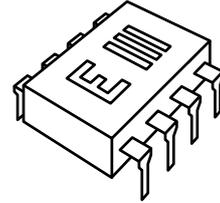




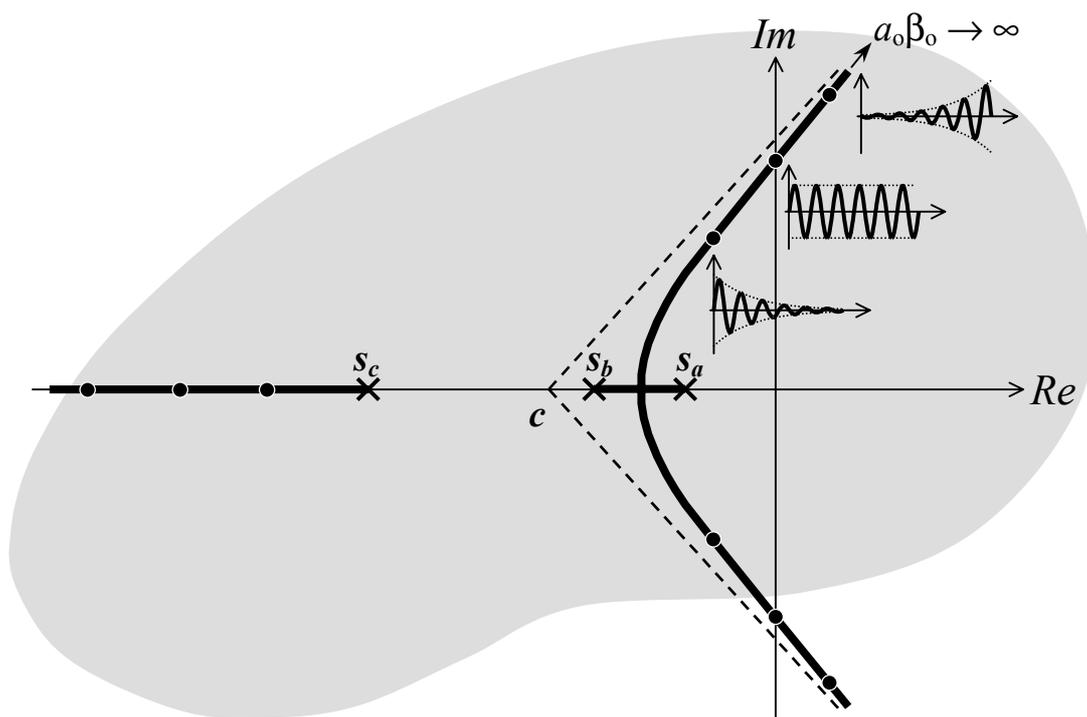
Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ingeniería Electrónica
Departamento de Electrónica



ELECTRÓNICA III

ESTABILIDAD DE AMPLIFICADORES REALIMENTADOS

Federico Miyara



Segunda Edición - 2005

B02.01

Código interno de publicación: B02.01
Primera edición: 1987
Digitalización 2002: Silvia Saavedra
Segunda edición corregida y ampliada: 2005
Publicado en Internet
Rosario, Argentina
Año 2005
<http://www.fceia.unr.edu.ar/enica3/estab.pdf>

ESTABILIDAD DE AMPLIFICADORES REALIMENTADOS

1. Introducción

Se vio que la realimentación aporta considerables beneficios en los amplificadores, como ser la modificación e insensibilización de la ganancia y los niveles de impedancia de entrada y salida, la reducción de las no linealidades, el mejoramiento de la respuesta frecuencial, etc. A estas ventajas se contraponen el hecho de que los sistemas realimentados son propensos a la inestabilidad, especialmente cuando la cantidad de realimentación necesaria para obtener la mejora deseada es grande.

Por este motivo es muy importante estudiar la estabilidad y los procedimientos para lograrla. Además las conclusiones que se obtengan serán de aplicación en el estudio otros temas vinculados, como Osciladores y Filtros Activos.

Definición: Un sistema se dice que es *estable* si cuando se lo separa de su estado de reposo por una acción de corta duración, después de un tiempo retorna a dicho estado de reposo y permanece en él.

Entendemos por *retorno al estado de reposo* al hecho de que la diferencia con respecto a dicho estado pueda hacerse arbitrariamente pequeña, en particular menor que el error de medición.

En las próximas secciones analizaremos dos métodos para estudiar el problema de la estabilidad en el caso de sistemas lineales: el de la ecuación diferencial en el dominio temporal y el de la transformada de Laplace.

2. Método de la ecuación diferencial

Un sistema lineal puede describirse a través de un sistema de ecuaciones diferenciales como el siguiente:

$$X(t) = A X(t) + F(t), \quad (1)$$

donde X : vector de estado del sistema
 A : matriz del sistema
 F : vector de excitación.

La solución es de la forma:

$$X(t) = X_H(t) + X_p(t), \quad (2)$$

donde X_H : solución de la ecuación homogénea asociada (con $F = 0$)
 X_p : solución particular de la ecuación no homogénea que no tiene en cuenta las condiciones iniciales.

La X_H tiene por componentes sumas de exponenciales (o a lo sumo exponenciales multiplicadas por polinomios), es decir:

$$X_{Hi} = a_{i1} e^{s_1 t} + \dots + a_{in} e^{s_n t}. \quad (3)$$

Dichos sumandos se llaman *modos naturales* del sistema, ya que no dependen del vector de excitación $F(t)$. Cuando s_k es complejo, aparece junto a su par conjugado, y los términos correspondientes se suman, dando:

$$x_{H ik}(t) = a_{ik} e^{\sigma_k t} \text{sen}(\omega_k t + \phi_k). \quad (4)$$

La estabilidad podría analizarse examinando la solución de la ecuación homogénea asociada y viendo si conduce a un *régimen transitorio*, es decir, que se extingue rápidamente, o por el contrario, crece o mantiene su amplitud. La desventaja de este método consiste en que requiere resolver el sistema de ecuaciones y obtener la expresión explícita de la solución homogénea, cuando lo que realmente importa es el hecho cualitativo de la presencia de exponenciales crecientes o decrecientes.

3. Método de la Transformada de Laplace

Este método consiste en transformar según Laplace las ecuaciones diferenciales del sistema. Analizaremos el caso más común en amplificadores, en donde hay una sola entrada $e(t)$ y una sola salida $r(t)$. En este caso, el sistema de ecuaciones diferenciales se reduce a una sola ecuación. Transformándola se obtiene:

$$R(s) = H(s) E(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} E(s) \quad (5)$$

Aquí $H(s)$ es la función de transferencia del sistema. $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios y $E(s)$ es normalmente una función racional (pues $e(t)$ es una combinación de senoides, exponenciales y polinomios), es decir

$$E(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (6)$$

de donde

$$R(s) = \frac{P(s) N(s)}{Q(s) D(s)}. \quad (7)$$

Suponiendo que todos los polos son de primer orden, se tiene:

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{P(s) N(s)}{(s - q_1) \dots (s - q_n) (s - d_1) \dots (s - d_m)} = \\ &= \underbrace{\frac{A_1}{s - q_1} + \dots + \frac{A_n}{s - q_n}}_{\text{respuesta libre o natural}} + \underbrace{\frac{B_1}{s - d_1} + \dots + \frac{B_m}{s - d_m}}_{\text{respuesta forzada}} \end{aligned} \quad (8)$$

En la respuesta libre sólo los coeficientes dependen de la entrada, no así los polos, que provienen de la función de transferencia $H(s)$ del sistema. En la respuesta forzada, en cambio, tanto los coeficientes como los polos dependen de la función de entrada.

Una observación de *extrema importancia* es que *en el caso de sistemas lineales* como los que estamos estudiando, *la estabilidad no depende de la entrada* del sistema (esto puede no ser válido para sistemas no lineales), precisamente porque la respuesta libre es cualitativamente independiente de la excitación.

Aplicando la Transformación Inversa de Laplace a la respuesta libre, se tiene:

$$r_h(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{q_i t} \tag{9}$$

donde los $q_i = \sigma_i + j\omega_i$ son los polos de $H(s)$. Si q_i es real, el modo natural resultante es $A_i e^{\sigma_i t}$ y se tiene, por lo tanto, una de las evoluciones de la figura 1.

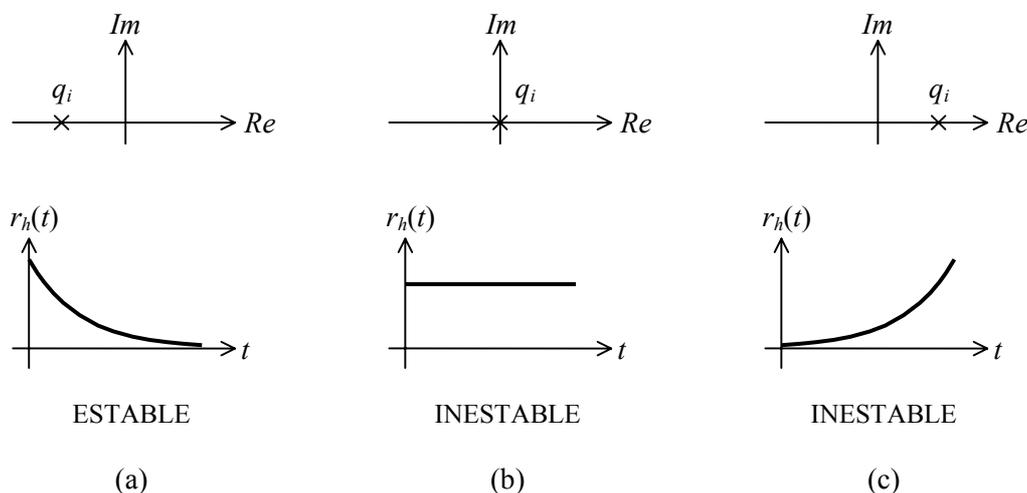


Figura 1. Ubicación de un polo real y su correspondiente respuesta transitoria para los casos (a) $q_i < 0$ (estable), (b) $q_i = 0$ (inestable) y (c) $q_i > 0$ (inestable).

Si $q_i = \sigma_i + j\omega_i$, siempre está acompañado por su conjugado¹ $q_i^* = \sigma_i - j\omega_i$ y, además el coeficiente correspondiente al conjugado es también conjugado del coeficiente del término original, es decir A_i^* . En ese caso

$$\begin{aligned} & A_i e^{(\sigma_i + j\omega_i)t} + A_i^* e^{(\sigma_i - j\omega_i)t} = \\ & = e^{\sigma_i t} \left(A_i e^{j\omega_i t} + A_i^* e^{-j\omega_i t} \right) = \\ & = 2 |A_i| e^{\sigma_i t} \text{sen}(\omega_i t + \varphi_i) \end{aligned} \tag{10}$$

¹ Para simplificar la notación, utilizamos un mismo subíndice i para el polo original y su conjugado.

Dicha respuesta se ha representado gráficamente en la figura 2 para $\sigma_i < 0$, $\sigma_i = 0$ y $\sigma_i > 0$.

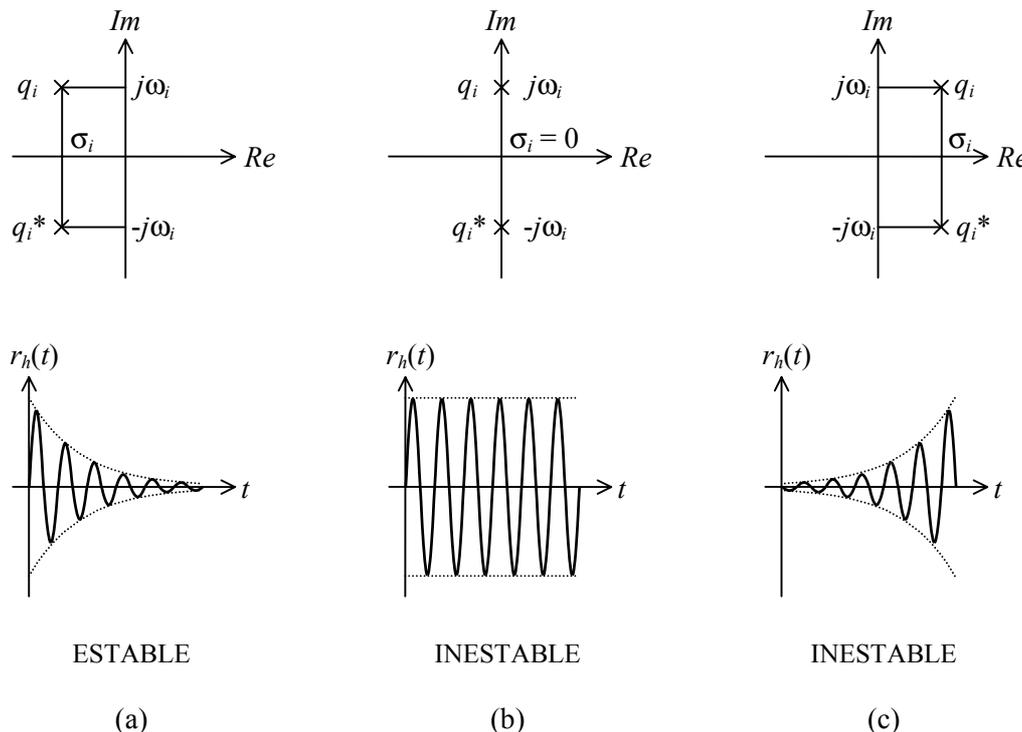


Figura 2. Ubicación de un par de polos complejos conjugados y su correspondiente respuesta transitoria para los casos (a) $\sigma_i < 0$ (estable), (b) $\sigma_i = 0$ (inestable) y (c) $\sigma_i > 0$ (inestable).

Resulta así que del examen de la posición de los polos de la función de transferencia del sistema puede deducirse si éste es o no estable. Si tiene polos con parte real positiva o nula, será inestable. Si, en cambio, todos los polos tienen parte real negativa, será estable.

Pero la sola estabilidad de un sistema no garantiza que el mismo esté exento de problemas, ya que el régimen transitorio, a pesar de terminar extinguiéndose, puede hacerlo con lentitud, o puede contener sobrepicos perjudiciales para la aplicación que se le va a dar. Del análisis de los polos también pueden extraerse conclusiones respecto a la calidad de la respuesta, conocida como *estabilidad relativa*. Por ejemplo, si la parte real de los polos es negativa pero de pequeño valor absoluto, el transitorio tardará mucho tiempo en extinguirse.

4. Estabilidad de amplificadores realimentados

Dado que, como se indicó en la Introducción, nuestro objetivo es el estudio de la estabilidad particularizada al caso de amplificadores realimentados, se nos plantea ahora el siguiente problema: dada una función de transferencia $a(s)$ y una realimentación $\beta(s)$, ambas con polos conocidos, estudiar la estabilidad del sistema realimentado:

$$H(s) = \frac{a(s)}{1 + a(s)\beta(s)}$$

Existen tres metodologías aplicables a este tipo de sistemas:

- a) El *criterio de Nyquist*;
- b) El trazado del *lugar de las raíces*, que brinda la ubicación aproximada de los polos al variar la intensidad de la realimentación, o la variante del contorno de las raíces, al modificar otros parámetros;
- c) La determinación de la *ubicación precisa de los polos y ceros* del sistema realimentado.

4.1. Criterio de Nyquist

Se basa en un teorema de Análisis en Variable Compleja conocido como *Principio del Argumento*:

Principio del Argumento: Si $F(z)$ es una función analítica y C es un contorno en el plano complejo que encierra Z ceros y P polos de F , entonces el contorno $C' = F(C)$ (transformado de C a través de F) circunda al origen N veces, donde

$$N = Z - P. \tag{11}$$

En la figura 3 se ilustra un caso particular de este teorema.

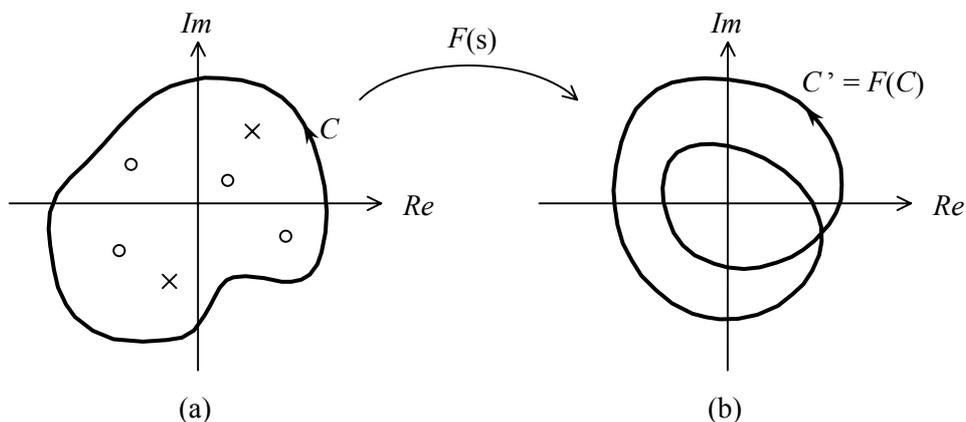


Figura 3. Ejemplo del Principio del Argumento. (a) Una curva C que encierra 4 ceros (indicados con círculos) y 2 polos (indicados con cruces) de la función analítica $F(s)$. (b) La curva C' transformada por $F(s)$ rodea $4 - 2 = 2$ veces al origen.

