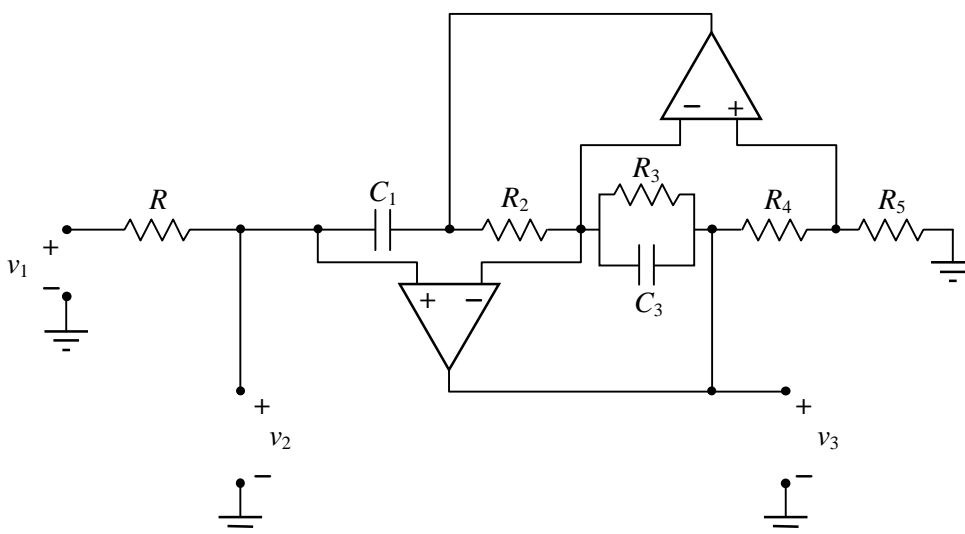
resulta

$$Z = \frac{QR}{\frac{s}{\omega_0} \left( 1 + Q \frac{s}{\omega_0} \right)} \tag{288}$$

Esta impedancia se logra con un girador en el cual  $Z_1$  es un capacitor,  $Z_3$  un capacitor en paralelo con una resistencia, y las restantes son resistencias. La impedancia simulada vale

$$Z = \frac{R_3 R_5}{R_2 R_4 C_1 s (1 + R_3 C_3 s)} \tag{289}$$

El circuito resultante se indica en la figura 63.



**Figura 63.** Implementación de un filtro pasabajos mediante un girador de Antoniou para obtener una célula pasabanda de segundo orden para su uso en síntesis en cascada.

Tomando  $R_2 = R_4 = R_5$  y  $C_1 = C_3$ , se tienen las siguientes ecuaciones de diseño ideales:

$$\omega_0 = 1 / R_2 C_1, \tag{290}$$

$$Q = R_3 / R_2, \tag{291}$$

$$R = R_2. \tag{292}$$

Teniendo en cuenta el ancho de banda finito de los amplificadores resulta una función de transferencia con 4 polos y 2 ceros. Los polos coinciden con los de los casos anteriores, es decir, el parásito es de alta frecuencia (aproximadamente  $GB/\sqrt{2}$ ). El otro tiene los valores característicos siguientes:

$$\omega_0' \cong \omega_0 (1 - 2\omega_0 / GB), \tag{293}$$

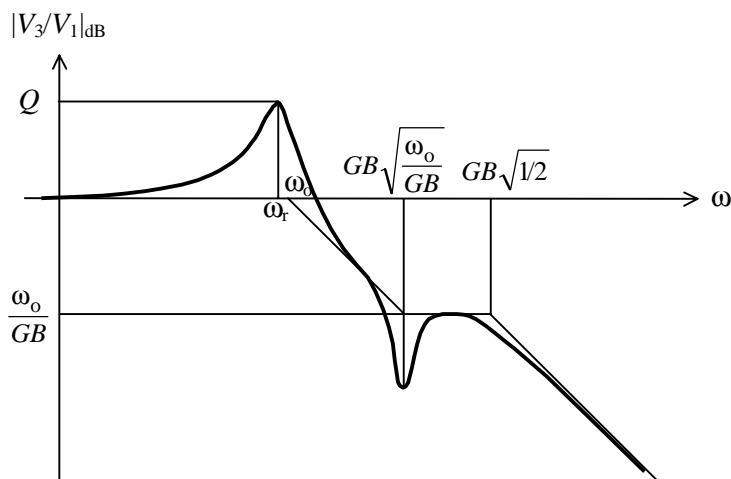
$$Q' \cong Q (1 - 4Q (\omega_0 / GB)^2). \tag{294}$$

El par de ceros complejos tiene

$$\omega_c \cong GB \sqrt{\frac{\omega_0}{GB}}, \tag{295}$$

$$Q_c \cong \sqrt{\frac{GB}{\omega_0}}. \tag{296}$$

La frecuencia no es tan alta como la del par de polos parásitos, de modo que no hay en este caso compensación. El efecto resultante es que desde  $\omega_c$  hasta  $GB/\sqrt{2}$  la ganancia presenta una meseta de valor  $\omega_0/GB$ . Luego decrece nuevamente con pendiente de segundo orden. Todo ello se indica en la gráfica de la figura 64.



**Figura 64.** Respuesta en frecuencia del pasabajos real con girador de Antoniou.

Las ecuaciones reales de diseño son

$$R_2 C_1 \cong \frac{1}{\omega_0} \left( 1 - 2 \frac{\omega_0}{GB} \right), \tag{297}$$

$$\frac{R_3}{R_2} \cong Q \left( 1 + 4Q \left( \frac{\omega_0}{GB} \right)^2 \right). \tag{298}$$

**NOTA:** Aunque podría haberse utilizado la transformación para eliminar inductores flotantes, el resultado es un circuito con tres capacitores en lugar de dos. Dado que los capacitores de precisión son más costosos que las resistencias de precisión, es preferible utilizar pocos capacitores.

**Ejemplo 15:** Se debe diseñar una célula de segundo orden pasabajos con  $f_o = 10$  kHz y  $Q = 30$ . Determinar el producto ganancia por ancho de banda necesario para los amplificadores operacionales si se requiere que el comportamiento sea de segundo orden por lo menos hasta los  $-60$  dB de ganancia.

La meseta debe estar como mínimo a  $-60$  dB, de modo que

$$\omega_o / GB = 10^{-3}.$$

Entonces

$$GB = 10^3 \omega_o,$$

que corresponde a 10 MHz.

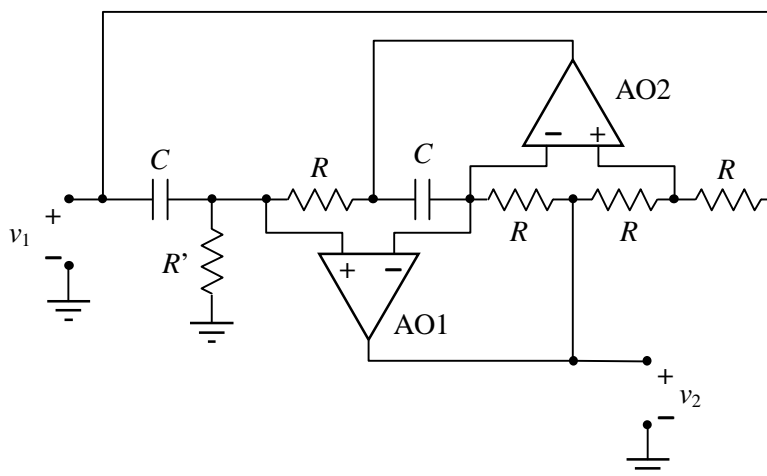
Para diseñar el circuito adoptamos  $R = R_2 = R_4 = R_5 = 10,00$  k $\Omega$ . Entonces

$$C_3 = C_1 = \frac{1}{R_2 \omega_o} \left( 1 - 2 \frac{\omega_o}{GB} \right) \cong 1,588 \text{ nF},$$

$$R_3 \cong Q \left( 1 + 4Q \left( \frac{\omega_o}{GB} \right)^2 \right) R_2 \cong 30,00 \text{ k}\Omega.$$

**d) Pasatodo**

En ésta y en las células *notch* la señal de entrada se introduce por ambos extremos. El circuito (ver figura 65) puede interpretarse desde dos puntos de vista. En el primero, como una aplicación del concepto de feedforward, y en el segundo como un pasabanda en el que se han invertido los terminales de entrada y masa. En efecto, esta operación convierte una función de transferencia  $H(s)$  en  $1 - H(s)$ , de modo que con un pasabanda de ganancia central 2 (como es el ya analizado) puede lograrse un pasatodo.



**Figura 65.** Un filtro pasatodo de segundo orden implementado por medio de un girador de Antoniou conectado como pasabanda, intercambiando la entrada y la masa.

La función de transferencia ideal es

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{s^2}{\omega_o^2} - \frac{s}{Q\omega_o} + 1}{\frac{s^2}{\omega_o^2} + \frac{s}{Q\omega_o} + 1}, \quad (299)$$

donde

$$\omega_o = 1/RC, \quad Q = R'/R. \quad (300)$$

Considerando el efecto de la respuesta en frecuencia de los amplificadores resulta que las frecuencias y los  $Q$  del numerador y denominador no sólo difieren de los valores ideales, sino también entre sí. Para el denominador

$$\omega_D \cong \omega_o \left( 1 - 2 \frac{\omega_o}{GB} \right), \quad (301a)$$

$$Q_D \cong Q \left( 1 + 4Q \left( \frac{\omega_o}{GB} \right)^2 \right), \quad (301b)$$

y para el numerador

$$\omega_N \cong \omega_o \left( 1 - \frac{\omega_o}{GB} \right), \quad (302a)$$

$$Q_N \cong Q \left( 1 - 2Q \frac{\omega_o}{GB} \right). \quad (302b)$$

Se observa un error muy importante en  $Q_N$ , lo cual implica que este circuito funciona bien cuando  $Q$  no es muy alto, o bien cuando  $\omega_o \ll GB$ . Es posible corregir este inconveniente desapareando adecuadamente las dos últimas resistencias ( $R_4$  y  $R_5$ ), aunque el cálculo es bastante tedioso.

