Análisis de la Estabilidad Interna de los Sistemas No Lineales

La estabilidad es una de las características más importantes de los sistemas dinámicos. Al analizar la estabilidad de dichos sistemas, surgen diferentes problemas según la manera en que se la caracterice y los sistemas en consideración. Por ejemplo, considerando sistemas lineales y estacionarios, existen métodos para poder determinar su BIBO-estabilidad, como el criterio de la respuesta al impulso, el criterio de Routh y el de Nyquist. Sin embargo cuando se tratan sistemas no lineales, estos métodos no tienen validez.

La riqueza dinámica de los sistemas no lineales presenta ciertos fenómenos que no se evidencian al estudiar los sistemas lineales (ver Khalil, H., 1996). Uno de estos fenómenos es la existencia de ***múltiples puntos de equilibrio aislados***. Un sistema lineal puede tener un solo punto de equilibrio aislado, y por lo tanto un solo estado de régimen estacionario que −si el punto es asintóticamente estable− atrae al estado del sistema independientemente del estado inicial. En cambio, los sistemas no lineales pueden tener varios puntos de equilibrio, y la convergencia a uno estable depende del estado inicial. Debido a esto, resulta importante estudiar la estabilidad de los diferentes puntos de equilibrio de los sistemas no lineales para poder entender mejor el comportamiento del mismo.

Aquí se analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio de los sistemas no lineales mediante el estudio del comportamiento del estado en un entorno de los mismos. Para ello se presenta el concepto de estabilidad en el sentido de Lyapunov[1] como así también una introducción los métodos de Lyapunov para el análisis de estabilidad.

1- Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

Un punto de equilibrio de un sistema dinámico es estable en el sentido de Lyapunov si todas las soluciones que nacen en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en dichas cercanías; de otra forma resulta inestable. El punto de equilibrio además es asintóticamente estable si las soluciones además de permanecer en las cercanías del mismo, tienden hacia el punto de equilibrio a medida que transcurre el tiempo. A continuación se formalizan estos conceptos.

Considérese el siguiente sistema autónomo[2]:

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

donde las componentes del vector *n-dimensional f(x)* son continuas y además son funciones Lipschitzianas[3] en forma local de *x*, definidas para todo *x* en el dominio $D \in \Re^n$. La condición de Lipschitz garantiza la existencia y unicidad de la solución de (1) que satisface la condición inicial $x(0) = x_0$.

[1] Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) fue un matemático ruso cuyo trabajos, que aparecieron publicados a mediados de 1892, dieron origen al estudio de estabilidad mediante un enfoque teórico que hoy lleva su nombre.

[2] Un modelo se denomina autónomo cuando *f* no depende de *t*.

Suponiendo que $\bar{x} \in D$ es un **punto de equilibrio** de (1); o sea $f(\bar{x}) = 0$, se pretende caracterizar y analizar la estabilidad de $\bar{x}$. Por conveniencia se considera $\bar{x} = 0$ lo cual no representa una perdida de generalización ya que cualquier punto de equilibrio $\bar{x} \neq 0$ puede ser trasladado al origen mediante el cambio de variable $y := x - \bar{x}$ con lo que se tiene:

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + \bar{x}) := g(y), \qquad \text{con } g(0) = 0$$

En esta nueva variable *y*, el sistema $\dot{y} = g(y)$ tiene como punto de equilibrio al origen del espacio de estados. En consecuencia , de ahora en más se considerará que $f(x)$ satisface $f(0) = 0$ y se estudiará la estabilidad del origen del espacio de estados $x = 0$ como punto de equilibrio.

Definición 1: *Si $\phi(t; t_0, x_0)$ representa la solución de (1) dada a partir de la condición inicial $x(t_0) = x_0$ a partir del instante inicial $t = t_0$, entonces el punto de equilibrio $x = 0$ de (1) es:*

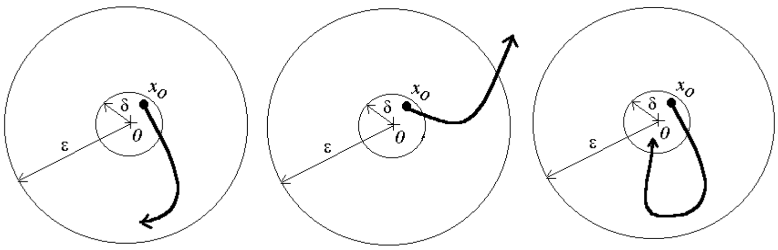
- ***Lyapunov estable*** *si para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon, \ \forall t \geq 0$$

- ***Inestable*** *si no es estable*
- ***Asintóticamente estable*** *si es estable y δ se puede elegir de modo que*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \phi(t; t_0, x_0) = 0$$

En la figura 1 se muestra una representación gráfica de la definición 1 para los tres casos de estabilidad definidos.



