1. Leyes Físicas Fundamentales

El proceso de modelado analítico, tal como lo definimos en el capítulo anterior, se divide en tres grandes etapas. La primera de ellas consiste en la delimitación del modelo en función de los fenómenos que resultan relevantes de acuerdo al problema que se quiere resolver. Esta es una etapa que no puede sistematizarse fácilmente y que requiere por ende de una cierta dosis de intuición y por sobre todo de una vasta experiencia en relación con el sistema a modelar.

Una vez delimitados los fenómenos que se consideraron relevantes para la construcción del modelo, se pasa a la siguiente etapa en la que se deben formalizar las relaciones constitutivas y estructurales asociadas respectivamente a los fenómenos considerados y a la forma en que estos se disponen dentro del sistema. En los sistemas físicos, estas relaciones constitutivas y estructurales encuentran su expresión formal (matemática) en las leyes fundamentales de los dominios de la física asociados a los fenómenos mencionados.

Por este motivo, el modelado analítico de un sistemas físico no es posible sin un conocimiento de las leyes físicas elementales asociadas a los fenómenos en cuestión. Teniendo en cuenta que en este curso trataremos con sistemas provenientes de diferentes dominios (mecánicos, eléctricos, hidráulicos y térmicos), haremos a continuación un repaso de las leyes físicas que rigen la dinámica de los mencionados sistemas.

SISTEMAS MECÁNICOS:

La mecánica clásica (newtoniana) se ocupa de describir fenómenos asociados con el movimiento de los cuerpos. Por este motivo, en los sistemas mecánicos tendremos habitualmente como variables descriptivas las posiciones, velocidades y aceleraciones, con sus relaciones constitutivas básicas:

$$\dot{x} - v = 0$$
$$\dot{v} - a = 0$$

La ley fundamental de la mecánica clásica, y también la más utilizada para el modelado de sistemas es sin dudas la segunda ley de Newton:

$$\dot{p} - F_{neta} = 0$$

que establece que la derivada de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza neta aplicada. Esta ecuación constituye una ley dinámica que será una relación constitutiva fundamental asociada a cada cuerpo en el que se considere la presencia de masa. Recordemos también que definíamos a la cantidad de movimiento como el producto de la masa por la velocidad:

$$p - m \cdot v = 0$$

Otras leyes importantes son las asociadas a los fenómenos de fricción y de elasticidad. En el caso de la fricción, una hipótesis habitual es representar la misma como una fuerza que se opone al movimiento cuya magnitud se relaciona con la velocidad.

$$f(F_{friccion}, v_{friccion}) = 0$$

En el caso particular de la fricción viscosa la relación se considera lineal, caracterizada por un coeficiente de rozamiento b.

$$F_{friccion} - b \cdot v_{friccion} = 0$$

El fenómeno de elasticidad, por su parte, vincula la fuerza ejercida sobre un cuerpo con la deformación sufrida por el mismo. Una aproximación habitual para representar esta relación en un resorte es la siguiente:

$$F_{resorte} - k \cdot \Delta x = 0$$

donde el parámetro k es la constante de elasticidad.

El resto de las relaciones que podrán aparecer en sistemas mecánicos serán en general relaciones estructurales.
Por ejemplo, bajo ciertas simplificaciones, un cuerpo sujeto a una pared mediante un cable elástico en presencia de rozamiento con el piso puede representarse como sigue:

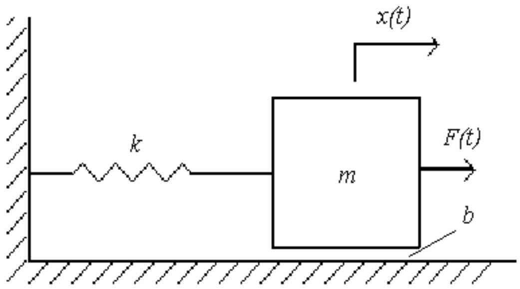

Figura 1. Sistema mecánico "masa resorte"

En este caso, además de las relaciones constitutivas vistas, tendremos las relaciones estructurales:

$$F(t) - F_{friccion} - F_{resorte} - F_{neta} = 0$$

$$x - l_0 - \Delta x = 0$$

$$v_{fricción} - v = 0$$

l_0 : es la posición de la masa en la cual el resorte no se encuentra deformado.