Dada la función de transferencia $H(s) = a(s) / (1 + a(s)\beta(s))$ del sistema realimentado, sus polos serán los ceros de su denominador $1 + a(s)\beta(s)$. Los polos de su numerador $a(s)$, que potencialmente también podrían agregarse, se cancelarán en reali-

dad con los polos $1 + a(s)\beta(s)$, ya que coinciden con éstos (salvo si $\beta(s)$ tuviera ceros coincidentes con polos de $a(s)$, caso que veremos después).²

En conclusión, la estabilidad de $H(s)$ puede estudiarse determinando si $1 + a(s)\beta(s)$ tiene ceros en el semiplano real positivo, $Re(s) > 0$. Para ello aplicaremos el principio del argumento a la función

$$F(s) = 1 + a(s)\beta(s). \tag{12}$$

Consideremos el contorno semicircular C que se indica en la figura 4, para el que se ha tomado la precaución de elegir R suficientemente grande como para que todos los ceros del semiplano real positivo queden encerrados por él.

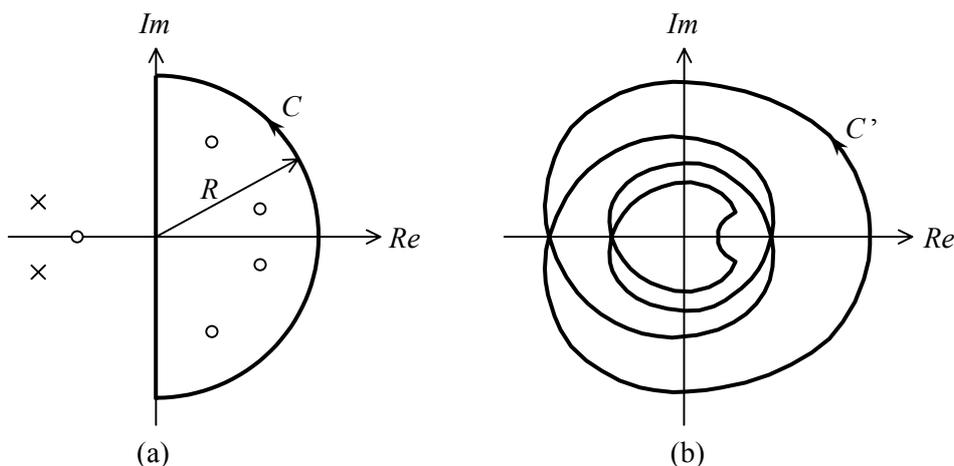


Figura 4. (a) Contorno C utilizado para determinar si la función $F(s) = 1 + a(s)\beta(s)$ tiene ceros en el semiplano real positivo. Los ceros se han indicado con pequeños círculos. (b) Contorno C' transformado por $F(s)$. Como C encerraba 4 ceros, C' rodea 4 veces al origen.

Si partimos de la suposición razonable de que $a(s)$ y $\beta(s)$ son estables,³ entonces $F(s)$ no tendrá polos con parte real positiva, por lo tanto

$$N = Z, \tag{13}$$

es decir, el número de vueltas que dará $C' = F(C)$ alrededor de 0 coincide con el número de ceros de $F(s)$ dentro de C . Si este número es mayor que 0, habrá por lo menos un cero y el sistema realimentado será *inestable*.

Observemos que en lugar de considerar $F(s) = 1 + a(s)\beta(s)$ podríamos simplificar el trazado considerando la función $G(s) = a(s)\beta(s)$. La única diferencia será que el contorno transformado dará vueltas alrededor de -1 en lugar de alrededor de 0 (figura 5a).

² En efecto, los polos de $1 + a(s)\beta(s)$ son iguales a los polos de $a(s)\beta(s)$ (pues el sumar la constante 1 no altera la posición de los polos), y los polos de $a(s)\beta(s)$ incluyen los polos de $a(s)$.

³ Si bien en general es así, podría suceder que $a(s)$ fuera inestable pero con una adecuada realimentación se volviera estable. El principio del argumento permitiría en aquellos casos detectar la cantidad de ceros dentro del contorno elegido sumando la cantidad de polos a la cantidad de giros alrededor del origen.

En el caso más común de amplificadores, $a(s)\beta(s) \rightarrow 0$ cuando $|s| \rightarrow \infty$, por lo cual haciendo tender R a ∞ la parte semicircular del contorno se transforma en el origen, y sólo queda en el contorno transformado por $a(s)\beta(s)$ la parte correspondiente al eje imaginario (figura 5b).

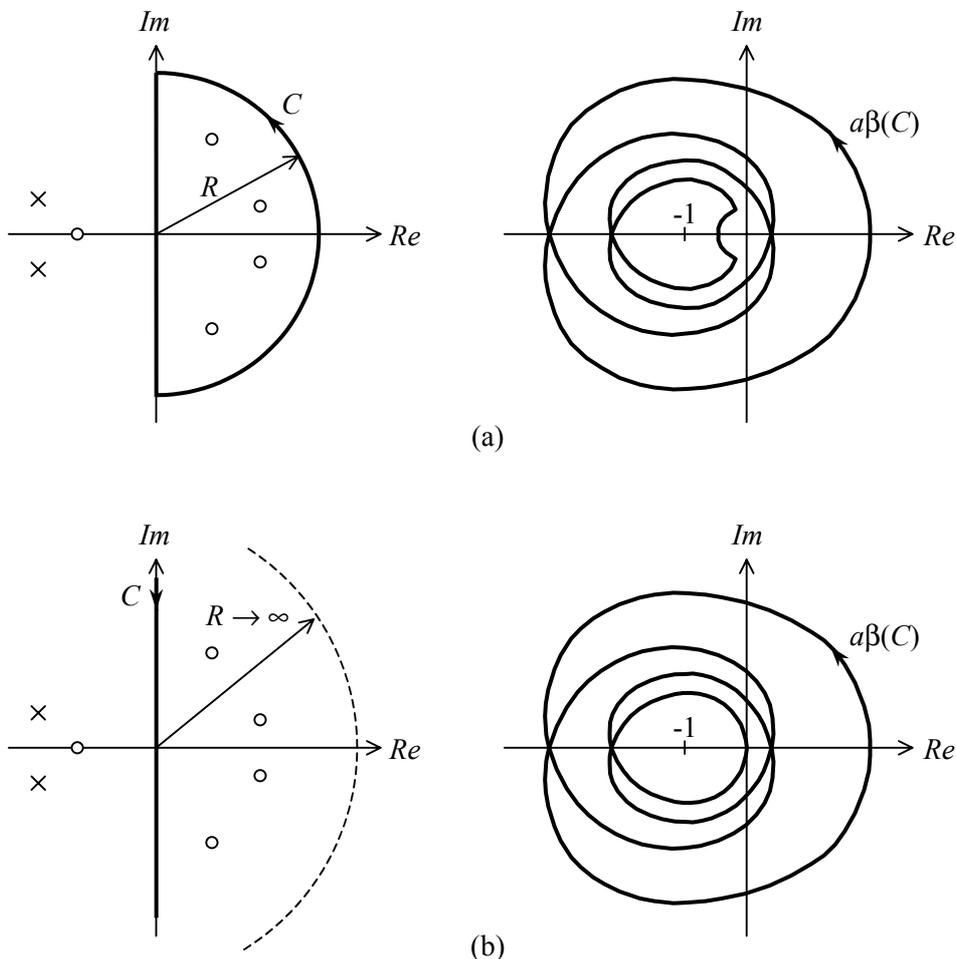


Figura 5. (a) Sobre el mismo contorno C de la figura 4 se aplica la función $G(s) = a(s)\beta(s)$ en lugar de $F(s) = 1 + a(s)\beta(s)$. La cantidad de ceros de $F(s)$ es ahora la cantidad de veces que el contorno transformado rodea a -1 . (b) Se hace tender R a ∞ . Los valores de $a\beta$ sobre el tramo semicircular tienden a 0.

El contorno que se obtiene transformando el eje imaginario a través de $a(s)\beta(s)$ se denomina *lugar* o *contorno de Nyquist* y entonces el criterio de estabilidad puede enunciarse así:

Criterio de estabilidad de Nyquist: Un sistema realimentado será estable si su contorno de Nyquist (eje imaginario transformado por $a(s)\beta(s)$) no encierra al punto -1 , denominado *punto crítico*.

El contorno de Nyquist se puede simplificar si observamos que está formado por dos porciones simétricas con respecto al eje real: una corresponde a la transformación

del semieje imaginario > 0 y la otra al < 0 . Podemos tomar sólo la parte correspondiente al primero, con lo cual el lugar de Nyquist pasa a ser sencillamente una representación en el plano complejo de $a(j\omega) \beta(j\omega)$ en módulo y fase para $\omega > 0$, como se muestra en la figura 6. Además, convencionalmente se invierte el sentido de recorrido del eje imaginario, comenzando en $\omega = 0$ y terminando en $\omega = \infty$, con lo cual el lugar de Nyquist pasa a estar recorrido en sentido horario en lugar del sentido antihorario tradicionalmente considerado positivo en los textos de Análisis Complejo.

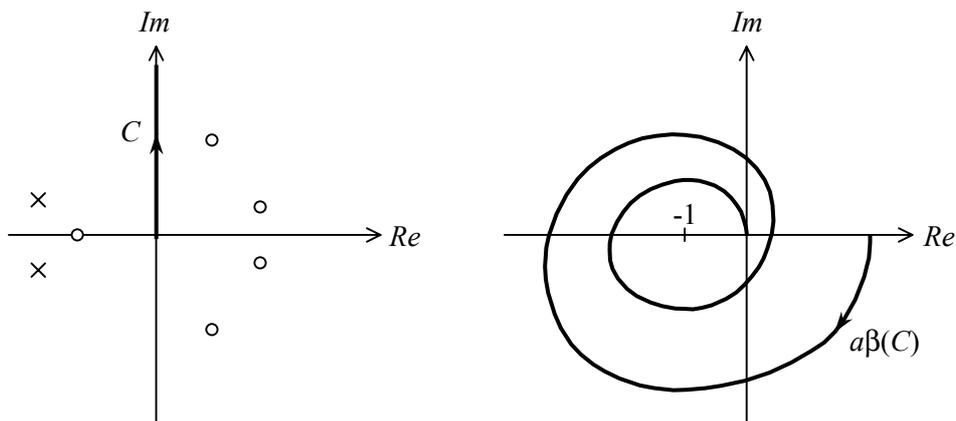


Figura 6. Para simplificar se toma sólo la mitad positiva del eje imaginario y se lo recorre desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$. El contorno transformado por $a(s) \beta(s)$ se reduce así a la mitad.

En la figura 7 se muestran ejemplos del contorno de Nyquist de un sistema estable y otro inestable.

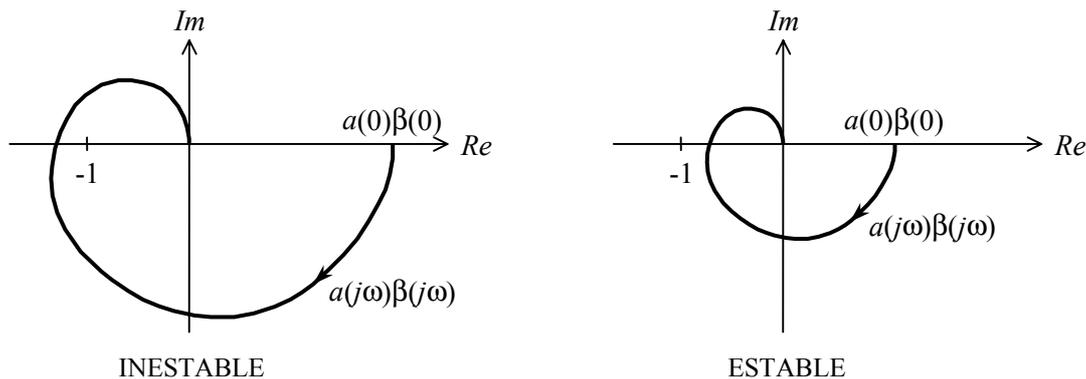


Figura 7. Dos ejemplos de aplicación del criterio de Nyquist. En el caso inestable, el contorno de Nyquist rodea al punto -1 . En el caso estable, no.

La principal ventaja del criterio de Nyquist es su simplicidad cuando solamente se necesita determinar si un sistema será estable o inestable al ser realimentado. Por otra parte, el lugar de Nyquist puede construirse fácilmente a partir de los diagramas de Bo-

de de amplitud y fase (sección 4.1.1), los que pueden obtenerse mediante el ensayo en frecuencia del sistema a lazo abierto. Obsérvese que en este caso en general no se dispone de un detalle de la ubicación de los polos, por lo cual no es factible aplicar criterios analíticos.

En la sección 4.3 veremos ejemplos específicos correspondientes a los sistemas de primer, segundo y tercer orden.

4.1.1. Trazado del lugar de Nyquist a partir del diagrama de Bode

Si se dispone del diagrama de Bode de amplitud y fase de la ganancia de lazo $a\beta$ es sencillo construir el lugar de Nyquist. Simplemente, para cada frecuencia se representa un punto en el plano complejo con módulo igual a la amplitud de la ganancia y con argumento igual a la fase de la ganancia. Este proceso se ilustra en la figura 8.

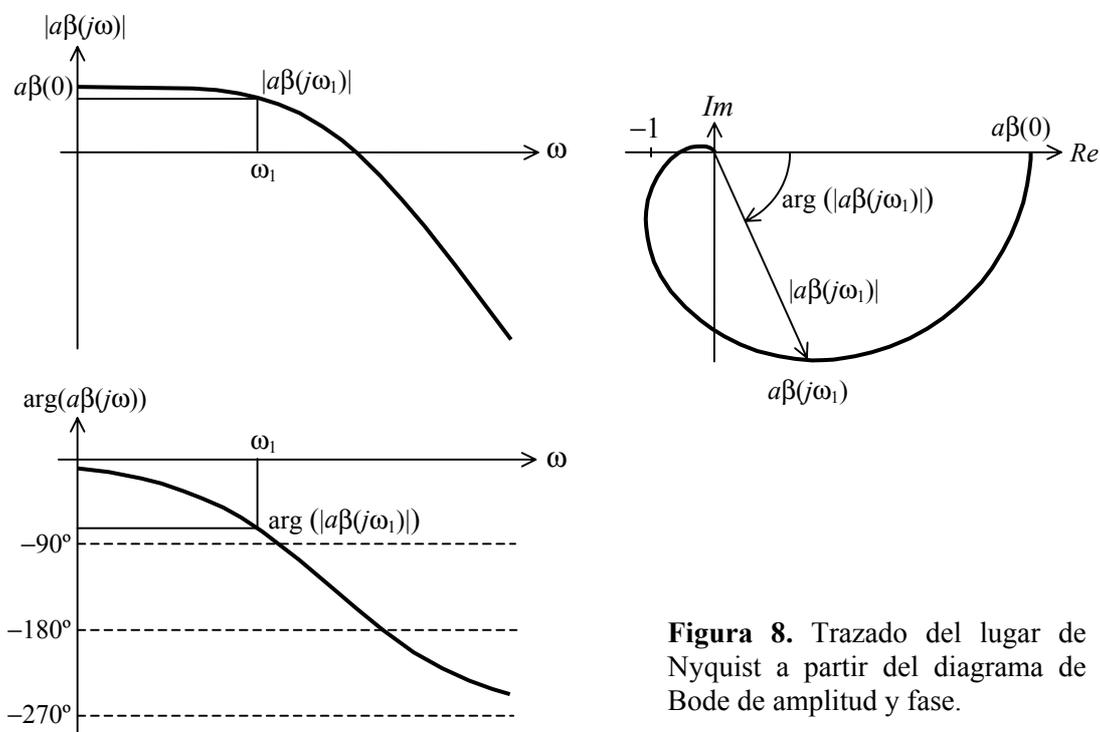


Figura 8. Trazado del lugar de Nyquist a partir del diagrama de Bode de amplitud y fase.

4.1.2. Representación en el plano de Black

En el caso de sistemas de gran ganancia de lazo, la representación del lugar de Nyquist en el plano complejo convencional supone una dificultad de escala, ya que en una escala lineal el punto crítico -1 aparece demasiado cerca del origen. Este inconveniente se subsana representando el lugar de Nyquist en el plano de Black, en el cual se utiliza como abscisa la fase, y como ordenada la amplitud en escala logarítmica (graduada en dB). El punto crítico -1 pasa a ser, entonces, el punto de amplitud 0 dB y fase -180° . En la figura 9 se muestra el diagrama de Black para el caso de la figura 8

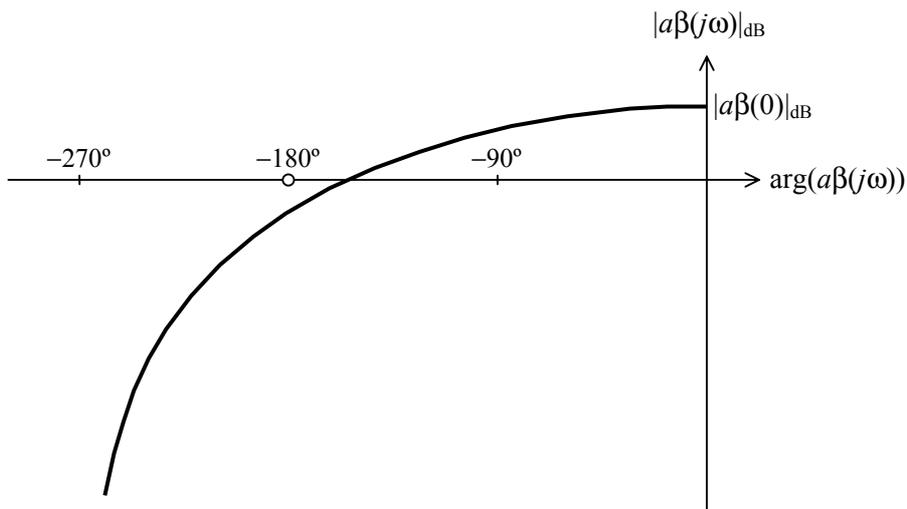


Figura 9. Lugar de Nyquist representado en el plano de Black (amplitud vs. argumento). El punto crítico, ubicado en $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$ se ha marcado con un pequeño círculo.