(a) (b) (c)

Fig.1 Puntos de equilibrio en $x = 0$ con trayectorias solución representativas para un caso: (a) estable, (b) inestable y (c) asintóticamente estable.

Una vez definidos los diferentes tipos de estabilidad de los puntos de equilibrio, es necesario encontrar métodos para determinar la misma.

---

[3] Una función $f(x)$ se denomina Lipschitziana en forma local en un punto x_0 si satisface la condición de Lipschitz: $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ para *x*, *y* en un entorno de x_0, donde *L* es una constante positiva y $\|\bullet\|$ denota la norma Euclídea en $\Re^n$, i.e., $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$.

2- Análisis de Estabilidad de los Puntos de Equilibrio de los Sistemas No Lineales Mediante sus Aproximaciones Lineales

Usualmente, el primer paso en el análisis de sistemas no lineales es realizar una linealización en torno a un punto de equilibrio y analizar el comportamiento del modelo lineal. Entonces el siguiente teorema establece condiciones bajo las cuales es posible extraer conclusiones sobre la estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema no lineal a través del análisis de estabilidad del modelo linealizado en torno a dicho punto de equilibrio (Khalil, H., 1996). El Teorema se conoce como Método Indirecto de Lyapunov.

Teorema 1 (Método Indirecto de Lyapunov)[4]: *Sea* $x = 0$ *un punto de equilibrio del sistema no lineal dado por* $\dot{x} = f(x)$ *donde* $f : D \to \Re^n$*, con* $D \subset \Re^n$*, es continuamente diferenciable y* D *es un entorno del origen. Sea la matriz Jacobiana*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\ \Big|_{x=0}$$

Entonces, notando con λ_i *a los autovalores de A (i = 1, ...,n).*

- *El origen es asintóticamente estable si* $\Re e\{\lambda_i\} < 0$*, para todo* λ_i
- *El origen es inestable si* $\Re e\{\lambda_i\} > 0$ *para uno o más autovalores de A.*

Este teorema brinda un simple procedimiento para determinar la estabilidad del origen como punto de equilibrio de un sistema no lineal a través de su modelo incremental lineal (MiLin). Sin embargo, todavía es posible extraer más información del sistema linealizado como lo muestra el siguiente teorema:

Teorema 2 (Hartman-Grobman)[5]: *Sea* $x = 0$ *un punto de equilibrio del sistema no lineal dado por* $\dot{x} = f(x)$ *donde* $f : D \to \Re^n$*, con* $D \subset \Re^n$*, es continuamente diferenciable y* D *es un entorno del origen. Sea la matriz Jacobiana*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\ \Big|_{x=0} \quad \text{continua sobre } D$$

Entonces, si A no tiene autovalores nulos o imaginarios con parte real nula, existe un homeomorfismo h, es decir una función que tiene inversa y ambas continuas definida en un entorno abierto U del origen, tal que para cada $x_0 \in U$*, hay un intervalo abierto* $I_0 \subset \Re$ *que contiene al cero de modo que para todo* $x_0 \in U$ *y* $t \in I_0$*:*

$$h(\phi(t;t_0,x_0)) = \quad e^{A(t-t_0)}\ h(x_0)$$

donde $\phi(t;t_0,x_0)$ *representa la solución de* $\dot{x} = f(x)$ *dada a partir de la condición inicial* $x(0) = x_0$ *a partir del instante inicial* $t = t_0$*.*

Es decir, que h transforma las trayectorias del sistema no lineal en las del sistema linealizado, preservando la parametrización, o sea el sentido en el que se recorren.