SISTEMAS MECÁNICOS ROTACIONALES

Todas las leyes constitutivas vistas para los sistemas mecánicos traslacionales tienen su equivalente rotacional, donde las fuerzas (F) son reemplazadas por torques (t) en tanto que las posiciones, velocidades y aceleraciones traslacionales (x, v, a) son reemplazadas por sus versiones angulares (q, w, a) .
Encontramos también elementos roto-traslacionales que vinculan variables de ambos dominios. Un caso típico es una polea, en la cual se verifica:

$$v - r \cdot w = 0$$
$$t - r \cdot F = 0$$

donde v es la velocidad tangencial en el borde de la polea cuyo radio es r.

SISTEMAS ELÉCTRICOS:

En los sistemas eléctricos encontramos como variables descriptivas principalmente tensiones y corrientes. Bajo hipótesis de parámetros concentrados, la teoría de circuitos caracteriza los fenómenos asociándolos a dipolos que vinculan estática o dinámicamente tensiones y corrientes.

Basado en la ley de Ohm, la teoría de circuitos representa el fenómeno de disipación de energía mediante un dipolo (resistor) que establece una relación instantánea (estática) entre la tensión y corriente:

$$u_R - R \cdot i_R = 0$$

Donde la constante R es la resistencia asociada (estamos considerando una resistencia lineal, pero la relación entre tensión y corriente podría ser no lineal).

Otros fenómenos fundamentales en estos sistemas son los de acumulación de energía en forma de campos eléctrico y magnético. El primer caso es descripto por la ley de Coulomb, de la cual se deducen las relaciones constitutivas que describen el fenómeno de capacitancia:

$$q - C \cdot u_C = 0$$

donde q es la carga almacenada y C es la capacidad asociada (en este caso la relación es lineal, pero podría no serlo). Hay además una relación entre q e i dada por :

$$\dot{q} - i_C = 0$$

De esta forma, el capacitor (dipolo asociado al fenómeno de capacitancia) vincula dinámicamente la corriente y tensión en bornes.

Las relaciones entre las variables asociadas al fenómeno de almacenamiento de energía en el campo magnético pueden deducirse de las leyes de Faraday y de Ampere. El fenómeno, que la teoría de circuitos caracteriza mediante la inductancia, puede describirse entonces a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\dot{f} - u_L = 0$$
$$f - L \cdot i_L = 0$$

donde f es el flujo concatenado y L es el coeficiente de inductancia (nuevamente describimos el caso lineal, pero la última ecuación podría ser no lineal).

Además de estas relaciones constitutivas, encontramos relaciones estructurales asociadas a los circuitos eléctricos. Estas no son otras que las Leyes de Kirchoff de tensión y corriente.
Recordemos entonces que éstas establecen respectivamente que la suma de las tensiones en una malla cerrada es igual a cero y que la suma de las corrientes entrantes a un nudo es también nula.

De esta forma, si tenemos un circuito como el que sigue:

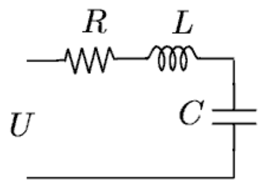

Figura 2. Circuito RLC serie.

tendremos no sólo las relaciones constitutivas del resistor, de la inductancia y del capacitor, sino también las relaciones estructurales:

$$U - u_R - u_L - u_C = 0$$
$$i - i_R = 0$$
$$i - i_L = 0$$
$$i - i_C = 0$$

También existen otros componentes de circuitos con relaciones más complejas entre tensión y corriente según las hipótesis realizadas y componentes en los cuales no es posible (o no es conveniente) la representación mediante dipolos (un transistor por ejemplo).

Finalmente, hay también elementos que representan fenómenos de conversión electromecánica de energía. Un ejemplo es el motor de corriente continua, donde esta conversión se caracteriza con las ecuaciones

$$e - k \cdot f \cdot w = 0$$
$$t - k \cdot f \cdot i_a = 0$$

siendo k una constante y f el flujo de excitación.

SISTEMAS HIDRÁULICOS

Los fenómenos de mecánica de fluídos se cuentan entre los más difíciles de modelar y analizar en sus aspectos dinámicos. Para fluídos compresibles en general es insoslayable tener en cuenta la variación temporal y espacial de las magnitudes físicas que los describen. Esto los categoriza como *sistemas de parámetros distribuidos*, y conduce a su tratamiento con modelos dinámicos en derivadas parciales (las leyes fundamentales que gobiernan estos fenómenos están resumida en las ecuaciones de Navier-Stokes). Por otra parte los cambios en las variables descriptivas de los fluídos originan cambios en su temperatura, de la cual a su vez dependen los parámetros físicos de aquellos. Este fuerte acoplamiento fluidomecánico-térmico viene a aumentar la complejidad de las descripciones más detalladas.