4.1.3. Estabilidad relativa: margen de amplitud y de fase

El criterio de Nyquist puede extrapolarse para obtener información sobre la estabilidad relativa del sistema realimentado. Ello se logra mediante los parámetros introducidos a continuación.

Margen de amplitud: Esta definido como el incremento en dB que puede aplicarse a la ganancia de lazo $|a(j\omega)\beta(j\omega)|$ en la frecuencia ω_0 en que la fase cruza los -180° sin que el sistema se vuelva inestable. En otras palabras,

$$M_A = -20 \log_{10}(|a(j\omega_0)\beta(j\omega_0)|). \tag{14}$$

Para que un sistema sea estable el margen de amplitud debe ser positivo, lo cual requiere que $|a(j\omega_0)\beta(j\omega_0)| < 1$. Cuanto más positivo sea el margen de amplitud tanto mejor será su estabilidad relativa. En particular, el pico de resonancia será menor.

Margen de fase: Se define como la cantidad de fase que puede restarse a la ganancia de lazo en la frecuencia ω_1 en que $|a(j\omega_1)\beta(j\omega_1)| = 1$ sin que el sistema se vuelva inestable. Es decir,

$$M_F = \arg(a(j\omega_1)\beta(j\omega_1)) - 180^\circ \tag{15}$$

Para que el sistema sea estable el margen de fase debe ser positivo. En general se acepta que un margen de fase de 45° o mayor es suficiente para una buena estabilidad relativa.

En la figura 10 se muestran estos conceptos en el diagrama de Bode y en el de Nyquist.

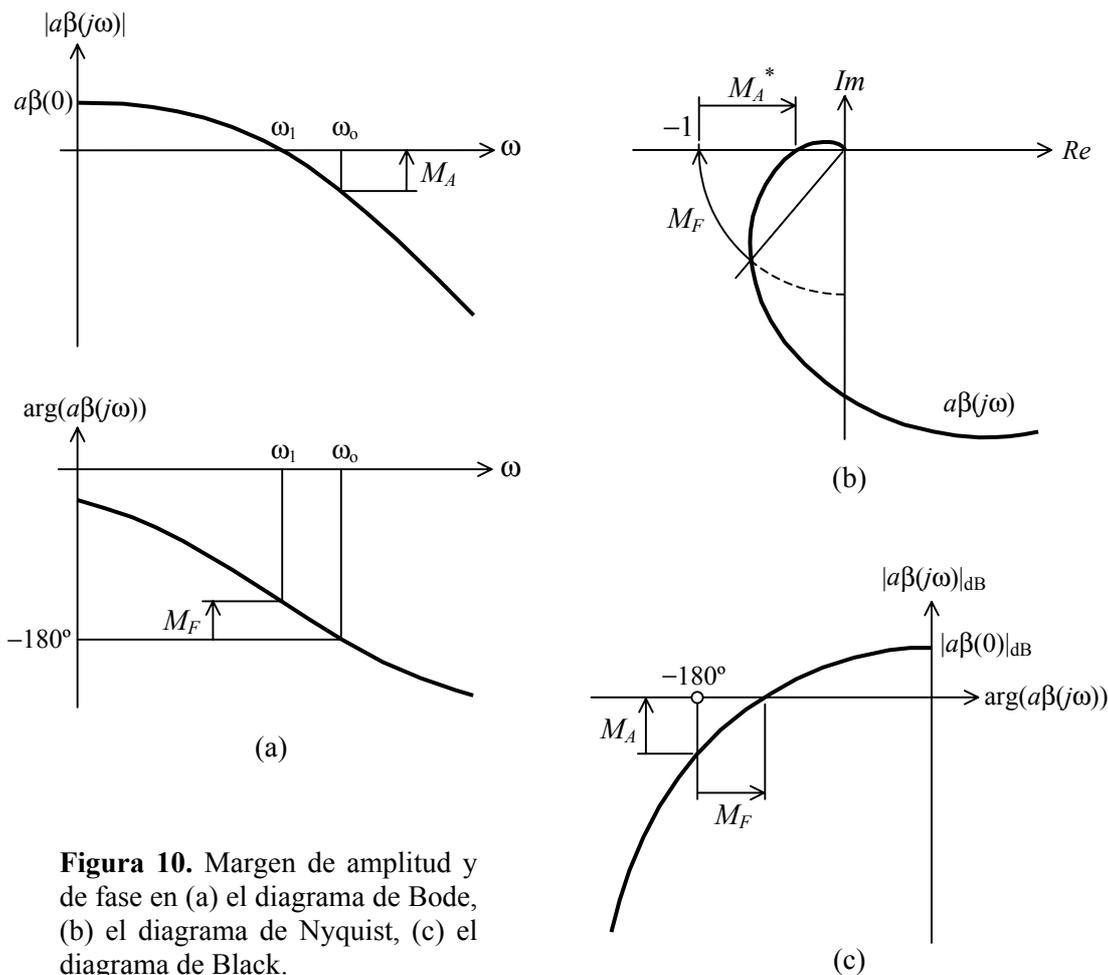


Figura 10. Margen de amplitud y de fase en (a) el diagrama de Bode, (b) el diagrama de Nyquist, (c) el diagrama de Black.

4.2. Método del lugar de las raíces

Se define el *lugar de las raíces* o *lugar de Evans* como el lugar geométrico de los ceros de la función $1 + a(s)\beta(s)$ al variar $a(0)\beta(0)$ entre 0 e ∞ (figura 11a). Para valores *negativos* de $a(0)\beta(0)$ resulta el llamado *lugar inverso* de las raíces⁴ (figura 11b).

Vemos que aumentar $a(0)\beta(0)$ es equivalente a aumentar la realimentación, por lo cual el aspecto usual de un lugar de las raíces es el de una serie de líneas que parten del semiplano real negativo para $a(0)\beta(0)$ pequeño e incursionan en el semiplano real positivo para $a(0)\beta(0)$ grande, indicando que el sistema se vuelve inestable.

Existen varias reglas para trazar en forma aproximada el lugar de las raíces de una función de transferencia a lazo abierto $a(s)\beta(s)$.

Algunas de ellas son:

- 1) El lugar de las raíces está formado por líneas que empiezan ($a(0)\beta(0) = 0$) en los polos de $a(s)\beta(s)$ y terminan ($a(0)\beta(0) = \infty$) en los ceros de $a(s)\beta(s)$.
- 2) El lugar de las raíces de $a(s)\beta(s)$ incluye todos los segmentos del eje real que se encuentran a la izquierda de un número impar de polos y ceros de $a(s)\beta(s)$.

⁴ En realidad, si permitimos que $a(0)\beta(0)$ varíe desde $-\infty$ hasta ∞ , obtenemos un único lugar geométrico. Por cuestiones históricas y circuitales se descompone en las partes indicadas.

- 3) Todos los segmentos del lugar de las raíces sobre el eje real que se encuentren entre dos polos consecutivos o entre dos ceros consecutivos de $a(s)\beta(s)$ tienen algún punto de ruptura interior donde el lugar se abre en pares de ramas conjugadas.
- 4) Las ramas complejas del lugar de las raíces comienzan en los puntos de ruptura con ángulo recto respecto al eje real.
- 5) Si $T(s)$ tiene P polos y Z ceros finitos, entonces el lugar de las raíces tendrá $P - Z$ ramas infinitas cuyas asíntotas parten del *centroide*

$$c = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{P - Z}, \tag{16}$$

y su distribución angular es uniforme, vale decir que el ángulo que las separa es

$$\theta = \frac{2\pi}{P - Z}. \tag{17}$$

- 6) El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real.

Existen otras reglas más precisas vinculadas con aspectos cuantitativos. Las mismas podrán hallarse en la bibliografía específica, junto con las demostraciones de las que hemos resumido.

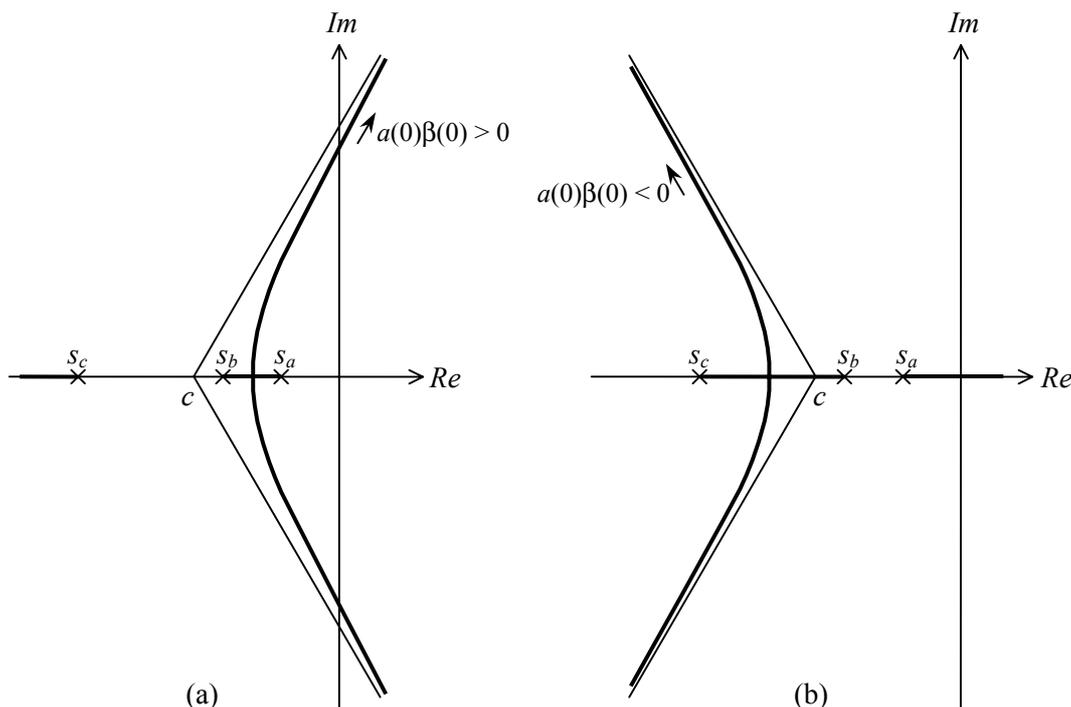


Figura 11. (a) Lugar de las raíces ($a(0)\beta(0) > 0$). (b) Lugar inverso de las raíces ($a(0)\beta(0) < 0$). s_a , s_b y s_c son los polos del sistema sin realimentar.

En los casos en que la realimentación es positiva (es decir, que los signos de $a(0)$ y $\beta(0)$ son opuestos) se debe emplear el lugar inverso de las raíces, que corresponde, como ya se mencionó a valores negativos de $a(0)\beta(0)$.

Otra variante del lugar de las raíces lo constituye el *contorno de las raíces*, que se obtiene al modificar otro parámetro de la realimentación distinto de su intensidad. Por ejemplo, si

$$\beta(T, s) = \beta_0(1 + Ts), \quad (18)$$

el lugar geométrico de los ceros de $1 + a(s)\beta(T, s)$ al variar la constante de tiempo T resulta ser un contorno de las raíces. El contorno de las raíces podría ser multidimensional, en cuyo caso debería recurrirse a juegos de gráficas en cada uno de los cuales se dejaran fijos todos los parámetros menos uno.

El método del lugar de las raíces tiene la ventaja sobre el criterio de Nyquist de que permite conocer con bastante exactitud la posición de los polos al variar distintos parámetros, por lo cual se pueden obtener datos precisos sobre la estabilidad relativa, es decir, sobre la forma y características de los transitorios. Por este mismo motivo es muy útil como herramienta de diseño. Por otra parte, su trazado requiere el conocimiento previo de los polos de la función de transferencia, por lo cual no puede realizarse en forma directa a partir de datos experimentales.

4.3. Método de polos y ceros

La determinación explícita de los polos y ceros de una función de transferencia es posible sólo para sistemas de hasta cuarto orden, debido a la imposibilidad de resolver en forma explícita las ecuaciones de grado mayor que 4. A esto se agrega la complejidad de las resolventes de tercero y cuarto grado que, a diferencia de la resolvente de segundo grado proporcionan un conjunto de valores entre los cuales debe determinarse por verificación cuáles son soluciones. Por lo tanto, sin el auxilio de la computadora este método resulta práctico en sistemas de hasta segundo orden y en algunos casos de tercer orden.

Analizaremos los casos de primer, segundo y tercer orden.

4.3.1. Sistemas de primer orden

Consideremos un sistema estable de primer orden⁵ con la siguiente función de transferencia:

$$a(s) = \frac{a_0}{1 + Ts} = \frac{a_0}{1 - s/s_a}. \quad (19)$$

Si lo realimentamos con

$$\beta(s) = \beta_0, \quad (20)$$

la función de transferencia a lazo cerrado resulta ser

⁵ Un ejemplo muy común de amplificador de primer orden lo constituye cualquier amplificador operacional de propósito general, como por ejemplo el LM741, el LM324 o el LF351. La razón es que están compensados internamente mediante la técnica del polo dominante, que veremos luego. El resultado es una respuesta aproximadamente de primer orden para frecuencias menores de 1 MHz.

$$A(s) = \frac{\frac{a_o}{1 - s/s_a}}{1 + \frac{a_o}{1 - s/s_a}\beta_o} = \frac{A(0)}{1 - s/s_1} \tag{21}$$

donde

$$A(0) = \frac{a_o}{1 + a_o\beta_o}, \tag{22}$$

$$s_1 = (1 + a_o\beta_o) s_a. \tag{23}$$

Vemos que la ganancia en continua queda dividida por el factor $1 + a_o\beta_o$ mientras que el polo se multiplica por dicho factor. Se suele resumir esto diciendo que *el producto ganancia por ancho de banda se mantiene constante*. En un diagrama de Bode, esto significa que la asíntota para alta frecuencia se conserva, lo cual se muestra en la figura 12.

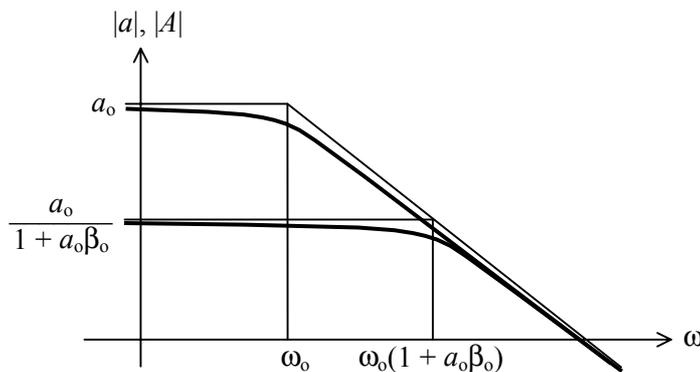


Figura 12. Diagrama de Bode de amplitud de un amplificador de primer orden sin realimentar y realimentado.

Se observa que si a_o y β_o tienen el mismo signo, como $s_a < 0$ resultará también $s_1 < 0$ y, por lo tanto, el sistema realimentado será estable, cualquiera sea la intensidad de la realimentación.

Esta conclusión puede obtenerse también desde los puntos de vista del criterio de Nyquist y del lugar de las raíces. En este caso ambos son calculables en forma precisa. El lugar de Nyquist resulta ser un semicírculo de diámetro igual a $a_o\beta_o$, ya que la ecuación (19) es una forma bilineal particular, y las formas bilineales transforman el eje imaginario en circunferencias. El lugar de las raíces puede trazarse a partir de la expresión de s_1 , resultando ser una semirrecta contenida en el eje real negativo. En la figura 13 se muestran ambos.

Si la realimentación es positiva, el lugar de las raíces se sustituye por el lugar inverso de las raíces, que tiene sentido opuesto y por lo tanto incursiona en el semiplano real positivo. Esto significa que a partir de algún valor de realimentación el sistema a lazo cerrado se vuelve inestable. En la figura 14a se muestran los diagramas de Nyquist de un amplificador con dos valores de realimentación, uno de los cuales lo hace estable (β_o') y el otro inestable (β_o).

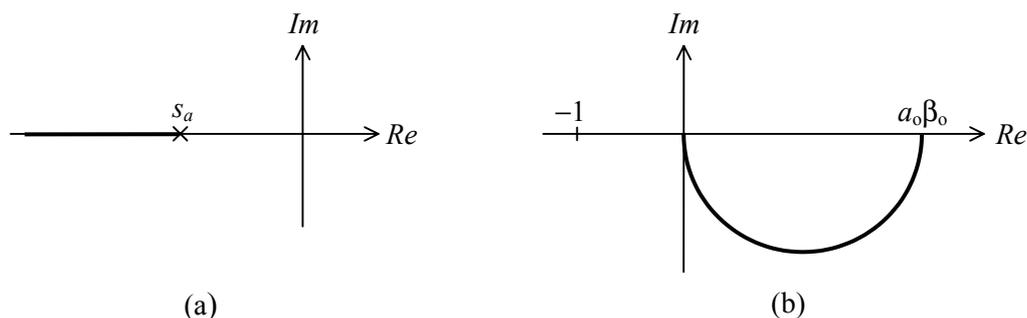


Figura 13. (a) Lugar de las raíces de un amplificador de primer orden realimentado negativamente ($a_0\beta_0 > 0$). (b) Su lugar de Nyquist para un valor específico de realimentación.