**Ejemplo 16:** Determinar el máximo error en dB de un pasatodo implementado con el circuito anterior, si  $f_o = 1$  kHz,  $GB = 2\pi \times 1$  MHz,  $Q = 50$ .

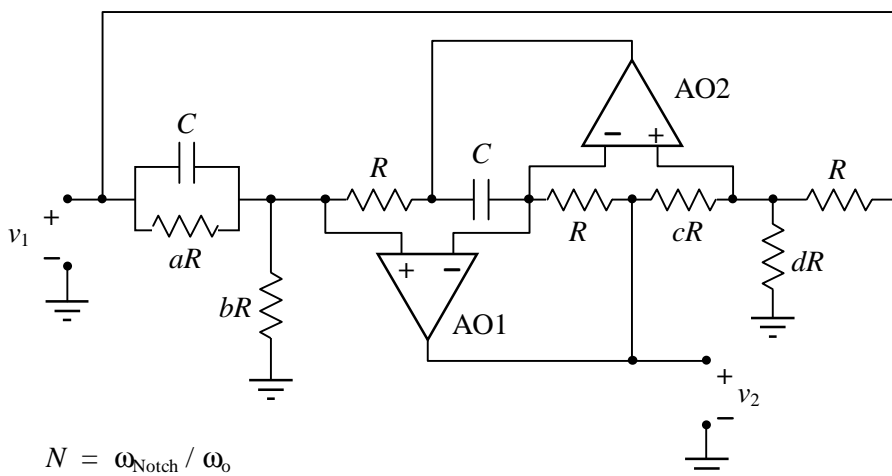
El mayor error se dará a la frecuencia  $f_o$ , donde se tiene

$$H(j\omega_o) = Q_D/Q_N \cong 1,11$$

que corresponde a 0,92 dB. Este error es importante si se trabaja con  $A_{m\acute{a}x}$  del orden del dB.

**e) Pasaaltos *Notch***

En este circuito (figura 66) también se hace uso de la técnica de *feedforward*.



$$\begin{aligned}
 N &= \omega_{\text{Notch}} / \omega_0 \\
 a &= Q(1 + N^2) / N^2 & b &= Q(1 + N^2) \\
 c &= 2N^2 / (1 + N^2) & d &= 2N^2 / (1 - N^2)
 \end{aligned}$$

**Figura 66.** Un filtro pasaaltos *Notch* de segundo orden implementado por medio de un girador de Antoniou usando la técnica de *feedforward*.

La función de transferencia ideal es

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{2N^2 \frac{s^2}{\omega_{\text{Notch}}^2} + 1}{1 + N^2 \left( \frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q\omega_0} + 1 \right)}, \tag{303}$$

donde

$$\omega_0 = 1/RC, \quad N = \omega_{\text{Notch}} / \omega_0. \tag{304}$$

Dado que debe ser  $N \leq 1$  para que  $dR > 0$ , este circuito no permite realizar pasabajos *notch*. Haciendo  $dR = \infty$  (es decir  $N = 1$ ) resulta un rechazabanda.

Las sensibilidades pasivas de  $\omega_0$  y  $\omega_{\text{Notch}}$  son todas menores que 1/2 en valor absoluto, y las de  $Q$ , menores que 1. En el numerador hay en realidad un término central en  $s$  de la forma

$$\left( \frac{1}{a} \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) - \frac{1}{b} \right) \frac{s}{\omega_0} \tag{305}$$

Con los anteriores valores exactos, este término se hace 0, lo cual equivale a tener un  $Q_{\text{Notch}} = \infty$  en el numerador. Esta situación ideal puede modificarse por dispersión o

derivadas, reduciendo  $Q_{\text{Notch}}$  a un valor finito. En ese caso, en lugar del concepto de sensibilidad, es más significativo el valor mínimo de  $Q_{\text{Notch}}$ , como indicador del grado de idealidad de la célula.

Si  $h$  es el máximo error relativo en los coeficientes  $a, b, c, d$ , entonces

$$|Q_{\text{Notch}}(h)| > \frac{Q(1 + N^2)}{3h + h^2} \cong \frac{Q(1 + N^2)}{3h} \tag{306}$$

Cuanto menor sea  $h$ , mayor será  $Q_{\text{Notch}}$  y, por lo tanto, mayor la atenuación en  $\omega_{\text{Notch}}$ . Si se contemplan los efectos de la respuesta en frecuencia de los amplificadores, hallamos que el denominador es idéntico al de los casos anteriores, por lo cual todas las consideraciones sobre  $\omega_0$  y  $Q$ , incluida la referencia a la predistorsión, son aplicables. En cuanto al numerador, se tiene

$$\omega_{\text{Notch}} = N \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \left( 1 + N^2 \right) \frac{\omega_0}{GB} \right), \tag{307}$$

$$Q_{\text{Notch}}(GB) = -\frac{GB}{N \omega_0} \frac{1}{1 + N^2}. \tag{307}$$

Aparece, así, un segundo efecto que resta aún más idealidad al par de ceros supuestamente imaginarios. El valor resultante puede calcularse aplicando la “regla del paralelo”:

$$\frac{1}{Q_{\text{Notch}}} = \frac{1}{Q_{\text{Notch}}(h)} + \frac{1}{Q_{\text{Notch}}(GB)}. \tag{308}$$

Por lo general predomina el efecto de GB.

**f) Pasabajos Notch**

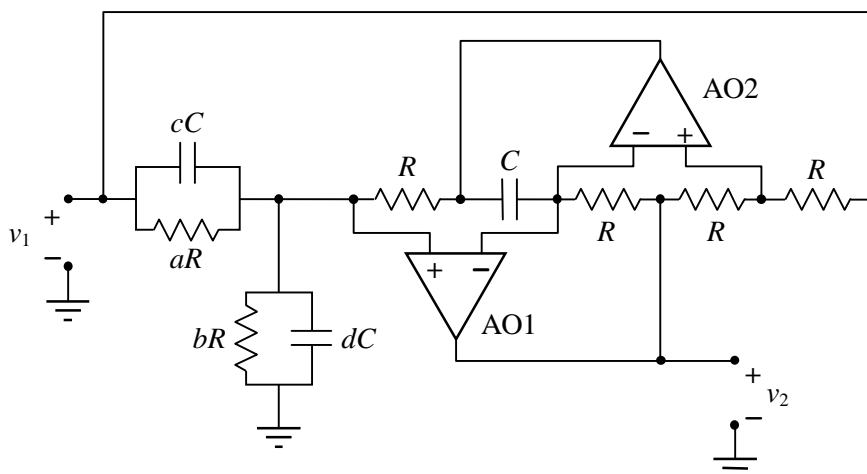
El circuito correspondiente se muestra en la figura 67. La función de transferencia ideal es

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{s^2}{\omega_{\text{Notch}}^2} + 1}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{Q \omega_0} + 1}, \tag{309}$$

donde

$$\omega_0 = 1 / RC. \tag{310}$$

En este caso debe ser  $N \geq 1$  para que el capacitor  $dC$  sea físicamente realizable, por lo cual se obtiene un *pasabajos notch*. Si  $N = 1$  se abre dicho capacitor, y se obtiene el mismo rechazabanda comentado antes.



$$N = \omega_{\text{Notch}} / \omega_0 \qquad a = b = 2Q$$

$$c = (1 + N^2) / (2N^2) \qquad d = (1 + N^2) / (2N^2)$$

**Figura 67.** Un filtro pasabajos *Notch* de segundo orden implementado por medio de un girador de Antoniou usando la técnica de feedforward.

Las sensibilidades respecto a todos los elementos pasivos verifican

$$\left| S_X^{\omega_0} \right| \leq \frac{1}{2}, \tag{311a}$$

$$\left| S_X^Q \right| \leq 1, \tag{311b}$$

$$S_d^{\omega_{\text{Notch}}} = -S_c^{\omega_{\text{Notch}}} = \frac{N^2 + 1}{4}. \tag{311c}$$

Las sensibilidades de  $\omega_{\text{Notch}}$  son altas si  $N$  es alto debido a que  $\omega_{\text{Notch}}$  proviene de una diferencia entre valores muy parecidos:

$$\omega_{\text{Notch}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{c - d}}, \tag{312}$$

lo cual no sucedía en el circuito anterior.

También en este caso aparece un término central en  $s$  en el numerador, de la forma

$$\left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \frac{s}{\omega_0} \tag{305}$$



que se anula si  $a = b$ . Si, en cambio, tienen un error relativo máximo  $h$ , aparece un  $Q_{\text{Notch}}$  finito acotado por

$$Q_{\text{Notch}, h} > Q/h. \quad (306)$$

Si se tienen en cuenta las respuestas en frecuencia de los amplificadores operacionales, se obtienen resultados idénticos a los del circuito anterior.