No obstante, hay en la técnica un subconjunto muy importante de sistemas fluidodinámicos que se pueden describir con un muy buen grado de aproximación mediante *modelos de parámetros concentrados*. Esto significa que en determinadas regiones espaciales las magnitudes físicas pueden considerarse uniformes (constantes en el espacio), teniendo sólo variación temporal. Esto conduce a su descripción dinámica con ecuaciones diferenciales ordinarias. Este subconjunto de sistemas es designado usualmente como *Sistemas Hidráulicos*. En estos casos, el fluído es en general agua o aceite, y siendo muy baja su compresibilidad, muy altas las presiones de trabajo, y bajas las velocidades aún para caudales importantes, se pueden hacer una serie de hipótesis simplificatorias que permiten tratarlos como circuitos hidráulicos.

De aquí en más, seguiremos el enfoque de la Ingeniería, donde es usual plantear las ecuaciones de balance de materia a través del caudal de volumétrico en lugar del caudal másico. También despreciaremos en general la interacción con los efectos térmicos. Si bien en algunos casos trataremos fenómenos con fluídos altamente compresibles con las técnicas desarrolladas para sistemas hidráulicos, cabe aclarar que el enfoque tendrá validez a condición de considerar pequeñas variaciones dinámicas de las variables en torno a sus puntos estáticos de operación.
De acuerdo a lo explicado en los párrafos anteriores, las variables descriptivas en los sistemas hidráulicos representarán principalmente presiones y caudales volumétricos.

El primer fenómeno que consideraremos es el de resistencia hidráulica. Este fenómeno produce una caída de presión en un conducto a causa de la pérdida de energía (fricción interna en el fluído y de este con las paredes del conducto). En general, la caída de presión se relaciona con el caudal según una relación constitutiva del tipo:

$$f(\Delta P, Q) = 0$$

En ciertos casos particulares esta relación es lineal, de la forma:

$$\Delta P - R \cdot Q = 0$$

La simbología técnica que se usa para estos elementos en circuitos hidráulicos es la siguiente:

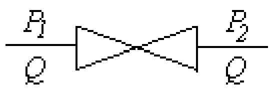

Figura 3. Resistor hidráulico (válvula)

En ciertos casos la relación entre caudal y presión puede depender también de un parámetro que representa la variación de la apertura de una válvula. Entonces, se suelen tener características del tipo:

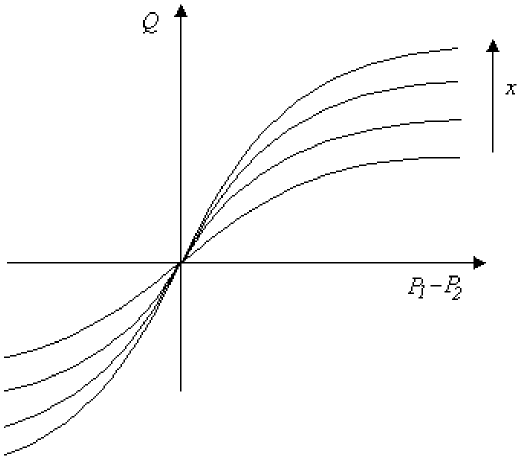

Figura 4. Relación constitutiva de una válvula modulada.

y en este caso, la simbología es:

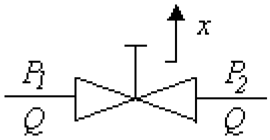

Figura 5. Válvula modulada.

Otro de los fenómenos escenciales que aparecen en los sistemas hidráulicos es el almacenamiento de energía potencial en un fluído. Ésta puede ser energía potencial del campo gravitatorio (en un tanque por ejemplo) o energía potencial elástica. En este último caso puede darse por acumulación de materia en un volumen fijo dado (fluído compresible, donde aumenta la presión al aumentar la densidad) o por acumulación de materia (fluído incompresible) en un recipiente de paredes elásticas, o por una combinación de ambos efectos a la vez. Dado que estamos trabajando con caudales volumétricos, trataremos el primer fenómeno como si fuera el segundo, es decir supondremos incompresible al fluído y le atribuiremos elasticidad a las paredes del recipiente, de manera de lograr un efecto equivalente.