Obsérvese que el hecho de que la realimentación sea positiva ($a_0\beta_0 < 0$) no necesariamente implica la inestabilidad, ya que si $-1 < a_0\beta_0 < 0$ se satisface el criterio de estabilidad de Nyquist. En este caso $0 < 1 + a_0\beta_0 < 1$, por lo que la ganancia del amplificador realimentado aumentará con respecto al la del amplificador básico. Es el caso de la realimentación regenerativa, que se aplicaba en los antiguos amplificadores operacionales a válvulas.⁶

En el caso de un amplificador de gran ganancia, por ejemplo un amplificador operacional integrado, lograr la estabilidad con realimentación positiva exigiría aplicar una realimentación extremadamente pequeña. Así, un LM741 con una ganancia en continua $a_0 \cong -100000$, necesitaría $\beta_0 < 0,00001$ para lograr la estabilidad.

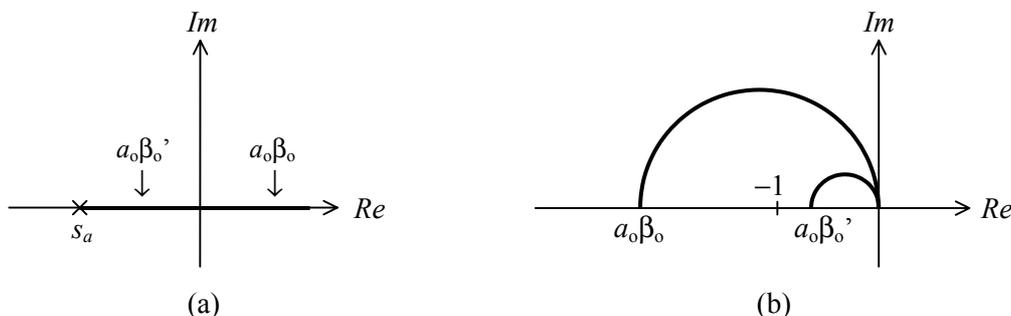


Figura 14. (a) Lugar de las raíces de un amplificador de primer orden realimentado positivamente ($a_0\beta_0 < 0$). Se indica la posición de las raíces para dos realimentaciones. (b) El lugar de Nyquist para los dos casos: inestable ($a_0\beta_0 < -1$) y estable ($-1 < a_0\beta_0' < 0$).

⁶ Es éste un interesante caso histórico de aplicación provechosa de la realimentación positiva. Por cuestiones de costo, tamaño y consumo no era posible utilizar muchas válvulas para cada amplificador operacional, por lo que la ganancia que se podía obtener era bastante baja. Ello limitaba la idealidad de los circuitos de aplicación (fundamentalmente, simuladores analógicos de sistemas), por lo que se utilizaba cierta cantidad de realimentación positiva (regenerativa) para aumentar la ganancia, a costa de comprometer la respuesta transitoria. Sin embargo, como se verá más adelante, con técnicas de compensación es posible mejorar la estabilidad relativa.

Para realimentaciones mayores, el amplificador es inestable. De acuerdo con la figura 14b, la inestabilidad corresponde a un polo real positivo, cuya respuesta es una exponencial divergente. Un ejemplo de esto lo constituye el comparador con histéresis con un amplificador operacional. La inestabilidad en este caso lleva al amplificador a la saturación, donde permanece hasta que externamente se modifique la entrada de modo de desencadenar una nueva exponencial con signo opuesto.⁷

4.3.2. Sistemas de segundo orden

Consideremos ahora un sistema estable de segundo orden con la función de transferencia

$$a(s) = \frac{a_0}{(1 - s/s_a)(1 - s/s_b)} \quad (24)$$

Esta función puede expresarse también como

$$a(s) = \frac{a_0}{1 + a_1s + a_2s^2}, \quad (25)$$

donde

$$a_1 = -\frac{1}{s_a} - \frac{1}{s_b}, \quad a_2 = \frac{1}{s_a s_b}. \quad (26)$$

Si se realimenta con $\beta(s) = \beta_0$, se obtiene

$$A(s) = \frac{a_0}{1 + a_0\beta_0 + a_1s + a_2s^2} \quad (27)$$

Aplicando la resolvente de la ecuación de segundo grado se obtienen los ceros del denominador, que son los polos del sistema realimentado:

$$s_1, s_2 = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{1 + a_0\beta_0}{a_2}}. \quad (28)$$

Se puede comprobar que

$$s_1 s_2 = (1 + a_0\beta_0) s_a s_b, \quad (29)$$

de modo que en este caso no se cumple que el producto ganancia por ancho de banda sea constante.

⁷ En realidad, bastante antes de que la exponencial alcance la saturación de tensión del amplificador su pendiente se hace suficientemente alta como para alcanzar la limitación de slew-rate (máxima pendiente de la salida). En ese caso el crecimiento continúa en forma de rampa lineal hasta llegar a la saturación de tensión.

Si a_0 y β_0 tienen el mismo signo, puede ocurrir que la cantidad dentro de la raíz cuadrada sea positiva o negativa. En el primer caso dicha raíz es real, y es menor en valor absoluto que el primer término, y por lo tanto ambos ceros son reales y negativos. En el segundo caso, la raíz cuadrada es imaginaria y no modifica a la parte real, por lo tanto ésta se mantiene igual al primer término, que es negativo. De manera que la parte real de los polos es negativa siempre, y por consiguiente el sistema resulta siempre estable, cualquiera sea la intensidad de la realimentación.

Esta conclusión también puede obtenerse por el criterio de Nyquist y mediante el lugar de las raíces. Dado que cuando los polos se vuelven complejos su parte real se mantiene constante, el lugar de las raíces contiene dos semirrectas paralelas al eje imaginario. En la figura 15 se muestran el lugar de Nyquist y el lugar de las raíces para el sistema de segundo orden que estamos estudiando.

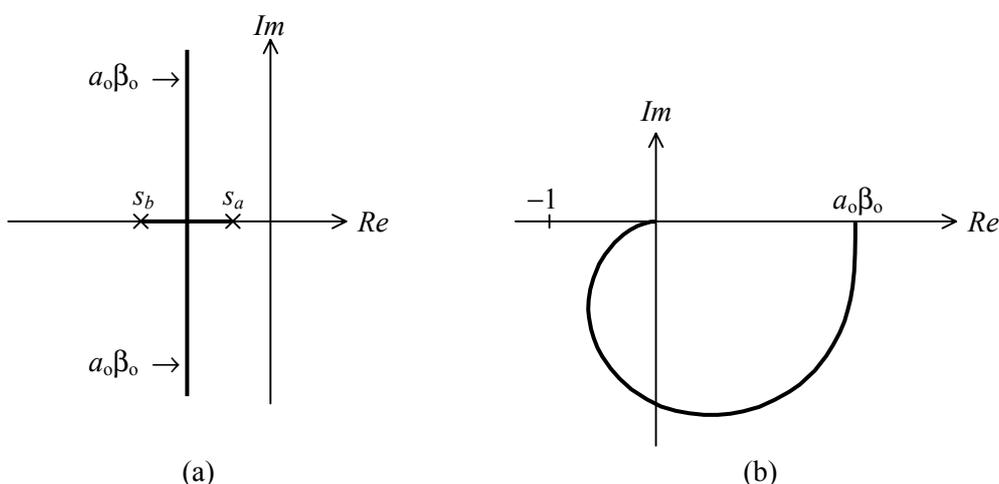


Figura 15. (a) Lugar de las raíces de un amplificador de segundo orden realimentado negativamente ($a_0\beta_0 > 0$). Se indica la posición de las raíces para una realimentación tal que $Q = 2$. (b) Lugar de Nyquist correspondiente a dicha realimentación.

Es conveniente para el análisis de sistemas de segundo orden utilizar la notación, normalizada mediante los llamados *parámetros característicos*: la frecuencia natural ω_0 y el coeficiente de amortiguamiento ξ . Esta notación es la siguiente:

$$A(s) = \frac{A(0)}{(1 - s/s_1)(1 - s/s_2)} = \frac{A(0)}{1 + 2\xi \frac{s}{\omega_0} + \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2} \tag{30}$$

Se tienen las siguientes relaciones:

$$\omega_0 = \sqrt{s_1 s_2}, \quad \xi = \frac{s_1 + s_2}{2\sqrt{s_1 s_2}}, \tag{31}$$

$$s_1, s_2 = \omega_0 \left(-\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2} \right). \tag{32}$$

La virtud de esta notación radica en que se dispone de curvas de respuesta en frecuencia normalizadas para $\omega_0 = 1$ y diversos valores de ξ .

Existen cuatro frecuencias asociadas a ω_0 que se suelen confundir con ésta por ser numéricamente cercanas, aunque son *conceptualmente diferentes*:

$$\omega_0: \text{ pulsación natural} \tag{33}$$

$$\omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} : \text{ pulsación de la respuesta libre} \tag{34}$$

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} : \text{ pulsación de resonancia} \tag{35}$$

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 + \sqrt{2}} : \text{ pulsación de corte} \tag{36}$$

Las dos últimas valen sólo para el pasabajos.

Se puede apreciar que si bien la frecuencia natural, la frecuencia de resonancia y la frecuencia de las oscilaciones libres no coinciden, cuando ξ se hace pequeño son muy próximas.

Otro parámetro que se suele introducir es el *factor de calidad*, Q , dado por:

$$Q = \frac{1}{2\xi}. \tag{37}$$

Para valores pequeños de ξ , Q representa aproximadamente la relación entre el pico de resonancia y la ganancia en continua.

En la figura 16 se detalla la forma genérica de las gráficas de Bode con las frecuencias anteriores, y la posición de los polos en el plano complejo.

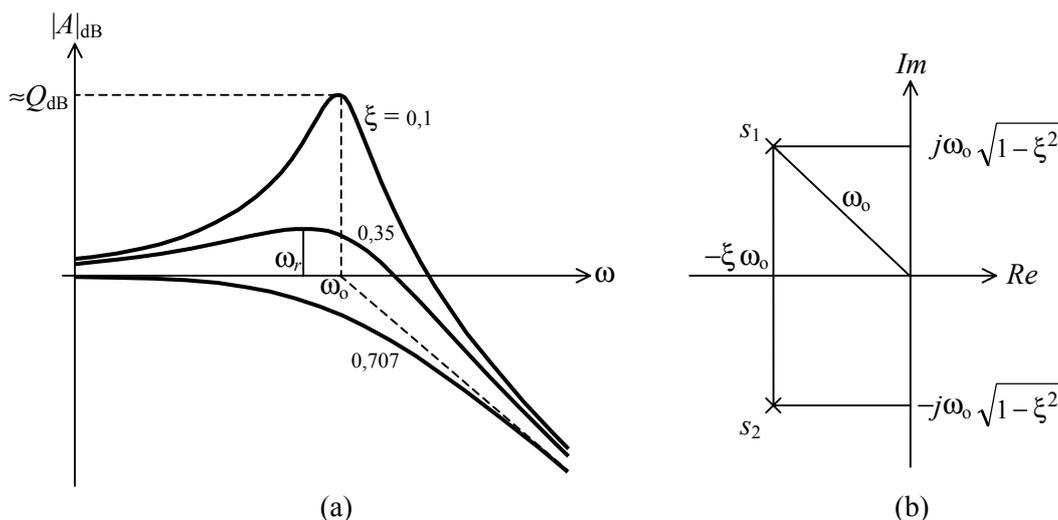


Figura 16. (a) Diagrama de Bode de amplitud de un sistema de segundo orden para tres valores de ξ . (b) Ubicación en el plano complejo

La importancia de los sistemas de primer y segundo orden que hemos estudiado reside en que todos los sistemas pueden descomponerse como producto de sistemas de esos órdenes, y por consiguiente a través del método de fracciones simples, las respuestas libres son superposiciones de las correspondientes a los mismos.

4.3.3. Sistemas de tercer orden

A diferencia de los sistemas de orden 1 y 2, que son estables para cualquier realimentación negativa, los sistemas de tercer orden comienzan a presentar problemas de inestabilidad para realimentaciones moderadas a grandes. Por ese motivo estudiaremos estos sistemas, como ejemplo de sistemas potencialmente inestables.

Consideremos un sistema estable de tercer orden con la siguiente función de transferencia:

$$a(s) = \frac{a_0}{(1 - s/s_a)(1 - s/s_b)(1 - s/s_c)} \quad (38)$$

que también es expresable como

$$a(s) = \frac{a_0}{1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3}, \quad (39)$$

donde

$$a_1 = -\frac{1}{s_a} - \frac{1}{s_b} - \frac{1}{s_c}, \quad (40)$$

$$a_2 = \frac{1}{s_a s_b} + \frac{1}{s_a s_c} + \frac{1}{s_b s_c}, \quad (41)$$

$$a_3 = -\frac{1}{s_a s_b s_c}. \quad (42)$$

Si se lo realimenta con $\beta(s) = \beta_0$, obtenemos la siguiente función a lazo cerrado:

$$A(s) = \frac{a_0}{1 + a_0\beta_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3} \quad (43)$$

Vemos que el único coeficiente del denominador que se modifica es el de grado cero (término independiente). En particular, se conservan los dos coeficientes de mayor grado, por lo cual la suma de polos se mantiene constante, ya que si llamamos a estos polos s_1 , s_2 y s_3 se tiene

$$s_1 + s_2 + s_3 = -\frac{a_2}{a_3}. \quad (44)$$

Otra forma de interpretar esto que el *centro de masa de los polos* se mantiene constante al variar la realimentación.

Tal como se mencionó antes, la determinación explícita de las raíces de una ecuación algebraica de tercer grado es complicada,⁸ por lo cual utilizaremos otro procedimiento basado en la representación polar de las raíces que resulta más apropiado en situaciones de diseño. Consideremos un polinomio de tercer grado genérico.⁹

$$P(s) = b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0. \tag{45}$$

$P(s)$ puede expresarse en función de sus raíces s_1, s_2 y s_3 :

$$P(s) = b_3(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3). \tag{46}$$

A su vez, las raíces pueden expresarse como se indica en la figura 17 en función del valor del polo real, γ , de la parte real de los polos complejos, α , y del ángulo θ que forman los polos complejos con el eje real negativo.

$$s_1 = \gamma, \tag{47}$$

$$s_2 = \alpha(1 + j \tan \theta), \tag{48}$$

$$s_3 = \alpha(1 - j \tan \theta). \tag{49}$$

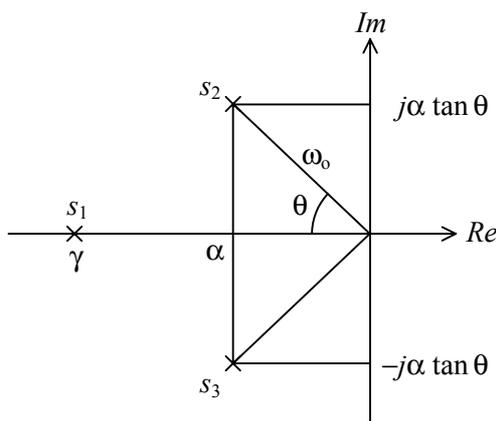


Figura 17. Parametrización polar de la ubicación de los polos de un sistema de tercer orden en el plano complejo.

⁸ Dada la ecuación $x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3 = 0$, mediante la transformación $x = y - c_1/3$ se logra una nueva ecuación de la forma $y^3 + py + q = 0$. Esta ecuación puede resolverse con la resolvente general

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

debida a *Tartaglia* (a veces atribuida a *Cardano*). Cada raíz cúbica tiene 3 raíces complejas, lo cual arroja 9 posibles valores, de los cuales sólo 3 satisfacen la ecuación original. Los restantes son soluciones extrañas surgidas durante el proceso intermedio de resolución. Puede verse una discusión más detallada en Rey Pastor, 1935.

⁹ Utilizaremos la letra “b” para los coeficientes de un polinomio cualquiera (por ejemplo, el denominador de la función de transferencia a lazo cerrado), reservando la “a” para el denominador de la función de transferencia a lazo abierto original.

Sustituyendo estos valores en la expresión anterior, desarrollando e igualando coeficientes se llega a

$$b_0 = -b_3 \gamma \alpha^2 (1 + \tan^2 \theta), \tag{50}$$

$$b_1 = b_3 (\alpha^2 (1 + \tan^2 \theta) + 2\alpha \gamma), \tag{51}$$

$$b_2 = -b_3 (2\alpha + \gamma). \tag{52}$$

Un caso particular interesante se tiene cuando se conocen los coeficientes b_1 , b_2 y b_3 , ya que es posible determinar α , γ y b_0 en función del ángulo θ . Para ello se despeja γ de la tercera ecuación y se reemplaza en la segunda, quedando una ecuación de segundo grado de la cual es posible despejar α . Reordenando se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$(3 - \tan^2 \theta) \alpha^2 + 2 \frac{b_2}{b_3} \alpha + \frac{b_1}{b_3} = 0, \tag{53}$$

$$\gamma = -2\alpha - \frac{b_2}{b_3}, \tag{54}$$

$$b_0 = -b_3 \gamma \alpha^2 (1 + \tan^2 \theta). \tag{55}$$

Estas ecuaciones se hallan tabuladas para algunos valores habituales de θ .

Tabla 1. Ecuaciones para calcular los polos de un polinomio de tercer grado para varios ángulos a partir de algunos coeficientes.