### 7.2.2.3 Células con tres o más amplificadores operacionales

Estas células en su mayoría responden al tipo de estructura conocida como *filtro de variable de estado*, con variantes en cuanto a la implementación. Desde el punto de vista de la sensibilidad, no son superiores a las células basadas en el girador de Antoiou, pero sí lo son en cuanto a flexibilidad, versatilidad, y simplicidad de ajuste.

#### Filtros de variable de estado

Los filtros de variable de estado se basan en la simulación analógica de la ecuación diferencial correspondiente. Consideremos la función bicuadrática

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a}{1 + \frac{1}{Q} \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}. \quad (307)$$

La ecuación diferencial de la cual proviene ésta se obtiene eliminando denominadores y tomando la transformada inversa de Laplace:

$$y'' + \frac{\omega_0}{Q} y' + \omega_0^2 y = a \omega_0^2 x \quad (308)$$

Esta ecuación puede simularse mediante integradores y sumadores. Para ello despejemos  $y''$

$$y'' = -\frac{\omega_0}{Q} y' - \omega_0^2 y + a \omega_0^2 x \quad (309)$$

y tengamos en cuenta que

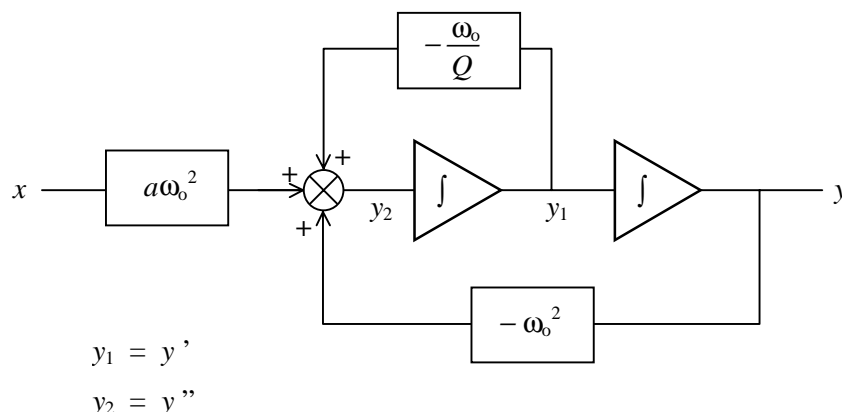
$$y' = \int y'' dt, \quad (310)$$

$$y = \int y' dt = \int (\int y'' dt) dt. \quad (311)$$

Podemos reescribir (309) en la forma

$$y'' = -\frac{\omega_0}{Q} \int y'' dt - \omega_0^2 \int (\int y'' dt) dt + a \omega_0^2 x \quad (312)$$

Resulta así el diagrama de bloques de la figura 68.



**Figura 68.** Diagrama de bloques de un filtro de variable de estado.

Observemos que

$$Y_1 = sY,$$

$$Y_2 = s^2Y$$

de donde

$$\frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{a s}{1 + \frac{1}{Q} \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}, \tag{313}$$

$$\frac{Y_2(s)}{X(s)} = \frac{a s^2}{1 + \frac{1}{Q} \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}. \tag{314}$$

Esto significa que la misma estructura proporciona simultáneamente las tres funciones básicas: pasabajos, pasabanda, y pasaltos, con los mismos  $\omega_0$  y  $Q$ , lo cual confiere a esta estructura una gran versatilidad. Mediante el uso de técnicas de feedforward pueden obtenerse también células que realicen funciones rechazabanda, *notch*, y pasatodo, según veremos.

La denominación de *filtros de variable de estado* surge de que  $y$  e  $y_1$  son las variables de estado del filtro visto como sistema de ecuaciones diferenciales.

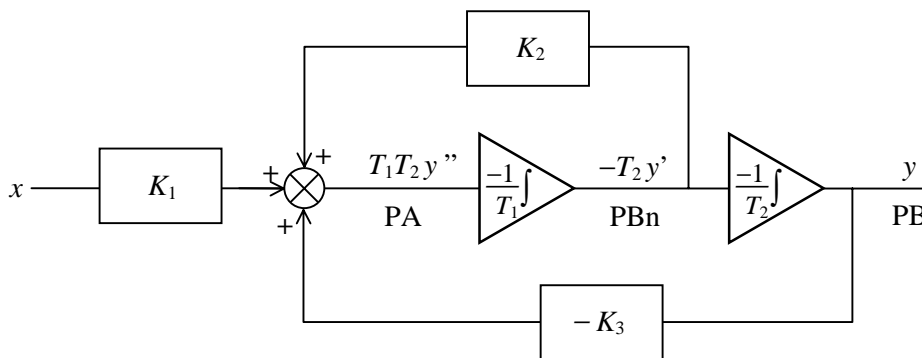
Existen diversas realizaciones con amplificadores operacionales para este tipo de estructura. En realidad, esta forma de simulación constituye históricamente una de las primeras aplicaciones de los amplificadores operacionales, aunque no en filtros activos propiamente dichos sino en computadoras analógicas.

Analizaremos las células de variable de estado más usuales, incluyendo las que hacen uso de capacitores conmutados.

**a) Células básicas**

**al) Célula de Kerwin-Huelsman-Newcomb (KHN) (1967)**

Conceptualmente surge de reacomodar los signos y las constantes en el diagrama de bloques anterior, de modo que los integradores puedan realizarse con la configuración usual con un amplificador operacional. El diagrama de bloques resultante es el que se muestra en la figura 69.



**Figura 69.** Reestructuración del diagrama de bloques de la figura 68 para la implementación del filtro de variable de estado con integradores inversores.

Su función de transferencia

$$\frac{Y}{X} = \frac{K_1}{T_1 T_2 s^2 + K_2 T_2 s + K_3} \tag{315}$$

Se tiene

$$\omega_o = \sqrt{\frac{K_3}{T_1 T_2}}, \quad Q = \frac{\sqrt{K_3}}{K_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \tag{316}$$

La realización circuital de este diagrama, representada en la figura 70, utiliza integradores inversores y un sumador algebraico (es decir, con coeficientes de ambos signos) implementados con amplificadores operacionales.

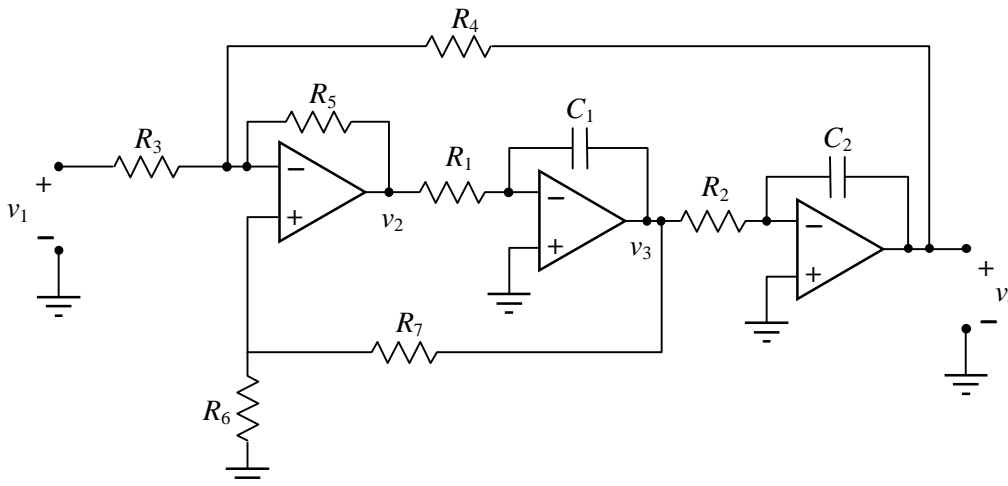
Las ecuaciones de diseño ideales son

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_4}{R_5} R_1 C_1 R_2 C_2}} \tag{317}$$

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{R_4}{R_5} R_1 C_1 R_2 C_2}}{\left(1 + \frac{R_5}{R_3 // R_4}\right) \frac{R_4}{R_5} \frac{R_6}{R_6 + R_7} R_2 C_2} \tag{318}$$

$$\frac{V_4(j0)}{V_1(j0)} = -\frac{R_4}{R_3}. \tag{319}$$

Esta configuración es inversora. También son posibles las configuraciones no inversora y diferencial.



**Figura 70.** La célula de Kerwin-Huelsman-Newcomb (KHN) para implementar funciones bicuadráticas.

Las sensibilidades de  $\omega_0$  respecto a los elementos pasivos son  $\pm 1/2$  y las de  $Q$  son todas inferiores a 1 en valor absoluto.

Si se consideran las respuestas en frecuencia de los amplificadores, se obtiene, para el caso en que  $R_1 = R_2, R_3 = R_4 = R_5$ , y  $C_1 = C_2$ ,

$$\omega_0' = \omega_0 \left( 1 - \left( 1 - \frac{2}{Q} \right) \frac{\omega_0}{GB} \right), \tag{320}$$

$$Q' = Q \left( 1 - \left( 5Q - \frac{2}{Q} \right) \frac{\omega_0}{GB} \right). \tag{321}$$

Se observa un importante incremento de  $Q'$  respecto al valor ideal cuando  $Q$  es alto. En realidad, cuando

$$Q > GB / (5\omega_0), \tag{322}$$

el circuito se vuelve inestable y oscila (la fórmula aproximada no revela este hecho pues es parte de una serie de Taylor que en ese caso diverge). Ambos efectos imponen límites en cuanto al máximo  $Q$  obtenible. En la práctica conviene mantener  $Q$  un orden de magnitud por debajo del límite de oscilación.