Los dos casos de almacenamiento de energía potencial (gravitatoria o elástica), se representan con un elemento denominado *capacitor hidráulico*, que básicamente vincula presión y volumen de fluído acumulado con una relación constitutiva del tipo:

$$f(P,V) = 0$$

que en el caso lineal toma la forma

$$V - C \cdot P = 0$$

donde C es un coeficiente llamado capacidad. Tanto en el caso lineal como en el no lineal, hay que agregar otra relación constitutiva fundamental, que vincula dinámicamente el caudal con el volumen acumulado:

$$\dot{V} - Q = 0$$

En un tanque de área constante A sabemos que la presión en el fondo debida a la columna de agua es

$$P = r \cdot g \cdot h = \frac{r \cdot g}{A} \cdot V$$

de donde resulta

$$C = \frac{A}{r \cdot g}$$

Si el área del tanque no es constante, la función que vincula *P* y *V* es no lineal ya que la relación entre *V* y *h* no es lineal.

Además de las relaciones constitutivas vinculadas a la presencia de fenómenos de disipación y almacenamiento de energía en los fluídos, en los circuitos hidráulicos encontramos relaciones estructurales que son completamente análogas a las leyes de Kirchoff.

Así, en el circuito hidráulico que sigue:

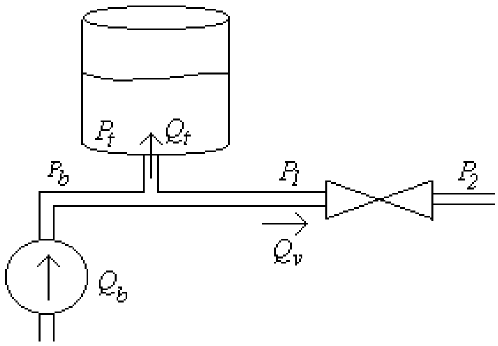

Figura 6. Circuito Hidráulico

encontramos las siguientes relaciones estructurales:

$$Q_b - Q_t - Q_v = 0$$
$$P_b - P_t = 0$$
$$P_t - P_1 = 0$$

que se suman a las relaciones constitutivas del tanque y la resistencia hidráulica.

En el caso de los sistemas hidráulicos, también encontramos elementos que vinculan los mismos con sistemas mecánicos. Un típico componente hidro-mecánico es el cilindro y pistón:

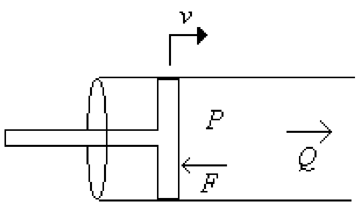

Figura 7. Cilindro y pistón

En este caso, las relaciones entre la velocidad del pistón, el caudal empujado por el mismo, la presión del fluído y la fuerza que esta ejerce sobre el pistón son:

$$F - A \cdot P = 0$$
$$Q - A \cdot v = 0$$

SISTEMAS TÉRMICOS

La termodinámica estudia una gran diversidad de procesos vinculados con el concepto de calor y la conservación de la energía. Basándonos en un enfoque clásico (sin considerar procesos irreversibles) distinguiremos tres tipos de fenómenos elementales: generación, almacenamiento y transferencia de calor. Las variables descriptivas de estos fenómenos representarán principalmente temperatura (que denominaremos con la letra q, medida en Kelvin), cantidad de calor (Q, en Joules) y flujo de calor (f, en Vatios).

Debido a que la temperatura se considera en general distribuida espacialmente, los modelos de sistemas térmicos resultan habitualmente de parámetros distribuidos y se expresan mediante ecuaciones en derivadas parciales. Dado que en este curso nos ocuparemos exclusivamente de modelos de parámetros concentrados (expresables mediante ecuaciones diferenciales ordinarias), haremos hipótesis simplificatorias (que son las habituales en los problemas de ingeniería) para eliminar el espacio como variable absoluta. Estas simplificaciones consisten en partir el espacio en distintas regiones y considerar que cada región tiene una temperatura uniforme.

Entendemos como fenómeno de generación de energía térmica la conversión en calor de energía mecánica, eléctrica, química, etc. Su estudio recurre entonces a las leyes de disipación de estos dominios físicos.

