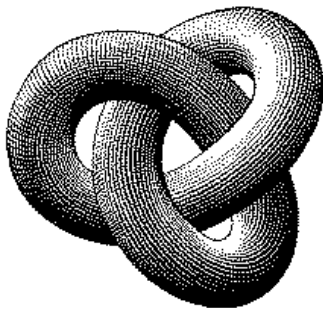


# Sistemas No Lineales

---

*Notas de Clase*



Por María Marta Seron  
Laboratorio de Sistemas Dinámicos y  
Procesamiento de Señales (LSD)  
Universidad Nacional de Rosario  
Primer Cuatrimestre 2000

Revisadas y ampliadas por Julio H. Braslavsky  
Automatización y Control Industrial  
Universidad Nacional de Quilmes  
Primer Cuatrimestre 2001

Basadas en Khalil, H. *Nonlinear Systems*.  
Segunda edición. Prentice Hall, NJ, 1996.



# Índice General

<b>I</b>	<b>Análisis</b>	<b>1</b>
1	Introducción	3
2	Propiedades Fundamentales	29
3	Estabilidad Según Lyapunov. Sistemas Estacionarios	49
4	Estabilidad Según Lyapunov. Sistemas Inestacionarios	77
5	Estabilidad de Sistemas Perturbados	97
<b>II</b>	<b>Control</b>	<b>113</b>
6	Control en Realimentación	115
7	Linealización Exacta por Realimentación	137
8	Diseños Basados en Lyapunov	161



**Parte I**  
**Análisis**



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Introducción

#### 1.1.1 Sistemas No Lineales de Control

La teoría de sistemas de control se ocupa del análisis y el diseño de componentes interactuantes de un sistema en una configuración que brinde un comportamiento deseado. La configuración esencial usada en teoría de sistemas de control se basa en el concepto fundamental de *realimentación*, que consiste en el proceso de medir las variables de interés en el sistema y usar esa información para controlar su comportamiento. La teoría y la práctica del control tienen un amplio rango de aplicaciones en los campos de la ingeniería aeronáutica, química, mecánica, ambiental, civil y eléctrica, así como en muchas otras disciplinas no ingenieriles. Las ventajas del control eficiente en la industria son inmensas, e incluyen mejoras en la calidad de los productos, reducción en el consumo de energía, minimización de los material de desecho, mayores niveles de seguridad y reducción de la contaminación.

El punto de partida en el análisis de un sistema de control es su representación por un modelo matemático, generalmente como un operador entre entradas y salidas del sistema, o como un conjunto de ecuaciones diferencia y/o diferenciales. La mayoría de los modelos matemáticos usados tradicionalmente por teóricos y prácticos del control son lineales. De hecho, los modelos lineales son mucho más manejables que los no lineales, y pueden representar en forma precisa el comportamiento de sistemas reales en muchos casos útiles.

Sin embargo, los avances tecnológicos actuales han generado una enorme variedad de nuevos problemas y aplicaciones que son *no lineales* en esencia. Por ejemplo, fenómenos no lineales tales como equilibrios múltiples, ciclos límite, bifurcaciones, corrimiento de frecuencias y caos, se observan comúnmente en aplicaciones modernas importantes en ingeniería, tales como sistemas de comando de vuelo, manipuladores robot, sistemas de autopistas automatizadas, estructuras de ala de avión, y sistemas de inyección de combustible de alto rendimiento. Tales fenómenos no lineales no se pueden describir mediante dinámica de modelos lineales — una razón ineludible para el uso de modelos no lineales y el desarrollo de conceptos y herramientas de sistemas no lineales de control.

Alentada por la sofisticación de la tecnología actual, la teoría de sistemas no lineales de control ha experimentado en la década pasada una vigorosa expansión, reflejada por un número rápidamente creciente de monografías y libros de texto científicos de sistemas no lineales de control [Isidori, 1995, Krstić et al., 1995, Khalil, 1996, Sepulchre et al., 1997, Isidori, 1999, Sastry, 1999, van der Schaft, 2000]. Una característica dominante de esta expansión ha sido la aparición de conceptos importantes, tales como los de *pasivación por realimentación* [van der

Schaft, 2000] y *estabilidad entrada-estado* [Sontag, 1989], y procedimientos sistemáticos de diseño, tales como “*backstepping*” y “*forwarding*” [Krstić et al., 1995, Sepulchre et al., 1997]. La importancia de estos procedimientos sistemáticos de diseño es que, aunque restringidos a sistemas con estructura especial, incluyen sistemas de importancia práctica, tales como barcos, motores a reacción, motores turbo-diesel y motores eléctricos de inducción.

### 1.1.2 El Curso

Este curso brinda una introducción rigurosa y en profundidad a los conceptos fundamentales de la teoría de sistemas no lineales y a técnicas modernas de análisis y diseño de sistemas de control no lineal.

Vamos a trabajar en general con sistemas dinámicos modelados por un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden acopladas entre sí, que representaremos en forma compacta con la ecuación diferencial vectorial de primer orden

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (1.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de *estado* y  $u \in \mathbb{R}^p$  es el vector de *entradas (de control)*. A veces vamos a considerar también una ecuación de *salida*

$$y = h(x, u), \quad (1.2)$$

donde  $y \in \mathbb{R}^m$  es un vector de variables de interés, por ejemplo variables físicamente medibles o variables que deseamos se comporten de alguna forma especial.

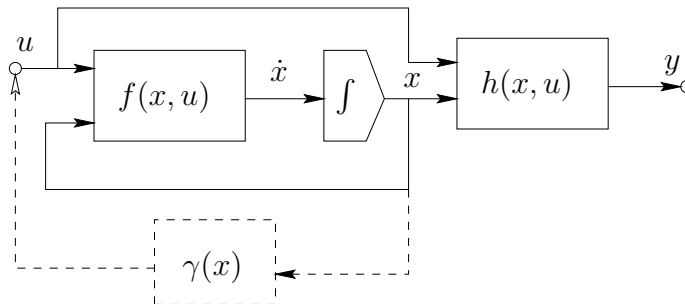


Figura 1.1: Sistema no lineal

Muchas veces la entrada  $u$  no aparece explícitamente en (1.1), ya sea porque la entrada es cero o porque fue especificada como una función del estado  $u = \gamma(x)$  — control por realimentación. En este caso la ecuación de estado es la ecuación *no forzada*

$$\dot{x} = f(x). \quad (1.3)$$

Vamos a trabajar, en general, con sistemas *estacionarios* o invariantes en el tiempo, es decir que su comportamiento es invariante al corrimiento del origen temporal. Cuando el sistema es *inestacionario* o variante en el tiempo, el lado derecho de (1.3) es una función explícita del tiempo.

Un concepto importante relacionado con la ecuación de estado (1.3) es el de *puntos de equilibrio*.



**Definición 1.1 (Puntos de Equilibrio).** Un punto  $x = x^*$  en el espacio de estado es un *punto de equilibrio (PE)* de (1.3) si tiene la propiedad de que cuando el estado inicial del sistema es  $x^*$ , el estado permanece en  $x^*$  en todo tiempo futuro.  $\circ$

Los PE de (1.3) son las raíces de la ecuación

$$f(x) = 0.$$

Un PE puede ser *aislado*, es decir no tiene otros PE en la vecindad, o puede existir un *continuo* de PE. Cuando el sistema es lineal, (1.3) tiene la forma conocida

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

y el único PE aislado posible (tomando  $u = 0$ ) es  $x = 0$ .

Como las técnicas de análisis y control lineales son bien conocidas, siempre es conveniente, al analizar un sistema no lineal, comenzar linealizando el sistema alrededor de algún punto de equilibrio y estudiar el sistema lineal resultante. Sin embargo esto no es suficiente debido básicamente a dos razones:

- (i) la linealización sólo predice el comportamiento *local*, no sirve para estudiar el comportamiento lejos del punto de operación;
- (ii) la dinámica de un sistema no lineal es mucho más rica que la de un sistema lineal debido a la presencia de fenómenos no lineales como: escape en tiempo finito, múltiples PE aislados, ciclos límite, oscilaciones sub-armónicas, armónicas o casi-periódicas, caos, etc.

En el transcurso del curso sólo vamos a encontrar los fenómenos de escape en tiempo finito, múltiples equilibrios y ciclos límite. Ver por ejemplo Guckenheimer and Holmes [1983] para más referencia sobre caos, bifurcaciones y oscilaciones.

## 1.2 Ejemplos

### 1.2.1 Ecuación del Péndulo

Uno de los problemas más simples en robótica es el de controlar la posición de una junta de robot usando un motor ubicado en el punto de giro. Matemáticamente esto no es más que un péndulo, representado en la Figura 1.2.

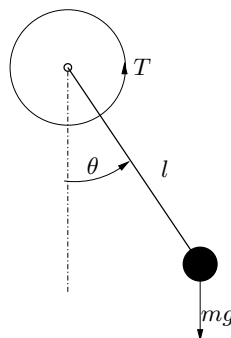


Figura 1.2: Péndulo

Usando la segunda ley de Newton podemos escribir la ecuación de movimiento en la dirección tangencial:

$$ml\ddot{\theta} = -mg \operatorname{sen} \theta - kl\dot{\theta},$$

donde  $m$  es la masa de la bola,  $l$  es la longitud del brazo,  $\theta$  es el ángulo entre la vertical y el brazo,  $g$  es la aceleración de la gravedad, y  $k$  es el coeficiente de fricción.

Tomando como variables de estado  $x_1 = \theta$  y  $x_2 = \dot{\theta}$  podemos escribir las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \operatorname{sen} x_1 - \frac{k}{m} x_2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Los PE son (haciendo  $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ )  $(n\pi, 0)$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Obviamente sólo los PE  $(0, 0)$  y  $(\pi, 0)$  son no triviales ya que el resto son repeticiones de los mismos. Físicamente podemos ver que el PE en  $(0, 0)$  es estable mientras que el PE en  $(\pi, 0)$  es inestable, como ya vamos a estudiar en más detalle.

Otra versión de la ecuación del péndulo consiste en agregarle una entrada de control, por ejemplo aplicando una cupla  $T$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \operatorname{sen} x_1 - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} T. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Varios sistemas físicos pueden describirse con ecuaciones similares a las del péndulo, e.g., un generador sincrónico conectado a un bus infinito [Khalil, 1996, Ejercicio 1.7], el circuito de una juntura Josephson [Khalil, 1996, Ejercicio 1.8], un lazo de PLL (*phase locked loop*) [Khalil, 1996, Ejercicio 1.10].

### 1.2.2 Circuito con Diodo Túnel

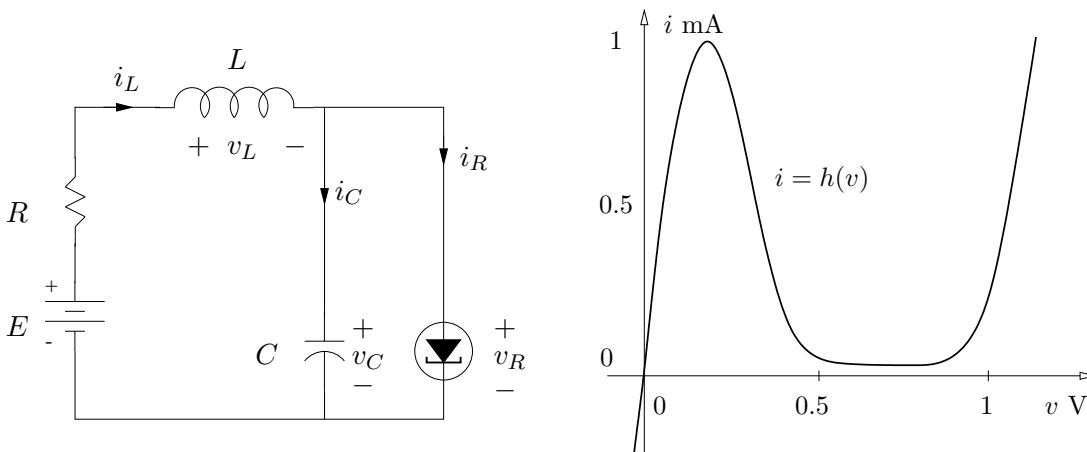


Figura 1.3: Diodo Túnel

La Figura 1.3 muestra un circuito con diodo túnel, donde la relación constitutiva del diodo es  $i_R = k(v_R)$ . Usando las leyes de Kirchhoff y tomando como variables de estado  $x_1 = v_C$

(tensión en el capacitor) y  $x_2 = i_L$  (corriente en la inductancia), el circuito puede describirse con las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{C} [-h(x_1) + x_2], \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L} [-x_1 - Rx_2 + u], \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde  $u = E$  e  $i = h(v)$  es la característica  $v - i$  del diodo túnel. Los PE son las raíces de la ecuación

$$h(x_1) = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1.$$

Según el valor de  $E/R$  puede haber uno o tres PE, como se ve en la Figura 1.4.