**Ejemplo 17:** Si se trabaja con operacionales LM741 a una frecuencia de 1 kHz, determinar el máximo  $Q$  para que el error sea menor que un 5%.

Debe ser, aproximadamente,

$$5 Q \omega_0 / GB < 0,05 ,$$

de donde

$$Q_{\text{máx}} = (0,05 / 5) (1 \text{ MHz} / 1 \text{ kHz}) = 10.$$

Puede apreciarse que la respuesta en frecuencia de los amplificadores influye más que en el caso de las células basadas en el girador de Antoniou. La ventaja de este filtro reside, como ya se apuntó, en su mayor versatilidad, ya que provee varias funciones filtrantes simultáneamente, y además son muy fáciles de ajustar. Puede ajustarse  $\omega_0$  por medio de  $R_1$  y luego ajustar  $Q$  mediante  $R_6$ .

También aquí puede aplicarse el concepto de predistorsión. Si  $\omega_0$  y  $Q$  son los valores deseados, entonces las ecuaciones de diseño serán (siempre para el caso particular analizado),

$$\frac{1}{R_1 C_1} = \omega_0 \left( 1 + \left( 1 - \frac{2}{GB} \right) \frac{\omega_0}{GB} \right), \quad (323)$$

$$\frac{R_6 + R_7}{3R_6} = Q \left( 1 + \left( 5Q - \frac{2}{Q} \right) \frac{\omega_0}{GB} \right). \quad (324)$$

Aplicando estas ecuaciones los valores realmente obtenidos serán muy próximos a los deseados. Es necesario tener en cuenta, no obstante, que el valor de  $GB$  está sujeto a una dispersión considerable, por lo cual la predistorsión sólo consigue en general morigerar el efecto de la respuesta en frecuencia, no eliminarlo. Las posteriores variaciones por derivas pueden evaluarse por medio de las sensibilidades

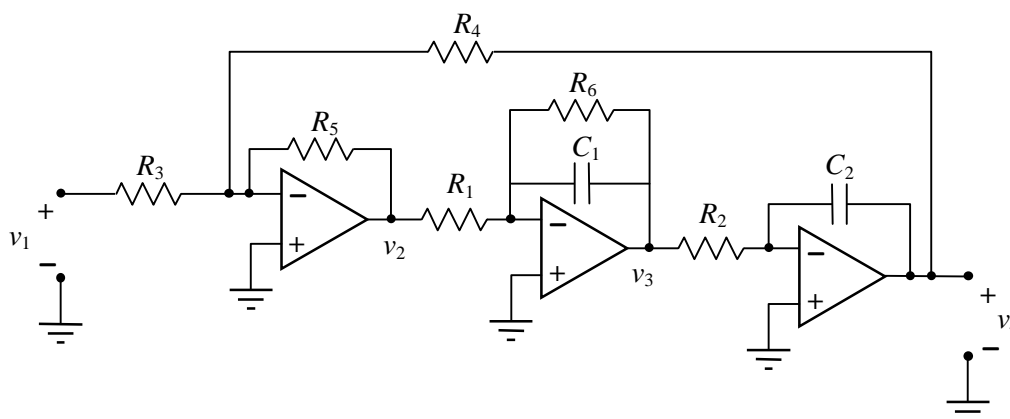
$$S_{GB}^{\omega_0'} = \left( 1 - \frac{2}{Q} \right) \frac{\omega_0}{GB}, \quad (325)$$

$$S_{GB}^{Q'} = \left( 5Q - \frac{2}{Q} \right) \frac{\omega_0}{GB}. \quad (326)$$

## a2) Célula de Tow-Thomas (TT) (1968)

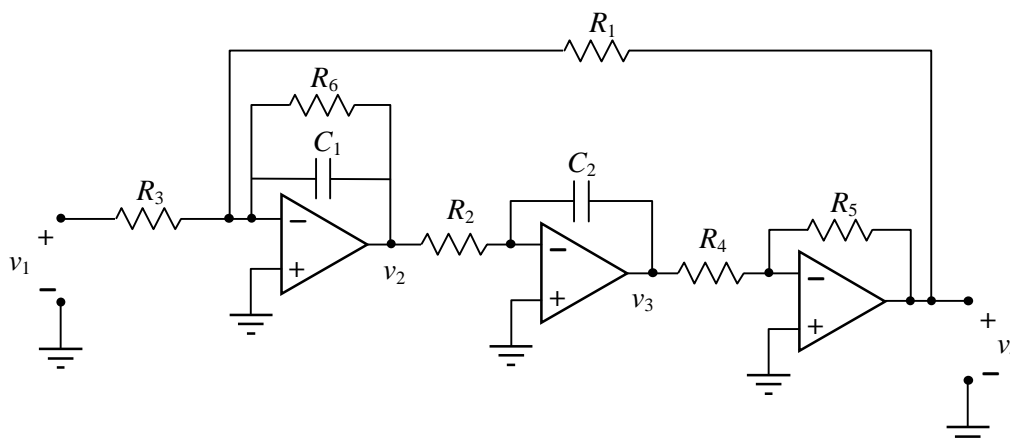
En la célula KHN se requería un sumador algebraico debido a que las dos realimentaciones se hacían mediante coeficientes de signo opuesto (lo cual no significa que alguna de las realimentaciones sea positiva). Puede simplificarse el circuito haciendo que la realimentación interna se efectúe después del inversor de entrada, aprovechando el nudo sumador de corrientes del integrador.

El circuito así modificado es el indicado en la figura 71.



**Figura 71.** La célula de Kerwin-Huelsman-Newcomb modificada para evitar el uso de un sumador algebraico.

La célula de Tow-Thomas constituye una leve redistribución del circuito anterior (figura 72).



**Figura 72.** La célula de Tow-Thomas (TT) para implementar funciones biquadráticas.

Las ecuaciones de diseño ideales son

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{\frac{R_4}{R_5} R_1 C_1 R_2 C_2}}, \tag{327}$$

$$Q = \frac{R_6}{R_1} \sqrt{\frac{R_5 R_1 C_1}{R_4 R_2 C_2}}, \tag{328}$$

$$\frac{V_4(j\omega)}{V_1(j\omega)} = -\frac{R_1}{R_3}. \tag{329}$$

Al tener todos los terminales (+) a masa se minimizan los problemas debidos al factor de rechazo y se reduce la cantidad de elementos circuitales que intervienen en la definición de  $Q$ . Por otra parte la función pasabajos se obtiene simultáneamente en forma inversora y no inversora, en  $V_4$  y en  $V_3$  respectivamente. Finalmente, el valor de  $Q$  es proporcional a una resistencia,  $R_6$ . Frente a estas ventajas, esta célula presenta la desventaja de no permitir obtener la salida pasaltos.

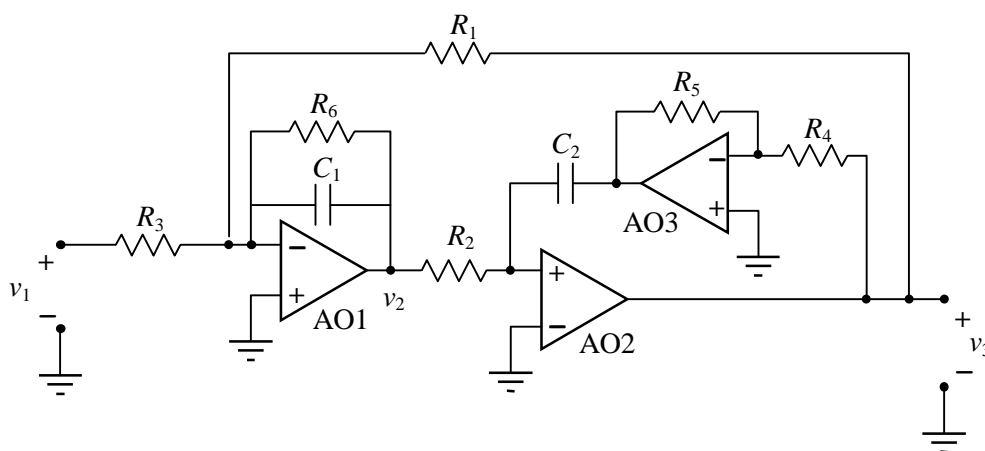
El comportamiento no ideal es parecido al del circuito KHN. Si  $R_4 = R_5$ ,  $R_1 = R_2 = R_6$  y  $C_1 = C_2$ , se tiene

$$\omega_o' = \omega_o \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\omega_o}{GB} \right), \tag{330}$$

$$Q' = Q \left( 1 + 4Q \frac{\omega_o}{GB} \right). \tag{331}$$

**a3) Célula de Akerberg-Mossberg (AM) (1974)**

En el circuito anterior, el integrador seguido por el inversor se comportaba en realidad como un integrador no inversor. Es posible mejorar el comportamiento en alta frecuencia reemplazando dicho integrador no inversor por otro que tienda a compensar los efectos del primer integrador. El circuito propuesto es el de la figura 73.



**Figura 73.** La célula de Akerberg-Mossberg (AM) para implementar funciones bicuadráticas.

Obsérvese que las entradas del A02 se han intercambiado para preservar la realimentación negativa.