Considerando fenómenos exclusivamente térmicos, el almacenamiento de energía resulta del balance de calor de un cuerpo involucrado en un proceso termodinámico. De esta forma, tendremos siempre una relación fundamental (estructural):

$$Q_{neto} - Q_{generado} - Q_{recibido} + Q_{entregado} = 0$$

Por otra parte, si el cuerpo no cambia su estado de agregación, dicho almacenamiento produce variaciones de temperatura. La relación entre ambas magnitudes puede estudiarse en base al concepto de calor específico a partir de la expresión básica:

$$m \cdot c \cdot (q_f - q_i) - Q_{neto} = 0$$

siendo m la masa del cuerpo, c el calor específico por unidad de masa (función del material del cuerpo y en general de la temperatura), q_i la temperatura inicial del cuerpo y q_f la temperatura después del ingreso de la cantidad de calor Q_{neto}. Derivando esta última expresión, se obtiene la relación constitutiva asociada al fenómeno de almacenamiento.

$$m \cdot c \cdot \dot{q} - \dot{Q}_{neto} = 0$$

donde la derivada del calor neto es el flujo de calor neto (f) entrante al cuerpo. Se define además como capacidad térmica al coeficiente $C = m \cdot c$.

Dentro de los fenómenos de transferencia, encontramos en primer lugar el fenómeno de conducción del calor, descripto por la ley de Fourier. Bajo las simplificaciones asociadas a la concentración de parámetros, se puede reducir su estudio al caso de dos recintos a temperaturas diferentes separados por una pared de área A y espesor e con conductividad l.

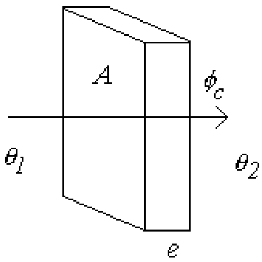

Figura 8. Conducción de calor a través de una pared.

En este caso, el flujo de calor a través de la pared se puede calcular según la ley:

$$f_c - \frac{l \cdot A}{e} \cdot (q_1 - q_2) = 0$$

definiéndose el parámetro $R_l = \dfrac{e}{l \cdot A}$ como la resistencia térmica.

Otra forma de transferencia de calor es a través del transporte de masa. Si en un recipiente ingresa una cantidad de masa *m* que viene a una temperatura q esto aportará una energía $e = m \cdot c \cdot q$, de donde se puede deducir fácilmente que de manera instantánea el flujo de calor estará relacionado con la temperatura y el (caudal) volumétrico según la relación:

$$f_t - r \cdot c \cdot Q \cdot q = 0$$

Puede haber además transferencia de calor por convección, que satisface relaciones matemáticas similares a la conducción (aunque su fundamento físico es mucho más complejo) y por radiación, en la cual el flujo de calor es proporcional a la diferencia entre las cuartas potencias de las temperaturas de los cuerpos (esto se puede deducir de la Ley de Stefan-Boltzman).

Además de las relaciones constitutivas asociadas a los fenómenos de transporte y almacenamiento de calor, encontraremos relaciones estructurales acordes al sistema. Ya mencionamos una que es la expresión del balance de calor que define la cantidad de calor neta almacenada. En general, trabajaremos con su versión derivada, expresada como balances de flujos:

$$f_{neto} - f_{generado} - f_{recibido} + f_{entregado} = 0$$

Por ejemplo, en el sistema de la figura

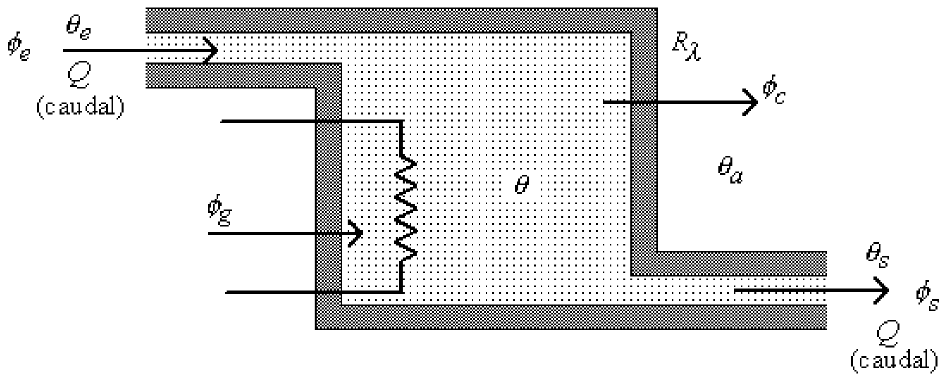

Figura 9. Sistema térmico con generación almacenamiento y transferencia de calor.

encontramos las relaciones estructurales:

$$f_{neto} - f_e - f_g + f_c + f_s = 0$$

$$q - q_s = 0$$

que se suman a las relaciones constitutivas correspondientes a los fenómenos de transporte de masa, conducción de calor hacia el ambiente y generación de calor (a través del resistor).