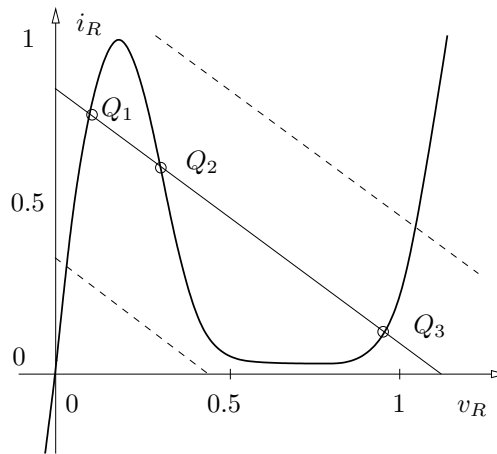


Figura 1.4: Puntos de equilibrio del circuito de diodo túnel

### 1.2.3 Sistema Masa-Resorte

Consideramos el sistema masa-resorte de la Figura 1.5. Usando la ley de Newton:

$$m\ddot{y} + F_f + F_r = F,$$

donde  $F_f$  es una fuerza resistiva de fricción,  $F_r$  es la fuerza de recuperación del resorte, y  $F$  es una fuerza externa a nuestra disposición. Asumimos que  $F_r$  es sólo función del desplazamiento  $y$ , es decir  $F_r = g(y)$ ,  $g(0) = 0$ .

Para desplazamientos pequeños,  $F_r$  puede modelarse como la relación lineal  $g(y) = ky$ . Para grandes desplazamientos, la fuerza de recuperación puede depender no linealmente de  $y$ . Por ejemplo, hay resortes suaves donde

$$g(y) = k(1 - a^2y^2)y, \quad |ay| < 1,$$

o resortes duros donde

$$g(y) = k(1 + a^2y^2)y.$$

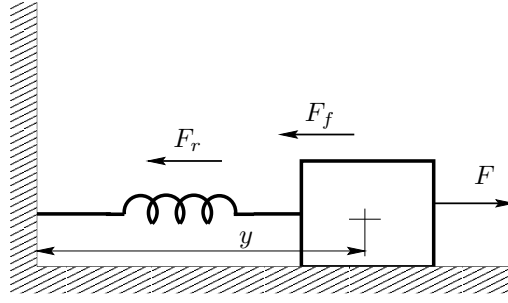


Figura 1.5: Sistema masa-resorte

Un ejemplo de fuerza de fricción es la fuerza viscosa o amortiguamiento del aire, que suele modelarse como una función no lineal de la velocidad  $F_v = h(\dot{y})$ ,  $h(0) = 0$ . Para velocidades pequeñas podemos asumir  $F_v = c\dot{y}$ . Combinando un resorte duro con amortiguamiento lineal y una fuerza externa periódica  $F = A \cos \omega t$  obtenemos la ecuación de Duffing

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^2y^3 = A \cos \omega t \quad (1.7)$$

que es un ejemplo clásico en el estudio de excitación periódica de sistemas no lineales.

Otro ejemplo de fuerza de fricción es la fricción estática o de Coulomb. Este tipo de amortiguamiento aparece cuando la masa se desliza sobre una superficie seca. Cuando la masa está en reposo, existe una fuerza de fricción estática  $F_s$  que actúa paralela a la superficie y está limitada por los valores  $\pm\mu_s mg$ , donde  $0 < \mu_s < 1$  es el coeficiente de fricción estática. Esta fuerza toma cualquier valor, dentro de sus límites, para mantener la masa en reposo. Para que haya movimiento, debe ejercerse una fuerza en la masa que venza a la fuerza de fricción. En ausencia de la fuerza exterior,  $F = 0$ , la fuerza de fricción estática compensa la fuerza de recuperación del resorte y mantiene el equilibrio si  $|g(y)| \leq \mu_s mg$ . Una vez que la masa entra en movimiento, aparece una fuerza de fricción de deslizamiento de magnitud  $\mu_k mg$  que se opone al movimiento, donde  $\mu_k$  es el coeficiente de fricción cinética, que asumimos constante. Un modelo ideal de la fuerza de fricción es

$$F_d = \begin{cases} -\mu_k mg, & \text{for } \dot{y} < 0 \\ F_s, & \text{for } \dot{y} = 0 \\ \mu_k mg, & \text{for } \dot{y} > 0 \end{cases}$$

Combinando un resorte lineal con amortiguamiento viscoso, fricción estática y fuerza externa nula tenemos

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y, \dot{y}) = 0$$

donde

$$\eta(y, \dot{y}) = \begin{cases} \mu_k mg \operatorname{sign}(\dot{y}), & \text{for } |\dot{y}| > 0 \\ -ky, & \text{for } \dot{y} = 0 \text{ and } |y| \leq \mu_s mg/k \\ -\mu_s mg \operatorname{sign}(y), & \text{for } \dot{y} = 0 \text{ and } |y| > \mu_s mg/k \end{cases}$$

El valor de  $\eta(y, \dot{y})$  para  $\dot{y} = 0$  y  $|y| \leq \mu_s mg/k$  resulta de la condición de equilibrio  $\ddot{y} = \dot{y} = 0$ . Tomando  $x_1 = y$  y  $x_2 = \dot{y}$ , la ecuación de estado es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 - \frac{1}{m}\eta(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dos características de esta ecuación son:

- (i) tiene un conjunto de equilibrio en lugar de PE aislados;
- (ii) la función del lado derecho es una función discontinua del estado.

Considerando  $x_2 > 0$  o  $x_2 < 0$  se obtienen dos modelos lineales diferentes. El comportamiento del sistema no lineal puede estudiarse en cada región vía análisis lineal. Este es un ejemplo de *análisis seccionalmente lineal*.

### 1.2.4 Oscilador de Resistencia Negativa

La figura 1.6 muestra la estructura básica de una importante clase de osciladores electrónicos. Asumimos  $L > 0$ ,  $C > 0$ , y que el elemento resistivo tiene una característica  $i = h(v)$  como se muestra en la Figura 1.6.

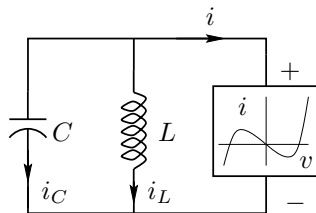


Figura 1.6: Oscilador de resistencia negativa

Escribiendo la ley de Kirchhoff de corriente y derivando con respecto a  $t$ , obtenemos

$$CL \frac{d^2 v}{dt^2} + v + Lh'(v) \frac{dv}{dt} = 0$$

Haciendo el cambio de escala de tiempos  $\tau = t/\sqrt{CL}$  tenemos (denotando  $\dot{v} = dv/d\tau$ )

$$\ddot{v} + \varepsilon h'(v) \dot{v} + v = 0$$

donde  $\varepsilon = \sqrt{L/C}$ . Esta ecuación es un caso particular de la ecuación de Lienard

$$\ddot{v} + f(v) \dot{v} + g(v) = 0 \tag{1.9}$$

Cuando

$$h(v) = -v + \frac{1}{3}v^3$$

la ecuación toma la forma de la ecuación de Van der Pol

$$\ddot{v} - \varepsilon(1 - v^2) \dot{v} + v = 0 \tag{1.10}$$

Esta ecuación tiene una solución periódica que atrae toda otra solución excepto la trivial correspondiente al único PE  $v = \dot{v} = 0$ . Tomando  $x_1 = v$  y  $x_2 = \dot{v}$  llegamos al modelo de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \varepsilon h'(x_1)x_2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

### 1.2.5 Control Adaptable

Sea la *planta*

$$\dot{y} = ay + ku$$

donde  $u$  es la entrada de control e  $y$  es la salida medida. Supongamos que se quiere obtener un sistema a lazo cerrado cuyo comportamiento entrada-salida sea el del *modelo de referencia*

$$\dot{y}_m = a_my_m + k_mr$$

donde  $r$  es la entrada de referencia y el modelo se eligió de forma que  $y_m(t)$  represente la salida deseada para el sistema a lazo cerrado. Este objetivo puede alcanzarse mediante el control en realimentación

$$u(t) = \theta_1^*r(t) + \theta_2^*y(t)$$

siempre que los parámetros de la planta  $a$  y  $k$  sean conocidos,  $k \neq 0$ , y los parámetros del control se elijan como

$$\theta_1^* = \frac{k_m}{k} \quad \theta_2^* = \frac{a_m - a}{k}.$$

Cuando  $a$  y  $k$  son desconocidos, podemos considerar el control

$$u(t) = \theta_1(t)r(t) + \theta_2(t)y(t)$$

donde las ganancias variables  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$  van a ser ajustadas on-line usando los datos disponibles:  $r(\tau)$ ,  $y_m(\tau)$ ,  $y(\tau)$  y  $u(\tau)$  con  $\tau < t$ . La adaptación debe ser tal que  $\theta_1(t)$  y  $\theta_2(t)$  evolucionen hacia sus valores nominales  $\theta_1^*$  y  $\theta_2^*$ . La regla de adaptación se elige en base a consideraciones de estabilidad, por ejemplo, el *algoritmo del gradiente* [Khalil, 1996§13.4]:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= -\gamma(y - y_m)r \\ \dot{\theta}_2 &= -\gamma(y - y_m)y \end{aligned}$$

donde  $\gamma$  es una constante positiva que determina la velocidad de adaptación. Para escribir un modelo de estado, es conveniente definir los errores: de salida  $e = y - y_m$  y paramétricos  $\phi_1 = \theta_1 - \theta_1^*$  y  $\phi_2 = \theta_2 - \theta_2^*$ . Con un poco de manipulación algebraica (ejercicio) se llega al lazo cerrado descrito por la ecuación de estado no lineal, no autónoma

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= a_me(t) + k\phi_1(t)r(t) + k\phi_2(t)(e(t) + y_m(t)) \\ \dot{\phi}_1(t) &= -\gamma e(t)r(t) \\ \dot{\phi}_2(t) &= -\gamma e(t)(e(t) + y_m(t)) \end{aligned} \tag{1.12}$$

donde las señales  $r(t)$  e  $y_m(t)$  son entradas externas.

Un modelo más simple se obtiene cuando se conoce  $k$ . En este caso se puede tomar  $\theta_1 = \theta_1^*$  y sólo  $\theta_2$  debe ajustarse on line. Ejercicio: escribir el modelo en este caso y hallar los PE cuando  $r(t) \equiv 0$ .

## 1.3 Sistemas de Segundo Orden

### 1.3.1 Sistemas Lineales

Es útil repasar el retrato de fase de sistemas lineales de segundo orden como herramienta para estudiar el comportamiento local del sistema no lineal alrededor de un PE. Consideremos el sistema de segundo orden

$$\dot{x} = Ax$$

La solución para un estado inicial  $x_0$  está dada por

$$x(t) = Me^{J_r t} M^{-1} x_0$$

donde  $J_r$  es la forma real de Jordan de  $A$  y  $M$  es una matriz real no singular tal que  $M^{-1}AM = J_r$ . Dependiendo de los autovalores de  $A$ , la forma real de Jordan toma alguna de las siguientes tres formas

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

donde  $k$  es 0 o 1. La primera forma corresponde al caso en que los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales y distintos, la segunda corresponde al caso en que los autovalores son reales e iguales, y la tercera corresponde al caso de autovalores complejos  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ . En el caso de autovalores reales, hay que separar el caso en que al menos uno de los autovalores es cero. En este caso, el origen no es un PE aislado y el comportamiento cualitativo del sistema es distinto de los otros casos.

#### Autovalores Reales $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$

En este caso  $M = [v_1, v_2]$ , donde  $v_1$  y  $v_2$  son los autovectores asociados con  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . El retrato de fase es el de un:

- *nodo estable* si ambos autovalores son negativos. Las trayectorias en el plano de fase son parábolas que se hacen tangentes al autovector lento (correspondiente al mayor autovalor) cuando se acercan al origen, y paralelas al autovector rápido (correspondiente al menor autovalor) lejos del origen.
- *nodo inestable* si ambos autovalores son positivos. Las trayectorias en el plano de fase son parábolas con formas similares a la del nodo estable pero con sentido invertido.
- *ensilladura* si los autovalores tienen distinto signo. Las trayectorias en el plano de fase (excepto las correspondientes a los autovectores, que son rectas) son hipérbolas que “comienzan” tangentes al autovector estable (correspondiente al autovalor estable) en infinito, y “terminan” tangentes al autovector inestable (correspondiente al autovalor inestable), también en infinito.

#### Autovalores Complejos $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

En coordenadas polares  $r$  y  $\theta$  el modelo de estado se desacopla, tomando la forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= \beta \end{aligned}$$

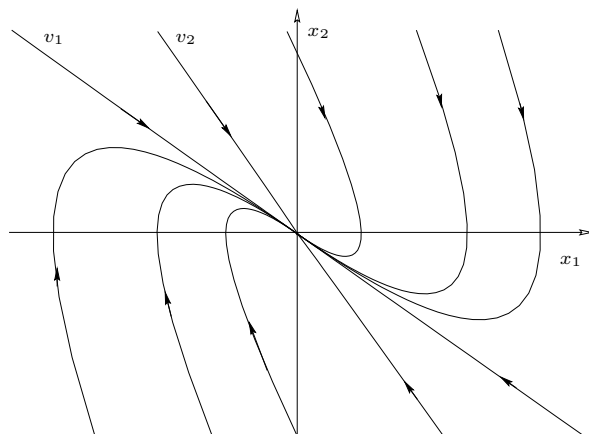


Figura 1.7: Retrato de fase de un nodo estable.