Las ecuaciones de diseño ideales son idénticas a las del circuito anterior, y por lo tanto también coinciden las sensibilidades pasivas. Los valores reales, suponiendo que los amplificadores están apareados en cuanto a GB, son

$$\omega_o' = \omega_o \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{\omega_o}{GB} \right), \quad (332)$$

$$Q' = Q \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_o}{GB} \right). \quad (333)$$

Estas relaciones indican que para amplificadores apareados (lo cual es una hipótesis razonable para el caso en que están integrados en un mismo *chip*) los errores relativos no dependen del valor de  $Q$  deseado, como en los casos anteriores. Si se consideran los desajustes entre los amplificadores, se tiene

$$\omega_o' = \omega_o \left( 1 - \frac{\omega_o}{GB_2} - \frac{\omega_o}{2GB_1} \right), \quad (334)$$

$$Q' = Q \left( 1 - \frac{\omega_o}{GB_2} + \frac{\omega_o}{2GB_1} - Q \left( \frac{2\omega_o}{GB_3} - \frac{\omega_o}{GB_2} - \frac{\omega_o}{GB_1} \right) \right). \quad (335)$$

**Ejemplo 18:** Indicar el máximo error en  $Q$  que cabe esperar en un filtro AM de  $f_o = 1$  kHz y  $Q = 50$  si se utiliza un LM324, con un producto ganancia por ancho de banda de 1 MHz, y un desajuste máximo del 5% entre amplificadores dentro del chip. Comparar con la implementación de Tow-Thomas.

El peor caso se da cuando  $GB_3$  es mínimo y  $GB_1, GB_2$ , máximos:

$$GB_1 = GB_2 = (1 + h) GB,$$

$$GB_3 = (1 - h) GB,$$

donde  $h$  corresponde a un 5%. Entonces

$$\frac{\Delta Q}{Q} \cong \frac{\omega_o}{GB} \left( -\frac{1}{2} + h - \frac{h}{2} - Q(2h + h + h) \right) \cong -1\%.$$

Si en lugar de la célula AM se emplea la TT, el error será máximo cuando  $GB$  sea mínimo. Entonces:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \cong 4Q \frac{\omega_o}{GB} (1 + h) \cong 21\%.$$

El error en la frecuencia será, en ambos casos,

$$\frac{\Delta \omega_o}{\omega_o} \cong -\frac{3}{2} \frac{\omega_o}{GB} (1 + h) \cong -0,16\%.$$



En conclusión, aun admitiendo el desapareamiento entre los amplificadores, el comportamiento de la célula de Akerberg-Mossberg es superior.

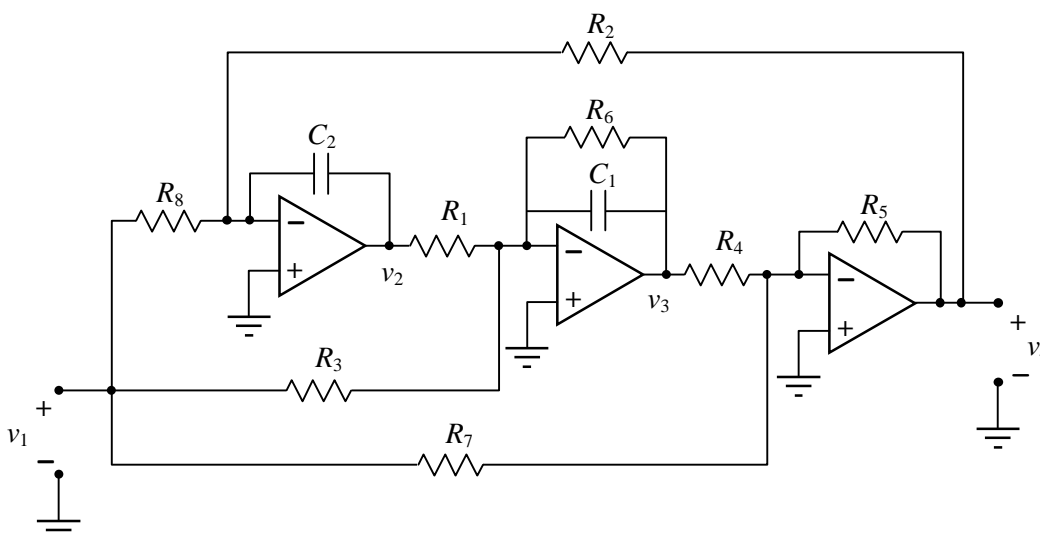
Se han desarrollado (y se siguen desarrollando) otras células que mejoran uno o varios de los parámetros considerados con respecto a las células analizadas, algunas de las cuales pueden encontrarse en la bibliografía.

**b) Células con *feedforward***

Estas células contienen ceros en el numerador producidos por medio de la técnica de *feedforward*, por lo que permiten obtener funciones pasatodo, rechazabanda, y notch. Las hay de dos tipos. En el primer tipo la señal de entrada se inyecta en las entradas de los sucesivos amplificadores, y en el segundo tipo las salidas de los amplificadores se suman en un sumador independiente, implementado con otro operacional. Veremos un ejemplo de cada tipo, derivados de las células ya estudiadas.

**bl) Célula general de Tow-Thomas**

Se obtiene reordenando el circuito TT original y agregando caminos de *feedforward* desde la entrada a la célula básica (figura 74).



**Figura 74.** La célula general de Tow-Thomas (TT), que incluye caminos *feedforward* para implementar ceros.

La función de transferencia ideal es

$$\frac{V_4}{V_1} = -\frac{R_2}{R_8} \frac{1 + \left( \frac{R_4 R_1}{R_7 R_6} - \frac{R_1}{R_3} \right) R_8 C_2 s + \frac{R_4}{R_7} R_1 C_1 R_8 C_2 s^2}{1 + \frac{R_4}{R_5} \frac{R_1}{R_6} R_2 C_2 s + \frac{R_4}{R_5} R_1 C_1 R_2 C_2 s^2} \tag{336}$$

En la tabla 4 se indican las condiciones de diseño adicionales para obtener diversas funciones. Los parámetros del denominador se diseñan igual que en la célula básica.

**Tabla 4.** Condiciones de diseño de la célula general de Tow-Thomas para obtener diferentes funciones bicuadráticas

PB <sub>n</sub>	$R_7 = \infty$	$R_8 = \infty$
PA	$R_3 = R_1 R_4 / R_7$	$R_8 < R_2 R_7 / R_5$
PBN		$R_8 > R_2 R_7 / R_5$
PAN		$R_8 = R_2 R_7 / R_5$
RB <sub>n</sub>		
PT	$R_3 = 2R_1 R_4 / R_7$	

**Ejemplo 19:** Diseñar una célula pasabajos notch con el circuito general de Tow-Thomas. Debe ser  $H(j0) = 1$ ,  $f_0 = 1$  kHz,  $Q = 10$ , y  $f_{\text{Notch}} = 2$  kHz.

Las ecuaciones de diseño aplicables son

$$R_1 C_1 R_2 C_2 R_4 / R_5 = 1/\omega_0^2,$$

$$R_1 C_1 R_8 C_2 R_4 / R_7 = 1/\omega_{\text{Notch}}^2,$$

$$\frac{R_6}{R_1} \sqrt{\frac{R_5 R_1 C_1}{R_4 R_2 C_2}} = Q,$$

$$R_2 = R_8,$$

$$R_3 = R_1 R_4 / R_7.$$

Dado que hay diez componentes a elegir y sólo cinco ecuaciones, podemos proponer otras cuatro ecuaciones y adoptar uno de los componentes.

Así, tomaremos  $R_1 = R_2 = R_4 = R_5$ ,  $C_1 = C_2$ , y  $R_1 = 10,0$  k $\Omega$ . Entonces resulta, de las dos primeras ecuaciones, que

$$R_7 = R_5 \frac{\omega_{\text{Notch}}^2}{\omega_0^2} = 40,0 \text{ k}\Omega.$$

De la primera,

$$C_1 = 1 / (R_1 \omega_0) = 15,9 \text{ nF};$$

de la tercera,

$$R_6 = Q R_1 = 100 \text{ k}\Omega;$$

de la cuarta,

$$R_8 = 10,0 \text{ k}\Omega;$$

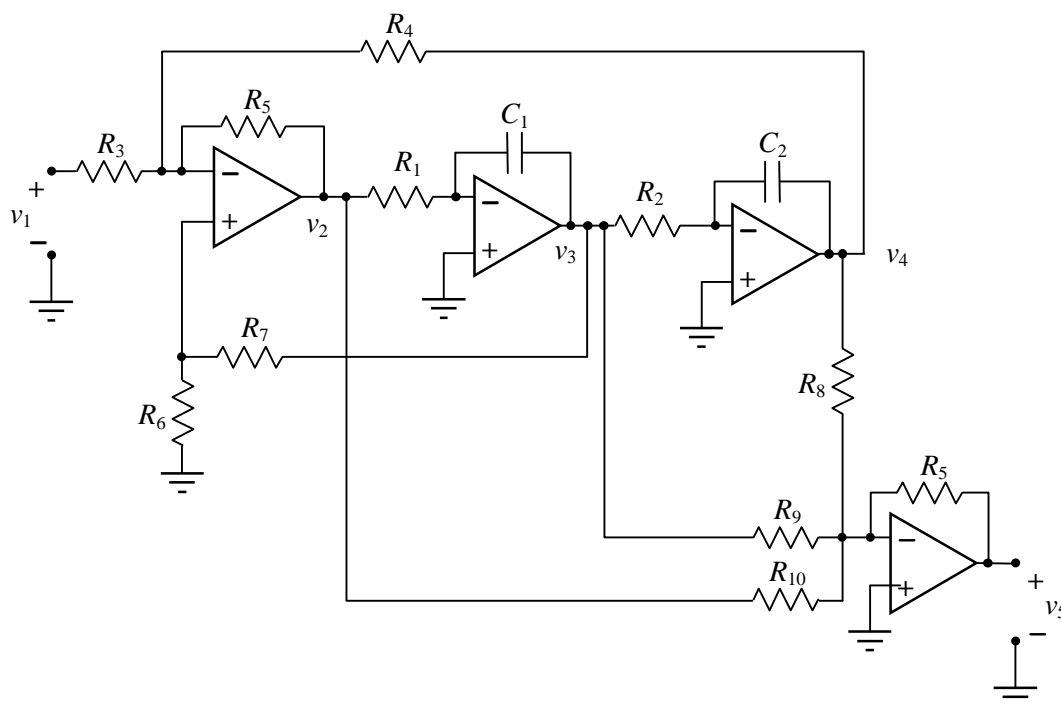
y de la última,

$$R_3 = 2,50 \text{ k}\Omega,$$

con lo cual quedan elegidos todos los componentes.