En este último caso, el resistor eléctrico genera un flujo de calor que es igual a la potencia disipada

$$f_g - u_R \cdot i_R = 0$$

siendo ésta una de las relaciones constitutiva del elemento que vincula la parte eléctrica de la térmica del sistema (la otra relación constitutiva del elemento es puramente eléctrica si se desprecia el efecto de la temperatura sobre la resistencia).

2. El proceso de modelado: del sistema físico real al idealizado

Cuando nos encontramos con un sistema real a modelizar, veremos algo muy distinto a lo que muestran los esquemas de las figuras 1, 2, 6 y 9. Estos esquemas, que corresponden a lo que llamaremos *Sistema Físico Idealizado*, son producto de simplificaciones que se realizan acorde al problema a estudiar.

Si estamos interesados en estudiar el movimiento de un cuerpo sujeto a una pared mediante un cable elástico, el esquema de la Figura 1 aparece como una posibilidad razonable. Ahora, si nos interesa estudiar como se transmiten las vibraciones del cuerpo a la pared y al piso, el esquema hecho es completamente inútil, ya que parte de la suposición de que tanto la pared como el piso están fijos. Es decir, mas allá que se trate el mismo sistema, el problema planteado lleva a idealizaciones diferentes.

Incluso aún en el caso que nos interese estudiar la dinámica (despreciando las vibraciones transmitidas), las hipótesis de rozamiento y elasticidad lineales realizadas pueden resultar inadecuadas si se requiere mucha precisión o una gran excursión respecto del equilibrio. En particular, si la fuerza aplicada fuera muy grande, la hipótesis de un cable elástico ideal provocará un gran error ya que no podrán despreciarse los fenómenos de deformación plástica.

Si compramos en un negocio de electrónica un capacitor, un resistor y un inductor y los conectamos en serie, el esquema de la Figura 2 aparece como el más apropiado para predecir su comportamiento ante una determinada alimentación. Pero si en la alimentación colocamos una fuente que genere una frecuencia muy elevada, el esquema mencionado será completamente inútil, ya que será necesario tener en cuenta los fenómenos descriptos en la teoría de la líneas de transmisión.

De manera similar, el circuito hidráulico de la Figura 6 sería adecuado, bajo ciertas hipótesis, para estudiar un sistema de riego. En base al esquema podríamos analizar aspectos como la altura necesaria del tanque o el caudal que debe proveer la bomba. Sin embargo, el modelo no muestra hacia que altura debe elevar el agua la bomba y por lo tanto no podemos saber que diferencia de presión tendrá y por ende que potencia deberá desarrollar. Aún en el caso que no nos interese este problema, la hipótesis de que la válvula de salida es lineal será válida sólo si no hay grandes variaciones de presión y la hipótesis de bomba ideal puede no ser muy afortunada.

En síntesis, es muy importante no perder de vista que los modelos obtenidos resultarán adecuados sólo para resolver determinados problemas y dentro de un rango de operación dado. Es decir, el sistema físico idealizado dependerá no sólo del sistema real en sí, sino también del problema a resolver y del *intervalo de validez* que se pretenda tener para el modelo resultante.

Por esto, antes de realizar las hipótesis simplificatorias, hay que tener muy claro no sólo los principales aspectos del sistema real que se intenta modelar, sino también las características del problema a tratar y la excursión de las señales a estudiar.

Lamentablemente, no hay una metodología que nos permita realizar estas simplificaciones de forma sistemática. Como mencionamos antes, esta etapa del modelado (que es quizás las más importante en virtud de que todo el resto dependerá de lo que se haga aquí) se resuelve en gran medida a partir de consideraciones sujetas a la experiencia y al conocimiento del proceso real.