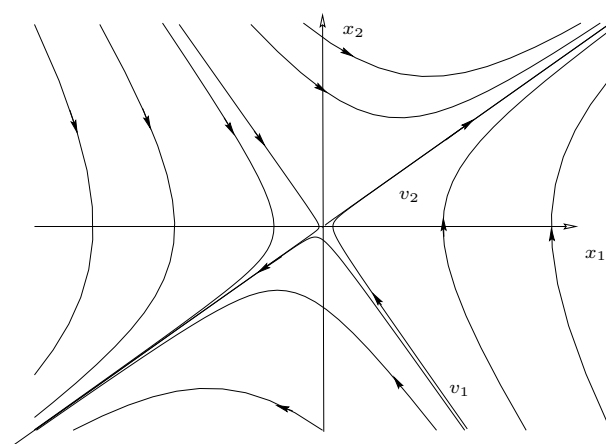


Figura 1.8: Retrato de fase de una ensilladura.



de forma que el radio es una función exponencial de la parte real de los autovalores,  $\alpha$ , y el ángulo crece linealmente con la parte imaginaria  $\beta$ . El retrato de fase es el de un

- *foco estable* si  $\alpha$  es negativa. Las trayectorias en el plano de fase son espirales logarítmicas que convergen al origen.

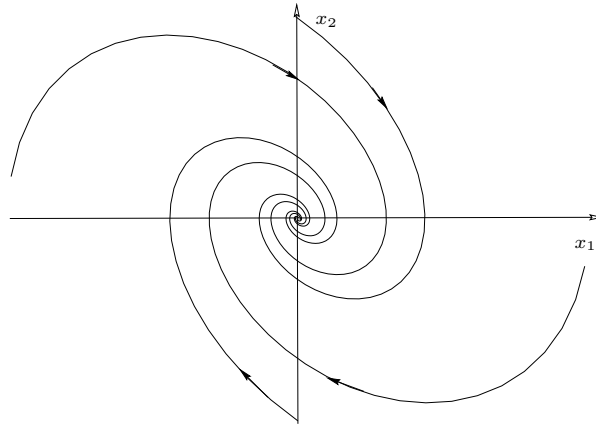


Figura 1.9: Retrato de fase de un foco estable

- *foco inestable* si  $\alpha$  es positiva. Las trayectorias en el plano de fase son espirales logarítmicas que divergen del origen.
- *centro* si  $\alpha = 0$ . Las trayectorias en el plano de fase son elipses centradas en el origen.

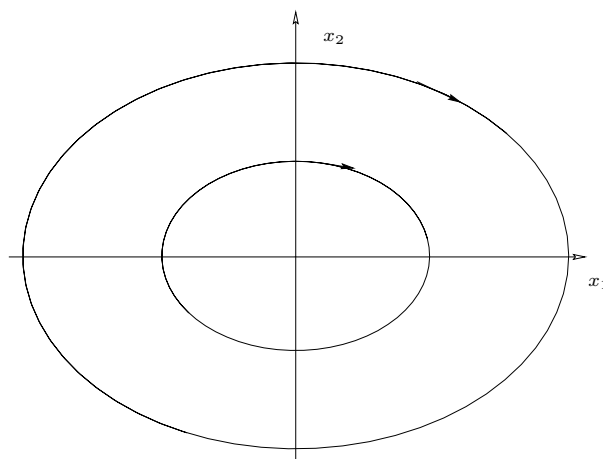


Figura 1.10: Retrato de fase de centro

### Autovalores Múltiples No Nulos $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

El retrato de fase en este caso se asemeja al de un nodo (estable o inestable según  $\lambda$  sea negativo o positivo). Las trayectorias no tienen en este caso el comportamiento asintótico rápido–lento como en el caso de autovalores distintos.

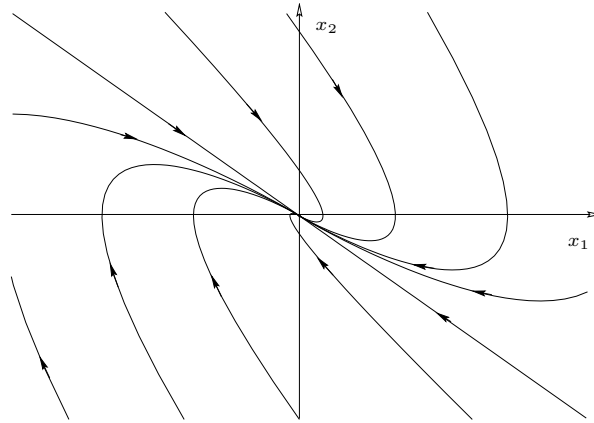


Figura 1.11: Retrato de fase del caso de autovalores múltiples no nulos

*Nota 1.1 (Resumen del caso en que el origen es un PE aislado).* El sistema puede tener 6 retratos de fase diferentes asociados con diferentes tipos de equilibrio: nodo estable, nodo inestable, ensilladura, foco estable, foco inestable y centro. El tipo de equilibrio está completamente especificado por la ubicación de los autovalores de  $A$ . El comportamiento global del sistema (en todo el plano de fase) está cualitativamente determinado por el tipo de equilibrio.

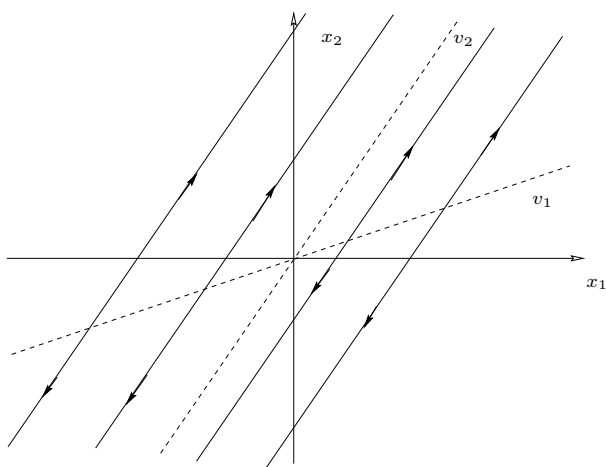
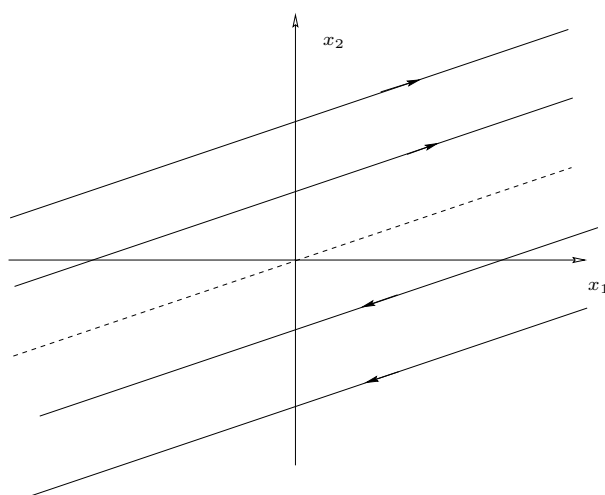
### Uno o Ambos Autovalores Es Cero

En este caso  $A$  tiene un *kernel* o *espacio nulo* no trivial, es decir existe un subespacio no trivial del espacio de estado cuyos elementos son mapeados al cero bajo la transformación lineal definida por  $A$ . Todo vector en el kernel de  $A$  es un punto de equilibrio del sistema. La dimensión del kernel puede ser uno o dos; si es dos, entonces  $A$  es la matriz nula y todo punto en el espacio de estado es un punto de equilibrio. Cuando la dimensión del kernel de  $A$  es uno, la forma de Jordan de  $A$  dependerá de la multiplicidad del cero como autovalor.

Cuando la multiplicidad del cero como autovalor es uno, el autovector correspondiente define el conjunto o subespacio de equilibrio del sistema. Todas las trayectorias en el plano de fase convergen al subespacio de equilibrio cuando el autovalor no nulo es negativo, y divergen cuando es positivo; el caso mostrado en la Figura 1.12.

Cuando la multiplicidad del cero como autovalor es dos, el autovector  $v_1$ , donde  $M = [v_1, v_2]$  es la transformación que lleva a la forma de Jordan, es el conjunto o subespacio de equilibrio del sistema. Las trayectorias que comienzan fuera del subespacio de equilibrio se mueven paralelas a él, como se ve en la Figura 1.13.

*Nota 1.2 (Persistencia del Tipo de Equilibrio Frente a Perturbaciones).* Veamos el caso de perturbaciones lineales. Supongamos que  $A$  tiene autovalores distintos y consideremos la matriz  $A + \Delta A$ , donde  $\Delta A$  es una matriz real de  $2 \times 2$  cuyos elementos son arbitrariamente pequeños. Por la teoría de perturbaciones de matrices (ver por ejemplo Golub and van Loan 1996§7) sabemos que los autovalores de una matriz dependen continuamente de sus parámetros. Es decir, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si la magnitud de la perturbación de cada elemento de  $A$  es menor que  $\delta$ , los autovalores de la matriz perturbada  $A + \Delta A$  estarán en una bola de radio  $\varepsilon$  centrada en los autovalores de  $A$ . En consecuencia, todo autovalor de  $A$  que esté en el semiplano derecho (o izquierdo) abierto, permanecerá en ese semiplano frente a perturbaciones arbitrariamente pequeñas. Por otro lado, los autovalores sobre el eje imaginario pueden moverse hacia cualquiera de los semiplanos frente a perturbaciones por más pequeño que sea  $\varepsilon$ .

Figura 1.12: Retrato de fase para  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ Figura 1.13: Retrato de fase para  $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$

Por lo tanto, podemos concluir que si el PE  $x = 0$  de  $\dot{x} = Ax$  es un nodo, foco o ensilladura, entonces el PE  $x = 0$  de  $\dot{x} = (A + \Delta A)x$  será del mismo tipo frente a perturbaciones suficientemente pequeñas. La situación es muy distinta si el PE es un centro. Consideremos la siguiente perturbación de la forma real de Jordan correspondiente a un centro

$$\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

donde  $\mu$  es el parámetro de perturbación. Cuando  $\mu$  es positivo, el PE del sistema perturbado es un foco inestable; cuando  $\mu$  es negativo es un foco estable. Esto pasa para cualquier valor de  $\mu \neq 0$ . Dado que el retrato de fase de un foco es cualitativamente distinto del de un centro, vemos que un centro no persiste frente a perturbaciones. El *nodo*, *foco* y *ensilladura* se dicen *estructuralmente estables* porque mantienen su comportamiento cualitativo frente a perturbaciones infinitésimamente pequeñas, mientras que el *centro* no es estructuralmente estable. La diferencia entre ambos casos es debida a la ubicación de los autovalores de  $A$ , siendo los autovalores sobre el eje imaginario vulnerables a perturbaciones. Esto lleva a la definición de PE *hiperbólico*. El origen  $x = 0$  es un PE hiperbólico de  $\dot{x} = Ax$  si  $A$  no tiene autovalores con parte real nula.

Cuando  $A$  tiene autovalores reales múltiples, perturbaciones infinitésimamente pequeñas pueden transformarlos en autovalores complejos. Es decir que un nodo puede permanecer como nodo o transformarse en un foco.

Cuando  $A$  tiene autovalores nulos, existe una diferencia importante entre los casos en que uno o los dos ( $A \neq 0$ ) autovalores sean cero. En el primer caso, una perturbación del autovalor en cero resulta en un autovalor  $\lambda_1 = \mu$  donde  $\mu$  puede ser positivo o negativo. Como el otro autovalor  $\lambda_2$  es distinto de cero, la perturbación lo mantiene fuera del cero. Es decir que resultan dos autovalores reales distintos y el PE del sistema perturbado es un nodo o una ensilladura, dependiendo de los signos de  $\lambda_2$  y  $\mu$ .

Sin embargo, como la perturbación es muy pequeña, de forma que  $|\lambda_1| \ll |\lambda_2|$ , la forma de las trayectorias mantienen cierta similitud con las del caso en que un autovalor es nulo (comparar los retratos de fase en la Figura 1.14 con las Figuras 1.7 y 1.8). El comportamiento de este sistema es el de un sistema *singularmente perturbado* [Khalil, 1996, Capítulo 9].