### b2) Célula general de Kerwin-Huelsman-Newcomb

Se obtiene sumando las tres salidas de la célula básica KHN, como se muestra en la figura 75.



**Figura 75.** La célula general de Kerwin-Huelsman-Newcomb obtenida mediante una suma ponderada de las tres salidas del circuito original.

La función de transferencia ideal es

$$\frac{V_5}{V_1} = \frac{R_4 R_{11}}{R_3 R_8} \frac{1 - \frac{R_8}{R_9} R_2 C_2 s + \frac{R_8}{R_{10}} R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}{1 + \frac{1}{Q} \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}}, \quad (337)$$

donde  $\omega_0$  y  $Q$  son los correspondientes al circuito básico KHN. Puede observarse que el término en  $s$  del numerador desaparece por la simple eliminación de  $R_9$ , lo cual evita la necesidad de ajustados apareamientos para lograr ceros sobre el eje imaginario, como en los circuitos rechazabanda y *notch*. Esta ventaja se debe al amplificador agregado.

Existen circuitos integrados que permiten realizar las células KHN, como el AF100, que proveen, inclusive, el amplificador operacional adicional para realizar células con *feedforward*.

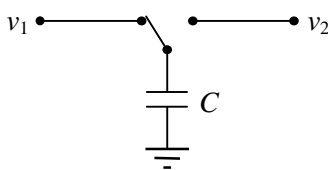
Las condiciones adicionales de diseño se muestran en la tabla que sigue.

**Tabla 5.** Condiciones de diseño de la célula general de Kerwin-Huelsman-Newomb para obtener diferentes funciones bicuadráticas

PB <sub>n</sub>	$R_{10} = \infty$	$R_8 = \infty$
PA	$R_9 = 0$	
PBN		$R_8/R_{10} < R_4/R_5$
PAN		$R_8/R_{10} > R_4/R_5$
RB <sub>n</sub>		
PT	$\frac{R_8}{R_9} = \left(1 + \frac{R_5}{R_3 // R_4}\right) \frac{R_4}{R_5} \frac{R_6}{R_6 + R_7}$	$R_8/R_{10} = R_4/R_5$

### 7.2.2.4 Filtros a capacitores conmutados

Una de las principales limitaciones tecnológicas para lograr filtros activos monolíticos reside en la dificultad para integrar capacitores de un valor muy preciso. Sí es posible, en cambio, integrar pares de capacitores con una relación de capacidades muy precisa. Podría lograrse un integrador monolítico de precisión si pudiera reemplazarse la resistencia de un integrador por alguna estructura basada en un capacitor. Esta es la idea que da origen a los filtros de capacitores conmutados.



**Figura 76.** Un capacitor conmutado.

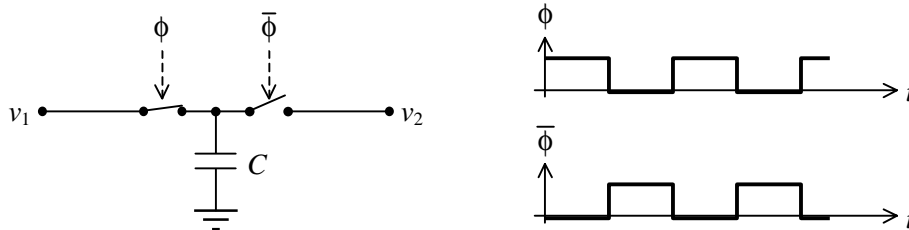
Consideremos el circuito indicado en la figura 76. Cuando la llave se halla conectada con  $v_1$ , la carga acumulada en el capacitor (luego de un tiempo suficiente) es:

$$q_1 = C v_1. \tag{338}$$

Cuando la llave conecta con  $v_2$ , la nueva carga acumulada es:

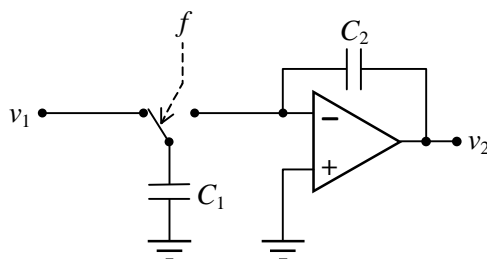
$$q_2 = C v_2. \tag{339}$$





**Figura 79.** Implementación del capacitor conmutado mediante dos llaves C-MOS controladas con fases opuestas de un reloj.

Este principio puede utilizarse para realizar un integrador, para lo cual la resistencia se sustituye por un capacitor conmutado. El capacitor restante, colocado en la realimentación, actuará como integrador de corriente (figura 80).



**Figura 80.** Integrador a capacitor conmutado.

Resulta:

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{1}{RC_2s} = -\frac{f C_1}{C_2s} \tag{343}$$

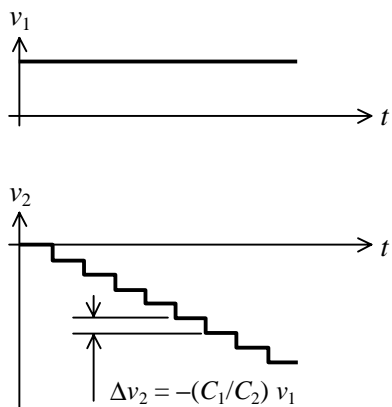
o bien

$$v_2(t) = -f \frac{C_1}{C_2} \int_0^t v_1(t) dt . \tag{344}$$

La precisión del integrador depende de la precisión y estabilidad de la frecuencia de conmutación  $f$  y de la precisión de  $C_1/C_2$ . Como se dijo anteriormente, si bien sus valores están sujetos a tolerancias, su relación es mucho más estable, y lo que es más importante aún, independiente de la temperatura, ya que las derivas térmicas de ambos capacitores son iguales.

Mientras  $v_1$  varía en forma continua, la corriente que recibe  $C_2$  es una serie de pulsos, por lo cual la salida evoluciona escalonadamente (figura 81). Calculemos cuánto vale dicho salto  $\Delta v_2$  en cada ciclo de reloj si la entrada vale  $v_1$ . Para ello

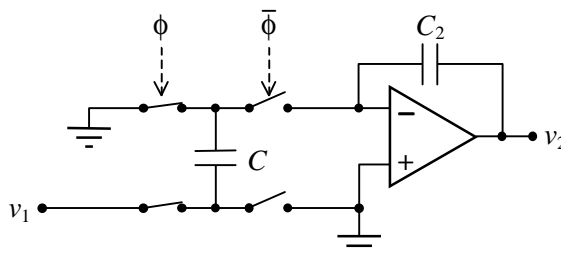
$$\Delta v_2 = \frac{\Delta q_2}{C_2} = -\frac{\Delta q_2}{C_2} = -\frac{C_1}{C_2} v_1 . \tag{345}$$



**Figura 81.** Evolución escalonada de la tensión de salida del integrador a capacitor conmutado.

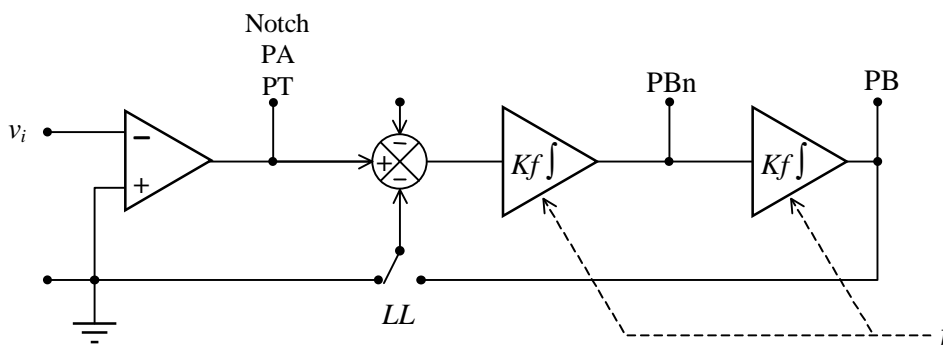
De modo que si se desea que el salto sea despreciable debe tomarse  $C_1 \ll C_2$ , lo cual según veremos luego significará que la frecuencia de reloj debe ser mucho mayor que la máxima frecuencia útil.