θ	α	γ	b_0
0°	$3 b_3 \alpha^2 + 2 b_2 \alpha + b_1 = 0$	$-2\alpha - b_2 / b_3$	$-\gamma \alpha^2 b_3$
45°	$2 b_3 \alpha^2 + 2 b_2 \alpha + b_1 = 0$	$-2\alpha - b_2 / b_3$	$-2\gamma \alpha^2 b_3$
60°	$\alpha = -b_1 / (2b_2)$	$-2\alpha - b_2 / b_3$	$-4\gamma \alpha^2 b_3$
90°	$\alpha = 0$	$-b_2 / b_3$	$b_1 b_2 / b_3$

En nuestro estudio aplicaremos este análisis trigonométrico al denominador de las funciones de transferencia de sistemas realimentados.

En el caso de realimentación independiente de la frecuencia que veníamos considerando, tenemos

$$b_0 = 1 + a_0 \beta_0, \tag{56}$$

$$b_1 = a_1, \tag{57}$$

$$b_2 = a_2, \tag{58}$$

$$b_3 = b_3, \tag{59}$$

ya que, según vimos el único coeficiente que se modifica es el independiente.

En la figura 18 se muestran lugar de las raíces de este sistema y el lugar de Nyquist resultante para una determinada ganancia de lazo $a_o\beta_o$.

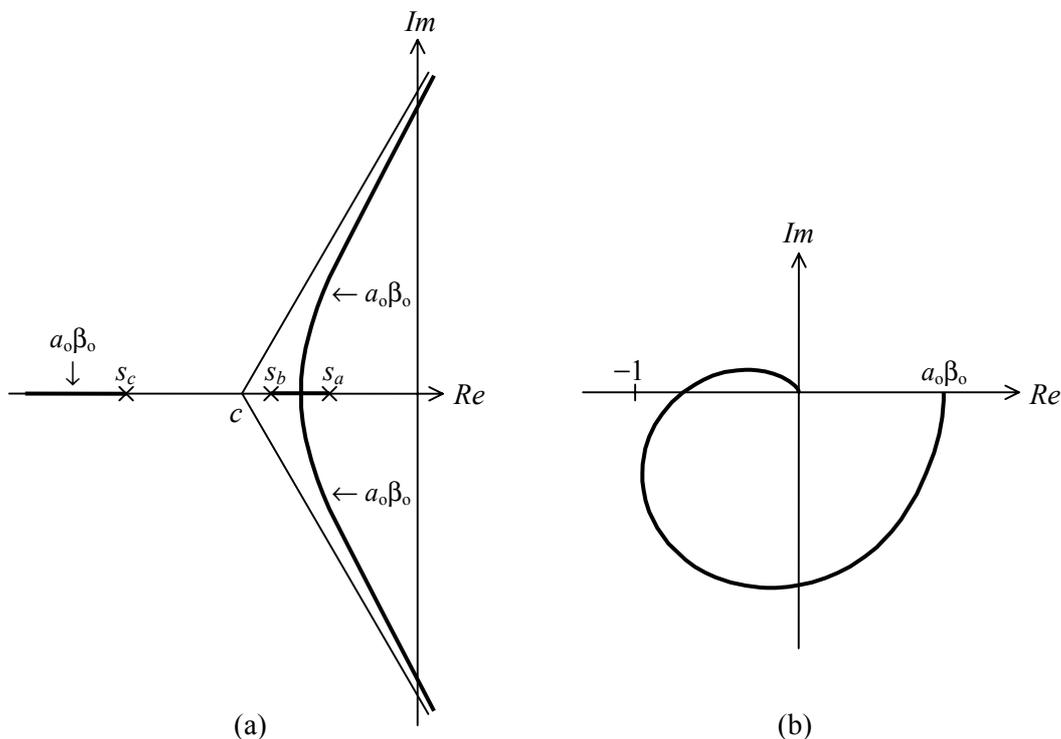


Figura 18. (a) Lugar de las raíces de un sistema de tercer orden. Se indica la posición de los polos para una dada ganancia de lazo $a_o\beta_o$. (b) Lugar de Nyquist resultante para la ganancia de lazo $a_o\beta_o$.

4.4. Estabilidad y signo de la realimentación

Ya hemos visto anteriormente que bajo determinadas condiciones un sistema realimentado positivamente podía ser estable. Completaremos la discusión mediante el ejemplo del sistema de tercer orden. En la figura 19 se ilustran los cuatro casos posibles. En (a) el sistema original está realimentado negativamente y es inestable. En (b) la ganancia de lazo se ha reducido, logrando estabilizar el sistema. Debido a que los polos del sistema tienden a reducir la ganancia en alta frecuencia, que es donde el corrimiento de fase alcanza los 180° necesarios para la inestabilidad, la reducción requerida en la ganancia de lazo $a_o\beta_o$ es moderada. En (c) el sistema está realimentado positivamente y resulta inestable. En (d) se ha logrado estabilizar el sistema realimentado positivamente reduciendo drásticamente la ganancia de lazo. Obsérvese que a diferencia del caso (b), la reducción de ganancia en alta frecuencia no contribuye en nada para corregir la inestabilidad, ya que aun a frecuencias muy bajas la fase supera los 180° merced a la inversión de fase asociada a la realimentación positiva.

Esto explica por qué los sistemas realimentados positivamente son mucho más propensos a la inestabilidad que los realimentados negativamente.

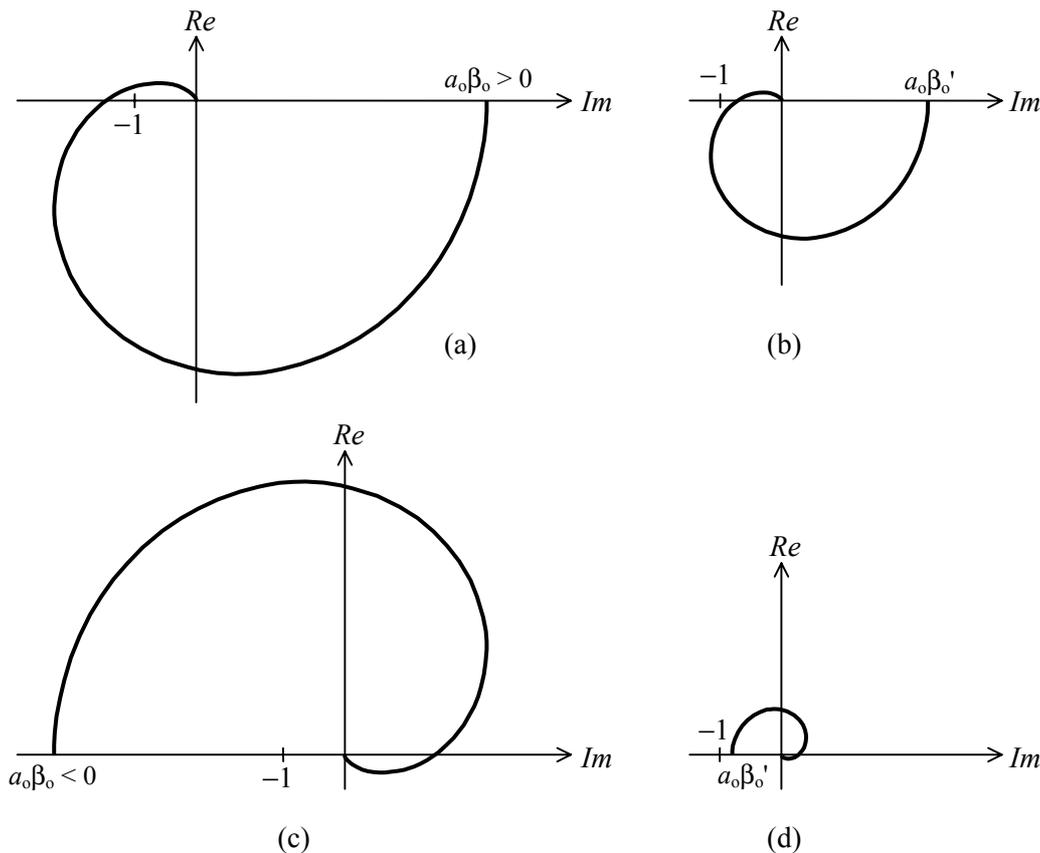


Figura 19. Lugar de Nyquist de un sistema de tercer orden (a) con realimentación negativa e inestable; (b) con realimentación negativa y estable; (c) con realimentación positiva e inestable y (d) con realimentación positiva y estable.

4.5. Límite de estabilidad

Nos proponemos, ahora, determinar hasta qué punto puede aumentarse la realimentación de un sistema realimentado negativamente sin que éste se vuelva inestable. Dado que recién es posible encontrar un comportamiento inestable en los sistemas de tercer orden, supondremos que el orden es 3. Sabemos que la inestabilidad comienza cuando las ramas complejas del lugar de las raíces cruzan el eje imaginario lo cual equivale a decir que los polos complejos están a 90°. De la tabla 1 se obtiene

$$b_0 = b_1 b_2 / b_3. \tag{60}$$

Sustituyendo los valores de las ecuaciones (54) a (57) el sistema será estable si

$$1 + a_0\beta_0 < a_1 a_2 / a_3 \tag{61}$$

Desde el punto de vista del diseño de un amplificador, existen dos posibilidades:

- a) Que esté definido el valor de ganancia en continua a_0 del amplificador básico;
- b) Que se requiera obtener determinado valor A_0 de ganancia en continua para el amplificador realimentado.

En el primer caso existirá un máximo valor de la realimentación compatible con la estabilidad, y por lo tanto habrá un mínimo valor posible de ganancia en continua para el amplificador realimentado, $A_{o \text{ mín}}$ por debajo del cual se vuelve inestable.

En el segundo caso, recordando que la ganancia en continua es aproximadamente $1/\beta_o$, queda definido el valor aproximado de la realimentación, por lo cual habrá un valor máximo de ganancia a lazo abierto $a_{o \text{ máx}}$ para que el amplificador realimentado se mantenga estable.

Si tenemos en cuenta que los beneficios de la realimentación se obtienen cuando $1 + a_o\beta_o$ es grande, nos encontramos ante una situación conflictiva, ya que para lograr ciertos beneficios, por ejemplo determinada insensibilización frente a dispersión de parámetros de los elementos activos, el amplificador se vuelve inestable.

De aquí se concluye que para aumentar $1 + a_o\beta_o$ sin que el amplificador se inestabilice se deben introducir modificaciones en a_1 , a_2 o a_3 . Esto da origen a las técnicas de compensación.

5. Técnicas de compensación

Vimos que no es posible en general aplicar la cantidad de realimentación deseable sin llevar al mismo tiempo el amplificador a la inestabilidad, a menos que se introduzca algún tipo de variante. Veremos a continuación diversas técnicas para corregir o compensar la respuesta del amplificador y posibilitar el uso de realimentaciones intensas.

5.1. Compensación en la red de realimentación

Si realimentamos el sistema de tercer orden

$$a(s) = \frac{a_o}{1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3}, \quad (62)$$

con una realimentación $\beta(s)$ dependiente de la frecuencia, tendremos

$$A(s) = \frac{a_o}{1 + a_o\beta(s) + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3} \quad (63)$$

de modo que si $\beta(s)$ contiene un término en s se modificará el coeficiente de s . Realimentemos, por consiguiente, con

$$\beta(s) = \beta_o(1 + Ts). \quad (64)$$

La ganancia del sistema es, ahora,

$$A(s) = \frac{a_o}{1 + a_o\beta_o + (a_1 + a_o\beta_oT)s + a_2s^2 + a_3s^3} \quad (65)$$

por lo cual resulta

$$b_0 = 1 + a_0\beta_0, \quad (66)$$

$$b_1 = a_1 + a_0\beta_0T, \quad (67)$$

$$b_2 = a_2, \quad (68)$$

$$b_3 = b_3, \quad (69)$$

Bajo estas condiciones el límite de estabilidad queda determinado por la desigualdad

$$1 + a_0\beta_0 < (a_1 + a_0\beta_0T) a_2/a_3. \quad (70)$$

Aumentando T (es decir, reduciendo el cero de la realimentación) es posible estabilizar el sistema realimentado para cualquier valor de realimentación.

En realidad este tipo de compensación es mucho más poderoso que esto, ya que no sólo sirve para estabilizar, sino que permite *reubicar los polos* con bastante libertad (la única restricción es que, al conservarse a_2 y a_3 , el centro de masa de los polos es fijo). En particular esto posibilita mejorar la respuesta en frecuencia, controlar la respuesta transitoria y, en general, mejorar la estabilidad relativa. Por ejemplo, si queremos que los polos del sistema realimentado sean

$$s_1 = \gamma, \quad (71)$$

$$s_2 = \alpha + j\omega, \quad (72)$$

$$s_2 = \alpha - j\omega, \quad (73)$$

donde

$$s_1 + s_2 + s_3 = 2\alpha + \gamma = -\frac{b_2}{b_3} = -\frac{a_2}{a_3}, \quad (74)$$

entonces resultará

$$b_0 = -b_3\gamma(\alpha^2 + \omega^2), \quad (75)$$

$$b_1 = b_3(\alpha^2 + \omega^2 + 2\alpha\gamma), \quad (76)$$

Comparando con las expresiones de b_0 y b_1 obtenidas anteriormente se tienen las siguientes ecuaciones de diseño:

$$1 + a_0\beta_0 = -a_3\gamma(\alpha^2 + \omega^2), \quad (77)$$

$$a_1 + a_0\beta_0T = a_3(\alpha^2 + \omega^2 + 2\alpha\gamma), \quad (78)$$

De modo que una vez determinada la posición de los polos requerida (compatible con la condición de que el centro de gravedad se mantenga igual al correspondiente al sistema sin realimentar) se pueden aplicar las ecuaciones anteriores para calcular los parámetros de la realimentación, β_0 y T .

Podemos analizar la influencia del cero $s_z = -1/T$ agregado en la red de realimentación por medio de lugar de las raíces. Aplicando las reglas de construcción vistas en la sección 4.2 resulta que el lugar de las raíces tiene dos ramas infinitas cuyas asíntotas son perpendiculares al eje real, que parten del centroide

$$c = \frac{s_a + s_b + s_c + 1/T}{2} \tag{79}$$

Si T es muy pequeño, las asíntotas verticales se encuentran en el semiplano real positivo, por lo cual el sistema puede volverse inestable para valores altos de realimentación.

Si $T > 1/|s_a + s_b + s_c|$, las asíntotas se encuentran en el semiplano real negativo (pues por la estabilidad del sistema a lazo abierto s_a, s_b y s_c son negativos). Esto significa que para cualquier valor de realimentación el sistema será estable.

Cuando el cero coincide con alguno de los polos de la función, a lazo abierto, dicho polo queda fijo al realimentar, ya que la correspondiente porción del lugar de las raíces comienza y termina en dicho punto.

En la figura 20 se muestran los lugares de las raíces correspondientes a varias ubicaciones del cero s_z .

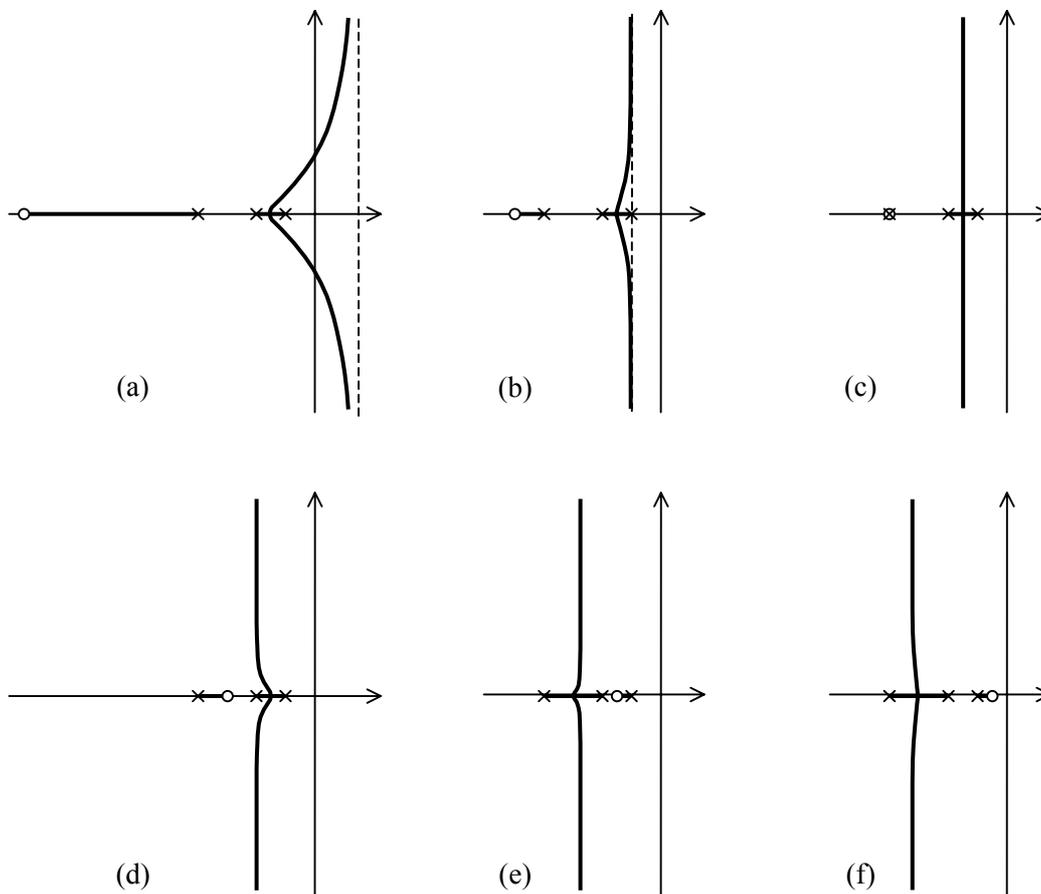


Figura 20. Lugar de las raíces de un sistema de tercer orden compensado mediante un cero en la realimentación. (a) Si el cero es muy negativo las ramas incursionan en $Re > 0$. (b) Si el cero se acerca al polo superior las ramas se mantienen con $Re < 0$. (c) Si el cero coincide con el tercer polo las ramas son semirrectas verticales. (d) Si el cero está entre el segundo y tercer polo mejora a la vez la respuesta frecuencial y transitoria. (e), (f) Si el polo se acerca al origen la respuesta transitoria mejora pero el producto ganancia por ancho de banda se reduce mucho.

