UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE FORMACIÓN BÁSICA

DEPARTAMENTO DE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Departamento
de-SIRE FCEIA
SISTEMAS DE REPRESENTACION

PUBLICACIÓN Nº 1 – 1976

1 - PROYECCIÓN DE ÁNGUOS
2 - VALOR DE ÁNGULOS DIEDROS
3 - PERPENDICULARIDAD
4 - INTERSECCÍON DE RECTAS CON PLANOS
Y PLANOS ENTRE SÍ

Autor:
Arq. CARLOS E. SCHMIDT

Colaborador:
Ing. MIGUEL WERBER

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

PROYECCION DE ANGULOS - RECTA DE MAXIMA PENDIENTE - VALOR DE ANGULOS DIEDROS - PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS Y PLANOS - INTERSECCION DE RECTAS CON PLANOS - INTERSECCION DE PLANOS ENTRE SI

Si en el espacio tenemos dos rectas coplanares a y b (fig. 1), que determinan un ángulo α ; la proyección ortogonal de estas rectas sobre un plano π , determinan en general un ángulo α_π tal que $\sphericalangle \alpha_\pi \neq \sphericalangle \alpha$.-

Decimos en general, porque en el caso particular de que: a $//\pi$ y b $//\pi$ se tendrá: $\sphericalangle \alpha_\pi = \sphericalangle \alpha$.-

Es decir un ángulo es idéntico a su proyección cuando ambos lados son paralelos al plano de proyección.-

Seguidamente demostraremos que:

1°) Es condición necesaria en general que ambos lados de un ángulo sean paralelos al plano de proyección para que un ángulo y su proyección sean iguales.-

2°) Que es excepción (es decir caso particular) la proyección del ángulo recto, siendo para éste caso suficiente que se cumpla la condición de ser, un solo lado del ángulo paralelo al plano de proyección, para que el ángulo y su proyección sean iguales.-

Si consideramos (fig. 2) un triángulo rectángulo ABC en una posición tal respecto al plano de proyección π , que "a" sea paralelo a π y "b" sea oblicuo respecto a π

Tendremos:

1°) que a_π // "a" por ser a_π proyección ortogonal de una recta "a" que es paralela a π

2°) que "a" $\perp$ Γc por ser "a" $//\pi$ y Γc $\perp \pi$

3°) " "a" $\perp$ "b" por dato

4°) de 2°) y 3°) se deduce que: "a" $\perp$ plano (Γc . "b")

5°) de 1°) y 4°) se deduce que: $a_\pi \perp$ plano (Γc . "b")

de 5°) teniendo en cuenta que b_π es recta del plano (Γc ."b") y recordando que cuando una recta es perpendicular a un plano, es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por su pie; se tendrá que:

$$a_{\pi} \perp b_{\pi}$$

con lo que queda demostrado lo manifestado bajo 2º), es decir que cuando un ángulo recto tiene un lado paralelo al plano de proyección, su proyección es un ángulo recto.-

Comparemos ahora los dos triángulos ABC y $A_{\pi} B_{\pi} C_{\pi}$(fig. 2); ambos son rectángulos teniendo un cateto igual $\overline{BC} = \overline{B_{\pi} C_{\pi}}$) y el otro desigual $\overline{C_{\pi} A_{\pi}} < \overline{CA}$ pués la proyección $\overline{C_{\pi} A_{\pi}}$ de un segmento $\overline{CA}$ que es oblicuo respecto a un plano tiene que ser menor que el segmento.-

De esta desigualdad surge que:

$$\measuredangle \beta_{\pi} < \measuredangle \beta$$

con lo que queda demostrado lo manifestado bajo 1º), es decir que no es suficiente que un lado de un ángulo sea paralelo al plano de proyección para que el ángulo y su proyección sean iguales (con excepción del caso del ángulo recto) sino que ambos lados deben ser paralelos al plano de proyección.-

De la desigualdad $\measuredangle \beta_{\pi} < \measuredangle \beta$ surge además que si un ángulo agudo (β) tiene un lado paralelo a un plano de proyección, su proyección es un ángulo menor; en cambio teniendo en cuenta que por ser $\measuredangle \beta + \measuredangle \gamma = \measuredangle \beta_{\pi} + \measuredangle \gamma_{\pi}$ y ser $\measuredangle \beta_{\pi} < \beta$ debe ser: $\measuredangle \gamma_{\pi} > \measuredangle \gamma$ es decir se tendrá que si un ángulo obtuso γ (suplemento de β) tiene un lado paralelo a un plano de proyección, su proyección es un ángulo mayor.-

Demostrado lo manifestado bajo 2º) tenemos que si un ángulo recto está en una posición en un sistema diédrico, tal que un lado es paralelo al plano I, la proyección ortogonal sobre I será un ángulo recto y si el ángulo recto están en una posición tal que un lado es paralelo a II la proyección ortogonal sobre II será un ángulo recto.-

La inversa o sea que: 1º) si un lado de un ángulo es paralelo a I y su proyección ortogonal sobre I es un ángulo recto, el ángulo en el espacio es recto.-

2°) si un lado de un ángulo es paralelo a II y su proyección ortogonal sobre II es un ángulo recto, el ángulo en el espacio es recto, también se cumple.-

Teniendo en cuenta lo precedentemente expuesto, pasaremos a analizar la posición de la recta "a" respecto a "b" en los cuatro casos representados en la fig. 3.-

1°) caso: en el espacio $a \perp b$ por ser $a' \perp b'$ y $a \parallel I$

2°) caso: en el espacio a no es $\perp$ b por ser $a' \perp b'$ y ni a ni b paralelas a I

3°) caso: en el espacio $a \perp b$ por ser $a'' \perp b''$ y $a \parallel II$

4°) caso: en el espacio a no es $\perp$ b por ser $a'' \perp b''$ y ni a ni b paralelos a II

RECTA DE MAXIMA PENDIENTE DE UN PLANO

En(fig.4) tenemos nuevamente un triángulo rectángulo ABC en una posición tal respecto el plano π que "a" es paralelo a π y "b" oblicuo respecto π .-

Recordando que el ángulo de inclinación de una recta con respecto a un plano es el ángulo que determina la recta con su proyección ortogonal sobre el plano, tenemos que el ángulo que determina la recta AC con el plano π será el ángulo determinado por AC y su proyección ortogonal sobre el plano π (A_π . C_π); que será igual al ángulo determinado por AC y la paralela a A_π C_π trazada por C, es decir $\measuredangle \delta$

Por el punto A pasan infinitas rectas pertenecientes al plano del triángulo ABC.

Consideremos una cualquiera de ellas, por ejemplo la q, que intersecta al lado BC del triángulo en el punto Q.- La recta q determinada por Q y la proyección ortogonal A_ε del punto A sobre el plano paralelo a π que pasa por a y que denominamos ε , será la proyección ortogonal de la recta q sobre el plano ε , q_ε

Por consiguiente el ángulo determinado por q y q_ε será el ángulo de inclinación de q respecto al plano ε y como q_ε es paralelo a π , el citado ángulo, será el ángulo que determina "q" con el plano π

De la comparación de los triángulos $AA_{\varepsilon}C$ y $AA_{\varepsilon}Q$ (ambos rectángulos en A_{ε}, con un cateto AA_{ε}, común y $A_{\varepsilon}C < A_{\varepsilon}Q$ - por ser $A_{\varepsilon}C \perp QC$) y teniendo en cuenta que $\measuredangle\delta$ es el ángulo de inclinaci'on de la recta AC con respecto al plano π, surge que: $\measuredangle\delta > \measuredangle qq_{\varepsilon}$ lo que nos permite expresar que de las infinitas rectas pertenecientes al plano determinado por los puntos ABC, que pasan por A, la que determina el máximo ángulo con π es la AC.

Esta recta recibe el nombre de recta de máxima pendiente del plano determinado por ABC con respecto al plano π .- Como todas las rectas paralelas a la AC que pertenecen al plano (ABC) determinan el mismo ángulo con π todas reciben el nombre de rectas de máxima pendiente del citado plano con respecto al plano π

Si el plano π fuese el plano I de un sistema de planos de proyección, tenemos que las rectas de máxima pendiente de un plano oblicuo cualquiera respecto al plano horizontal de proyección, serán las rectas del plano oblicuo que son perpendiculares a las rectas horizontales del plano.