En la práctica, el circuito de la figura 80 se modifica como se muestra en la figura 82, para permitir obtener integradores no inversores.



**Figura 82.** Configuración para lograr un integrador no inversor a capacitor conmutado.

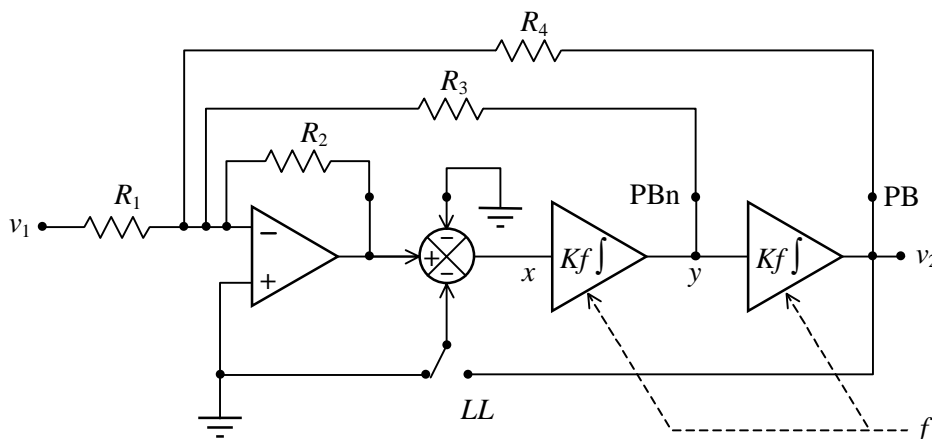
Una vez que se dispone de integradores a capacitores conmutados puede lograrse un filtro utilizando el concepto de filtros de variable de estado. Un ejemplo es el circuito comercial MF10, cuya estructura interna se muestra en la figura 83 Tiene dos secciones iguales, cada una de las cuales permite realizar una célula de segundo orden.



**Figura 83.** Estructura interna de un filtro a capacitores conmutados MF10 (una de las dos secciones integradas en el mismo chip).

Los triángulos indicados con  $Kf \int$  simbolizan un integrador no inversor. La llave  $LL$  se comanda desde una entrada lógica posibilitando diferentes conexiones, lo que proporciona mayor versatilidad al dispositivo. La constante  $K$  puede valer  $2\pi/100$  ó  $2\pi/50$  según el nivel lógico aplicado a otra de las entradas.

Conectando externamente algunas resistencias en diversas topologías es posible obtener una variedad de filtros, abarcando todas las funciones de segundo orden. El fabricante llama *modos* a estas topologías. Como ejemplo, en la figura 84 se muestra una de ellas, designada como *modo 3*.



**Figura 84.** Ejemplo de conexión de un filtro de capacitores conmutados MF10 para obtener funciones bicuadráticas pasabajos y pasabanda (modo 3).

Se tiene

$$x = -\frac{R_2}{R_1} v_1 - \frac{R_2}{R_3} y - \frac{R_2}{R_4} v_2.$$

Reemplazando y por la derivada de  $v_2$  y  $x$  por su doble derivada y transformando Laplace, resulta

$$\left(\frac{s}{Kf}\right)^2 v_2 = -\frac{R_2}{R_1} v_1 - \frac{R_2}{R_3} \frac{s}{Kf} v_2 - \frac{R_2}{R_4} v_2,$$

de donde

$$\frac{v_2}{v_1} = -\frac{R_4}{R_1} \frac{1}{1 + \frac{R_4}{R_3} \frac{s}{Kf} + \frac{R_4}{R_2} \left(\frac{s}{Kf}\right)^2}. \tag{346}$$

De modo que con  $R_2/R_4$  se puede definir la frecuencia de corte y luego, con  $R_3$ , y en forma independiente, establecer  $Q$ . Por ejemplo, si  $R_2 = R_4$ ,



$$\omega_0 = Kf, \quad (347)$$

$$Q = R_3/R_2. \quad (348)$$

Aquí  $f_0$  es una fracción de  $f$  y  $Q$  puede variarse con sólo  $R_3$ . Como puede observarse,

$$f_0 \ll f. \quad (349)$$

Una razón por la cual se adopta una frecuencia tan alta para la conmutación es la efectiva reducción de los escalones en la tensión de salida, ya que éstos se comportan como un ruido cuya magnitud debe minimizarse. La otra razón es que un filtro a capacitores conmutados es, conceptualmente, un sistema muestreado, y la frecuencia de muestreo es igual a la frecuencia de conmutación, por lo cual es preciso que

$$f > 2f_{m\acute{a}x}, \quad (350)$$

donde  $f_{m\acute{a}x}$  es la máxima frecuencia presente en la señal. En casi todos los casos es probable que el contenido espectral de entrada sea bastante más extenso que la frecuencia natural  $f_0$  de la célula, de allí la necesidad de la condición (349). En muchos casos es necesario colocar un filtro pasivo (o inclusive activo) antes del propio filtro de capacitores conmutados para limitar el contenido de alta frecuencia.

### 7.2.3. Ajuste de las células de segundo orden

Las expresiones obtenidas para  $\omega_0$  y  $Q$  en las diversas células estudiadas harían suponer que los componentes pasivos pueden elegirse de modo de obtener exactamente los valores de  $\omega_0$  y  $Q$  requeridos. En la práctica, sin embargo, varios motivos conducen a que no sea así: 1) hay limitaciones en cuanto a los valores disponibles comercialmente; 2) suelen ser importantes las derivas con la temperatura, el tiempo u otros factores, así como las dispersiones (tolerancias), resultando valores diferentes de los nominales; 3) los parámetros activos también están sujetos a fuertes derivas y dispersiones, e influyen en los valores de  $\omega_0$  y  $Q$  finalmente obtenidos.

En los casos en que las sensibilidades sean altas (lo cual suele ocurrir, como vimos, si  $Q$  es elevado) se hace necesario sustituir los componentes fijos por otros ajustables. Esta solución es más económica, generalmente, que utilizar componentes de alta precisión, con muy bajas derivas y dispersiones, y permite además realizar ajustes periódicos (mantenimiento) si es necesario.

Una vez que se decide emplear componentes ajustables (por ejemplo *presets* o *trimmers*), se debe establecer una estrategia de ajuste. Los ajustes se clasifican en *iterativos* y *no iterativos*. En los no iterativos es posible ajustar  $\omega_0$  mediante algún componente, y luego, por medio de otro componente, ajustar  $Q$ , manteniendo invariable el  $\omega_0$  previamente ajustado.

En los ajustes iterativos, en cambio, no es posible un control independiente de  $\omega_0$  y  $Q$ , ya que ambos dependen de todos los componentes ajustables. En consecuencia, el par  $(\omega_0, Q)$  deseado se logra a través de un proceso iterativo de aproximaciones sucesivas. Cuanto más rápidamente convergente sea este proceso, más eficiente será el ajuste (un ajuste no iterativo podría interpretarse como un ajuste iterativo que converge en sólo dos pasos). Esto repercute favorablemente en el costo de producción o de mantenimiento.

Para realizar los ajustes, por lo general se eligen dos componentes ajustables  $a$  y  $b$ , y se van ajustando alternativamente, buscando en cada paso cumplir con un objetivo parcial dado por la estrategia adoptada. Es interesante enfocar el problema en el plano  $\omega_0$ - $Q$ , trazando las curvas de  $a$  y  $b$  constantes. Dado que  $\omega_0$  y  $Q$  son funciones de  $a$  y  $b$ ,

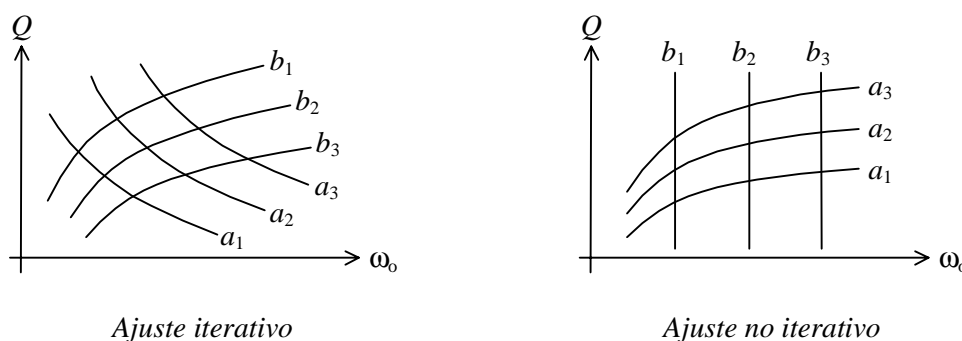
$$Q = g(a, b), \tag{351}$$

$$\omega_0 = h(a, b). \tag{352}$$

si  $a = \text{cte}$  resultan funciones de  $b$  solamente. Eliminando esta variable resulta

$$Q = f_a(\omega_0). \tag{353}$$

Esto representa una familia de curvas, una para cada valor de  $a$ . Análogamente, para cada valor de  $b$  queda definida una curva. En la figura 85 se muestran ejemplos de estas curvas para ajustes iterativo y no iterativo.