Sin embargo, los sistemas complejos pueden habitualmente dividirse en subsistemas más simples de los cuales se encuentran modelos en base a simplificaciones ya probadas en problemas similares. Por eso, es fundamental antes de comenzar a realizar las primeras simplificaciones de un sistema real, buscar en la literatura modelos de sistemas similares en los cuales se manifiesten los mismos fenómenos.

No ahondaremos más en este tema, pero es muy importante tener en cuenta siempre que debido a que la obtención de un modelo se basa en la aplicación hipótesis simplificatorias, los modelos tendrán en general validez siempre que se respeten las mencionadas hipótesis.

3. El proceso de modelado: del sistema idealizado al modelo matemático

Una vez realizadas las simplificaciones y obtenidos esquemas como el de las Figuras 1, 2, 6 y 9 decimos que tenemos un *Sistema Físico Idealizado*. Aunque estos esquemas en general contienen toda la información que se necesita para la construcción de un modelo matemático, este pasaje no es trivial.

Asociadas al esquema, tendremos un buen número de relaciones matemáticas que vincularán las variables descriptivas del modelo y que serán consecuencia tanto de los fenómenos físicos considerados (relaciones constitutivas) como de la interacción entre los mismos en función de su disposición en el sistema (relaciones estructurales). En general, las relaciones constitutivas estarán determinadas explícitamente en el esquema (teniendo en cuenta las leyes físicas correspondientes) mientras que la obtención de las relaciones estructurales requerirá de algún tipo de análisis geométrico y/o topológico.

De esta forma, una vez que se tiene el sistema físico idealizado el siguiente paso hacia la obtención de un modelo matemático será el de reunir las relaciones constitutivas y estructurales involucradas. En muchos casos encontraremos conjuntos de relaciones matemáticamente equivalentes, por lo que no serán necesarias todas las relaciones para la construcción del modelo.

Una vez que tengamos todas las relaciones matemáticas necesarias, aún no tendremos un modelo matemático muy útil. Si bien tendremos una especie de sistema de ecuaciones (en realidad una mezcla de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones algebraicas), este sistema así planteado no tendrá una estructura que nos permita estudiar y resolver problemas.

Por esto, el paso siguiente tras reunir las relaciones constitutivas y estructurales es el de obtener un sistema de ecuaciones que tenga un estructura que permita aplicar alguna teoría matemática adecuada ya establecida.

Dado que trataremos con sistemas físicos bajo hipótesis de parámetros concentrados, buscaremos arribar a los modelos con que trata la teoría de ecuaciones diferenciales. En general, utilizaremos dos tipos de expresiones: las *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* (EDO) y los *Sistemas de Ecuaciones de Estado y de Salida* (EE/ES).

Para llegar a este tipo de expresiones deberemos manipular las ecuaciones dadas por las relaciones constitutivas y estructurales siguiendo diferentes técnicas. Para el caso particular de las ecuaciones de estado, no intentaremos deducirlas directamente a través de las relaciones mencionadas, sino que utilizaremos modelos gráficos (Diagramas de Bloques y Bond Graphs) como un paso intermedio ya que de esta forma se simplifica notablemente el problema, pero esto será tema de capítulos posteriores.

Para las EDOs veremos también métodos a partir de los modelos gráficos o de las EE/ES que serán los más apropiados para los sistemas complejos. Sin embargo, antes mostraremos brevemente como se pueden obtener directamente a partir de las ecuaciones correspondientes a las relaciones constitutivas y estructurales ya que este es el camino seguido tradicionalmente por la Física Aplicada.

Recordemos en primer lugar que una EDO es un modelo del tipo *Entrada-Salida*, es decir, un modelo en el cual no aparece explícito el concepto de estado. La forma genérica de una EDO es una ecuación del tipo:

$$f(\frac{d^n y(t)}{dt^n},\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}},\ldots,y(t),\frac{d^k u(t)}{dt^k},\frac{d^{k-1} u(t)}{dt^{k-1}},\ldots,u(t))=0$$

donde y(t) es la variable de salida (una variable descriptiva de interés) y $u(t)$ es una variable de entrada (variable descriptiva cuya evolución se considera independiente de lo que ocurra con el sistema). El número entero n es la máxima derivada de la salida, y es lo que se denominará *orden* del modelo. Como veremos más adelante, esta definición de orden no es en realidad muy diferente de la que vimos para las ecuaciones de estado.