Si el plano π fuese el plano II de un sistema de planos de proyección, surge que las rectas de máxima pendiente de un plano oblicuo cualquiera respecto al plano vertical de proyección, serán las rectas del plano oblicuo que son perpendiculares a las rectas frontales del plano.-

En (fig. 5) tenemos dado un plano oblicuo por las proyecciones de 3 puntos ABC y queremos determinar las proyecciones de una recta de máxima pendiente del plano respecto al plano horizontal de proyección.-

Para ello trazamos primeramente las dos proyecciones de una recta horizontal "h" del plano (ABC).-

Cualquier recta perteneciente al plano (ABC) que sea perpendicular a "h", será una recta de máxima pendiente respecto al plano horizontal.-

En la fig. 5 se trazó las 2 proyecciones de la perpendicular a "h" que pasa por A (m' y m'').-

En fig. 6 se determinó las proyecciones de una recta de máxima pendiente respecto al plano vertical de proyección del mismo plano oblicuo (ABC).-

Para ello se trazó las dos proyecciones de una recta frontal "f" del plano oblicuo (ABC) y luego las dos proyecciones de la perpendicular a "f" que pasa por A.- (m' y m'')

Ahora veremos que un plano puede quedar determinado por las dos proyecciones de una sola recta, si esta es de máxima pendiente respecto de uno de los planos de proyección.-

Tengamos por ejemplo en fig. 7 las dos proyecciones de una recta "m" , la que consideramos recta de máxima pendiente de un plano oblicuo con respecto al plano horizontal de proyección.-

Recordando que estas rectas de máxima pendiente deben ser perpendiculares a las rectas horizontales del plano oblicuo, obtenemos las dos proyecciones de una horizontal del plano oblicuo trazando por la proyección horizontal A' de un punto cualquiera perteneciente a "m" la recta $h' \perp m'$ y por A'' la recta horizontal h''.-

($h \perp m$, por tratarse de un ángulo cuya proyección horizontal es un ángulo recto y uno de los lados es paralelo al plano horizontal).

Las rectas h y m determinan así el plano del cual h es recta horizontal y m recta de máxima pendiente respecto al plano horizontal y tendríamos así llevado el caso al plano determinado por dos rectas concurrentes.-

Si la recta m hubiese sido recta de máxima pendiente de un plano oblicuo respecto al plano vertical de proyección, (fig. 8), el plano también quedaría determinado.- En efecto: las dos proyecciones de una recta frontal f de dicho plano oblicuo, sería $f'' \perp m''$ y f' horizontal del dibujo y las rectas f y m de las cuales la primera es frontal y la segunda de máxima pendiente determinan así un plano determinado por dos rectas concurrentes.-

VALOR DEL ANGULO DIEDRO QUE DETERMINA UN PLANO OBLICUO CON RESPECTO A UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCION

Definimos como valor del ángulo diedro determinado por dos planos α y β (fig. 9), el valor del ángulo rectilíneo correspondiente; siendo éste el ángulo que se obtiene seccionando ambas caras del diedro con un plano γ perpendicular a la arista i del diedro, es decir el $\measuredangle$ ab.

Como i $\perp \gamma$ debe ser i $\perp$ a, e i $\perp$ b, es decir también obtenemos un ángulo rectilíneo correspondiente a un ángulo diedro de caras α y β trazando por un punto cualquiera de la arista del diedro, la perpendicular a ella perteneciente a una de las caras y seguidamente la perpendicular a ella perteneciente a la otra cara.-

Teniendo en cuenta esta definición del valor de un ángulo diedro, tenemos en fig. 4 que el ángulo δ será el rectilíneo correspondiente al ángulo diedro cuyas caras son ε y el plano (ABC) y como $\varepsilon \parallel \pi$ el valor de δ será el valor del ángulo diedro determinado por el plano ABC y π

Como δ es el valor del ángulo que determina una recta de máxima pendiente del plano oblicuo (ABC) con el plano de proyección π, podemos afirmar que el valor del ángulo diedro que determina un plano oblicuo con un plano de proyección está dado por el valor del ángulo que determina una recta de máxima pendiente del plano oblicuo con respecto al plano de proyección considerado. Si por consiguiente en fig. 5 quisiéramos determinar el valor del diedro que el plano (ABC) determina con el de proyección I, habría que determinar el ángulo que la recta "m" (de máxima pendiente respecto I) determina con el plano I, éste ángulo tendría el valor del diedro mencionado.-

Igualmente en fig. 6 el valor del ángulo que "m" determina con el plano II sería el valor del diedro determinado por el plano ABC y el plano II (éstos ángulos se pueden determinar por diferencia de cotas, respectivamente por diferencia de apartamientos.-

---

PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS Y PLANOS OBLICUOS

Si tenemos presente que cuando una recta n (fig. 10) es perpendicular a una plano α ; es a su vez perpendicular a todas las rectas del plano α que pasan por el pie N de la recta "n" se tendrá que en el caso de que se quisiera determinar el plano α perpendicular a una recta n que pase por uno de sus puntos N, sería suficiente trazar dos rectas "a" y "b" por N que sean perpendiculares a "n".-

Esas rectas determinan el plano α .-

En fig. 11 tenemos como dato las dos proyecciones n'' y n' de una recta oblicua "n" y las dos proyecciones de un punto N que le pertenece.-

Nos proponemos determinar el plano α perpendicular a "n" que pase por N.-

Según lo visto precedentemente dicho plano queda determinado por un par de rectas perpendiculares a "n" que pasen por N.-

Dos de estas rectas, cuyas proyecciones podemos trazar de inmediato, son: la horizontal h y la frontal f (recuérdese que un ángulo recto es igual a su proyección cuando uno de sus lados es paralelo al plano de proyección) y tenemos así el plano α determinado por las rectas h y f.-

f'' debe ser perpendicular a n'' y f' una horizontal del dibujo.-

h' debe ser perpendicular a n' y h'' una horizontal del dibujo.-

PROBLEMAS:

La propiedad de que el ángulo recto es igual a su proyección, cuando uno de sus lados es paralelo al plano de proyección nos permite resolver el problema de:

"dado un plano oblicuo α por las proyecciones de 3 puntos, 2 rectas (concurrentes o paralelas), o un punto y una recta (que no se pertenezcan), determinar las proyecciones de una recta perpendicular **n** al plano α .

En el caso de que el plano oblicuo α estuviese determinado por una de sus rectas horizontales y una de sus rectas frontales (ver fig. 11) la solución del problema sería inmediata, n'' perpendicular a f'' sería la proyección vertical de n y n' perpendicular a h' sería la proyección horizontal de n.-

Ahora en figura 12 el plano α está dado por las dos proyecciones de 3 puntos ABC que determinan un triángulo (el plano α también podría ser considerado como dado por las dos rectas concurrentes AB y AC o por la recta BC y el punto A).-

Nos proponemos determinar las dos proyecciones de la recta "n" que pase por P y sea perpendicular al plano ABC.-

Para ello trazamos ambas proyecciones de la recta horizontal h del plano (ABC) que pasa por P, y ambas proyecciones de la recta frontal "f" del plano (ABC) que pasa por P.

Las rectas n'' perpendicular a f'' y n' perpendicular a h' serán según lo visto en fig. 11 las dos proyecciones de la recta n perpendicular al plano determinado por h y f y por consiguiente al plano (ABC).-

Si el plano ABC es transparente la recta n es integramente visible en ambas proyecciones, en el caso de ser ABC opaco es necesario hacer un pequeño estudio sobre la visibilidad de n, estudio que explicaremos al tratar el problema de intersección de rectas con planos.-

El problema resuelto precedentemente nos permite resolver también el siguiente problema:

"Dado un plano oblicuo α por las proyecciones de 3 puntos, 2 rectas (concurrentes o paralelas) o un punto y una recta (que no se pertenezcan), determinar las proyecciones de la recta "n" perpendicular al plano α que pase por un punto Q no perteneciente a α .

Consideremos datos en fig. 12, el triángulo ABC que determina un plano oblicuo α y el punto Q que no pertenece a α .

Nos proponemos determinar las dos proyecciones de la recta "m" que pasa por Q y es perpendicular a α .

Como todas las rectas perpendiculares a un plano son paralelas entre si y todas las rectas paralelas del espacio tienen por proyecciones ortogonales sobre un plano, rectas paralelas entre si , tendremos que la proyección vertical m'' de m debe ser paralela a n'' y por consiguiente perpendicular a f'' y la proyección horizontal m' de m debe ser paralela a n' y por consiguiente perpendicular a h'.-

Por consiguiente en el caso de nuestro problema el camino a seguir para su solución consistirá en :

1° Trazar las dos proyecciones de una recta horizontal "h" del plano.-

2° Trazar las dos proyecciones de una recta frontal "f" del plano.-

3° Trazar las proyecciones: m' perpendicular a h' y m'' perpendicular a f" que pasan respectivamente.-

por Q' y Q'' con lo que hemos determinado las dos proyecciones de la recta "m" que pasa por Q y es perpendicular a α .

PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS Y PLANOS PROYECTANTES

En fig. 13 tenemos como datos las 2 proyecciones de una recta frontal "n" y las dos proyecciones de un punto N que le pertenece.-

Nos proponemos determinar el plano α perpendicular a "n" que pase por N.-

Dicho plano queda determinado por dos rectas perpendiculares a "n" que pasen por N.-

Siendo "n" recta frontal y recordando que un ángulo recto tiene por proyección vertical un ángulo recto, cuando uno de sus lados es paralelo al plano vertical, se tendrá que toda recta perpendicular a "n" tendrá por proyección vertical la recta perpendicular a n'', es decir, las proyecciones verticales de dos rectas "a" y "b" perpendiculares a "n" que pasen por un punto N, tendrán sus proyecciones verticales coincidentes en $a'' \equiv b''$.-

Las proyecciones horizontales a' y b', serán rectas a' y b' cualesquiera que pasen por N'.-

Del hecho de coincidir a" y b", surge que a y b pertenecen a un plano proyectante vertical cuya traza vertical es perpendicular a la proyección vertical de la recta n.-

Hemos demostrado así que cuando una recta es frontal, los planos perpendiculares a ella son planos proyectantes verticales, cuyas trazas verticales son perpendiculares a la proyección vertical de la recta.-

La inversa o sea que si un plano es proyectante vertical, las rectas perpendiculares a él son frontales, siendo sus proyecciones verticales, perpendiculares a la traza vertical del plano también se cumple.-

A los efectos de demostrarlo consideramos, dados en fig. 13 las proyecciones de las rectas "a" y "b" pertenecientes a un plano proyectante vertical.-

Siendo el plano (ab) perpendicular al plano de proyección II, la recta "n" perpendicular al plano (ab) debe ser paralela al plano II es decir frontal.-

Ahora la recta frontal "n" como debe determinar con a y b ángulos rectos debe tener por proyección vertical la recta n" perpendicular a a" ≡ b" (recuérdese que cuando una recta es frontal, todas sus perpendiculares tendrán por proyección vertical, rectas perpendiculares a la proyección vertical de la frontal). Con esto queda demostrado que efectivamente la recta perpendicular a un plano proyectante vertical es una recta frontal cuya proyección vertical es una recta perpendicular a la traza vertical del plano.-

Análogamente se puede demostrar que un plano perpendicular a una recta horizontal es un plano proyectante horizontal cuya traza horizontal es perpendicular a la proyección horizontal de la recta y viceversa, es decir, que una recta perpendicular a un plano proyectante horizontal es una recta horizontal cuya proyección horizontal es perpendicular a la traza horizontal del plano.-

INTERSECCION DE RECTAS CON PLANOS Y PLANOS ENTRE SI -

INTERSECCION DE UNA RECTA CON UN PLANO PROYECTANTE VERTICAL

En fig. 14 tenemos dada la traza vertical a_V de un plano proyectante vertical α y las dos proyecciones b" y b' de una recta cualquiera "b".-

Nos proponemos determinar las dos proyecciones del punto de intersección de la recta "b" con el plano α , es decir del punto que pertenece simultáneamente a "b" y a α .-

Recordando que la proyección vertical de todo punto perteneciente a un plano proyectante vertical debe pertenecer a la traza vertical del plano y que la proyección vertical de todo punto perteneciente a una recta debe pertenecer a la proyección vertical de la recta, se tendrá que la proyección vertical I" del punto I común a b y a α debe ser el punto de intersección de b" y a_V.-

La proyección horizontal I' de I se determina mediante línea de referencia sobre b' por ser I punto perteneciente a b.-

En fig. 15 se ha resuelto el problema de determinar las proyecciones del punto de intersección de una recta cualquiera "c" dada por sus proyecciones con un plano proyectante horizontal δ dado por su traza horizontal d_H .-

La justificación del proceso es análoga a la realizada con respecto al problema de fig. 14.-

INTERSECCION DE UN PLANO OBLICUO DADO POR PUNTOS Y RECTAS CON UN PLANO PROYECTANTE DADO POR SU TRAZA

En fig. 16 tenemos dado un plano oblicuo α por la proyección de dos de sus rectas "a" y "b" (*) y un plano proyectante vertical β por su traza vertical b_V . Nos proponemos determinar las dos proyecciones de la recta de intersección de los planos α y β o sea de la recta que pertenece a ambos planos.-

Como todos los puntos pertenecientes a las rectas "a" y "b" pertenecen al plano α el punto común a la recta "a" y al plano β así como el punto común a la recta "b" y al plano β , pertenecerá a los planos α y β ; es decir serán puntos pertenecientes a la recta de intersección de los planos α y β .-

Determinamos por consiguiente las proyecciones de los puntos J e I en que "a" y "b" intersecan al plano β , según lo visto en el párrafo anterior.-

I" y J" determinarán la proyección vertical i" de la recta de la intersección i a determinar, e I" y J" determinarán la proyección horizontal i' de la recta i, debiendo i" coincidir con b_V (recuérdese que i, pertenece al plano proyectante vertical β).-

(*) Si el plano estuviese dado por 3 puntos o un punto y una recta que no se pertenezcan siempre se puede determinar dos rectas del plano, obteniéndose así el presente caso de que el plano oblicuo está dado por dos rectas.-

INTERSECCION DE UNA RECTA CON UN PLANO OBLICUO

En fig. 17 tenemos dado, una recta "d" por sus proyecciones y un plano oblicuo α por las proyecciones de 3 puntosABC, puntos éstos que determinan un triángulo cuyas proyecciones hemos trazado.-

(*) Ver pag. 14.-

Nos proponemos determinar las proyecciones del punto común a la recta "d" y al plano α. Para encarar la solución del presente problema haremos primeramente las siguientes consideraciones referentes al problema de intersección de una recta "d" con un plano α en el espacio, ilustrado en fig. 18.-

Consideremos uno de los infinitos planos que pasan por la recta d (por ejemplo σ).-

Dicho plano interseca al plano α en una recta "i" que quedaría determinada por los puntos 1 y 2 en que las rectas AC y AB pertenecientes a α, intersecan a σ.-

El punto de intersección de la recta "i" con la "d" es el punto I común a α y a d ó sea el punto que se quería determinar.-

Siguiendo paso a paso las operaciones precedentemente citadas, consideramos en fig. 17, como plano σ el proyectante horizontal que pasa por d y cuya traza horizontal S_H coincide con d'.-

Dicho plano es intersecado por las rectas AB y AC pertenecientes a α en los puntos 1 y 2 cuyas proyecciones horizontales y verticales determinamos según lo visto al tratar el problema de intersección de una recta con un plano proyectante.-

Los puntos 1" y 2" determinan la proyección vertical i" de la recta "i" de intersección de α con σ.-

La proyección horizontal de "i" coincide con S_H (recuérdese que i pertenece a σ y este plano es proyectante horizontal).-

El punto de intersección I" de i" y d" será la proyección vertical del punto de intersección I, de α y de "d" que se quería determinar, la proyección horizontal I' de I se determina mediante línea de referencia sobre i'.-

Si el plano α fuese transparente (supóngase que ABC fuese una chapa de Celuloide), - el problema estaría resuelto, pero si ahora consideramos que ABC fuese una chapa opaca (por ejemplo un cartón), se presenta el problema del estudio de la visibilidad de la recta d con respecto a la chapa.

Supongamos en fig. 19 una superficie plana opaca limitada por un triángulo ABC y una recta "d" que la interseque en el punto I.-

El observador cuyos rayos visuales r están dirigidos perpendicularmente a un plano de proyección π verá de la recta d, - en las inmediaciones de I -, únicamente la semirecta que está en el semi espacio (en que ABC divide el espacio) en el que él se encuentra, es decir en el punto I se origina un cambio de visibilidad de la recta d.-

Volviendo a fig. 17 estudiaremos ahora la visibilidad de la recta d, primeramente en la proyección horizontal o sea la vista superior.