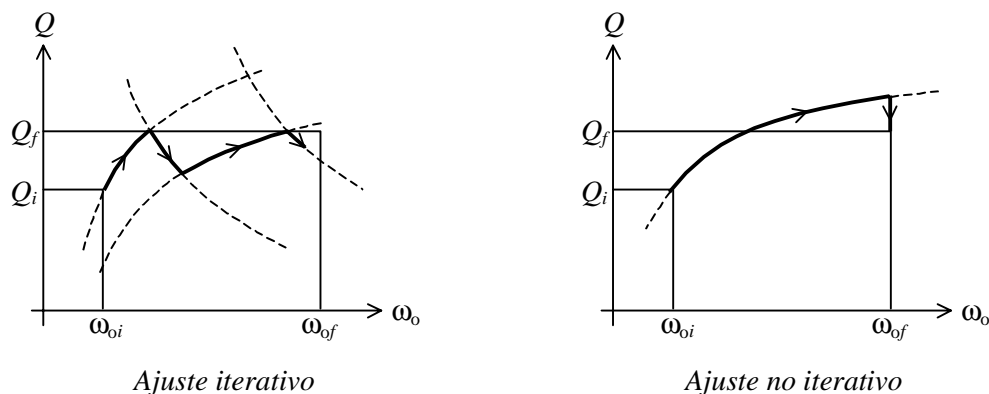
**Figura 85.** Familias de curvas  $\omega_0$ - $Q$  obtenidas fijando un valor para el parámetro  $a$  y variando el parámetro  $b$  y viceversa. Se muestran dos ejemplos que permiten ajustes iterativo y no iterativo.

En los ajustes no iterativos al menos una de las familias de curvas es paralela a uno de los ejes (en general al eje  $Q$ ). Cuando la pendiente de una de las familias respecto a un eje es pequeña, el ajuste se llama *cuasi iterativo*, ya que converge muy rápido.

En la figura 86 se muestra el procedimiento de ajuste ejemplificado para los casos iterativo y no iterativo, partiendo de valores iniciales  $\omega_{0i}$ ,  $Q_i$ , para llegar a  $\omega_{0f}$ ,  $Q_f$ .

La estrategia o procedimiento de ajuste consiste generalmente en emplear una de las variables de ajuste para alcanzar  $Q_f$  y la otra para reducir en alguna proporción la diferencia entre el valor de  $\omega_0$  y  $\omega_{0f}$ . Repitiendo alternativamente estos pasos, se logra acercarse tanto como se desee al valor  $(\omega_{0f}, Q_f)$ .

Para el ajuste de  $\omega_0$  y  $Q$  es necesario poder medirlos, lo cual se consigue recurriendo a las interpretaciones de dichos parámetros para cada función bicuadrática. Por ejemplo, para la función pasabajos  $Q$  corresponde aproximadamente al cociente entre el pico de resonancia y el valor en continua, y  $\omega_0$  es aproximadamente la frecuencia de resonancia. Si se requiere mayor precisión se pueden calcular los valores exactos de la frecuencia de resonancia y el valor del pico de resonancia correspondientes a los  $\omega_0$  y  $Q$  requeridos.



**Figura 86.** Ejemplos de trayectorias de los ajustes iterativo y no iterativo. En el caso no iterativo se alcanza el objetivo en dos pasos. El error residual está acotado por el margen de error en la determinación experimental de  $Q$  y  $\omega_0$ .

En muchos casos, además de ajustar  $\omega_0$  y  $Q$  se debe ajustar la ganancia a determinada frecuencia (por ejemplo la de resonancia) o en determinada banda (banda de paso). Si no es posible independizar  $\omega_0$  y  $Q$  de este ajuste, el problema puede resultar bastante complejo, ya que requiere un sistema tridimensional. En la mayoría de los casos, el ajuste de la ganancia no es tan crítico como el de  $\omega_0$  y  $Q$ , ya que se puede compensar en otra célula.

**Ejemplo 20:** Dar un procedimiento de ajuste para el pasabanda con un amplificador operacional y realimentación negativa ( $b3$ ).

Supondremos que  $Q$  es elevado, ya que de lo contrario no se justificaría emplear elementos ajustables, dado que las sensibilidades no son tan altas. Entonces, de acuerdo a los resultados obtenidos oportunamente,

$$R_3 \ll R_1, \tag{354}$$

de donde

$$1 + R_1/R_3 \cong R_1/R_3; \tag{355}$$

por lo tanto

$$\omega_0 \cong \frac{1}{\sqrt{R_2 R_3 C_1 C_2}}, \tag{356}$$

$$Q \cong \sqrt{\frac{R_2}{R_3} \frac{\sqrt{C_1 C_2}}{C_1 + C_2}}. \tag{357}$$

- Se observa: 1)  $\omega_0$  y  $Q$  no dependen, casi, de  $R_1$ .  
 2) Un aumento simultáneo de  $R_2$  y  $R_3$  reduce  $\omega_0$  sin alterar  $Q$  significativamente.

Convendrá, entonces, emplear  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  variables. Con  $R_2$  y  $R_3$  se ajustarán  $\omega_0$  y  $Q$ , y luego con  $R_1$  se fijará la ganancia a la frecuencia central.

Para completar el procedimiento, tengamos en cuenta que las curvas de  $R_2$  constante son rectas pasantes por el origen, en las cuales se cumple

$$Q / \omega_0 = \text{constante}, \tag{358}$$

y las curvas de  $R_3$  son hipérbolas, donde

$$Q \omega_0 = \text{constante}. \tag{359}$$

Esto se ilustra en la figura 87. El procedimiento de ajuste propuesto es el que sigue.

**Primer paso:** Partiendo de  $(\omega_{oi}, Q_i)$ , variar  $R_3$  hasta que  $Q = Q_f$ . Resulta

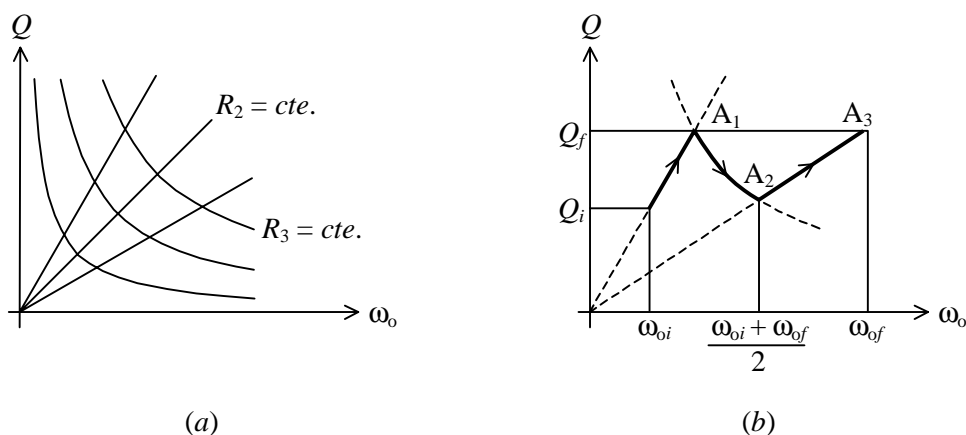
$$A_1: (\omega_{o1}, Q_1) = \left( \frac{\omega_{oi} Q_f}{Q_i}, Q_f \right) \tag{360a}$$

**Segundo paso:** Variar  $R_2$  hasta que  $\omega_0 = (\omega_{o1} + \omega_{of}) / 2$ . Se obtiene

$$A_2: (\omega_{o2}, Q_2) = \left( \frac{\omega_{o1} + \omega_{of}}{2}, \frac{2\omega_{o1}}{\omega_{o1} + \omega_{of}} Q_f \right) \tag{360b}$$

**Tercer paso:** Variar  $R_3$  hasta que  $Q = Q_f$ . Se llega a

$$A_3: (\omega_{o3}, Q_3) = \left( \frac{(\omega_{o1} + \omega_{of})^2}{4\omega_{o1}}, Q_f \right) \tag{360c}$$



**Figura 87.** (a) Curvas  $\omega_0$ - $Q$  para el filtro pasabanda con un amplificador operacional realimentado negativamente. (b) La estrategia de ajuste propuesta, cuya convergencia es muy rápida.

Los pasos subsiguientes son una repetición alternativa de los pasos 2 y 3. Puede verificarse que el procedimiento converge, observando que

$$\left| \omega_{o(k+2)} - \omega_{of} \right| = \frac{(\omega_{ok} - \omega_{of})^2}{4 \omega_{ok}} < K \left| \omega_{ok} - \omega_{of} \right|, \quad (361)$$

donde  $K < 1$ . La convergencia es muy rápida, ya que cuanto más se acerca  $\omega_{ok}$  a  $\omega_{of}$  menor es  $K$ . En otras palabras, la convergencia es todavía más rápida que si se tratara de una exponencial. Por ejemplo si el error después del primer paso es del 10%, dos pasos después el error será del 0,25%, y luego de otros dos pasos, 0,0002%, es decir 2 ppm.

## Referencias

- Bildstein, P.: "Filtros Activos". Ed. Paraninfo. 1986  
 Ghauri, M. S., Laker, K. R.: "Modern Filter Design". Ed. Prentice Hall.  
 Javid, M., Brenner, E.: "Analysis, Transmission and Filtering of Signal's" (Ed. Mc Graw Hill).  
 National Semiconductor. "Audio Radio Handbook". 1980  
 National Semiconductor. "Linear Application Handbook". 1995  
 Peri, E., Munich, M.: "Problemas resueltos sobre filtros activos". Publicación interna de la Cátedra.  
 Sedra, A., Brackett, P.: "Filter Theory and Design: Active and Passive". Ed. Matrix.  
 Themes, G., Mitra, S.: "Modern Filters: Theory and Design". Ed. Wiley.