[4] Para la prueba de este teorema ver Khalil, H., 1996.
[5] Para la prueba de este teorema ver Perko, L. 1991.

En la figura 2 se muestra un esquema de los retratos de fase del sistema no lineal y del linealizado bajo la operación del homeomorfismo *h*.

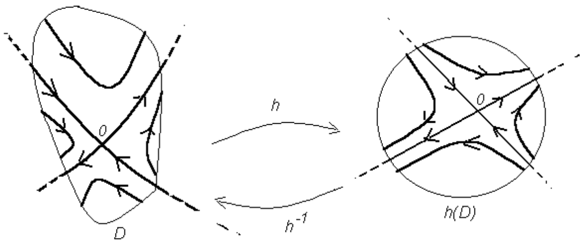


Fig. 2 Representación gráfica de la operación del homeomorfismo *h*.

Este teorema no solo brinda información sobre la estabilidad del punto de equilibrio sino que también permite conocer cualitativamente el comportamiento de las trayectorias en un entorno del mismo.

Ninguno de ambos teoremas establece condición alguna cuando $\Re e\{\lambda_i\} \leq 0$ para todo i, y $\Re e\{\lambda_i\} = 0$ para algún i. En este caso, la linealización no es suficiente para determinar la estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema no lineal, como así tampoco para establecer la forma del retrato de fase entorno al origen, y se debe recurrir a alguna otra herramienta para el análisis.

3- Estabilidad en el sentido de Lyapunov

De la teoría clásica de la Mecánica, es sabido que un sistema es estable si su energía, una función positiva, es continuamente decreciente, o sea tiene derivada negativa, hasta que el sistema alcanza su estado de equilibrio (Ogata, K., 1990). El segundo método de Lyapunov es una generalización de este hecho. Lyapunov demostró que ciertas otras funciones aparte de la función energía pueden ser usadas para la determinación de la estabilidad del punto de equilibrio de un sistema. Antes de presentar el teorema de Lyapunov se necesario revisar algunos conceptos.

Sea $V : D \to \Re$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D \subset \Re^n$ que contiene al origen, entonces:

- $V(x)$ se dice que es una función ***definida positiva*** si $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ en $D - \{0\}$.
- $V(x)$ se dice que es una función ***semidefinida positiva*** si $V(0) = 0$ y $V(x) \geq 0$ en D.
- $V(x)$ se dice que es una función ***definida negativa*** si $-V(x)$ es definida positiva.
- $V(x)$ se dice que es una función ***semidefinida negativa*** si $-V(x)$ es semidefinida positiva.
- La derivada temporal de *V* sobre las trayectorias de (1) se denomina ***derivada orbital***, se denota $\dot{V}(x)$, y esta dada por:

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)=\nabla V(x)\bullet f(x)$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial V}{\partial x_1}, & \frac{\partial V}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial V}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ \vdots \\ f_n(x)\end{bmatrix} \tag{2}$$

La derivada de V sobre las trayectorias del sistema depende de la ecuación vectorial de estado del sistema. De este modo, $\dot{V}(x)$ será diferente para diferentes sistemas.
Si $\phi(t;t_0,x_0)$representa la solución de (1) dada a partir de la condición inicial $x(0)=x_0$ a partir del instante inicial $t=t_0$, entonces

$$\dot{V}(x)=\frac{d}{dt}V(\phi(t;t_0,x_0))$$

Consecuentemente, si $\dot{V}(x)$ es negativa, V será decreciente sobre las trayectorias solución de (1). Ahora se está en condiciones de presentar el segundo método o método directo de Lyapunov:

Teorema 3 (Método directo de Lyapunov): *Sea $x=0$ un punto de equilibrio del sistema $\dot{x}=f(x)$ y sea $V:D\rightarrow\Re$ un campo escalar continuamente diferenciable definido en un dominio $D\subset\Re^n$ que contiene al origen, entonces*

- *Si $V(x)$ es* ***definida positiva*** *y $\dot{V}(x)$ es* ***semidefinida negativa****, el origen es un punto de equilibrio* ***estable****.*
- *Si $V(x)$ es* ***definida positiva*** *y $\dot{V}(x)$ es* ***definida negativa****, el origen es un punto de equilibrio* ***asintóticamente estable****.*