A éste efecto consideremos que el punto de intersección de las rectas A' B' y d', es proyección horizontal de un punto de la recta AB (ó sea punto 1) y a su vez es proyección horizontal de un punto de la recta d (o sea punto 3).-

De los puntos 1 y 3, ambos pertenecientes a una recta vertical, el observador que mira hacia el plano horizontal verá únicamente el de mayor cota, es decir el 1, de lo que surge que el rayo visual del observador no puede incidir en el punto 3 de la recta "d" lo que hace invisible éste punto y por consiguiente el segmento de la recta "d" comprendido entre 3 e I debe ser invisible en la proyección horizontal o vista superior, - y como en I la recta "d" interseca al plano α es decir pasa a otro semi espacio, de I hacía la derecha la recta "d" será visible en la vista superior.-

La visibilidad en la vista frontal se podría estudiar determinando las proyecciones horizontales de los puntos de las rectas BC y d cuyas proyecciones verticales coinciden en el punto de intersección de las rectas B"C" y d".-

De ambos puntos el observador que mira hacía el plano vertical vería el de mayor apartamiento y por consiguiente el rayo visual no podría incidir en el punto de menor apartamiento, siendo por consiguiente éste invisible y la recta a que pertenece también sería invisible en este punto.-

Este segundo estudio de la visibilidad de la vista frontal se puede evitar, deduciendo esta visibilidad de la ya estudiada para la vista superior, de la siguiente manera: Recordando que cuando el sentido de rotación, determinando por la proyección vertical de tres puntos de un plano, coincide con el s entido de rotación determinando por la proyección horizontal de los mismos puntos, el observador que mira hacia el plano vertical ve la misma faz del plano que el observador que mira hacia el plano horizontal, y que en el caso de que los sentidos de rotación citados son inversos, ambos observadores ven faces distintas, tendríamos que en el caso de la fig. 17 ambos observadores verían faces distintas del plano determinado por los puntos A B y C.-

En la vista superior la semirecta de "d" cuyas proyecciones están dirigidas de I hacia la derecha ès visible y por consiguiente recta y observador que mira hacia el plano horizontal están en el mismo semiespacio en que ABC, divide el espacio, de lo que surge que en esta vista es visible la faz de ABC, en que la semirecta considerada interseca al plano ABC.-

Como en la vista frontal se ve la otra faz del plano ABC es decir, el observador que mira hacia el plano vertical y la emirecta considerada, están en distintos semiespacios, surge que dicha semirecta no se ve en la vista frontal.-

(*) Si el plano estuviese dado por 2 rectas o un punto y una recta siempre se puede determinar 3 puntos del plano y obtener la representación de la fig. 17.-

---

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

En fig. 20 tenemos representado un plano por tres puntos ABC, y un punto P que no le pertenece.-

Nos proponemos determinar la distancia del punto al plano.-

Recordando que la distancia de un punto P a un plano α (fig. 21) es el segmento determinado por el punto P y el punto de intersección Q de la recta perpendicular a α que pasa por P: (n), para resolver nuestro problema procederemos de la siguiente manera:

1°: Trazamos (fig. 20) las dos proyecciones n" y n' de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano (ABC) (n" es perpendicular a la proyección vertical de una recta frontal "f" del plano (ABC) previamente trazada y n' es perpendicular a la proyección horizontal de una recta horizontal h del plano (ABC) previamente trazada).-

2°: Determinamos las proyecciones del punto de intersección de la recta "n", con el plano (ABC), a cuyo efecto según lo visto anteriormente consideramos el plano proyectante horizontal δ que pasa por "n", determinamos las proyecciones i" o i' de la recta "i" en que δ interseca al plano (ABC) y finalmente el punto de intersección de las proyecciones verticales i" y n", nos determina la proyección vertical Q" del punto Q a determinar.-

Mediante línea de referencia determinamos Q'.-

3°: Halladas así las dos proyecciones P" Q" y P' Q' del segmento representativo de la distancia del punto P al plano (ABC) restaría únicamente determinar la verdadera magnitud del mismo, lo que se puede hacer por cualquiera de los métodos conocidos (cambio de plano - diferencia de cota o apartamiento - giro).-

INTERSECCION DE DOS PLANOS OBLICUOS DADOS POR PUNTOS O RECTAS

En fig. 22 tenemos representados por sus dos proyecciones, a dos planos, uno el plano α determinado por los puntos ABC y el otro el plano β determinado por los puntos MNPQ.-

Nos proponemos determinar las proyecciones de la recta "i" común a ambos.-

Este problema puede ser resuelto por dos métodos distintos.

1°: Método: Las consideraciones generales de éste método las haremos sobre la fig. 23 en la que consideramos dados los dos planos en el espacio, por 3 puntos cada uno (plano α dado por ABC y plano β dado por MNP).-

Si la recta AC perteneciente a α interseca a β en el punto I éste será un punto perteneciente a la recta de intersección "i" de α

y β . Si la recta NP perteneciente a β interseca a α en el punto J, ésta será otro punto perteneciente a la misma recta "i".-

Ahora la recta determinada por I y J será la recta de intersección de α y β , - además como la recta "i" pertenece a α y β , sus puntos de intersección K y L con las rectas MN (perteneciente a β) y AB (perteneciente a α) respectivamente; deben pertenecer a ambos planos, K es punto de intersección de MN con α y L es punto de intersección de AB con β (téngase en cuenta que a un plano determinado por una figura plana, pertenecen puntos interiores y exteriores a la figura - en nuestro caso MN interseca a α en un punto exterior al polígono ABC).-

También debe pertenecer a la recta "i" el punto E en que PM interseca a α y el punto F en que CB interseca a β .-

En síntesis la recta "i" queda determinada por dos cualesquiera de los seis puntos I, J, K, L, E, F, de lo que surge que para determinar la recta de intersección de dos planos dados por puntos o rectas, se intersecan dos cualesquiera de las rectas pertenecientes al mismo o a distintos planos con el plano a que no pertenecen.-

Por ejemplo, en nuestro casi i quedaría determinado por los puntos I y L en que las rectas AC y AB pertenecientes al mismo plano intersecan al plano α , o también quedaría determinada por el punto I en que la recta AC perteneciente a α interseca a β y el punto J en que la recta NP perteneciente a β interseca a α .-

Establecido así el primer Método pasaremos a resolver nuestro problema de la fig. 22 (intersección del plano α con el plano β).-

Elegimos como rectas que intersecaremos con los planos a que no pertenecen, la AC perteneciente a α y la MQ perteneciente a β .-

Para determinar las proyecciones del punto de intersección de AC con β recurrimos al plano proyectante vertical δ que pasa por AC y que interseca a β en la recta 1-2 cuya proyección horizontal 1'2' determinamos del modo conocido.-

La intersección de 1' 2' con A' C' determina la proyección horizontal I' del punto de intersección de AC con β , su proyección vertical I", la determinamos mediante línea de referencia.-

Para determina las proyecciones del punto de intersección de la recta MQ con el plano α recurrimos al plano proyectante vertical τ que pasa por MQ y que interseca a α en la recta 3 - 4 cuya proyección horizontal 3' 4' determinamos de modo conocido. La intersección de 3' 4' con M' Q' determina la proyección horizontal J' del punto de intersección de MQ con α, su proyección vertical J", la determinamos mediante línea de referencia.-

I" y J" determinan ahora la proyección vertical i", e I' y J' determinan la proyección horizontal i' de la recta de intersección "i" de los planos α y β.-

Desde el punto de vista geométrico el problema está resuelto, pero si consideramos de los planos α y β únicamente la superficie interior al triángulo ABC y al paralelogramo MNPQ, de la recta de intersección i existirá realmente solo el segmento que simultáneamente es interior a ambos polígonos o sea el I J .-

Si además consideramos que ambas figuras son opacas (por ejemplo 2 triángulos de cartón o chapa), se representa un problema de visibilidad en vista de que una de las figuras parcialmente ocultaría la vista de la otra.-

A continuación procederemos al estudio de la visibilidad mencionada.-

Comenzaremos por determinar la visibilidad de la proyección vertical o vista frontal.-

Consideremos el punto de intersección de la proyección vertical de una recta perteneciente a una de las figuras, con la proyección vertical de una recta perteneciente a la otra figura, por ejemplo de A" B" con M" Q".-

Este punto es proyección vertical de un punto perteneciente a AB (punto 3) y de punto perteneciente a MQ (punto 5).-

Los puntos 3 y 5 pertenecen a una recta de punta .- El rayo visual que coincide con esa recta incide primero en el punto 5 perteneciente a la recta MQ no pudiendo por consiguiente incidir en el punto 3 de la recta AB, de lo que surge que la recta AB es invisible en el segmento cuya proyección vertical es interior a la proyección vertical del paralelogramo y que el segmento 3J de la recta MQ es visible.-

Esto nos dice que J3 y el observador están en el mismo semiespacio en que ABC divide el espacio.-