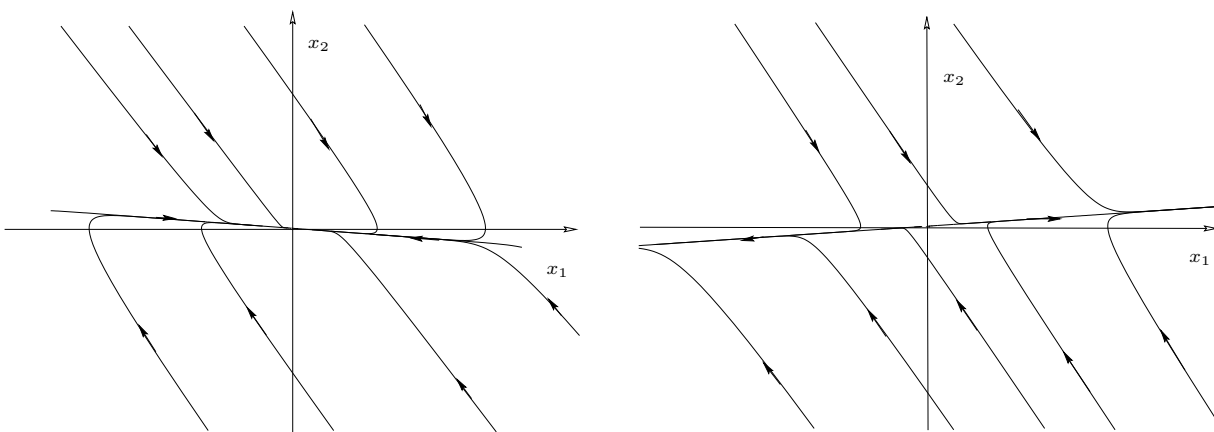


Figura 1.14: Retrato de fase de un sistema perturbado cuando  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 < 0$  con  $\mu < 0$  (izquierda) y  $\mu > 0$  (derecha)

Cuando ambos autovalores de  $A$  son nulos, el efecto de una perturbación es más dramático.

Consideremos las siguientes posibles perturbaciones de la forma de Jordan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -\mu^2 & \mu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

donde  $\mu$  puede ser positivo o negativo. Es fácil de ver que el PE en cada uno de estos cuatro casos puede ser un centro, un foco, un nodo o una ensilladura, respectivamente.

### 1.3.2 Equilibrios Múltiples

Un sistema lineal tiene un PE aislado en  $x = 0$  si  $\det A \neq 0$ , y un continuo de PE o subespacio de equilibrio cuando  $\det A = 0$ . Un sistema no lineal, en cambio, puede tener múltiples PE aislados.

**Ejemplo 1.1 (Diodo Túnel).** Consideremos otra vez el modelo del diodo túnel (1.6), con parámetros  $u = 1.2V$ ,  $R = 1.5k\Omega$ ,  $C = 2pF$ ,  $L = 5\mu H$ . Midiendo tiempo en nanosegundos y corrientes en mA, el modelo de estado resulta

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 0.5[-h(x_1) + x_2] \\ \dot{x}_2 &= 0.2(-x_1 - 1.5x_2 + 1.2) \end{aligned}$$

Supongamos que  $h$  es

$$h(x_1) = 17.76x_1 - 103.79x_1^2 + 229.62x_1^3 - 226.31x_1^4 + 83.72x_1^5$$

El retrato de fase obtenido por simulación en computadora puede verse en la Figura 1.15. Hay tres PE aislados  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ ; todas las trayectorias en el plano de fase tienden hacia  $Q_1$  o  $Q_3$ , excepto dos únicas trayectorias que tienden hacia  $Q_2$  y que definen la *curva separatriz* que divide el plano de fase en 2 mitades, en cada una de las cuales las trayectorias tienden hacia  $Q_1$  o  $Q_3$ , respectivamente.

**Ejemplo 1.2 (Péndulo).** Consideremos el modelo de estado del péndulo (1.4) con  $k/l = 1$  y  $k/m = 0.5$ . El retrato de fase obtenido por simulación en computadora puede verse en la Figura 1.16. Puede verse que es periódico con un período de  $2\pi$ , por lo cual el comportamiento puede estudiarse en la franja  $-\pi \leq x_1 \leq \pi$ . Salvo dos trayectorias especiales que terminan en el PE inestable  $(\pi, 0)$ , toda otra trayectoria converge al PE estable  $(0, 0)$ .

### 1.3.3 Comportamiento Cualitativo Cerca de un PE

Salvo en casos especiales, el comportamiento de un sistema no lineal en la vecindad de un PE puede determinarse vía la linealización alrededor de ese punto.

Sea  $p = (p_1, p_2)$  un PE del sistema no lineal

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{1.14}$$

y supongamos que las funciones  $f_1$  y  $f_2$  son continuamente diferenciables (derivables con derivada continua). Expandiendo el lado derecho de (1.14) en series de Taylor alrededor de  $(p_1, p_2)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(p_1, p_2) + a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2) + \text{T.O.S} \\ \dot{x}_2 &= f_2(p_1, p_2) + a_{21}(x_1 - p_1) + a_{22}(x_2 - p_2) + \text{T.O.S} \end{aligned}$$

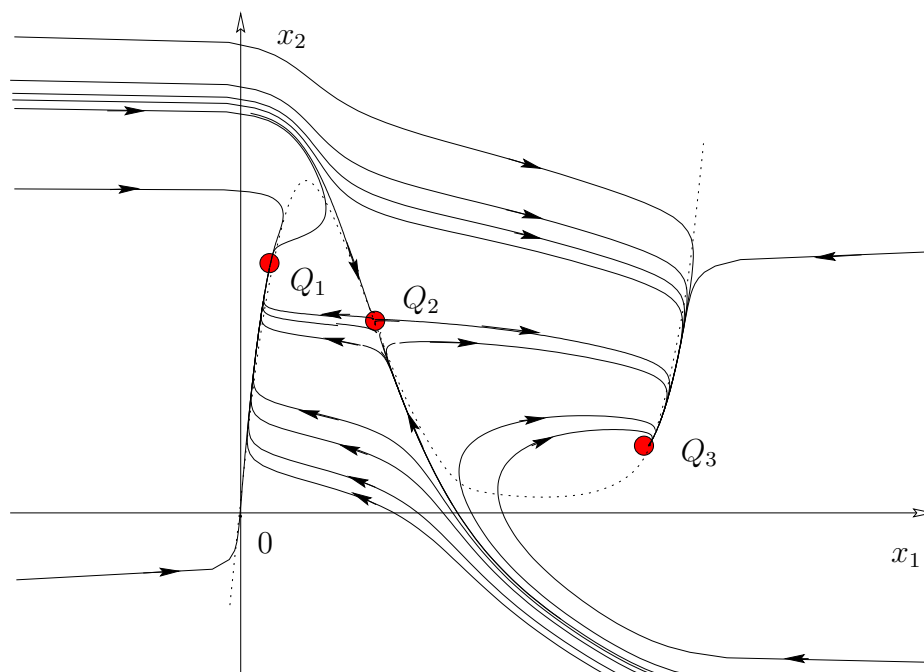


Figura 1.15: Retrato de fase del circuito con diodo túnel

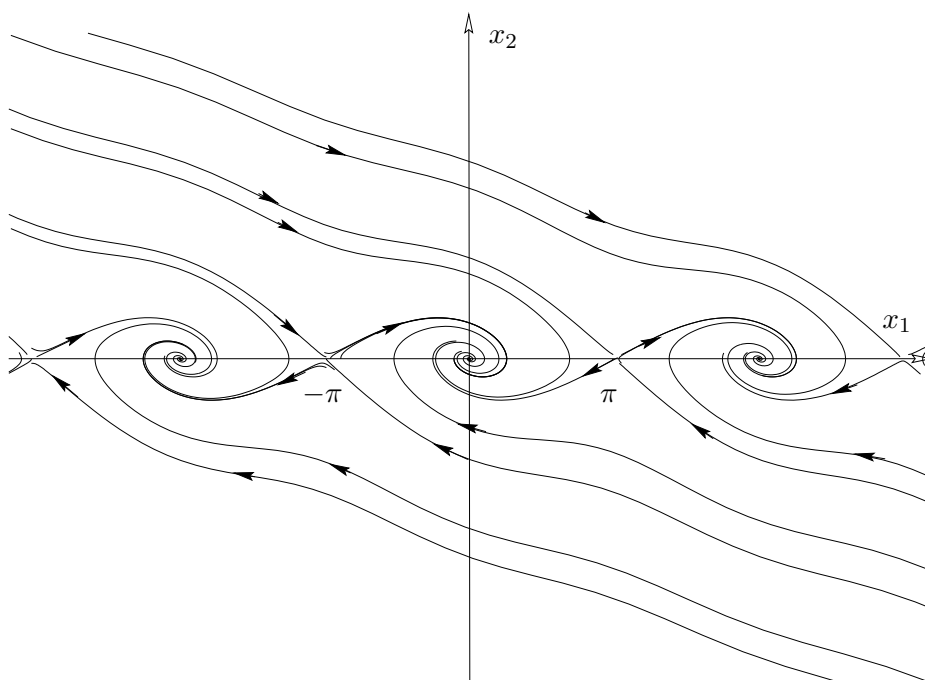


Figura 1.16: Retrato de fase de la ecuación del péndulo

donde  $a_{ij}$  es la derivada parcial de  $f_i$  respecto de  $x_j$  evaluada en  $x_1 = p_1$ ,  $x_2 = p_2$ , y T.O.S son términos de orden superior, es decir de la forma  $(x_1 - p_1)^2$ ,  $(x_2 - p_2)^2$ ,  $(x_1 - p_1)(x_2 - p_2)$  y potencias superiores de los mismos. Como  $(p_1, p_2)$  es un PE tenemos que

$$f_1(p_1, p_2) = f_2(p_1, p_2) = 0$$

Como nos interesa el comportamiento cerca de  $(p_1, p_2)$ , definimos

$$y_1 = x_1 - p_1, \quad y_2 = x_2 - p_2$$

con lo cual el sistema toma la forma

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \text{T.O.S}$$

$$\dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \text{T.O.S}$$

o más concisamente, y despreciando los T.O.S.,

$$\dot{y} = Ay = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=p} y$$

La matriz

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

es la *matriz Jacobiana* de  $f(x) = [f_1(x), f_2(x)]^T$  evaluada en el PE  $p$ .

Analizando los autovalores de la matriz Jacobiana podemos determinar las propiedades del PE en el origen del sistema linealizado. Si el origen del sistema linealizado es un nodo estable (inestable) con autovalores distintos, un foco estable (inestable) o una ensilladura, entonces en un entorno del PE las trayectorias del sistema no lineal se comportan como las de un nodo estable (inestable), un foco estable (inestable) o una ensilladura, respectivamente. En estos casos el PE del sistema no lineal también se llama, por extensión, nodo, foco o ensilladura.

Esta propiedad de la linealización de un sistema no lineal alrededor de un PE sólo vale si el equilibrio del sistema linealizado es hiperbólico. En este caso decimos que el correspondiente PE del sistema no lineal es hiperbólico si la matriz Jacobiana evaluada en el PE no tiene autovalores en el eje imaginario.

**Ejercicio:** estudiar los PE del modelo del diodo túnel y el péndulo.

Cuando el PE no es hiperbólico nada puede inferirse acerca del comportamiento de las trayectorias del sistema no lineal a partir de las del sistema lineal. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - \mu x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \mu x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

tiene un PE en el origen; la linealización del sistema alrededor del origen tiene autovalores  $\pm j$ , es decir que el origen es un centro para el sistema linealizado. Transformando a coordenadas polares  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$  se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\mu r^3 \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned}$$

Se ve claramente que las trayectorias del sistema no lineal se asemejan a las de un foco (estable si  $\mu > 0$  e inestable si  $\mu < 0$ ).

## 1.4 Ciclos Límites

Un sistema *oscila* cuando tiene una *solución periódica no trivial*<sup>1</sup>

$$x(t + T) = x(t), \quad t \geq 0$$

para algún  $T > 0$ . La imagen de una solución periódica en el retrato de fase es la de una *órbita periódica* o una *órbita cerrada*.

Un sistema lineal con autovalores en el eje imaginario es un *oscilador armónico* ya que como el PE en el origen es un centro, las trayectorias son órbitas cerradas cuya amplitud depende de la condición inicial. Sin embargo, un oscilador lineal no es robusto (estructuralmente estable) ya que cualquier perturbación (como ya vimos en la Nota 1.2), destruye la oscilación porque el PE deja de ser un centro.

Con sistemas no lineales es posible construir osciladores tales que

- sean estructuralmente estables;
- la amplitud de la oscilación (en régimen permanente) no dependa de la condición inicial.

Un ejemplo de oscilador no lineal es el oscilador de resistencia negativa de la sección §1.2.4, con modelo de estado (1.11). El origen es un PE inestable debido a la resistencia negativa del elemento resistivo cerca del origen, lo que significa que el elemento resistivo es “activo” y entrega energía. Esto se puede ver escribiendo la expresión analítica de la tasa de intercambio de energía. La energía total almacenada en el capacitor y la inductancia para cada tiempo  $t$  es

$$E = \frac{1}{2}v_C^2 + \frac{1}{2}Li_L^2 = \frac{1}{2}C \{x_1^2 + [\varepsilon h(x_1) + x_2]^2\}$$

La tasa de intercambio de energía es

$$\dot{E} = -\varepsilon C x_1 h(x_1)$$

Esta expresión confirma que cerca del origen la trayectoria gana energía ya que para  $|x_1|$  pequeño el término  $x_1 h(x_1)$  es negativo. También se ve que hay una región  $-a \leq x_1 \leq b$  tal que la trayectoria gana energía dentro de la franja y pierde energía fuera de ella, como se ve en la Figura 1.17. Una oscilación estacionaria va a tener lugar si, a lo largo de una trayectoria, el intercambio neto de energía durante el ciclo es cero. Tal trayectoria es una órbita cerrada.