Una función $V(x)$ que cumple con las condiciones impuestas en el teorema anterior se denomina ***función de Lyapunov***. Este método es una herramienta de análisis muy poderosa. Sin embargo, presenta dos desventajas. La primera es que no hay un método sistemático para hallar una función de Lyapunov por lo tanto hay que proponer una función candidata a función de Lyapunov y probar si la misma cumple con los requisitos de estabilidad. La segunda es que el teorema solo brinda condiciones suficientes por lo tanto el hecho de no encontrar una función candidata a Lyapunov que satisfaga las condiciones de estabilidad o de estabilidad asintótica no significa que el origen es inestable o no asintóticamente estable.

Se puede demostrar que si $V(x)$ es una función de Lyapunov, el conjunto de los x tal que $V(x)=c$, para alguna contante $c>0$ es una hypersuperficie cerrada (denominada ***superficie de Lyapunov*** o ***superficie de nivel***) en el espacio de estados que encierra al origen. El uso de las superficies de Lyapunov hace que el teorema sea fácilmente interpretable. Las superficies que corresponden a constantes decrecientes $0<c_2<c_1$, se encuentran íntegramente contenidas como lo muestra la figura 3 para el caso de $\Re^2$.

La condición $\dot{V}(x)\leq 0$ se puede interpretar geométricamente a través de (2) ya que la misma significa que el producto escalar entre el gradiente de V y el campo vectorial *f* es negativo:

$$\nabla V(x)\bullet f(x)\leq 0$$

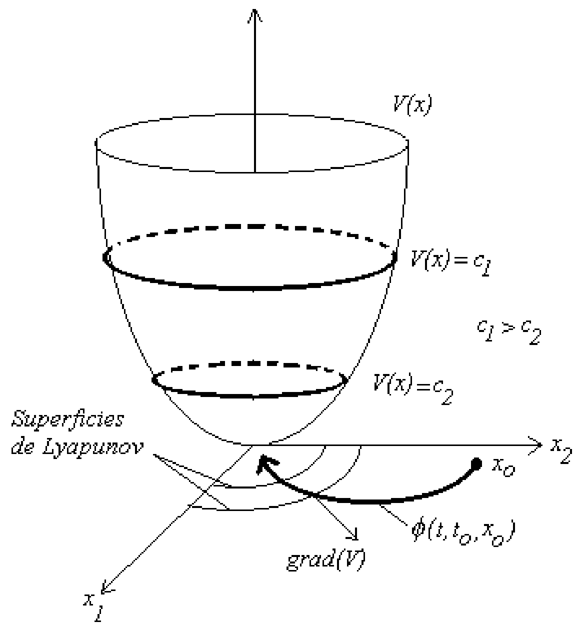


Fig. 3 Interpretación geométrica de las superficies de Lyapunov para el caso de $\Re^2$.

Teniendo en cuenta que f es un vector tangente a la trayectoria solución, la condición $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \bullet f(x) \leq 0$ significa que cuando una trayectoria cruza una superficie de Lyapunov, esta trayectoria lo haca hacia adentro y nunca vuelve a salir. Además cuando $\dot{V}(x) < 0$ las trayectorias se mueven desde una superficie hacia otra interior correspondiente a un c menor. Cuando c decrece, las superficies de Lyapunov correspondientes se achican hacia el origen mostrando que las trayectorias se aproximan al origen a medida que transcurre el tiempo. En cambio, si $\dot{V}(x) \leq 0$ no se puede asegurar que las trayectorias converjan al origen, pero se puede concluir que el origen es estable ya que las trayectorias quedarán contenidas en algún entorno ε del origen si la condición inicial x_0 está dentro de alguna superficie de Lyapunov contenida en dicho entorno ε (Khalil, H., 1996).