Como en el punto J la recta MQ interseca al plano α , de J hacía la izquierda la recta MQ pertenece al otro semiespacio, es decir a aquel en que no se encuentra el observador, siendo por consiguiente invisible el segmento J2.-

De esto surge que CI debe ser visible, es decir que CI y el observador pertenecen al mismo semiespacio en que β divide al espacio.-

Al intersecar AC a β en I, a partir de I la recta pasa a otro semi espacio y por consiguiente a partir de I será invisible.-

De esto surge que NP debe ser visible.-

Hemos visto así que del estudio de las condiciones de visibilidad en dos puntos pertenecientes a cada una de las figuras, cuyas proyecciones verticales coinciden, se ha podido deducir la visibilidad de toda la vista frontal.-

En forma análoga recurriendo a puntos comunes a las proyecciones horizontales de ambos triángulos, se puede determinar la visibilidad de la proyección horizontal o vista superior. Esta última determinación se puede realizar también con menos trabajo de la siguiente manera: recordando que cuando el sentido de rotación determinado por la proyección vertical de tres puntos pertenecientes a un plano coincide con el sentido de rotación determinando por la proyección horizontal de los mismos tres puntos, los observadores que miran hacía el plano vertical y hacía el plano horizontal de proyección ven las mismas faces del plano, y en caso de que los citados sentidos de rotación son opuestos ambos observadores ven faces distintas, tendremos que de la superficie del paralelogramo ambos observadores ven faces distintas - (rotación $N'' \rightarrow P'' \rightarrow Q''$ es inversa a $N' \rightarrow P' \rightarrow Q'$).-

Esto nos dice que en el caso del plano β el observador que mira hacia el plano vertical, está en el otro semiespacio, que aquel en que se encuentra el observador que mira hacia el plano horizontal.-

Por consiguiente si C I está en el semiespacio en que se encuentra el observador, que mira hacia al plano vertical, y en este semiespacio no está el observador que mira hacia el plano horizontal, éste observador no podrá ver de C I el segmento cuya proyección horizontal es interior al paralelogramo M' N' P' Q', es decir desde I hacia C la recta AC es invisible volviendo a ser visible en el segmento en que su proyección horizontal es exterior a M'N'P'Q'.-

Conocida así las condiciones de visibilidad en el cruce de las proyecciones horizontales de dos aristas (por ejemplo cruce de I'C' y N'P'), se puede determinar las condiciones de visibilidad en los restantes cruces de las proyecciones horizontales de aristas, en forma similar a lo hecho a este respecto en la proyección vertical.-

2º Método: Este método consiste en:

1º: Intersectar α y β con un plano horizontal o frontal δ cualquiera obteniéndose así dos rectas coplanares "a" y "b", una perteneciente a α y la otra a β.-

2º: Intersectar las rectas "a" y "b", obteniéndose así un punto I, perteneciente a α y a β.-

3º; Intersectar α y β con un segundo plano horizontal o frontal τ cualquiera, obteniéndose así dos rectas coplanares "c" y "d", una perteneciente a α y la otra a β.-

4º: Intersectar las rectas "c" y "d", obteniéndose así un segundo punto J, perteneciente a α y β.-

5º: La recta determinada por I y J será la intersección de α y β.-

Se recomienda al lector resolver el problema planteado en fig. 22, por éste método siguiendo fielmente el proceso explicado.-

---

PARALELISMO DE PLANOS

Recordando de la geometría del espacio que por definición, dos planos son paralelos cuando no tienen puntos comunes y que estos quedan determinados por dos rectas concurrentes de uno de los planos paralelas a dos rectas del otro, se tendrá que si dos planos α y β (fig. 24) son paralelos, sus rectas de intersección con cualquier plano, γ (c_α y c_β) deben ser rectas paralelas, porque en el caso de que c_α y c_β

fuesen concurrentes, su punto de intersección pertenecería a α y a β lo que no puede ser por ser α paralelo a β.

Téngase presente que se ha dicho: sus rectas de intersección con un tercer plano cualquiera, porque en el caso de que únicamente sus rectas de intersección con determinado plano γ fuesen paralelas, los planos α y β se pueden intersectar en una recta paralela a c_α y c_β.-

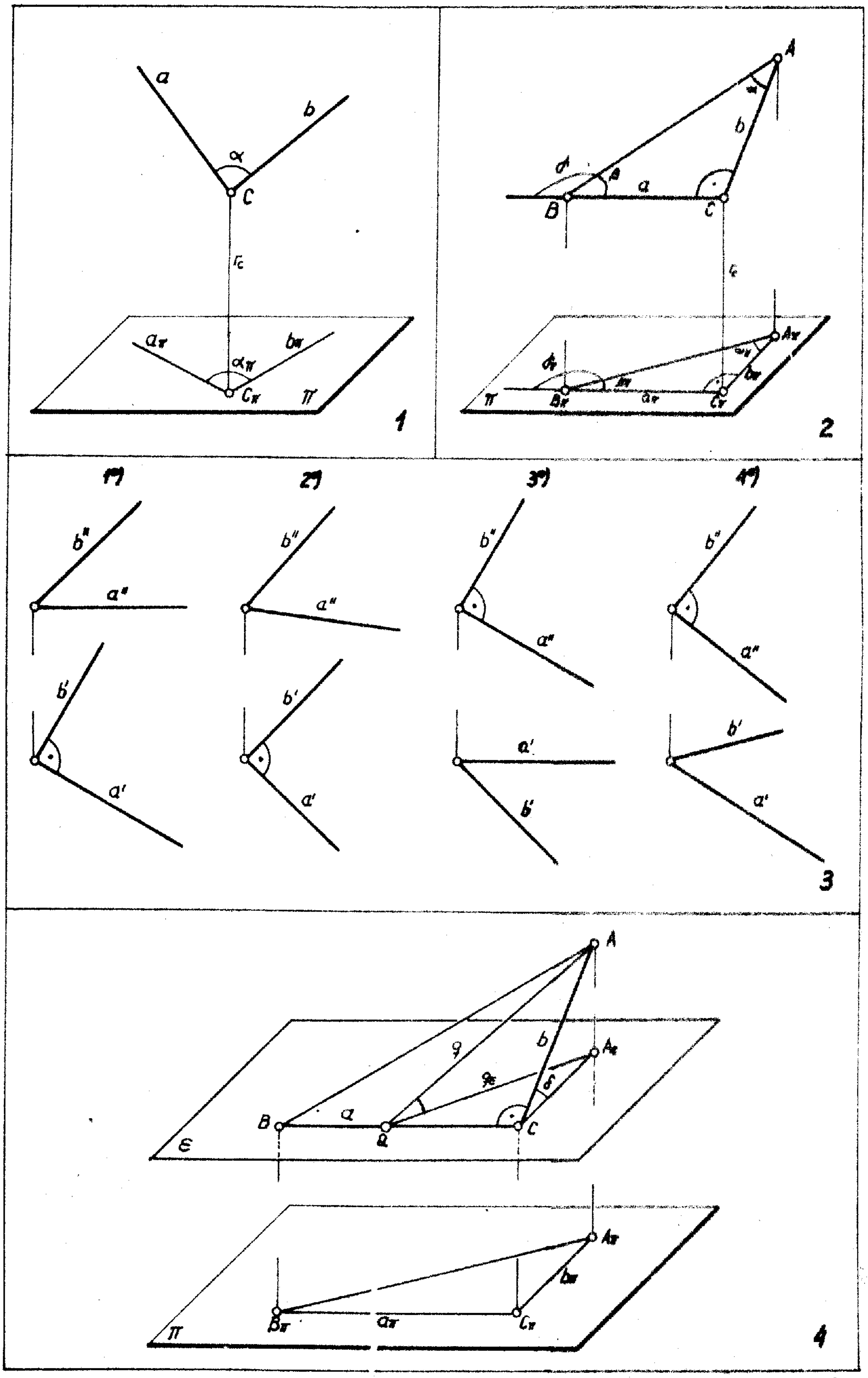
De modo que si seccionamos dos planos α y β con un tercer plano γ y las rectas de intersección c_α y c_β resultan paralelas, no es suficiente para asegurar que α y β son planos paralelos.-