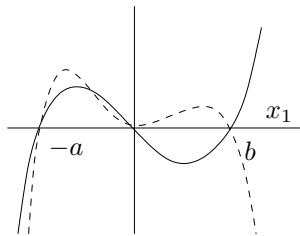


Figura 1.17: Esbozo de  $h(x_1)$  (línea continua) y  $-x_1 h(x_1)$  (línea de trazos)

El oscilador de resistencia negativa tiene una órbita cerrada aislada, como vemos en el ejemplo del oscilador de Van der Pol siguiente.

<sup>1</sup>Es decir, excluyendo soluciones constantes correspondientes a PE.



**Ejemplo 1.3 (Oscilador de Van der Pol).** Las Figuras 1.18 y 1.19 muestran los retratos de fase de la ecuación de Van der Pol

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2)x_2\end{aligned}\tag{1.15}$$

para tres valores distintos del parámetro  $\varepsilon$ : un valor pequeño de 0.2, mediano de 1, y grande de 5. En todos los casos las figuras muestran que existe una única órbita cerrada que atrae todas las trayectorias que comienzan fuera de la órbita. Para  $\varepsilon = 0.2$  la órbita cerrada es suave y cercana a un círculo de radio 2, lo cual es típico para valores  $\varepsilon < 0.3$ . Para el caso medio de  $\varepsilon = 1$  la forma circular se ha distorsionado a lo que se ve a la derecha en la Figura 1.18. Para el valor grande  $\varepsilon = 5$  la órbita cerrada está severamente distorsionada, como se ve en la Figura 1.19 (izquierda).

Un retrato de fase más ilustrativo en el caso de  $\varepsilon = 5$  puede obtenerse mediante el cambio de variables  $z_1 = i_L$  y  $z_2 = v_C$ , que resulta en la ecuación de estado

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \frac{1}{\varepsilon}z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\varepsilon(z_1 - z_2 + \frac{1}{3}z_2^3)\end{aligned}$$

El retrato de fase en el plano  $z_1 - z_2$  se muestra en la Figura 1.19 (derecha). La órbita cerrada está muy cerca de la curva  $z_1 = z_2 - \frac{1}{3}z_2^3$  excepto en las esquinas, donde es prácticamente vertical. Este tramo vertical en la órbita cerrada puede verse como si la órbita cerrada saltara de una rama a otra de la curva cuando llega a una esquina. Oscilaciones donde ocurre este fenómeno de salto se llaman usualmente *oscilaciones de relajación*. El retrato de fase es típico para valores grandes de  $\varepsilon > 3$ .

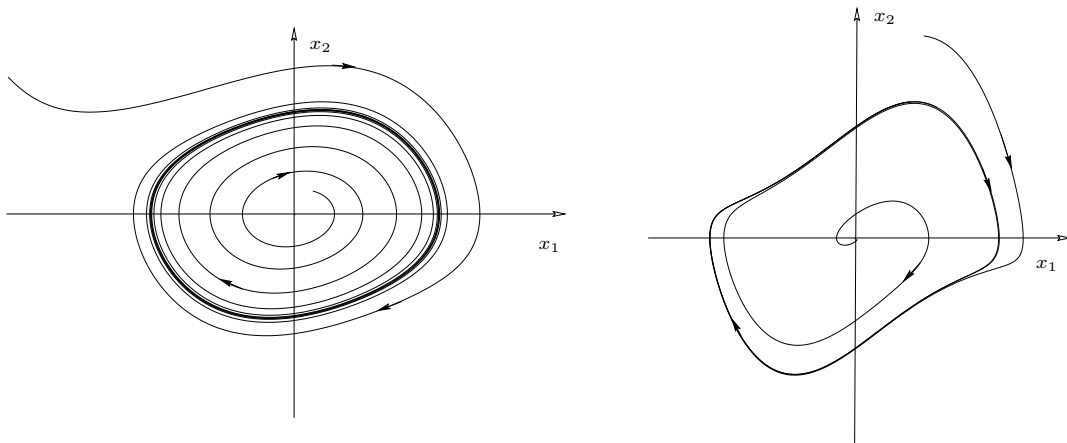


Figura 1.18: Retratos de fase del oscilador de Van der Pol, con  $\varepsilon = 0.2$  (izquierda) y con  $\varepsilon = 1$  (derecha)

La órbita cerrada del oscilador de Van der Pol es diferente de las del oscilador lineal armónico. En el primer caso, la órbita cerrada es aislada mientras que en el segundo, hay un continuo de órbitas cerradas. Una órbita periódica aislada se denomina *ciclo límite*. Si todas las trayectorias en la vecindad del ciclo límite tienden a (se alejan de) él cuando  $t \rightarrow \infty$  se dice que el ciclo límite es estable (inestable).

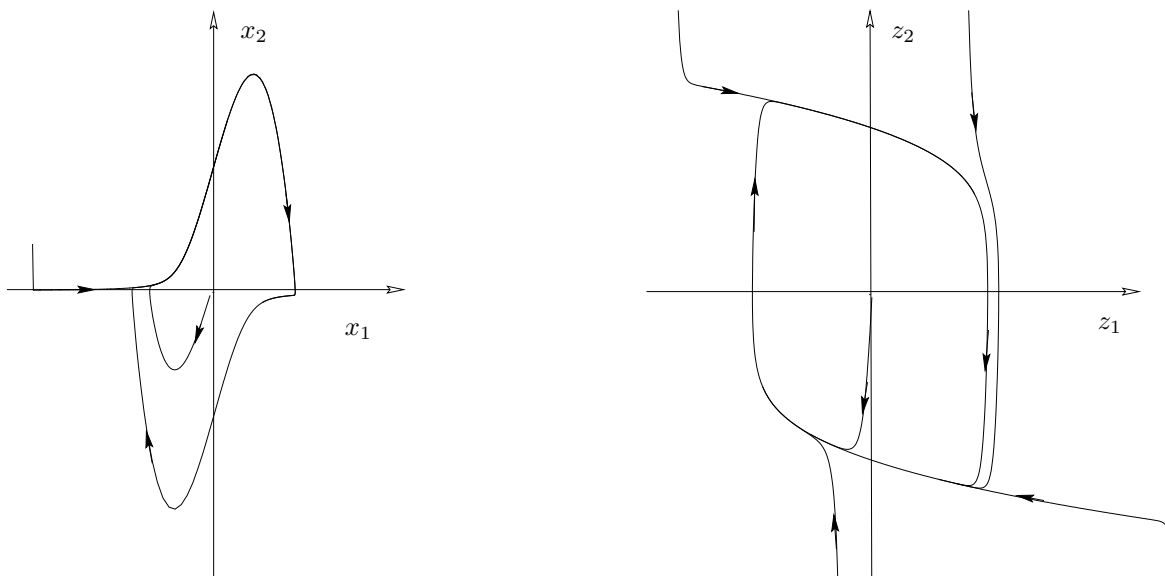


Figura 1.19: Retratos de fase del oscilador de Van der Pol, con  $\varepsilon = 0.5$ ; en el plano  $x_1 - x_2$  (izquierda) y en el plano  $z_1 - z_2$  (derecha)

## 1.5 Construcción Numérica de Retratos de Fase

No es difícil hoy en día conseguir programas de computación que resuelvan ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos programas pueden usarse en forma efectiva para construir retratos de fase para sistemas de segundo orden. En esta sección damos algunas ayudas que pueden resultar útiles.

El primer paso en la construcción de un retrato de fase es encontrar todos los puntos de equilibrio del sistema y determinar el tipo de aquellos que son aislados mediante linealización. El dibujo de las trayectorias involucra tres tareas:<sup>2</sup>

- (i) Seleccionar una ventana del espacio de estados donde se van a dibujar las trayectorias. La ventana toma la forma

$$x_{1 \min} \leq x_1 \leq x_{1 \max}, \quad x_{2 \min} \leq x_2 \leq x_{2 \max}.$$

- (ii) Seleccionar las condiciones iniciales dentro de la ventana.
- (iii) Calcular las trayectorias.

Veamos cómo calcular las trayectorias. Para encontrar la trayectoria pasante por un punto  $x_0$ , resolvemos la ecuación

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

hacia adelante en el tiempo (con  $t$  positivo) y en tiempo invertido (con  $t$  negativo). La solución en tiempo invertido es equivalente a resolver hacia adelante en el tiempo la ecuación

$$\dot{x} = -f(x), \quad x(0) = x_0,$$

<sup>2</sup>Cuatro si incluimos agregar las flechas de dirección de las trayectorias, que para nuestros propósitos pueden hacerse a mano.

puesto que el cambio de variable  $\tau = -t$  cambia el signo del lado derecho de la ecuación. La solución en tiempo invertido facilita dibujar bien las trayectorias cerca de equilibrios inestables.

La ventana debe elegirse de forma que todas las características esenciales se vean, por ejemplo todos los puntos de equilibrio. Si esta información no es disponible al comenzar habrá que iterar. Algunos programas permiten dibujar la distribución del campo vectorial  $f(x)$  para una grilla en la ventana seleccionada. Este gráfico es muy útil para tener idea somera de la distribución de las trayectorias antes de dibujarlas. Esto es posible por ejemplo con SCILAB,<sup>3</sup> usando la función `portrait` que dibuja retratos de fase de sistemas de segundo orden.

Una buena forma de elegir las condiciones iniciales es distribuirlas en una grilla regular en la ventana elegida. Una forma mejor es ir eligiéndolas en forma interactiva a medida que se van viendo las trayectorias (que se puede hacer con el `portrait` de SCILAB).

Para una ensilladura es conveniente usar linealización para calcular las trayectorias estables e inestables correspondientes a los autovectores de la matriz Jacobiana. La conveniencia viene de que estas trayectorias son separatrices en el plano de fase.

## 1.6 Ejercicios

### Ejercicio 1.1

Un modelo matemático usado frecuentemente para describir sistemas no lineales es la ecuación diferencial de orden  $n$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = g\left(t, y, \dot{y}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u\right),$$

donde  $u$  e  $y$  son variables escalares. Tomando  $u$  como entrada e  $y$  como salida, obtener un modelo en ecuaciones de estado.

### Ejercicio 1.2

Tomando las variables escalares  $u$  e  $y$  como entrada y salida respectivamente, obtener un modelo en ecuaciones de estado del sistema descrito por la ecuación diferencial de orden  $n$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = g_1\left(t, y, \dot{y}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}, u\right) + g_2\left(t, y, \dot{y}, \dots, \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}\right)\dot{u},$$

donde  $g_2$  es una función diferenciable en todos sus argumentos.

**Ayuda:** Tomar  $x_n = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} - g_2\left(t, y, \dot{y}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)u$ .

### Ejercicio 1.3

Las ecuaciones dinámicas no lineales de un robot de  $m$  juntas tiene la forma

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u,$$

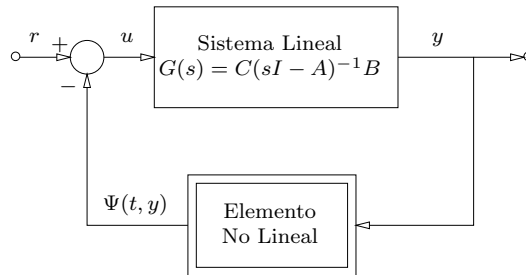
donde  $q \in \mathbb{R}^m$  representa la posición de las juntas,  $u \in \mathbb{R}^m$  representa las entradas de torque, y  $M(q)$  es una matriz simétrica (de inercia) definida positiva para todo valor de  $q$ . El término

<sup>3</sup>SCILAB es un programa gratuito similar a MATLAB desarrollado por el INRIA <http://www-rocq.inria.fr/scilab/>

$C(q, \dot{q})\dot{q}$  representa el efecto de fuerzas centrífugas y de Coriolis. El término  $g(q)$  representa el efecto de la gravedad. Elegir variables de estado para el sistema y escribir las ecuaciones de estado.

### Ejercicio 1.4

La Figura muestra una conexión en realimentación de un sistema lineal estacionario (representado por su función transferencia  $G(s)$ ) y un elemento no lineal inestacionario. Las variables  $r$ ,  $u$ , e  $y$  son vectores de la misma dimensión, y  $\Psi(t, y)$  es a valores vectoriales. Encontrar un modelo en espacio de estados del sistema realimentado tomando  $r$  como entrada e  $y$  como salida.