En (a) el cero está ubicado muy lejos (vale decir que T es pequeño), por lo cual no es suficiente para lograr estabilizar el sistema para grandes realimentaciones.

En (b) el cero está lo bastante cerca del origen como para estabilizar el sistema realimentado para una realimentación cualquiera. No obstante, para realimentaciones intensas, la parte real de los polos complejos es pequeña, por lo tanto las oscilaciones transitorias se extinguen con lentitud. Teniendo en cuenta que el ancho de banda depende del polo o del par de polos más próximo al origen (es del orden del módulo del polo o del par de polos) resulta que para grandes realimentaciones el ancho de banda puede aproximarse a $1/T$, ya que los polos conjugados están muy alejados. No obstante, esta gran banda de paso puede ser inútil en presencia de los transitorios mencionados.

En (c) el cero agregado en la realimentación coincide con uno de los polos del sistema sin realimentar. Esto hace que al cerrar el lazo ese polo se mantenga fijo, comportándose el resto del lugar de las raíces igual que el correspondiente a un sistema de segundo orden. No obstante debe señalarse que el sistema realimentado resultante *sigue siendo de tercer orden*, con un polo fijo y los otros dos variables con la intensidad de la realimentación.

En (d) el cero está entre el segundo y tercer polo del sistema sin realimentar. Esta ubicación suele ser la más apropiada, ya que permite un buen compromiso entre ancho de banda y respuesta transitoria. En efecto, la parte real de los polos complejos se hace más negativa al aumentar la realimentación, lo cual mejora la velocidad de extinción del transitorio. Al mismo tiempo el polo real, que es el que determina el ancho de banda cuando la realimentación es intensa, no se acerca al origen más que el cero agregado con lo cual se consigue un ancho de banda considerable.

En (e) el cero se ha ubicado entre el primer y el segundo polo. Si bien la respuesta transitoria mejora respecto al caso anterior, el ancho de banda, es menor pues el polo real del sistema realimentado está demasiado cerca del origen.

En (f), finalmente, el cero está localizado antes del primer polo del sistema sin realimentar. Desde el punto de vista de la respuesta en frecuencia esta ubicación es la menos ventajosa, ya que el ancho de banda resulta inferior al del sistema no realimentado. A pesar de ello, debido al efecto de separación o *desdoblamiento* de polos (*pole splitting*) que produce, se suele aplicar en amplificadores operacionales integrados como medio para lograr una compensación, por polo dominante (que luego estudiaremos).

Hagamos un comentario final sobre el régimen transitorio. Según hemos visto, podemos ajustar con cierta libertad la ubicación de los polos complejos, y por consiguiente, podemos ajustar también la frecuencia que tendrán las oscilaciones transitorias debidas a esos polos. En particular, podemos lograr que dicha frecuencia caiga fuera del rango útil del amplificador. Por ejemplo si el amplificador se diseña para procesar señales de audio, podremos ubicar la frecuencia de las oscilaciones transitorias por encima de las frecuencias audibles, es decir por encima de los 20 kHz. De esta forma el transitorio no afectaría en principio a la señal. Otro ejemplo puede ser el de un amplificador para un registrador electromecánico. Si se ubica la frecuencia del transitorio por encima de la banda de paso determinada por la inercia mecánica del dispositivo, dicho transitorio quedará filtrado y por consiguiente no se registrará.

Las conclusiones anteriores son válidas solamente si el amplificador es *perfectamente lineal*, ya que únicamente en ese caso la señal y el transitorio no interfieren entre sí. Si el amplificador es no lineal (como son en mayor o menor grado todos los amplificadores reales) el transitorio puede producir distorsiones en la señal a pesar de que su frecuencia sea superior a la máxima frecuencia útil. Como ejemplo consideremos un amplificador con una tensión de saturación. En la figura 21a se ha graficado la tensión de entrada, cercana a la tensión de saturación. Si dicha señal va acompañada por un

transitorio de extinción lenta tal que la suma de la señal y el transitorio supera la saturación, se producirá una distorsión como la que se ilustra en la figura 21b. Si la distorsión afectara solamente a la frecuencia del transitorio, podría recuperarse la señal por medio de un filtro pasabajos que elimine la alta frecuencia correspondiente al transitorio. Ello no sucede, como se aprecia en la figura 21c, donde se muestra la señal luego de dicho filtro, claramente distorsionada.

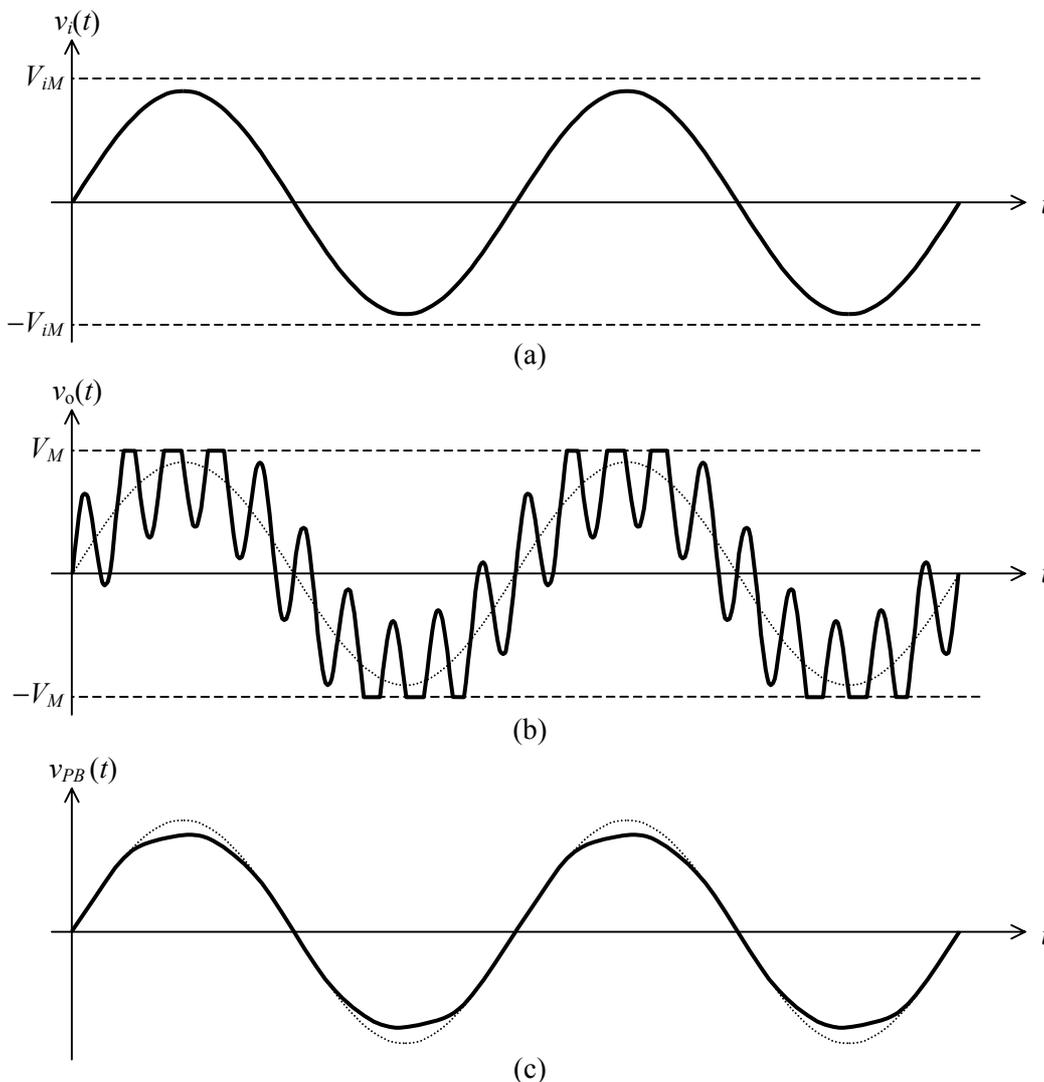


Figura 21. (a) Señal senoidal de entrada de 1 kHz. (b) Señal + transitorio lento de 10 kHz tal que se supera la saturación. (c) Señal luego de un filtro pasabajos de frecuencia de corte 5 kHz.

Esto se aplica también al caso en que el amplificador es inestable, con una respuesta libre divergente cuya frecuencia cae fuera del rango útil. La oscilación parásita que se genera, por sí sola no sería molesta, pero dado que introduce distorsiones en la parte útil de la señal, debe ser evitada.

5.1.1. Realización circuital

La compensación en la red de realimentación se utiliza en los amplificadores con realimentación paralelo-paralelo (es decir, de transimpedancia, con muestreo de tensión y realimentación de corriente). Se implementa agregando un capacitor en paralelo con la resistencia de realimentación, como se indica en la figura 22.

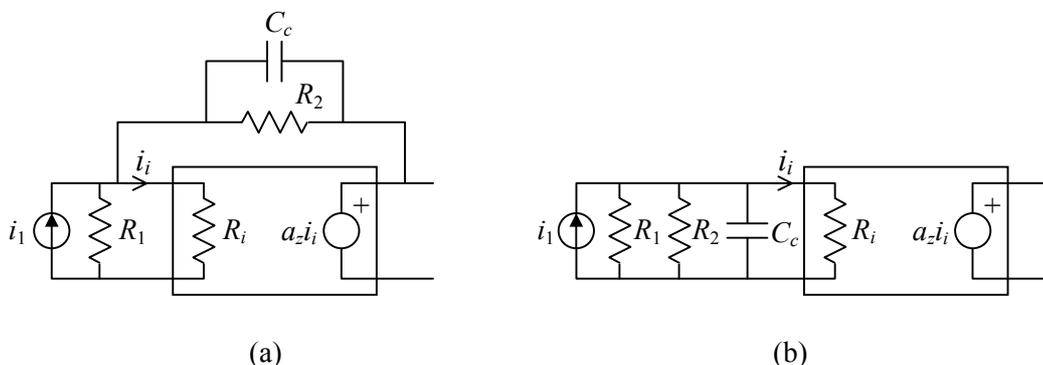


Figura 22. (a) Amplificador de transconductancia realimentado paralelo-paralelo y compensado en la red de realimentación. (b) Amplificador básico con la carga de la realimentación a la entrada.

La realimentación original de transadmitancia,

$$\beta_y = -\frac{1}{R_2}, \tag{80}$$

se sustituye por

$$\beta_y = -\frac{1}{R_2} (1 + R_2 C_c s), \tag{81}$$

donde se aprecia la inclusión del cero buscado. Lamentablemente, un efecto secundario de esta conexión es el agregado de un polo parásito en el amplificador básico, debido a la carga que representa el capacitor a la entrada. Si $a_z(s)$ es la ganancia original del amplificador, luego de considerar esta carga resulta:

$$a_z'(s) = a_z(s) \frac{R_1 // R_2}{R_1 // R_2 + R_i} \frac{1}{1 + R_1 // R_2 // R_i C_c s}. \tag{82}$$

En un amplificador de transconductancia típico $R_i \ll R_1, R_2$, por lo que

$$a_z'(s) \cong \frac{a_z(s)}{1 + R_i C_c s}. \tag{83}$$

Este polo parásito, $-1/(R_i C_c)$, es en general de frecuencia mucho mayor que el cero, por lo que resulta despreciable. La presencia de este cuarto polo, sin embargo, no permite lograr una estabilización para cualquier ganancia de lazo, ya que el lugar de las raíces deja de tener dos asíntotas verticales para volver a tener tres asíntotas a 120° , dos de las cuales ingresan en el semiplano $\text{Re} > 0$ si la ganancia de lazo es muy alta.

5.2. Compensación por polo dominante

En los amplificadores de gran ganancia como, por ejemplo, los amplificadores operacionales, aun para realimentaciones débiles se originan inestabilidades, debido a que a la frecuencia ω_0 a la cual la fase es -180° (es decir donde el lugar de Nyquist cruza el eje real negativo) la ganancia de lazo $a\beta$ tiene módulo mucho mayor que 1. Esto limita severamente la máxima realimentación β a aplicar y con ello los beneficios esperables de dicha realimentación. También queda limitada la mínima ganancia $A_{o\min}$ que puede obtenerse por realimentación.

La idea para solucionar este problema consiste en reducir la ganancia en la frecuencia ω_0 sin alterar la ganancia en baja frecuencia. Esto se puede lograr agregando un polo en el amplificador básico. Dado que en los casos que estamos analizando la ganancia de lazo en la frecuencia de fase -180° es todavía mucho mayor que 1, el polo agregado deberá ubicarse en una frecuencia bastante menor que ω_0 . Esto tiene dos consecuencias. La primera es que el polo agregado suele quedar mucho más cerca del origen que el primer polo original y, por consiguiente, es un polo fuertemente dominante que hace que el amplificador se comporte a lo largo de varias décadas de frecuencia como si fuera de primer orden (de allí el nombre de *compensación por polo dominante*). La segunda es que por esa razón se reduce notablemente el producto ganancia por ancho de banda, con lo cual disminuyen las posibilidades de utilización en alta frecuencia con ganancia elevada. Esto no representa un inconveniente demasiado serio en general ya que el producto ganancia por ancho de banda original es muy elevado.

Veamos ahora la posición del polo a agregar. En principio podría ubicarse de modo que en la frecuencia en la cual la fase de $a(j\omega)\beta(j\omega)$ alcanza los -180° (lo cual sucede después del segundo polo) el módulo resulte menor que 1 (negativo en dB). Sin embargo, el nuevo polo no sólo reduce la ganancia sino que incrementa el retardo de fase, y lo hace en alrededor de 90° por estar ubicado varias décadas antes. Por consiguiente la fase total a esa frecuencia pasaría a valer cerca de -270° y el sistema seguiría siendo inestable.

Esta dificultad se elimina colocando el polo de compensación de modo que la ganancia de lazo en la frecuencia del primer polo original sea 0 dB. De esta forma, como la fase original en esa frecuencia en general no llega a los -90° , siendo del orden de -45° si el segundo polo está lejos, resulta que la fase total está entre -135° y -180° , por lo cual se consigue un margen de fase aceptable (figura 23).

La posición del polo dominante a agregar s_D se puede determinar en forma aproximada haciendo pasar la asíntota de este polo por 0 dB en la frecuencia del primer polo original, es decir $|s_a|$.¹⁰ Si la ganancia en continua del amplificador sin realimentar es a_o , se cumple

$$\beta_o a_o |s_D| = |s_a|, \quad (84)$$

ya que sobre dicha asíntota el producto de la ganancia por la frecuencia es constante, y la ganancia en $|s_a|$ es 1 (0 dB). De ahí resulta

$$s_D = \frac{s_a}{a_o \beta_o}. \quad (85)$$

¹⁰ En realidad, la ganancia en esa frecuencia no es 0 dB sino -3 dB, por lo que el margen de fase obtenido es mejor que el esperado.

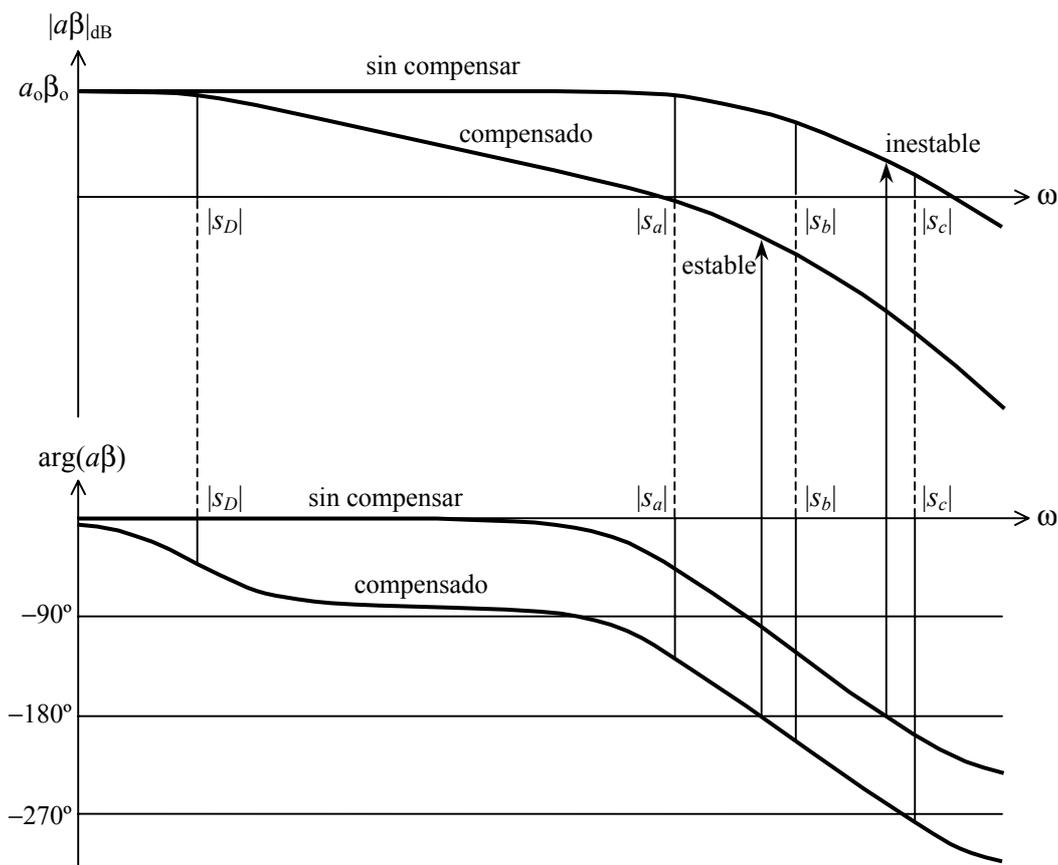


Figura 23. Ubicación del polo de compensación en la compensación por polo dominante.