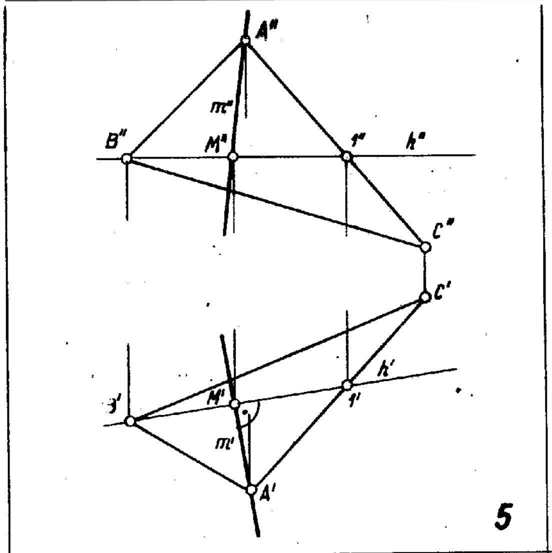
Ahora si seccionamos α y β (fig. 2 4) con otro plano cualquiera δ y las rectas de intersección d_α y d_β también resultan paralelas podemos asegurar que los planos α y β son paralelos (c_α y d_α determinan al plano α al que serán respectivamente paralelas las rectas c_β y d_β y por consiguiente el plano β por ellas determinado.-

Hechas estas consideraciones analicemos (fig. 24) si el plano α dado por las proyecciones de los puntos ABC y el plano β dado por los puntos MNP son paralelos.-

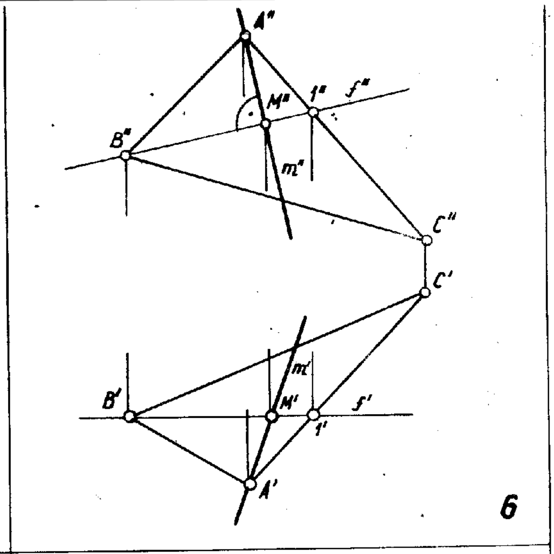
A este efecto seccionamos ambos planos con el plano horizontal δ y con el plano frontal γ. Como las rectas f_α y f_β en que γ seccionó a α y a β son paralelas, (obsérvese que f''_α // f''_β), y las rectas h_α y h_β, en que δ secciona a α y a β también son paralelas (obsérvese que h'_α // h'_β) los planos α y β serán efectivamente paralelos.-

Ahora en realidad no haría falta seccionar a α y a β con los planos δ y γ, sino que teniendo en cuenta que todas las rectas horizontales, de un plano son paralelas entre sí, sucediendo lo mismo con las frontales, hubiese sido suficiente determinar las dos proyecciones de dos rectas horizontales, una perteneciente a α y otra a β, y las dos proyecciones de dos rectas frontales una perteneciente a α y otra a β, si las rectas horizontales son paralelas entre sí sucediendo lo mismo con las frontales, los planos α y β son paralelos.-

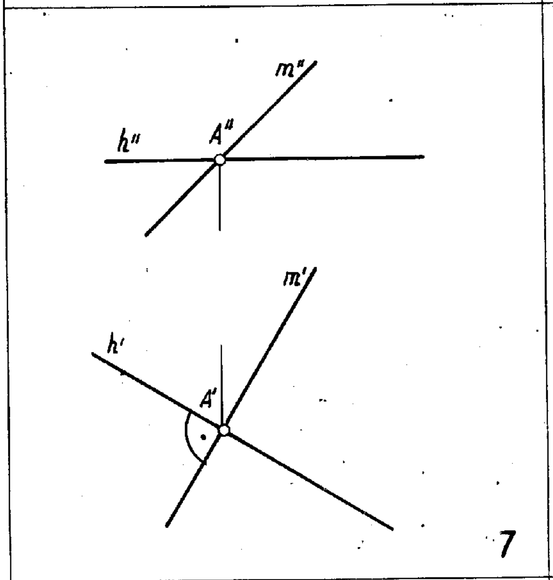

a
b
α
C
r_C
a_π
b_π
α_π
C_π
π
1
A
b
a
B
C
2
1°)
2°)
3°)
4°)
b''
a''
b'
a'
3
A
b
B
a
C
ε
A_π
b_π
B_π
a_π
C_π
π
4


A"
m"
B"
M"
1"
h"
C"
C'
h'
B'
M'
1'
m'
A'

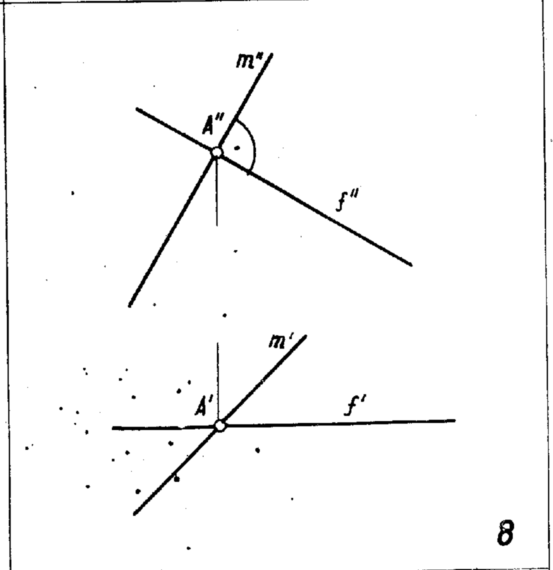
5


A"
M"
1"
f"
B"
m"
C"
C'
m'
B'
M'
f'
1'
A'

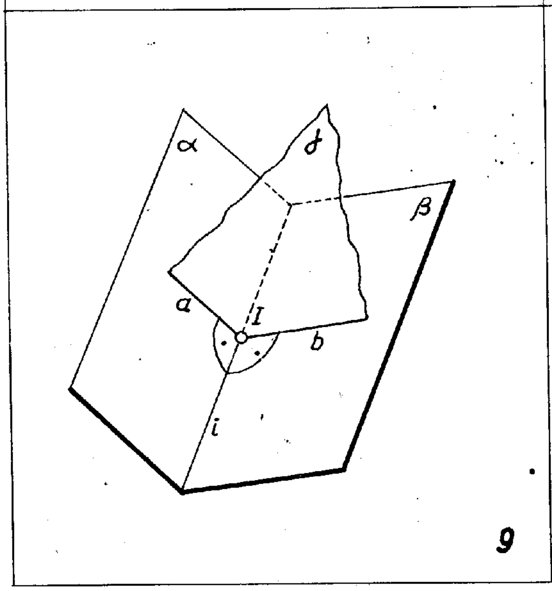
6


m"
h"
A"
m'
h'
A'

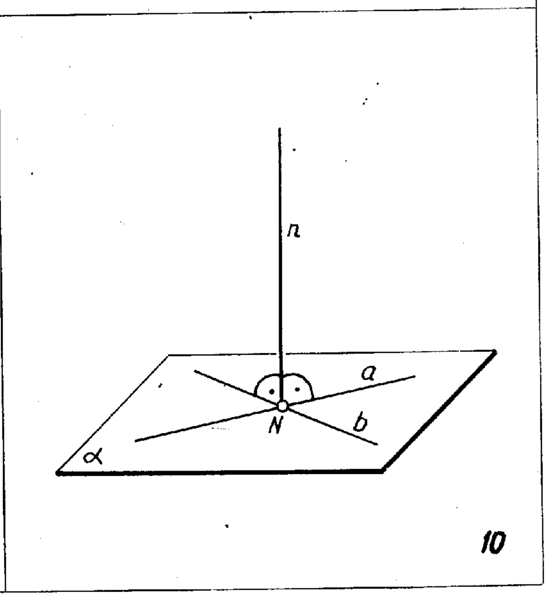
7


m"
A"
f"
m'
A'
f'