### Ejercicio 1.5

Un generador sincrónico conectado a un bus infinito puede representarse por las ecuaciones

$$\begin{aligned} M\ddot{\delta} &= P - D\dot{\delta} - \eta_1 E_q \sin \delta, \\ \tau \dot{E}_q &= -\eta_2 E_q + \eta_3 \cos \delta + E, \end{aligned}$$

donde  $\delta$  es un ángulo en radianes,  $E_q$  es tensión,  $P$  es potencia mecánica,  $E$  es tensión de entrada,  $D$  es un coeficiente de amortiguamiento,  $M$  es un coeficiente de inercia,  $\tau$  es una constante de tiempo, y  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  son parámetros constantes.

- (a) Usando  $\delta, \dot{\delta}$  y  $E_q$  como variables de estado obtener las ecuaciones de estado.  
 (b) Encontrar todos los puntos de equilibrio correspondientes a los valores

$$\begin{array}{cccc} P = 0.815 & E = 1.22 & \eta_1 = 2 & \eta_2 = 2.7 \\ \eta_3 = 1.7 & \tau = 6.6 & M = 0.0147 & D/M = 4 \end{array}$$

- (c) Suponiendo que  $\tau$  es suficientemente grande como para tomar  $\dot{E}_q \approx 0$ , mostrar que el modelo del sistema se reduce a la ecuación del péndulo.

### Ejercicio 1.6

Un PLL (“phase-locked loop”) es un dispositivo en realimentación que genera una oscilación cuya fase sigue a una señal de referencia (útil para generar señales moduladas en fase). Puede representarse con el diagrama de bloques de la Figura 1.20. Sea  $(A, B, C)$  una realización mínima de la función transferencia de orden  $m$ , escalar y estrictamente propia,  $G(s)$ . Asumir que todos los autovalores de  $A$  tiene parte real negativa,  $G(0) \neq 0$ , y  $\theta_i$  es constante. Si  $z$  es el estado de la realización  $(A, B, C)$ ,

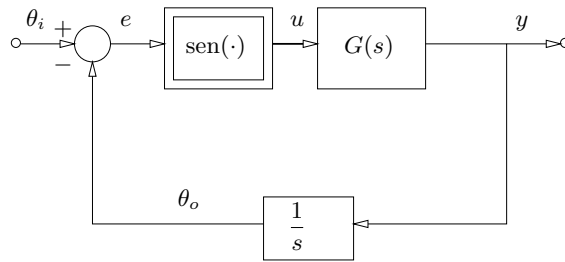


Figura 1.20: PLL

(i) Mostrar que el sistema a lazo cerrado puede representarse por la ecuación

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B \operatorname{sen} e \\ \dot{e} &= -Cz.\end{aligned}$$

(ii) Encontrar todos los PE del sistema y determinar su tipo.

(iii) Mostrar que cuando  $G(s) = 1/(\tau s + 1)$  el lazo cerrado coincide con el modelo de la ecuación de un péndulo.

### Ejercicio 1.7

Para cada uno de los siguientes sistemas encontrar todos los PE y determinar el tipo de cada PE aislado.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \frac{x_1^3}{6} - x_2$$

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -0.1x_1 - 2x_2 - x_1^2 - 0.1x_1^3$$

$$\dot{x}_1 = (1 - x_1)x_1 - \frac{2x_1x_2}{1 + x_1}$$

$$\dot{x}_2 = \left(2 - \frac{x_2}{1 + x_1}\right)x_2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2)$$

### Ejercicio 1.8

Encontrar todos los PE del sistema

$$\dot{x}_1 = ax_1 - x_1x_2$$

$$\dot{x}_2 = bx_1^2 - cx_2$$

para todos los valores positivos de  $a, b, c$  y determinar el tipo de cada equilibrio.

**Ejercicio 1.9**

El sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - \frac{x_2}{\log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + \frac{x_1}{\log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\end{aligned}$$

tiene un PE en el origen.

- (i) Linealizar el sistema alrededor del origen y encontrar el tipo del origen como PE.
- (ii) Obtener el retrato de fase del sistema no lineal cerca del origen y mostrar que se asemeja al de un foco estable. **Ayuda:** transformar las ecuaciones a coordenadas polares.
- (iii) Explicar la discrepancia entre (v) y (vi).

**Ejercicio 1.10**

Para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -(x_1 - x_1^2) + 1 - x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(x_2 - x_2^2) + 1 - x_1 - x_2\end{aligned}$$

- (i) Encontrar todos los PE y determinar su tipo.
- (ii) Obtener el retrato de fase, preferentemente usando simulación en computadora, y discutir el comportamiento cualitativo del sistema.

**Ejercicio 1.11**

Los retratos de fase de los siguientes sistemas se muestran en la Figura 1.21. Identificar qué sistema corresponde a qué retrato de fase, marcar los sentidos de las trayectorias, y discutir el comportamiento cualitativo de cada sistema.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1/2 - x_1^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2/2 - 2x_1 - x_1^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2(1 - x_1^2 + x_1^4/10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - 3 \arctan(x_1 + x_2)\end{aligned}$$

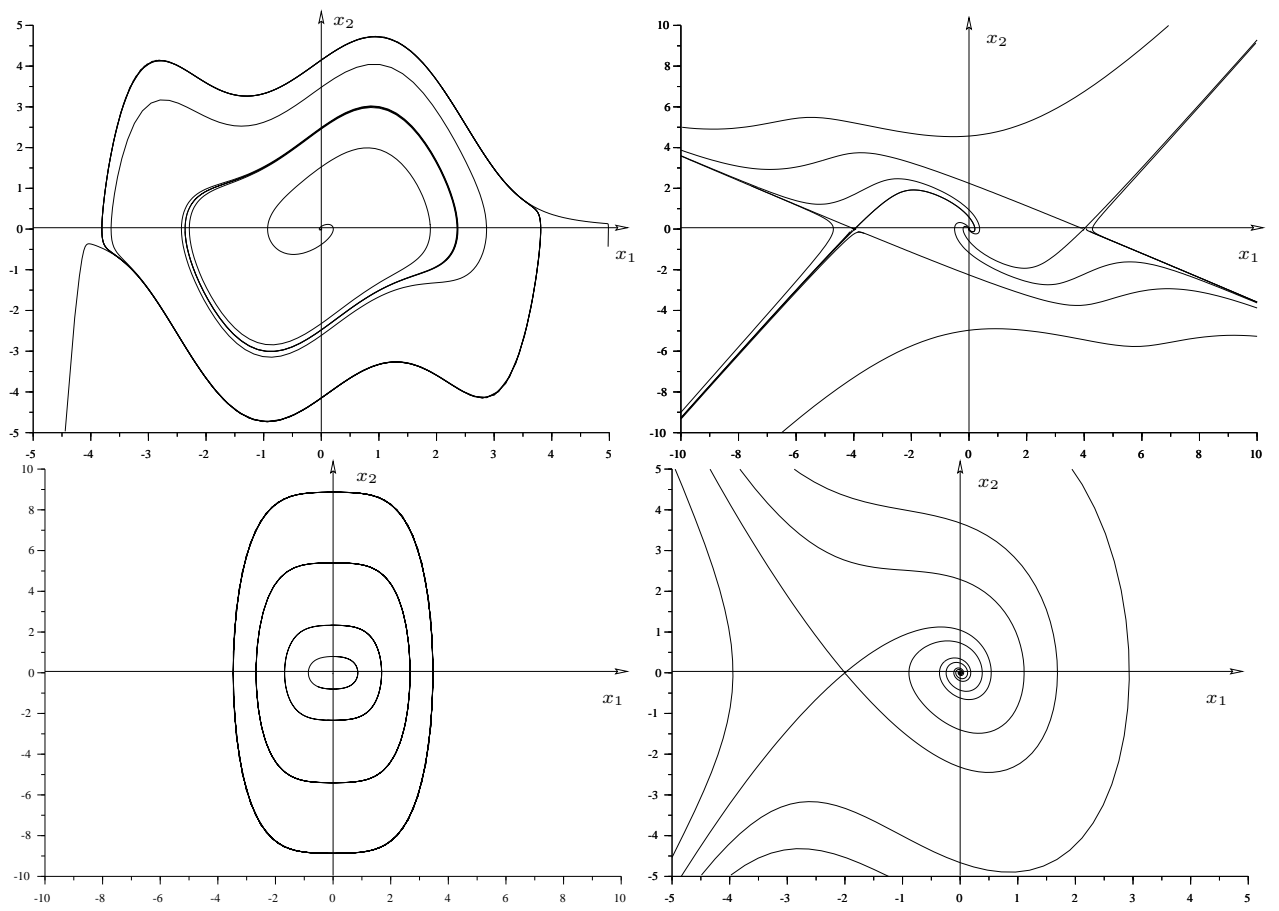


Figura 1.21: Retratos de fase

**Ejercicio 1.12**

Para cada uno de los siguientes sistemas contruir el retrato de fase y discutir el comportamiento cualitativo del sistema.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - 2 \arctan(x_1 + x_2)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2)$$

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_1x_2$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1^2 - x_2$$

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - x_1(|x_1| + |x_2|)$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 - x_2(|x_1| + |x_2|).$$



# Capítulo 2

## Propiedades Fundamentales

En este capítulo repasamos elementos de análisis matemático que vamos a usar en el resto del curso, incluyendo las propiedades fundamentales de ecuaciones diferenciales ordinarias que hacen que  $\dot{x} = f(t, x)$  sea un modelo apropiado para representar sistemas físicos. Estas propiedades son esencialmente las de

- existencia y unicidad de solución
- dependencia continua respecto de parámetros y condiciones iniciales.

Vamos a presentar los resultados para sistemas autónomos (sin entrada), y en general no estacionarios, es decir, representados por  $\dot{x} = f(t, x)$ .

### 2.1 Preliminares

Vamos a considerar frecuentemente las normas  $p$  en  $\mathbb{R}^n$ , definidas como

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$
$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Todas las normas  $p$  son *equivalentes* en el sentido de que si  $\|\cdot\|_\alpha$  y  $\|\cdot\|_\beta$  son dos normas  $p$  diferentes, existen constantes positivas  $c_1$  y  $c_2$  tales que

$$c_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Un resultado clásico relativo a normas  $p$  es la *desigualdad de Hölder*

$$|x^T y| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  define un mapeo lineal  $y = Ax$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ . La norma  $p$  inducida de  $A$  está definida como

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

que para  $p = 1, 2, \infty$  está dada por

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}|, \quad \|A\|_2 = [\lambda_{\max}(A^T A)]^{1/2}, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$$

donde  $\lambda_{\max}(A^T A)$  es el máximo autovalor de  $A^T A$ .

### 2.1.1 Desigualdad de Gronwall-Bellman

**Lema 2.1 (Desigualdad de Gronwall-Bellman).** Sea  $\lambda : [a, b] \rightarrow R$  una función continua y  $\mu : [a, b] \rightarrow R$  continua y no-negativa. Si una función continua  $y : [a, b] \rightarrow R$  satisface

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \mu(s)y(s) ds$$

para  $a \leq t \leq b$ , entonces en el mismo intervalo

$$y(t) \leq \lambda(t) + \int_a^t \lambda(s)\mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau} ds$$

Si  $\lambda(t) \equiv \lambda$  es constante, entonces

$$y(t) \leq \lambda e^{\int_a^t \mu(\tau)d\tau}$$

y si además  $\mu(t) \equiv \mu$  es constante:

$$y(t) \leq \lambda e^{\mu(t-a)}$$

*Demostración.* Definamos  $z(t) = \int_a^t \mu(s)y(s) ds$  y  $v(t) = z(t) + \lambda(t) - y(t) \geq 0$ . Entonces  $z$  es diferenciable y

$$\dot{z} = \mu(t)y(t) = \mu(t)z(t) + \mu(t)\lambda(t) - \mu(t)v(t).$$

Esta es una ecuación de estado escalar cuya función de transición de estados es

$$\phi(t, s) = e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau}.$$

Como  $z(a) = 0$ , entonces tenemos que

$$z(t) = \int_a^t \phi(t, s)(\mu(s)\lambda(s) - \mu(s)v(s))ds.$$

El término  $\int_a^t \phi(t, s)\mu(s)v(s)ds$  es no negativo, por lo que

$$z(t) \leq \int_a^t e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau} \mu(s)\lambda(s)ds,$$

que, usando el hecho que  $y(t) \leq \lambda(t) + z(t)$ , completa la prueba en el caso general. En el caso especial de  $\lambda(t) \equiv \lambda$  tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^t \mu(s)e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau} ds &= - \int_a^t \frac{d}{ds} \left( e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau} \right) ds \\ &= - \left( e^{\int_s^t \mu(\tau)d\tau} \right) \Big|_{s=a}^{s=t} \\ &= -1 + e^{\int_a^t \mu(\tau)d\tau}, \end{aligned}$$

que termina la prueba en el caso de  $\lambda$  constante. Por integración se obtiene fácilmente el resultado en el caso de  $\mu$  también constante.  $\square$

### 2.1.2 Mapeo Contractivo

Consideremos una ecuación de la forma  $x = T(x)$ . Una solución  $x^*$  de esta ecuación se denomina *punto fijo* del mapeo  $T$  porque  $T$  deja a  $x^*$  invariante.