Principio de Invariancia

Cuando $\dot{V}(x)$ semidefinida negativa, todavía es posible determinar la estabilidad asintótica del origen como lo muestra el siguiente corolario del Principio de Invariancia de LaSalle[6]:

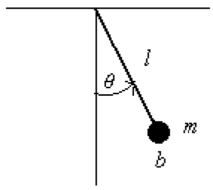
Corolario: *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (1). Sea $V : D \to \Re$ una función definida positiva continuamente diferenciable sobre el dominio $D \subset \Re^n$ que contiene al origen $x = 0$, y además $\dot{V}(x) \leq 0$ en D. Sea $S = \{ x \in \Re^n \mid \dot{V}(x) = 0 \}$. Si ninguna trayectoria solución de (1) que entra en la región S permanece allí indefinidamente salvo la solución trivial, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.*

Este corolario establece que si para un sistema de la forma de (1) se encuentra una función de Lyapunov que es semidefinida positiva, para concluir que el origen es asintóticamente estable se debe demostrar que cuando las trayectorias entran en la zona del espacio de estado donde se anula $\dot{V}$ no permanecen allí para siempre a menos que se este en el punto de equilibrio. A continuación se presenta un ejemplo que ilustra todos lis conceptos presentados hasta ahora.

[6] Tanto el teorema de LaSalle como su demostración se pueden consultar en Khalil, H.,1996.

Ejemplo de Aplicación

Un péndulo simple moviéndose en un plano vertical se puede modelar según:



$$ml\ddot{\theta} = -mg\ sin(\theta) - bl\dot{\theta}$$

Donde m es la masa concentrada en el extremo de la barra, l es la longitud de la barra y b es el coeficiente de fricción translacional. Si se definen las variables de estado como $x_1 := \theta$ y $x_2 := \dot{\theta}$ se obtiene el siguiente modelo en EE:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\alpha\ sin(x_1) - \beta\ x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

con $\alpha = g/l$ y $\beta = b/m$.

El sistema dado por (3) tiene puntos de equilibrio en $\bar{x} = \begin{bmatrix} n\pi \\ 0 \end{bmatrix}$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Observando el sistema físico es evidente que hay dos puntos de equilibrio característicos uno para $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y otro para $\bar{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$ y los demás son repeticiones de estos a medida que el péndulo da distinta cantidad de vueltas.

Dado que se está tratando un modelo de un sistema físico y se conoce el significado de las variables, resulta natural tomar como función candidata de Lyapunov a la energía[7] del mismo, que para este caso es la suma de la energía potencial y cinética de la masa:

$$V(x) = \int_0^{x_1} \alpha\ sin(y)\,dy + \frac{1}{2}x_2^2 = \alpha\left(1 - \cos(x_1)\right) + \frac{1}{2}x_2^2$$

donde se eligió la referencia de energía potencial de modo que $V(0) = 0$. La función $V(x)$ es definida positiva en el dominio $-\pi < x_1 < \pi$ y la derivada de la misma sobre las trayectorias de (3) resulta:

$$\dot{V}(x) = \alpha\ \dot{x}_1 \sin(x_1) + x_2\dot{x}_2 = -\beta\ x_2^2$$

La misma resulta semidefinida negativa ya que si $x_2 = 0$ entonces $\dot{V}(x) = 0$ independientemente del valor de x_1. Por lo tanto ***sobre el eje*** x_1 se anula la derivada de la función de Lyapunov y por lo tanto no es posible concluir sobre la estabilidad asintótica del origen. Aquí es donde juega su papel el ***Principio de Invariancia de LaSalle***:

[7] En realidad la función elegida es la energía dividida por la constante *(ml²)*

Principio de Invariancia de LaSalle:
Considérese el conjunto $\{\dot{V}(x)=0\}=\{x_2=0\}$. Que una trayectoria entra en esta región y permanezca allí para siempre significa:

$$x_2 \equiv 0 \Rightarrow \dot{x}_2 \equiv 0 \Rightarrow sin(x_1)=0$$

Esto se puede cumplir sólo para $x_1 = 0$ dada la restricción del dominio de $V(x)$. Por lo tanto se puede concluir que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Queda planteado como ejercicio el análisis por medio del MiLin para cada punto de equilibrio.

Bibliografía

***Khalil, H.**, Nonlinear Systems,* Second Edition, Prentice-Hall (1996)

***Khalil, H.**,* Chapter 56: *Stability,* in *The Control Handbook,* pp.889-897, *IEEE Press* Edited by W. Levine (1997)

***Ogata, K.**, Modern Control Engineering,* Second Edition, Prentice-Hall (1990)

***Perko, L**., Differential Equations and Dynamical Systems,* Springer-Verlag (1991)