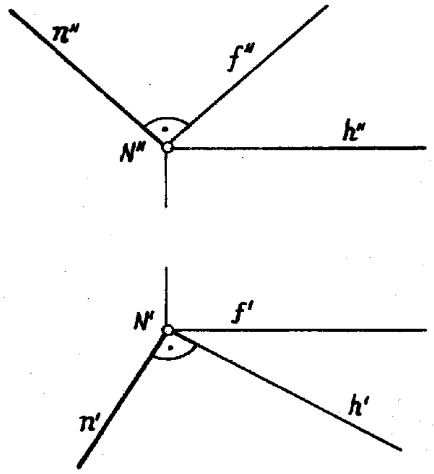
8


α
γ
β
a
I
b
i

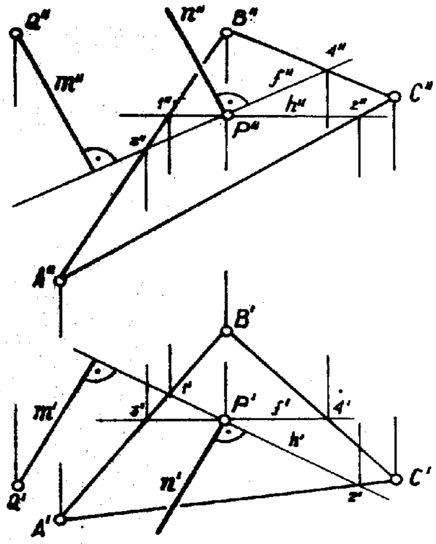
9


n
a
N
b
α

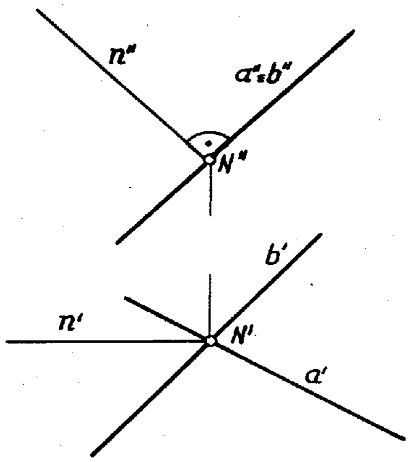
10



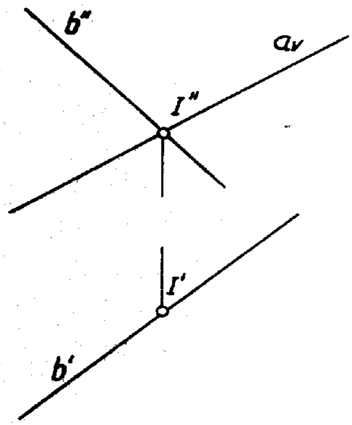
11



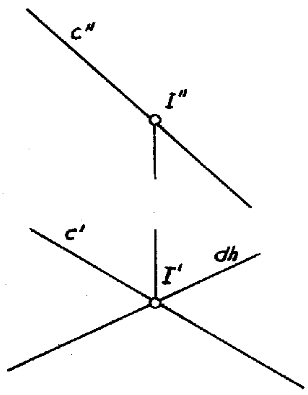
12



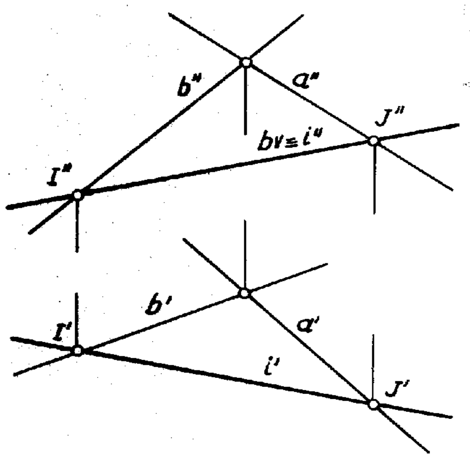
13



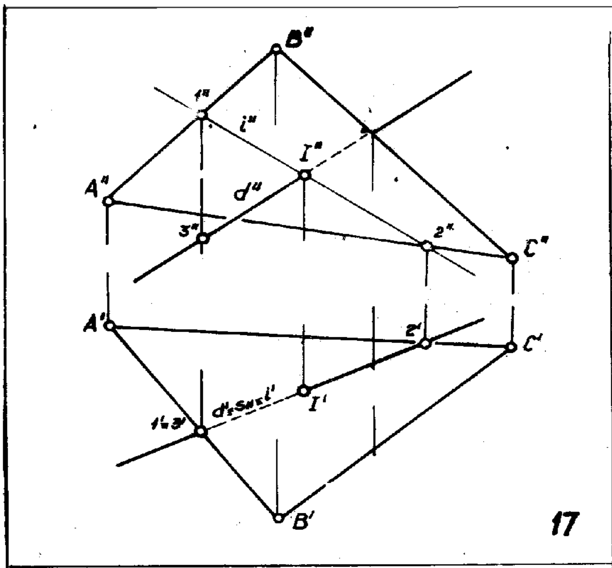
14

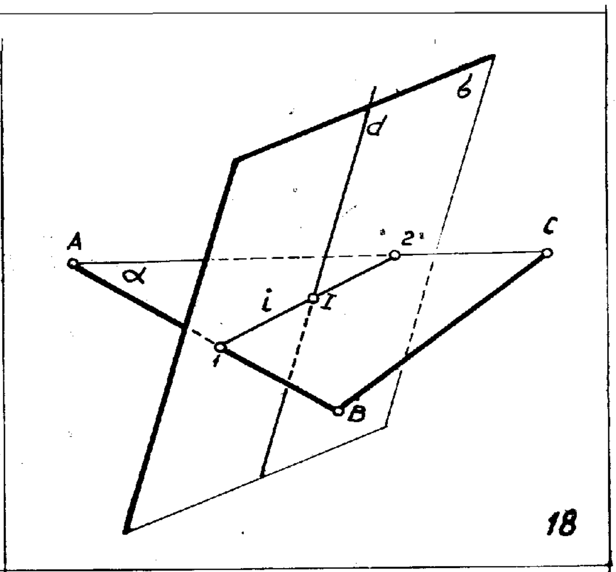


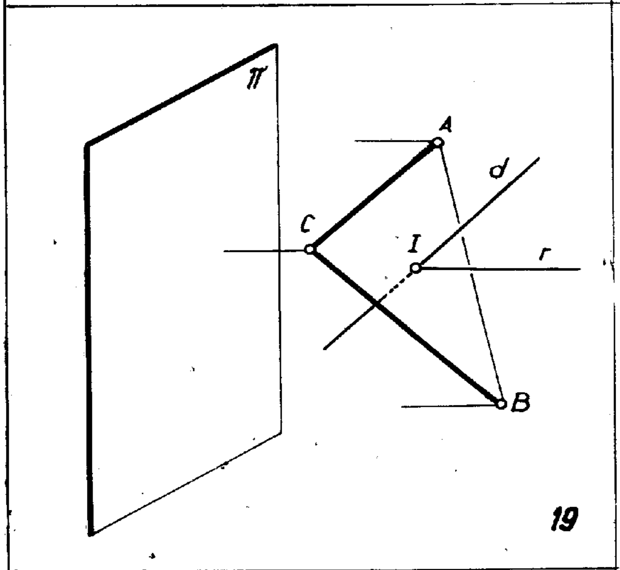
15