Vamos a enunciar el teorema del mapeo contractivo en el marco de *espacios de Banach*, para lo cual recordamos las siguientes definiciones.

**Definición 2.1 (Espacio lineal normado).** Un espacio lineal  $\mathcal{X}$  es un espacio lineal normado si, para cada vector  $x \in \mathcal{X}$ , existe una función a valores reales, llamada *norma* y denotada  $\|x\|$ , que satisface

- $\|x\| \geq 0$  para todo  $x \in \mathcal{X}$ , con  $\|x\| = 0$  sí  $x = 0$ .
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para todo  $x, y \in \mathcal{X}$ .
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $x \in \mathcal{X}$ .

Si no estuviera claro del contexto si  $\|\cdot\|$  es una norma en  $\mathcal{X}$  o en  $\mathbb{R}^n$ , vamos a escribir  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$  para la norma de  $\mathcal{X}$ .

**Definición 2.2 (Convergencia).** Una secuencia  $\{x_k\}$  en  $\mathcal{X}$  *converge* a un vector  $x \in \mathcal{X}$  si

$$\|x_k - x\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad k \rightarrow \infty.$$

**Definición 2.3 (Conjunto cerrado).** Un conjunto  $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$  es cerrado sí toda secuencia convergente con elementos en  $\mathcal{S}$  tiene límite en  $\mathcal{S}$ .

**Definición 2.4 (Secuencia de Cauchy).** Una secuencia  $\{x_k\}$  en  $\mathcal{X}$  se dice *secuencia de Cauchy* si

$$\|x_k - x_m\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad k, m \rightarrow \infty.$$

Notar que toda secuencia convergente es Cauchy, pero no toda secuencia Cauchy es convergente.

**Definición 2.5 (Espacio de Banach).** Un espacio lineal normado  $\mathcal{X}$  es *completo* si toda secuencia de Cauchy converge a un vector en  $\mathcal{X}$ . Un espacio lineal normado completo es un *espacio de Banach*.

**Ejemplo 2.1.** Consideremos el conjunto de funciones continuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , al que denotamos como  $C[a, b]$ . Este conjunto es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . La suma  $x + y$  se define como  $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$ . La multiplicación por un escalar se define como  $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$ . El vector nulo es la función idénticamente nula en  $[a, b]$ . Definimos una norma como

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a, b]} \|x(t)\|$$

donde la norma en el lado derecho es cualquier norma  $p$  en  $\mathbb{R}^n$ . Claramente  $\|x\|_C \geq 0$  y es cero sí  $x$  es la función nula. La desigualdad triangular sigue de

$$\max \|x(t) + y(t)\| \leq \max[\|x(t)\| + \|y(t)\|] \leq \max \|x(t)\| + \max \|y(t)\|$$

Además

$$\max \|\alpha x(t)\| = \max |\alpha| \|x(t)\| = |\alpha| \max \|x(t)\|$$

donde los máximos se toman sobre  $[a, b]$ . Por lo tanto,  $C[a, b]$  junto con la norma  $\|\cdot\|_C$  es un espacio lineal normado. Vamos a probar que es también un espacio de Banach. Para eso debemos probar que toda secuencia de Cauchy en  $C[a, b]$  converge a un vector en  $C[a, b]$ . Supongamos que  $\{x_k\}$  es una secuencia de Cauchy en  $C[a, b]$ . Para cada  $t \in [a, b]$  fijo,

$$\|x_k(t) - x_m(t)\| \leq \|x_k - x_m\|_C \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k, m \rightarrow \infty$$

Por lo tanto  $\{x_k(t)\}$  es una secuencia de Cauchy en  $\mathbb{R}^n$ . Pero  $\mathbb{R}^n$  con cualquier norma  $p$  es completo porque convergencia implica convergencia componente a componente y  $\mathbb{R}$  es completo. Entonces existe un vector real  $x(t)$  al cual la secuencia converge:  $x_k(t) \rightarrow x(t)$ . Esto prueba convergencia puntual. Ahora probamos que la convergencia es uniforme en  $t \in [a, b]$ . Dado  $\epsilon > 0$  elegimos  $N$  tal que  $\|x_k - x_m\|_C < \epsilon/2$  para  $k, m > N$ . Entonces, para  $k > N$ ,

$$\begin{aligned} \|x_k(t) - x(t)\| &\leq \|x_k(t) - x_m(t)\| + \|x_m(t) - x(t)\| \\ &\leq \|x_k - x_m\|_C + \|x_m(t) - x(t)\| \end{aligned}$$

Eligiendo  $m$  suficientemente grande (lo cual puede depender de  $t$ ), cada término en el lado derecho puede hacerse menor que  $\epsilon/2$ ; entonces  $\|x_k(t) - x(t)\| < \epsilon$  para  $k > N$ . Por lo tanto  $\{x_k\}$  converge a  $x$ , uniformemente en  $t \in [a, b]$ . Para completar la prueba, debemos mostrar que  $x(t)$  es continua y que  $\{x_k\}$  converge a  $x$  en la norma de  $C[a, b]$ . Para probar continuidad consideremos

$$\|x(t + \delta) - x(t)\| \leq \|x(t + \delta) - x_k(t + \delta)\| + \|x_k(t + \delta) - x_k(t)\| + \|x_k(t) - x(t)\|$$

Como  $\{x_k\}$  converge uniformemente a  $x$ , dado  $\epsilon > 0$ , podemos elegir  $k$  lo suficientemente grande para hacer el primer y tercer términos del lado derecho menores que  $\epsilon/3$ . Como  $x_k(t)$  es continua, podemos elegir  $\delta$  lo suficientemente pequeño para hacer el segundo término menor que  $\epsilon/3$ . Por lo tanto  $x(t)$  es continua. La convergencia de  $\{x_k\}$  a  $x$  en la norma de  $C[a, b]$  es una consecuencia directa de la convergencia uniforme.  $\circ$

**Teorema 2.2 (Mapeo Contractivo).** Sea  $\mathcal{S}$  un subconjunto cerrado de un espacio de Banach  $\mathcal{X}$  y sea  $T$  un mapeo de  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}$ . Supongamos que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \rho \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{S}, \quad 0 \leq \rho < 1.$$

Entonces  $T$  tiene un único punto fijo en  $\mathcal{S}$ , es decir, existe un único vector  $x^* \in \mathcal{S}$  que satisface  $x^* = T(x^*)$ . Además,  $x^*$  puede obtenerse por el método de aproximaciones sucesivas comenzando de cualquier vector en  $\mathcal{S}$ .

*Demostración.* Tomemos un vector arbitrario  $x_1 \in \mathcal{S}$  y definamos la secuencia  $\{x_k\}$  por la fórmula  $x_{k+1} = T(x_k)$ . Como  $T$  mapea  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}$ ,  $x_k \in \mathcal{S}$  para todo  $k \geq 1$ . El primer paso de la prueba es mostrar que  $\{x_k\}$  es una secuencia de Cauchy. Tenemos

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &= \|T(x_k) - T(x_{k-1})\| \\ &\leq \rho \|x_k - x_{k-1}\| \\ &\leq \rho^2 \|x_{k-1} - x_{k-2}\| \\ &\vdots \\ &\leq \rho^{k-1} \|x_2 - x_1\|. \end{aligned}$$

Sigue que

$$\begin{aligned}
\|x_{k+r} - x_k\| &\leq \|x_{k+r} - x_{k+r-1}\| + \|x_{k+r-1} - x_{k+r-2}\| + \cdots + \|x_{k+1} - x_k\| \\
&\leq (\rho^{k+r-2} + \rho^{k+r-3} + \cdots + \rho^{k-1}) \|x_2 - x_1\| \\
&\leq \rho^{k-1} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \|x_2 - x_1\| \\
&= \frac{\rho^{k-1}}{1 - \rho} \|x_2 - x_1\|.
\end{aligned}$$

El lado derecho tiende a cero cuando  $k \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, la secuencia es Cauchy. Como  $\mathcal{X}$  es un espacio de Banach,  $x_k \rightarrow x^* \in \mathcal{X}$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . Además, como  $\mathcal{S}$  es cerrado, en particular  $x^* \in \mathcal{S}$ . Ahora mostramos que  $x^* = T(x^*)$ . Para cualquier  $x_k = T(x_{k-1})$  tenemos que

$$\begin{aligned}
\|x^* - T(x^*)\| &\leq \|x^* - x_k\| + \|x_k - T(x^*)\| \\
&\leq \|x^* - x_k\| + \rho \|x_{k-1} - x^*\|.
\end{aligned}$$

Eligiendo  $k$  suficientemente grande, el lado derecho de la desigualdad puede hacerse arbitrariamente pequeño. Así,  $\|x^* - T(x^*)\| = 0$ ; o sea que  $x^* = T(x^*)$ . Falta probar que  $x^*$  es el único punto fijo de  $T$  en  $\mathcal{S}$ . Supongamos entonces que hay dos puntos fijos  $x^*$  y  $y^*$ . Entonces

$$\begin{aligned}
\|x^* - y^*\| &= \|T(x^*) - T(y^*)\| \\
&\leq \rho \|x^* - y^*\|.
\end{aligned}$$

Como  $\rho < 1$ , necesariamente  $x^* = y^*$ . □

## 2.2 Existencia y Unicidad

En esta sección se dan condiciones suficientes para la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.1)$$

Entendemos por solución en un intervalo  $[t_0, t_1]$  a una función continua  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\dot{x}$  esté definida y  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Vamos a asumir que  $f(t, x)$  es continua en  $x$  pero sólo seccionalmente continua en  $t$  (esto nos va a permitir considerar entradas con saltos o escalones).

Una ecuación diferencial con una dada condición inicial puede tener varias soluciones. Por ejemplo, la ecuación escalar

$$\dot{x} = x^{1/3}, \quad x(0) = 0$$

tiene como soluciones tanto  $x(t) = (2t/3)^{3/2}$  como  $x(t) \equiv 0$ . Vemos que  $f(x) = x^{1/3}$  es una función continua de  $x$ , por lo tanto es claro que la condición de continuidad de  $f(t, x)$  en sus argumentos no es suficiente para asegurar unicidad de la solución, aunque esta condición asegura la existencia de al menos una solución. En el Teorema 2.3 vamos a utilizar una condición que garantiza a la vez ambas propiedades.

**Teorema 2.3 (Existencia local y unicidad).** Sea  $f(t, x)$  seccionalmente continua en  $t$  y supongamos que satisface la condición de Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\| \quad (2.2)$$

$\forall x, y \in B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$ ,  $\forall t \in [t_0, t_1]$ . Entonces existe  $\delta > 0$  tal que (2.1) tiene una solución única en  $[t_0, t_0 + \delta]$ .

*Demostración.* Notar que si  $x(t)$  es una solución de (2.1) entonces, integrando, tenemos

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (2.3)$$

Es decir,  $x(t)$  satisface (2.1) sí satisface (2.3), por lo que el estudio de existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial (2.1) es equivalente al estudio de existencia y unicidad de la solución de la ecuación integral (2.3). Vamos a considerar el lado derecho de (2.3) como un mapeo de la función continua  $x : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; denotándolo como  $(Px)(t)$ , podemos re-escribir (2.3) como

$$x(t) = (Px)(t) \quad (2.4)$$

Notar que  $(Px)(t)$  es continua en  $x$ . Una solución de (2.4) es un punto fijo del mapeo  $P$  que lleva  $x$  a  $Px$ . La existencia de un *punto fijo* de (2.4) se puede probar usando el *teorema del mapeo contractivo*. Para eso necesitamos definir un espacio de Banach  $\mathcal{X}$  y un conjunto cerrado  $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$  tal que  $P$  mapee  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}$  y sea una contracción en  $\mathcal{S}$ . Definamos

$$\mathcal{X} = C[t_0, t_0 + \delta], \quad \text{con norma} \quad \|x\|_C = \max_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \|x(t)\|$$

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{X} \mid \|x - x_0\|_C \leq r\}$$

donde  $r$  es el radio de la bola  $B_r$  y  $\delta$  es una constante positiva a elegir. Nos vamos a restringir a elegir  $\delta$  tal que satisfaga  $\delta \leq t_1 - t_0$  de forma que  $[t_0, t_0 + \delta] \subset [t_0, t_1]$ . Notar que  $\|x(t)\|$  es una norma en  $\mathbb{R}^n$  mientras que  $\|x\|_C$  es una norma en  $\mathcal{X}$ ; de la misma forma  $B_r$  es una bola en  $\mathbb{R}^n$  mientras que  $\mathcal{S}$  es una bola en  $\mathcal{X}$ . Por definición,  $P$  mapea  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{X}$ . Para probar que mapea  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}$  escribimos

$$(Px)(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds = \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, x_0) + f(s, x_0)] ds$$

Como  $f$  es seccionalmente continua, sabemos que  $f(t, x_0)$  es acotada en  $[t_0, t_1]$ . Sea

$$h = \max_{t \in [t_0, t_1]} \|f(t, x_0)\|$$

Usando la condición Lipschitz (2.2) y el hecho de que para cada  $x \in \mathcal{S}$

$$\|x(t) - x_0\| \leq r, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \|(Px)(t) - x_0\| &\leq \int_{t_0}^t [\|f(s, x(s)) - f(s, x_0)\| + \|f(s, x_0)\|] ds \\ &\leq \int_{t_0}^t [L\|x(s) - x_0\| + h] ds \\ &\leq \int_{t_0}^t (Lr + h) ds \\ &= (t - t_0)(Lr + h) \\ &\leq \delta(Lr + h) \end{aligned}$$

y también

$$\|Px - x_0\|_C = \max_{t \in [t_0, t_0 + \delta]} \|(Px)(t) - x_0\| \leq \delta(Lr + h) \leq r,$$

si elegimos  $\delta \leq r/(Lr + h)$ . Entonces  $P$  mapea  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}$ .