Aquí se ve claramente que si la ganancia de lazo $a_0\beta_0$ es elevada el polo agregado estará muy por debajo del primer polo original, reduciéndose por consiguiente el producto ganancia por ancho de banda.

Si los primeros polos del amplificador sin compensar están demasiado próximos (por ejemplo a menos de 2 octavas), el margen de fase logrado con la compensación anterior puede ser escaso, por lo cual el criterio de ubicación del polo dominante debe modificarse. En este caso dicho polo debería colocarse de modo que la ganancia sea 0 dB no sobre el primer polo original sino en la frecuencia en la que la fase original pase por -45° (lo cual ocurre a una frecuencia algo menor). De este modo la fase total en esa frecuencia es -135° y por lo tanto el margen de fase obtenido es de 45° . La aplicación de este segundo criterio no permite un cálculo tan directo como el anterior. En este caso conviene hacer una determinación gráfica, o bien estimar la posición una o dos octavas antes de la obtenida por el otro criterio.

En la práctica se presentan dos situaciones. En la primera es necesario proveer una compensación que sirva para varios valores posibles de realimentación β_0 dentro de cierto rango, $0 < \beta_0 < \beta_{0\text{ máx}}$. En la segunda, puede adaptarse la compensación a cada valor de realimentación.

Analicemos primero el caso de una compensación apta para $0 < \beta_0 < \beta_{0\text{ máx}}$. De acuerdo con lo ya estudiado, el mayor riesgo de inestabilidad se tendrá para $\beta_{0\text{ máx}}$. Bastará, pues, elegir s_D de modo que permita compensar para este caso, es decir,

$$s_D = \frac{s_a}{a_o \beta_{o \text{ máx}}}. \quad (86)$$

Para una realimentación $\beta_o < \beta_{o \text{ máx}}$ el amplificador resultará estable. Su ancho de banda puede calcularse a partir del hecho de que el producto ganancia por ancho de banda es constante:¹¹

$$a_o s_D = A_o \omega_c \quad (87)$$

Si, como es habitual, $a_o \beta_o \gg 1$, se tiene

$$A_o \cong 1 / \beta_o, \quad (88)$$

de donde la frecuencia de corte resulta

$$\omega_c = \frac{s_a \beta_o}{\beta_{o \text{ máx}}}. \quad (89)$$

Un caso típico lo constituyen los amplificadores operacionales compensados internamente. En este caso se supone que la realimentación será siempre pasiva, y por lo tanto $\beta_o \leq 1$. En ese caso $\beta_{o \text{ máx}} = 1$, de donde

$$s_D = \frac{s_a}{a_o}. \quad (90)$$

$$\omega_c = s_a \beta_o \leq s_a. \quad (91)$$

La segunda situación enunciada se presenta cuando es posible aplicar una compensación externa al amplificador, en cuyo caso puede lograrse un mejor aprovechamiento al no sobrecompensar. En este caso

$$\omega_c = s_a. \quad (92)$$

En cualquiera de los dos casos la compensación ha reducido el producto ganancia por ancho de banda considerablemente, ya que antes de compensar valía

$$GB = a_o s_a, \quad (93)$$

y después de la compensación vale

$$GB = a_o s_D. \quad (94)$$

5.2.1. Realizaciones circuitales

Existen en realidad diversas formas de lograr esta compensación, que pueden clasificarse, en dos grandes grupos. En el primero, se agrega efectivamente un polo, y en el segundo, se modifica el polo más bajo del amplificador sin compensar.

¹¹ Esto es válido porque luego de la compensación el amplificador se comporta como de primer orden en el rango útil de frecuencias (es decir, mientras la ganancia es mayor que 1).

a) Agregado de un polo

Se logra conectando un capacitor entre un punto por el cual pase la señal y masa, cortocircuitando los colectores de una etapa diferencial con un capacitor, o intercalando un pasabajos RC entre la salida y la carga. En figura 24 se muestran algunos ejemplos

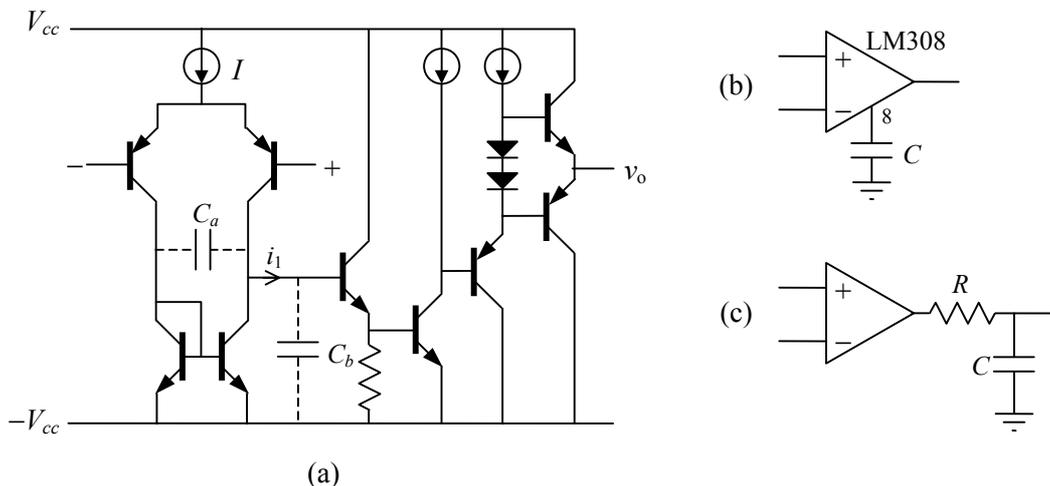


Figura 24. (a) Esquema simplificado de un amplificador operacional integrado en el que se muestran dos posibles ubicaciones de un capacitor de compensación externo (deben proveerse los terminales correspondientes). (b) Ejemplo de conexión de un capacitor externo a masa en el caso del LM 308, equivalente al caso C_b de la parte (a). (c) Ejemplo de agregado de un polo mediante un RC a la salida.

La principal desventaja de estos esquemas está en el hecho de que el capacitor agregado resulta ser demasiado grande para que se pueda integrar, por lo cual la compensación debe ser necesariamente externa. Por otra parte, la compensación externa conlleva la ventaja de poder optimizar la compensación para cada aplicación, de modo de extraer el mayor provecho de las posibilidades dinámicas del dispositivo.

b) Modificación del primer polo

Se basa en el efecto *desdoblamiento de polos (pole-splitting)* que produce una realimentación con un cero, según se vio al estudiar este tipo de compensación. Se implementa conectando un capacitor entre la entrada y la salida de una etapa de gran ganancia. El valor del capacitor resulta en general muy pequeño, por lo cual es muy fácil de integrar. Éste es el tipo de compensación que se utiliza en los amplificadores operacionales compensados internamente, como el LM741, el LM324 o el LF351.

En la figura 25 se muestra el diagrama de bloques de un amplificador operacional. Consta de una primera etapa diferencial de transconductancia (con salida en corriente), una etapa en emisor común cargada con una fuente de corriente, y un seguidor por emisor (nótese que es una versión más simplificada del circuito esquemático de la figura 24a).

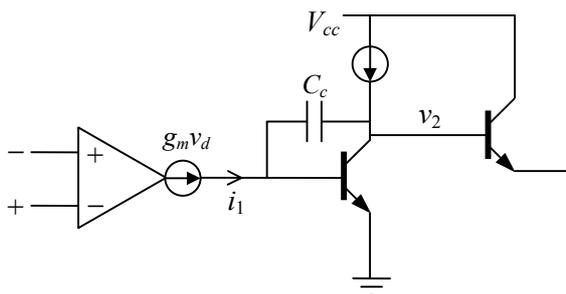


Figura 25. Diagrama de bloques simplificado de un amplificador operacional integrado con un capacitor de compensación interna.

La etapa de ganancia es justamente el emisor común. En realidad se trata de una configuración Darlington, cuya ganancia de corriente es muy alta, pero supondremos que es un emisor común a efectos de simplificar el análisis. Si en el modelo π del transistor despreciamos la resistencia intrínseca de base r_x y la resistencia de realimentación interna r_μ , se obtiene la siguiente ganancia:

$$\frac{v_o}{i_i} = \frac{-r_o r_\pi g_m \left(1 - \frac{C_c + C_\mu}{g_m} s \right)}{1 + \left((C_c + C_\mu)(r_o + r_\pi + r_o r_\pi g_m) + C_\pi r_\pi \right) s + (C_c + C_\mu) r_o C_\pi r_\pi s^2} \quad (95)$$

donde $g_m = I_C / V_T$, $r_o = 1/h_{oe}$, $r_\pi = h_{fe}/g_m \cong h_{ie}$. Aparecen dos polos y un cero positivo. Para valores típicos, el cero es de muy alta frecuencia y los dos polos son reales negativos y están bastante distanciados:

$$s_1 \cong - \frac{1}{(C_c + C_\mu)(r_o + r_\pi + r_o r_\pi g_m) + C_\pi r_\pi} \quad (96)$$

$$s_2 \cong - \frac{(C_c + C_\mu)(r_o + r_\pi + r_o r_\pi g_m) + C_\pi r_\pi}{(C_c + C_\mu) r_o C_\pi r_\pi} \quad (97)$$

Los dos se acercan al origen al aumentar la capacidad de compensación, aunque el efecto más significativo aparece en el polo menor, s_1 . Una aproximación más gruesa pero más simple es:

$$s_1 \cong - \frac{1}{C_c r_o (1 + h_{fe})} \quad (98)$$

En el caso de considerar la etapa de ganancia Darlington, aparecen tres polos¹² con parte real negativa, uno muy bajo y el otro muy alto. Mediante resolución por computadora del sistema de ecuaciones resultante se verifica un contorno de las raíces (al

¹² Dado que se consideran en ese caso 5 capacitores ($C_{\pi 1}$, $C_{\pi 2}$, $C_{\mu 1}$, $C_{\mu 2}$, C_c), parecería que debería haber 5 polos. Sin embargo, se forman dos bucles cerrados de capacitores, perdiéndose dos grados de libertad.

variar C_c) como el que se muestra en la figura 26, donde se puede apreciar el desdoblamiento de polos ya comentado. También aparecen dos ceros reales, uno positivo de muy alta frecuencia y el otro negativo de frecuencia considerablemente mayor que la del polo dominante.

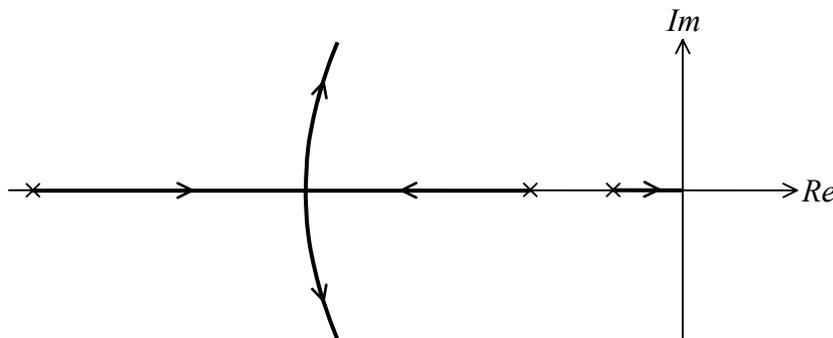


Figura 26. Contorno de las raíces al variar C_c en una etapa de ganancia basada en una configuración Darlington. Las cruces indican los polos originales sin compensación. No se muestran los ceros y el gráfico está fuera de escala.

Para los valores de C_c típicamente utilizados (bastante mayores que C_π y C_μ) el polo más bajo puede aproximarse por

$$s_1 \cong -\frac{1}{C_c r_{o2} (1 + h_{fe1}) h_{fe2}} \tag{99}$$

Si la resistencia r_I de la fuente de corriente no puede despreciarse frente a r_{o2} bastará reemplazar ésta por $r_{o2} // r_I$.

Se suele llamar a este esquema circuital *Compensación por efecto Miller*, debido a que una forma alternativa de explicar la aparición del polo de baja frecuencia es por el hecho de que el capacitor entre colector y la base se refleja como un capacitor mucho mayor entre la base y el emisor, por el teorema de Miller, cortocircuitando la señal para frecuencias bastante bajas.

Un inconveniente de este método de compensación es que reduce el slew-rate del amplificador, limitando el uso en alta frecuencia y gran señal. Ello se debe a que la velocidad de variación de la salida está limitada por la carga de ese capacitor, y ésta por la corriente máxima que puede entregar la etapa diferencial de entrada. En efecto, con referencia a la figura 24a, si la etapa diferencial de entrada saturara, la máxima corriente i_1 que sería posible inyectar a la etapa siguiente es la corriente de polarización I del par diferencial. En estas condiciones, en el circuito de la figura 25 podemos ver que dicha corriente será la máxima capaz de cargar al capacitor C_c . Admitiendo que la base del transistor de entrada de la etapa de ganancia está a un potencial aproximadamente constante, la tensión en el capacitor tendrá un crecimiento lineal con pendiente

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{I}{C_c} \tag{100}$$

Esta será la máxima pendiente posible, y como la señal en el capacitor es reproducida a la salida por los seguidores, el slew-rate será

$$SR = \frac{I}{C_c}. \quad (101)$$

Si suponemos una polarización del orden de $10 \mu\text{A}$ y un capacitor del orden de 30 pF , resulta un SR de $0,33 \text{ V}/\mu\text{s}$, que es relativamente bajo. El problema de tener un slew-rate reducido aparece al trabajar con señales de alta frecuencia y gran amplitud. Dada una senoide de amplitud V_p y frecuencia f , su pendiente será

$$\frac{dv_o}{dt} = \frac{d(V_p \text{ sen } 2\pi f t)}{dt} = 2\pi f V_p \cos 2\pi f t \quad (102)$$

El máximo se obtiene para $t = 0$. Resulta

$$\left. \frac{dv_o}{dt} \right|_{\text{máx}} = 2\pi f V_p. \quad (103)$$

Supongamos, por ejemplo, que se conecta un LM 741 (cuya una ganancia es 100000 y su producto ganancia por ancho de banda, 1 MHz) como amplificador no inversor de ganancia $A_o = 10$. Dado que $A_o \times f_c = 1 \text{ MHz}$, el amplificador tendrá una frecuencia de corte de $1 \text{ MHz}/10 = 100 \text{ kHz}$. Sin embargo, según (103) una senoide de esta frecuencia y amplitud 10 V tiene una pendiente máxima igual a $6,28 \text{ V}/\mu\text{s}$ que es mucho mayor que el slew-rate especificado de $0,5 \text{ V}/\mu\text{s}$. El resultado será una onda prácticamente triangular y de baja amplitud.¹³ De hecho, si queremos evitar distorsiones deberá ser

$$V < \frac{SR}{2\pi f}. \quad (104)$$

Para el ejemplo considerado, la amplitud debería ser $0,79 \text{ V}$.

Dado que la ecuación (101) indica que el slew-rate depende en forma directa de la corriente de polarización del diferencial de entrada, se podría pensar que un aumento de I mejoraría el slew-rate. Este razonamiento no tiene en cuenta, sin embargo, que al aumentar I también aumenta la transconductancia g_{md} de la etapa y, por lo tanto, la ganancia total del amplificador, dada aproximadamente por:

$$A_o = g_{md} (1 + h_{fe1}) h_{fe1} r_o, \quad (105)$$

por lo que para lograr que la asíntota del polo dominante cruce 0 dB a la misma frecuencia (la del segundo polo, que depende de componentes no incluidos en la etapa de ganancia) será necesario desplazar el primer polo hacia las bajas frecuencias en igual proporción, lo cual implica aumentar C_c . El resultado neto es que el slew-rate no aumenta.

Una manera de aumentar I sin aumentar la transconductancia g_{md} es reemplazar los transistores bipolares de entrada por transistores de efecto de campo JFET, ya que a igual corriente de polarización tienen menor transconductancia. Así, mientras el slew-rate típico de un amplificador con entrada bipolar es de $0,5 \text{ V}/\mu\text{s}$, el de un amplificador con entrada a JFET está en el orden de los $10 \text{ V}/\mu\text{s}$.

¹³ La amplitud será igual a $SR \times T/4$, donde $T = 1/f$ es el periodo. En el ejemplo, $T = 10 \mu\text{s}$, por lo que la amplitud resultará $1,25 \text{ V}$.