Un caso particular que será de utilidad para tratar una gran variedad de problemas se da cuando el sistema es lineal. En este caso, la EDO toma la forma que sigue:

$$a_n\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_0\cdot y(t)-b_k\frac{d^k u(t)}{dt^k}-b_{k-1}\frac{d^{k-1} u(t)}{dt^{k-1}}-\ldots-b_0\cdot u(t)=0$$

siendo los coeficientes a_i y b_i constantes.

Para obtener una ecuación de este tipo a partir de un conjunto de ecuaciones correspondientes a un sistema físico idealizado, el procedimiento es simple en teoría, aunque puede resultar muy complicado y engorroso de llevar a cabo.

La idea básica es definir una variable de salida y una de entrada. Por ejemplo para el sistema mecánico de la Figura 1, éstas podrían ser la posición de la masa (x) y la fuerza F. El segundo paso es tomar alguna ecuación para comenzar. En general conviene utilizar una relación estructural de balance. En todos los sistemas físicos encontraremos tales ecuaciones ya que siempre encontraremos leyes que expresen balances de energía, de masa, etc.

En el caso de nuestro sistema mecánico esta ecuación es la que calcula la sumatoria de fuerzas:

$$F(t)-F_{friccion}-F_{resorte}-F_{neta}=0$$

Una vez hecho esto, debemos comenzar a utilizar las demás relaciones para reemplazar las variables que no correspondan a la EDO. Por ejemplo, tenemos:

$$F_{friccion}-b\cdot v_{friccion}=0$$

de donde despejamos:

$$F_{friccion}=b\cdot v_{friccion}$$

además sabemos que:

$$v_{fricción}-v=0\Rightarrow v_{fricción}=v$$

y tenemos:

$$\dot{x}-v=0\Rightarrow v=\dot{x}$$

por lo que finalmente resulta:

$$F_{fricción}=b\cdot\dot{x}$$

Por otro lado, procediendo de manera similar podemos deducir que:

$$F_{neta}=\dot{p}=m\cdot\dot{v}=m\cdot\ddot{x}$$

y además

$$F_{resorte}=k\cdot\Delta x=k(x-l_0)$$

de donde, reemplazando y ordenando llegamos a que:

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = F(t) + k \cdot l_0$$

que es una EDO *lineal afín* debido al término $k \cdot l_0$. Si elegimos el origen de coordenadas tal que x sea cero cuando el resorte está en su posición de reposo, este término desaparece y tendremos la EDO lineal y estacionaria de segundo orden:

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = F(t)$$

Otra variable de potencial interés para tomar como salida es la velocidad. Si repetimos el procedimiento, tendremos:

$$F_{fricción} = b \cdot v$$
$$F_{neta} = \dot{p} = m \cdot \dot{v}$$

y para el resorte:

$$F_{resorte} = k \cdot \Delta x = k(x - l_0) = k \cdot \int v \cdot dt - k \cdot l_0$$

por lo que al reemplazar nos queda:

$$m \cdot \dot{v} + b \cdot v + k \cdot \int v \cdot dt = F(t) + k \cdot l_0$$

que no es una ecuación del tipo que estamos buscando debido a la presencia de la integración. En este caso, la solución es derivar miembro a miembro, llegando a:

$$m \cdot \ddot{v} + b \cdot \dot{v} + k \cdot v = \dot{F}(t)$$

Queda como ejercicio obtener las EDOs correspondientes a los ejemplos de las figuras 2, 6 y 9. En el último caso, deberá tratarse al caudal $Q(t)$ como un parámetro variable, quedando el resto de las hipótesis a consideración del lector

Como podrá observarse, el método visto para la obtención de la EDO no es completamente sistemático y no es realmente aplicable a sistemas muy complejos. En el próximo capítulo estudiaremos la técnica de los diagramas de bloques cómo un método mucho más estructurado y práctico para el modelado y que nos permitirá obtener modelos matemáticos equivalentes en ecuaciones de estados y en ecuaciones diferenciales ordinarias de sistemas bastante más complejos que los tratados en esta sección.

Bibliografía

Cátedra de Dinámica de los Sistemas Físicos (1995). “Sistemas Fluidodinámicos”. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.

Cátedra de Dinámica de los Sistemas Físicos (1991). “Sistemas Térmicos”. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.

Cellier, F., (1993). *Continuous System Modeling*. Springer Verlag, New York.

Karnopp, D. and Rosenberg (1983). *Introduction to Physical System Dynamics*, Mc.Graw Hill, New York.