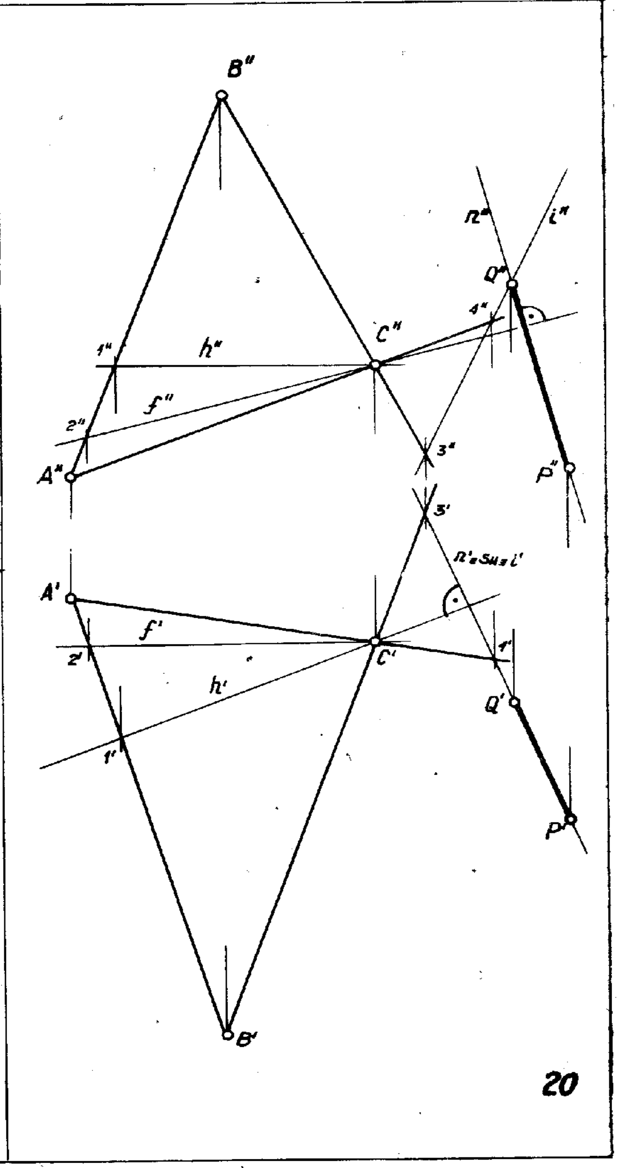


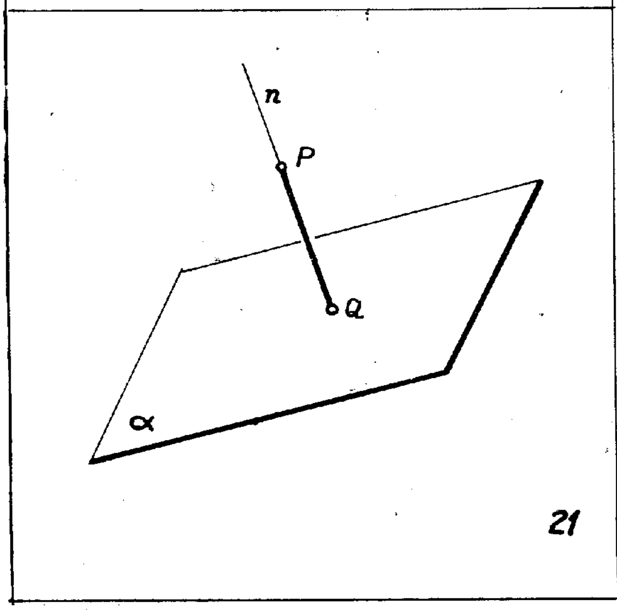
16

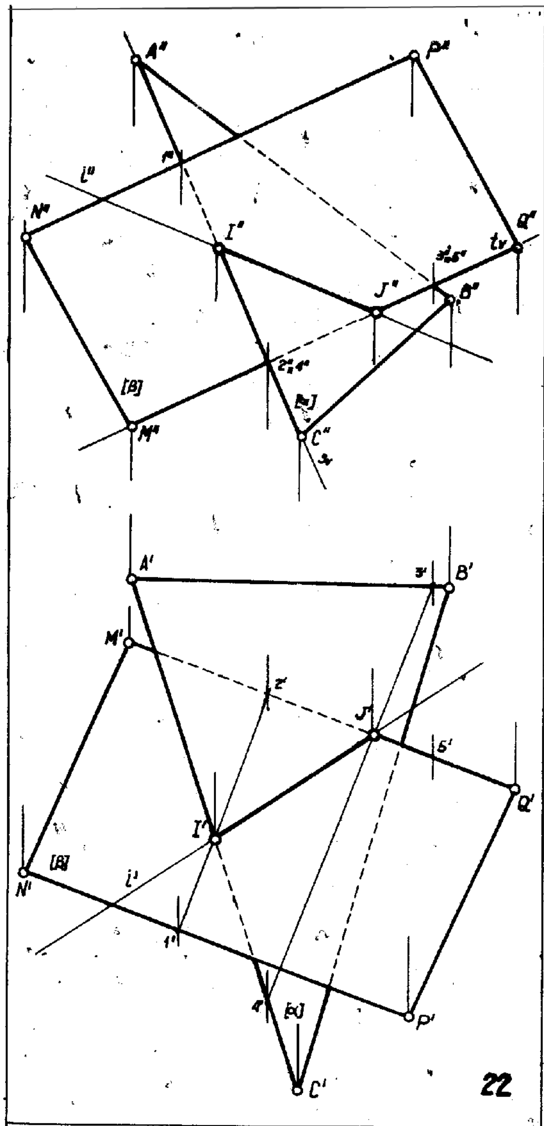

B"
1"
i"
I"
A"
d"
3"
2"
C"
A'
2'
C'
d'≡su≡i'
I'
1≡3'
B'
17


б
d
A
2
C
α
i
I
1
B
18

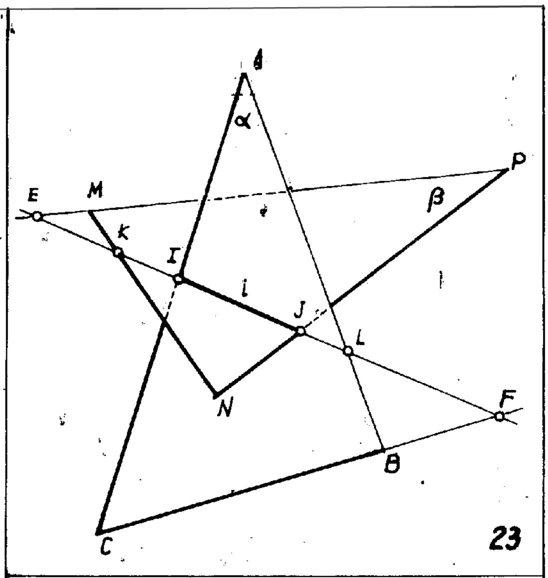

π
A
d
C
I
r
B
19


B"
n"
i"
Q"
4"
C"
1"
h"
f"
2"
3"
A"
P"
3'
n'≡su≡i'
A'
f'
2'
C'
4'
h'
Q'
1'
P'
B'
20

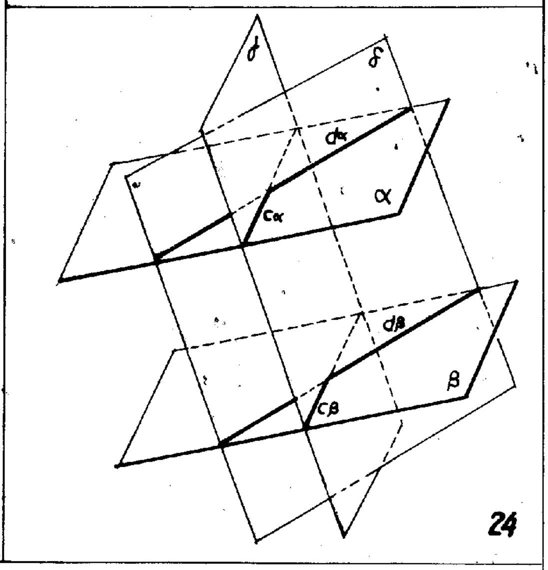

n
P
Q
α
21



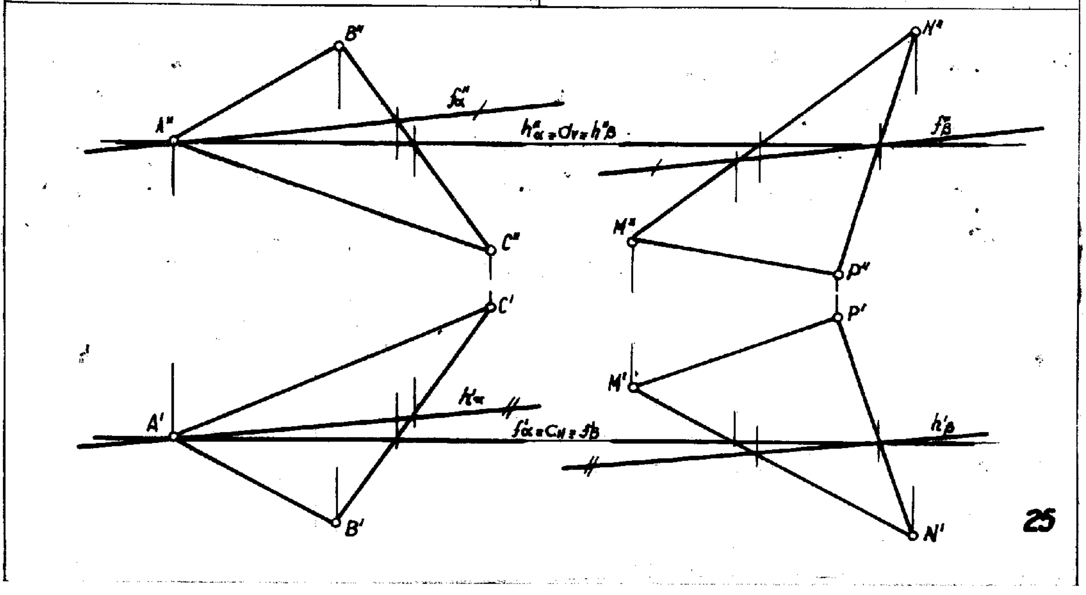
22



23



24



25