En algunos amplificadores operacionales (como el LF357 o el LM149) la compensación provista internamente garantiza la estabilidad para ganancia a lazo cerrado mayor que un valor mínimo, por ejemplo, $A_o > 5$. Si bien esto imposibilita ciertas aplicaciones del integrado, como por ejemplo el seguidor de tensión, permite en cambio otras donde sean críticos la repuesta en frecuencia y el slew-rate, ya que el capacitor de compensación resulta entonces menor.

La compensación por efecto Miller no se restringe a los amplificadores compensados internamente. Hay varios amplificadores operacionales en los que se proveen terminales para colocar externamente el capacitor de compensación. No sólo implica esto mayor versatilidad al permitir aplicar una compensación más ajustada a la ganancia a obtener sino que posibilita otras formas de compensación.

Veremos en la sección 5.4 una alternativa para mejorar el slew-rate que aprovecha los terminales de compensación externa para implementar la denominada *compensación feedforward*.

5.3. Compensación por polo-cero

La reducción del producto ganancia por ancho de banda al introducir un polo dominante s_D en el amplificador básico puede subsanarse en alguna medida agregando también un cero s_z , es decir, multiplicando la ganancia del amplificador básico por el factor

$$pz(s) = \frac{1 - s/s_z}{1 - s/s_D}. \quad (106)$$

El criterio para la ubicación de s_D y s_z es el siguiente: se coloca el cero sobre el primer polo del amplificador básico sin compensar, y luego se dispone el polo como en el método anterior, en el amplificador que resulta. Debe señalarse que al hacer coincidir el cero agregado con el primer polo original, éste desaparece, quedando como primer polo el que originalmente era el segundo.¹⁴ De modo que el producto ganancia por ancho de banda aumenta ya que entonces el polo dominante valdrá

$$s_D = s_b / a_o, \quad (107)$$

que tiene valor absoluto mayor que el anterior por ser $|s_b| > |s_a|$.

Conceptualmente este aumento obedece a que al, haber un polo y un cero, en alta frecuencia no se produce el incremento de fase de 90° que existía al agregar solamente un polo, y entonces el paso por 180° se produce a una frecuencia mayor.

5.3.1. Realización circuital

Se logra en general reemplazando en las disposiciones anteriores el capacitor por un capacitor en serie con una resistencia. Puede verificarse que la función de transferencia para el divisor de la figura 27a es

¹⁴ En realidad, por dispersión de valores la coincidencia nunca es perfecta. Ello no importa porque desde el punto de vista de la ganancia y la fase, un pequeño corrimiento local no afecta .

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1 + R_2Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs}, \tag{108}$$

de modo que se obtiene el polo y el cero deseados. La presencia de pequeñas capacidades en serie con resistencias en un circuito revela la presencia de una compensación por polo-cero.

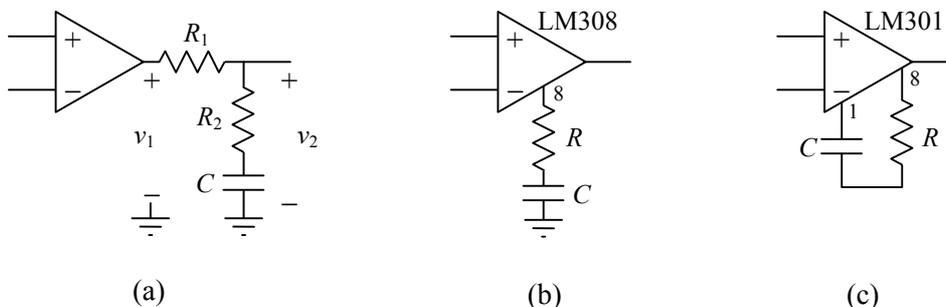


Figura 27. Compensaciones por polo-cero (a) Mediante un circuito RC a la salida. (b) Cortocircuitando un punto de paso de la señal a masa con un RC. (c) Reemplazando el capacitor Miller por un RC.

5.4. Compensación feedforward ¹⁵

La compensación por efecto Miller tenía el inconveniente de un slew-rate bajo debido a la escasa corriente disponible para cargar el capacitor de compensación. Una forma alternativa de mejorar el slew-rate consiste en inyectar corriente desde la entrada mediante otro capacitor, como se muestra en la figura 28.

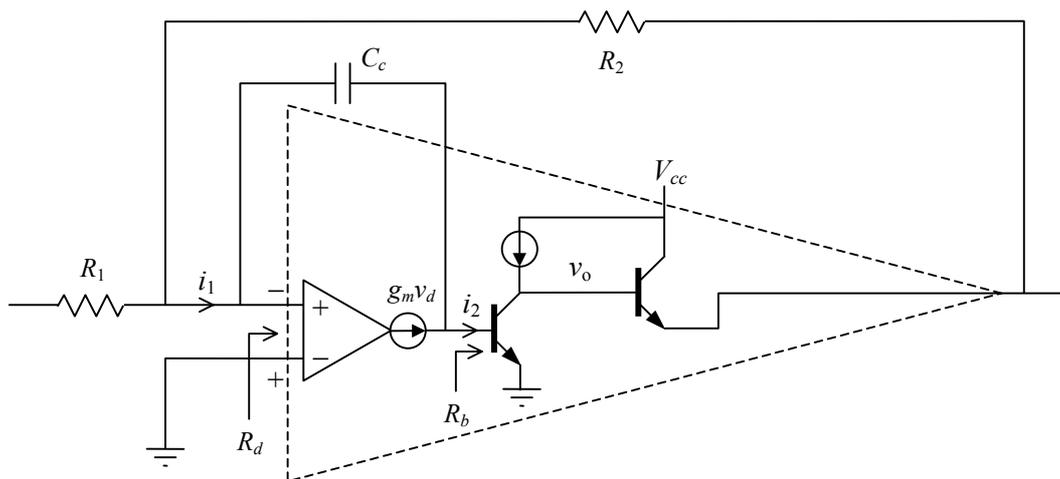


Figura 28. Principio de la compensación *feedforward*.

¹⁵ No hay una traducción elegante para el concepto de *feedforward*, como sí la hay para *feedback*: realimentación o retroalimentación. Por esa razón conservamos la palabra original en inglés.

Si la entrada del transistor de ganancia pudiera considerarse un cero virtual, el capacitor C_c no introduciría ningún tipo de realimentación. En su lugar, su acción sería de tipo puramente feedforward, es decir, añadiría señal desde la entrada en la base de dicho transistor. El resultado sería un cero en la cadena directa, ya que a la transconductancia de la primera etapa se le agregaría la transadmitancia del capacitor:

$$\frac{i_2}{v_d} = g_m + C_c s = g_m \left(1 + \frac{C_c}{g_m} s \right). \tag{109}$$

En la ganancia de *corriente* de la etapa aparecería el capacitor en paralelo con la resistencia de entrada R_d , resultando

$$\frac{i_2}{i_1} = g_m R_d \frac{1 + \frac{C_c}{g_m} s}{1 + R_d C_c s}. \tag{110}$$

Un análisis más cuidadoso revela que la base no está fija sino que ofrece una resistencia R_b , introduciendo un efecto realimentador a través del capacitor. Teniéndolo en cuenta resulta, después de algunos cálculos,

$$\frac{i_2}{i_1} = g_m R_d \frac{1 + \frac{C_c}{g_m} s}{1 + (R_d + R_b(1 - g_m R_d)) C_c s}. \tag{111}$$

El signo (–) aparece porque la realimentación es, en realidad, positiva, por lo cual el polo podría ser positivo inestabilizando el amplificador. En los casos en los que esta compensación es aplicable resulta R_b suficientemente baja como para que predomine el efecto de R_d .

La ecuación (111) tiene la forma de una compensación por polo-cero. El cero se utiliza para compensar el primer polo que habría sin la compensación y el polo resulta dominante. Sin embargo, su frecuencia es más elevada que la requerida para lograr una compensación completa, por lo que esa compensación debe complementarse con una compensación adicional mediante un cero en la realimentación, como se muestra en la figura 29.

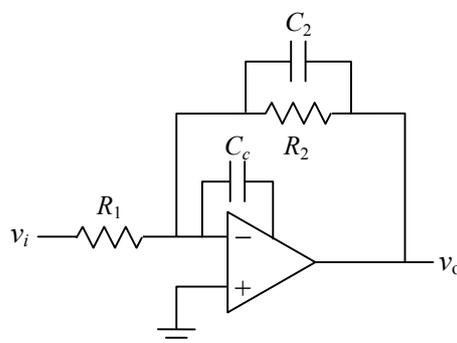


Figura 29. Implementación de la compensación *feedforward* incluyendo un cero en la realimentación.

5.5. Compensación de capacidades de entrada y de carga

Hay ciertas situaciones en las que un amplificador puede llegar a inestabilizarse debido a la presencia de capacidades que aportan corrimientos de fase no contemplados en el análisis inicial del circuito. Un primer ejemplo lo constituye la capacidad parásita de entrada del propio amplificador (a la que se puede agregar la del cableado y de las pistas del circuito impreso). Esta capacidad es normalmente muy pequeña (en el orden de unos pocos pF), pero en algunos casos, por ejemplo en los circuitos con entrada a FET y con resistencias grandes puede provocar un polo dentro de la región de ganancia del amplificador. En la figura 30 se muestra un ejemplo.

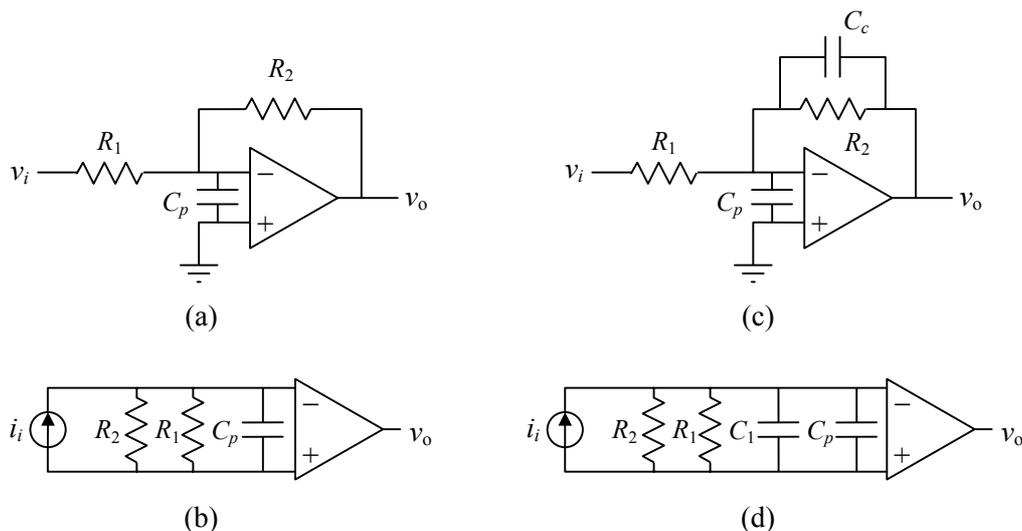


Figura 30. (a) Capacidad parásita en la entrada de un amplificador operacional. (b) Modelo del amplificador básico incluyendo la carga de la realimentación. (c) Compensación del retardo de fase ocasionado por la capacidad parásita a la entrada mediante un cero en la realimentación. (d) Modelo del amplificador básico incluyendo la carga de la realimentación y la compensación

Sin una compensación adicional la ganancia de transimpedancia del amplificador básico incluyendo la carga de la realimentación es

$$a_z = - \frac{R_1 // R_2}{1 + R_1 // R_2 C_p s} a_d, \tag{112}$$

y la realimentación,

$$\beta_y = - 1/R_2. \tag{113}$$

La ganancia de lazo tiene, entonces, un polo en la frecuencia

$$f_p = \frac{1}{2\pi R_1 // R_2 C_p}. \tag{114}$$

Para $R_1//R_2$ grande, este polo puede ser suficientemente bajo como para provocar riesgo de inestabilidad, aun si el amplificador está compensado internamente, pues la compensación no está prevista para retardos de fase mayores que los propios del amplificador. La solución es colocar un cero en la realimentación, mediante el agregado de un capacitor. La realimentación pasa a valer, ahora

$$\beta_y(s) = -\frac{1}{R_2}(1 + R_2 C_c s). \quad (115)$$

Si bien la idea es que el cero cancele el polo parásito, debe notarse que la presencia del capacitor en la realimentación desplaza el polo parásito a frecuencias todavía más bajas. En efecto, la ganancia de transimpedancia resulta ahora

$$a_z = -\frac{R_1 // R_2}{1 + R_1 // R_2 (C_p + C_c)s} a_d. \quad (116)$$

Para lograr la compensación debe igualarse

$$R_1 // R_2 (C_p + C_c) = R_2 C_c, \quad (117)$$

de donde

$$C_c = \frac{R_1}{R_2} C_p. \quad (118)$$

Debe notarse que el hecho de que el cero de la realimentación coincida con el polo parásito no implica que el mismo quede eliminado del amplificador realimentado. Como ya se indicó oportunamente, esta coincidencia no hace sino fijar el polo, es decir independizarlo de la realimentación que se aplique,¹⁶ de manera que el amplificador tendrá un polo en la frecuencia

$$f_{pc} = \frac{1}{2\pi R_1 C_p}. \quad (119)$$

Un segundo problema se tiene en relación con las grandes cargas capacitivas, especialmente en los amplificadores de banda ancha. Al cargar con un capacitor, éste forma un nuevo polo con la resistencia de salida.¹⁷ Dicho polo agrega fase que no estaba contemplada en la compensación interna del amplificador y por lo tanto puede inestabilizarlo. Es interesante notar que la fase puede ser mayor que la que se esperaría a causa de la capacidad de carga y una resistencia de salida, ya que en realidad la impedancia de salida se incrementa con la frecuencia a partir del cero

$$f_z = \frac{1}{2\pi r_\pi (C_\pi + C_\mu)}. \quad (120)$$

¹⁶ Aunque en este caso la compensación ha sido calculada para una realimentación dada, ya que al cambiar la realimentación el polo parásito cambia, según (116).

¹⁷ Aun para capacidades de carga relativamente pequeñas dicho polo puede estar en frecuencias bastante más bajas que lo que podría parecer. Por ejemplo, si $R_o = 100 \Omega$ y $C_L = 0,1 \mu\text{F}$, la frecuencia del polo resulta ser de unos 16000 Hz

Este problema se resuelve separando la salida del circuito completo de la salida del amplificador operacional mediante una resistencia R cuyo valor se aproxime a la resistencia de salida del amplificador, es decir

$$R = R_o, \quad (121)$$

y realimentando localmente con un capacitor C_c de valor pequeño al amplificador, como se indica en la figura 31.

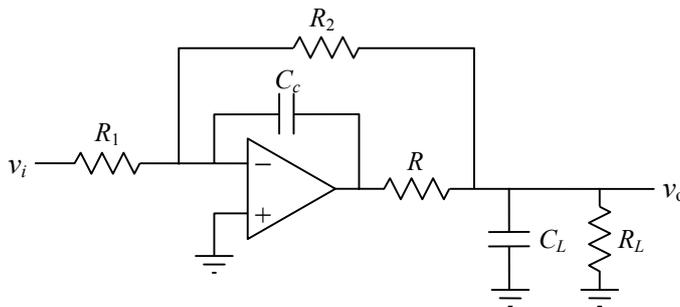


Figura 31. Compensación para corregir el problema de las grandes cargas capacitivas.

6. Conclusiones

La realimentación, necesaria en los amplificadores electrónicos para lograr un funcionamiento adecuado frente a las cualidades no ideales de los elementos activos con que se diseñan, trae aparejados problemas de estabilidad, que pueden variar desde una mala respuesta transitoria hasta una oscilación permanente que interfiere con el funcionamiento esperado. Para solucionar estas dificultades se recurre a las técnicas de compensación. Existen básicamente dos enfoques: por modificación de la red de realimentación, y por modificación del amplificador básico. En el primer caso, se agrega un cero a la realimentación, pudiendo lograrse no solamente una estabilización del amplificador, sino además aumentos en la respuesta en frecuencia y en la rapidez de extinción de los transitorios. En el segundo, se agrega un polo o un polo y un cero al amplificador. Esta metodología tiene la desventaja de reducir notablemente el producto ganancia por ancho de banda, por lo cual se emplea solamente en amplificadores de gran ganancia como los amplificadores operacionales. También desmejora la velocidad de respuesta en gran señal (slew-rate). Las ventajas principales son la sencillez, la posibilidad de obtener una compensación válida para diversas realimentaciones, y que admite ser integrada, posibilitando la fabricación de amplificadores con compensación interna. En algunos casos es posible corregir las desventajas mediante la compensación *feedforward*. Finalmente, es posible introducir esquemas específicos de compensación en el caso de capacidades parásitas de entrada o de grandes capacidades de carga.

Bibliografía

- Gray, Paul; Mayer, Robert. "Analysis and Design of Analog Integrated Circuits". Editorial John Wiley & Sons. Singapur, 1993 (Hay versión castellana)
- Kuo, Benjamin. "Sistemas Automáticos de Control". Editorial C.E.C.S.A. Barcelona, España, 1974.
- Millman, Jacob; Halkias, Christos. "Integrated Electronics". Editorial McGrawHill.
- Rey Pastor, Julio. "Elementos de Análisis Algebraico". Unión Poligráfica de Madrid. Madrid, España, 1935.
- Thornton, Searle, Pederson, Adler, Angelo. "Circuitos Multietapa a transistores". Serie SEEC, tomo 5. Editorial Reverté. Buenos Aires, 1971
- National Semiconductor. Linear Databook. 1995
- National Semiconductor. Audio Radio Handbook. 1980
- National Semiconductor. Linear Application Handbook. 1986