Ahora vamos a probar que  $P$  es una contracción en  $\mathcal{S}$ . Sean  $x$  e  $y \in \mathcal{S}$  y consideremos

$$\begin{aligned} \|(Px)(t) - (Py)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L\|x(s) - y(s)\| ds \\ &\leq (t - t_0) L \|x - y\|_C \end{aligned}$$

Entonces

$$\|Px - Py\|_C \leq L\delta\|x - y\|_C \leq \rho\|x - y\|_C \quad \text{con } \delta \leq \frac{\rho}{L}$$

Eligiendo  $\rho < 1$  y  $\delta \leq \rho/L$  aseguramos que  $P$  es un mapeo de contracción en  $\mathcal{S}$ . Por el teorema del mapeo contractivo, si

$$\delta \leq \min \left\{ t_1 - t_0, \frac{r}{Lr + h}, \frac{\rho}{L} \right\}, \quad \rho < 1 \tag{2.5}$$

entonces (2.3) tiene una única solución en  $\mathcal{S}$ . Nos falta probar que la solución es única en  $\mathcal{X}$ . Para eso vamos a probar que toda solución de (2.3) en  $\mathcal{X}$  tiene que estar en  $\mathcal{S}$ . Notemos primero que, como  $x(t_0) = x_0$  está en la bola  $B_r$ , toda solución continua  $x(t)$  debe permanecer en  $B_r$  durante algún tiempo. Supongamos que  $x(t)$  deja la bola  $B_r$  y sea  $t_0 + \mu$  el primer instante en que  $x(t)$  interseca la frontera de  $B_r$ . Entonces

$$\|x(t_0 + \mu) - x_0\| = r$$

Por otro lado, para todo  $t \leq t_0 + \mu$ ,

$$\begin{aligned} \|x(t) - x_0\| &\leq \int_{t_0}^t [\|f(s, x(s)) - f(s, x_0)\| + \|f(s, x_0)\|] ds \\ &\leq \int_{t_0}^t [L\|x(s) - x_0\| + h] ds \\ &\leq \int_{t_0}^t (Lr + h) ds \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$r = \|x(t_0 + \mu) - x_0\| \leq (Lr + h)\mu \implies \mu \geq \frac{r}{Lr + h} \geq \delta$$

lo que significa que  $x(t)$  no puede dejar  $B_r$  durante el intervalo  $[t_0, t_0 + \delta]$ , es decir, toda solución en  $\mathcal{X}$  debe estar en  $\mathcal{S}$ . En consecuencia, unicidad de la solución en  $\mathcal{S}$  implica unicidad de la solución en  $\mathcal{X}$ .  $\square$

Una función que satisface (2.2) se dice Lipschitz en  $x$  y  $L$  es la constante de Lipschitz. Decimos que  $f(x)$  es *localmente Lipschitz* en un dominio (conjunto abierto y conexo)  $D \subset \mathbb{R}^n$  si cada punto de  $D$  tiene un entorno  $D_0$  tal que  $f$  satisface (2.2) con alguna constante de Lipschitz  $L_0$ . Decimos que  $f(x)$  es Lipschitz en un conjunto  $W$  si satisface (2.2) en todos los puntos de  $W$ , **con la misma constante de Lipschitz  $L$** . Toda función localmente Lipschitz en un dominio  $D$  es Lipschitz en todo subconjunto *compacto* (cerrado y acotado) de  $D$ . Decimos que  $f(x)$  es globalmente Lipschitz si es Lipschitz en  $\mathbb{R}^n$ .

Decimos que  $f(t, x)$  es *localmente Lipschitz en  $x$*  en  $[a, b] \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  si cada punto  $x \in D$  tiene un entorno  $D_0$  tal que  $f$  satisface (2.2) en  $[a, b] \times D_0$  con alguna constante de Lipschitz  $L_0$ . Decimos que  $f(t, x)$  es localmente Lipschitz en  $x$  en  $[t_0, \infty) \times D$  si es localmente Lipschitz en  $x$  en  $[a, b] \times D$  para todo intervalo compacto  $[a, b] \subset [t_0, \infty)$ . Decimos que  $f(t, x)$  es Lipschitz en  $[a, b] \times W$  si satisface (2.2) para todo  $t \in [a, b]$  y todo punto en  $W$ , con la misma constante de Lipschitz  $L$ .

Para funciones escalares, la condición de Lipschitz se puede escribir como

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} \leq L$$

lo que implica que la pendiente está siempre acotada por  $L$ , es decir toda función  $f(x)$  que tenga pendiente infinita en un punto no puede ser localmente Lipschitz en ese punto. Por otro lado, si el valor absoluto de la derivada  $f'$  está acotado por una constante  $k$  sobre un intervalo de interés, entonces  $f$  es Lipschitz en ese intervalo con constante de Lipschitz  $L = k$ . Lo mismo vale para funciones vectoriales, como lo probamos en el siguiente Lema.

**Lema 2.4 (La cota de la derivada es la constante de Lipschitz).** Sea  $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función continua,  $D$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $\partial f / \partial x$  existe y es continua en  $[a, b] \times D$ . Si, para algún subconjunto convexo  $W \subset D$  existe una constante  $L \geq 0$  tal que

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L$$

en  $[a, b] \times W$ , entonces

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

$\forall t \in [a, b], x \in W, y \in W$ .

*Demostración.* Sea  $\|\cdot\|_p, p \in [1, \infty]$  la norma utilizada, y calculemos  $q \in [1, \infty]$  mediante la relación  $1/p + 1/q = 1$ . Fijamos  $t \in [a, b], x \in W$  e  $y \in W$ . Definamos  $\gamma(s) = (1 - s)x + sy$  para todo  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $\gamma(s) \in D$ . Como  $W \subset D$  es convexo,  $\gamma(s) \in W$  para  $0 \leq s \leq 1$ . Tomemos  $z \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\|z\|_q = 1 \quad \text{y} \quad z^T [f(t, y) - f(t, x)] = \|f(t, y) - f(t, x)\|_p$$

Definamos  $g(s) = z^T f(t, \gamma(s))$ . Como  $g(s)$  es una función a valores reales continuamente diferenciable en un intervalo abierto que contenga al  $[0, 1]$ , concluimos mediante el teorema del valor medio que existe  $s_1 \in (0, 1)$  tal que

$$g(1) - g(0) = g'(s_1)$$



Evaluando  $g$  en  $s = 0$ ,  $s = 1$ , y calculando  $g'(s)$  usando la regla de la cadena, obtenemos

$$z^T [f(t, y) - f(t, x)] = z^T \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s_1))(y - x)$$

$$\|f(t, y) - f(t, x)\|_p \leq \|z\|_q \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \gamma(s_1)) \right\|_p \|y - x\|_p \leq L \|y - x\|_p$$

donde usamos la desigualdad de Hölder  $|z^T w| \leq \|z\|_q \|w\|_p$ .  $\square$

La propiedad de “Lipschitzidad” es más fuerte que la de continuidad. Si  $f(x)$  es Lipschitz en  $W$ , entonces es uniformemente continua en  $W$ . La propiedad de Lipschitzidad es más débil que la de poseer derivada continua, como vemos en el siguiente Lema.

**Lema 2.5 ( $C^1$  implica Lipschitz).** Sea  $f : [a, b] \times D \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función continua,  $D$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\partial f / \partial x$  existe y es continua en  $[a, b] \times D$  entonces  $f$  es localmente Lipschitz en  $x$  en  $[a, b] \times D$ .

*Demostración.* Dado  $x_0 \in D$ , sea  $r$  tan pequeño que la bola  $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$  esté contenida en  $D$ . El conjunto  $D_0$  es convexo y compacto. Por continuidad,  $\partial f / \partial x$  está acotada en  $[a, b] \times D$ . Sea  $L_0$  una cota para  $\partial f / \partial x$  en  $[a, b] \times D$ . Por el Lema 2.4,  $f$  es Lipschitz en  $[a, b] \times D$  con constante de Lipschitz  $L_0$ .  $\square$

**Lema 2.6 (Condiciones para Lipschitz global).** Sea  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n$  una función continua. Si  $\partial f / \partial x$  existe y es continua en  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ , entonces  $f$  es globalmente Lipschitz en  $x$  en  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  sí  $\partial f / \partial x$  está uniformemente acotada en  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ .  $\circ$

**Ejemplo 2.2.** La función

$$f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_1 x_2 \\ x_2 - x_1 x_2 \end{bmatrix}$$

es continuamente diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ . Por lo tanto, es localmente Lipschitz en  $\mathbb{R}^2$ . No es globalmente Lipschitz porque

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ -x_2 & 1 - x_1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

no es uniformemente acotada en  $\mathbb{R}^2$ . En cualquier subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f$  es Lipschitz. Supongamos que queremos calcular una constante de Lipschitz sobre el conjunto convexo

$$W = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \leq a_1, |x_2| \leq a_2\}$$

Usando en (2.6)  $\|\cdot\|_\infty$  para vectores en  $\mathbb{R}^2$  y la norma matricial inducida para matrices, tenemos

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_\infty = \max\{|-1 + x_2| + |x_1|, |x_2| + |1 - x_1|\}$$

Todo punto en  $W$  satisface

$$\begin{aligned} |-1 + x_2| + |x_1| &\leq 1 + a_2 + a_1 \\ |x_2| + |1 - x_1| &\leq a_2 + 1 + a_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|_\infty \leq 1 + a_2 + a_1$$

y una constante de Lipschitz es entonces  $L = 1 + a_2 + a_1$ .  $\circ$

Notar que la elección de la norma en  $\mathbb{R}^n$  no afecta la propiedad de Lipschitzidad de una función pero si el valor de la constante de Lipschitz.

Teorema 2.3 es un resultado local porque sólo garantiza existencia y unicidad sobre un intervalo  $[t_0, t_0 + \delta]$ , y no tenemos control sobre  $\delta$ ; por lo tanto no podemos asegurar existencia y unicidad sobre un intervalo dado  $[t_0, t_1]$ . Se puede tratar de extender el intervalo de existencia mediante la aplicación repetida del teorema: usar  $t_0 + \delta$  como el nuevo instante inicial y  $x(t_0 + \delta)$  como el nuevo estado inicial, y así sucesivamente. Sin embargo, en general, el intervalo de existencia de la solución no puede extenderse indefinidamente porque las condiciones del teorema pueden dejar de valer. Hay un intervalo máximo  $[t_0, T)$  donde la única solución que comienza en  $(t_0, x_0)$  existe. En general,  $T$  puede ser menor que  $t_1$ , en cuyo caso, cuando  $t \rightarrow T$  la solución deja cualquier conjunto compacto sobre el cual  $f$  es localmente Lipschitz en  $x$ .

**Ejemplo 2.3.** Consideremos el sistema escalar

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(0) = -1$$

La función  $f(x) = -x^2$  es localmente Lipschitz para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, es Lipschitz en todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ . La solución única

$$x(t) = \frac{1}{t-1}$$

existe sobre  $[0, 1)$ . Cuando  $t \rightarrow 1$ ,  $x(t)$  deja cualquier conjunto compacto. ◦

Una forma de garantizar que la solución pueda extenderse indefinidamente, es la de requerir condiciones adicionales que aseguren que la solución  $x(t)$  siempre esté en un conjunto donde  $f(t, x)$  es uniformemente Lipschitz en  $x$ . Esto lo hacemos en el siguiente teorema donde pedimos que  $f$  sea globalmente Lipschitz.

**Teorema 2.7 (Existencia global y unicidad).** Supongamos que  $f(t, x)$  es seccionalmente continua en  $t$  y satisface

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\| &\leq L\|x - y\| \\ \|f(t, x_0)\| &\leq h \end{aligned}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1]$ . Entonces, la ecuación (2.1) tiene una solución única en  $[t_0, t_1]$ .

*Demostración.* La clave de la prueba es mostrar que la constante  $\delta$  del Teorema 2.3 se puede hacer independiente del estado inicial  $x_0$ . Vemos en (2.5) que la dependencia de  $\delta$  del estado inicial es a través de la constante  $h$  en el término  $r/(Lr + h)$ . Como ahora la condición de Lipschitz es global, podemos elegir  $r$  arbitrariamente grande. Por lo tanto, para cada  $h$  finito, elegimos  $r$  tal que  $r/(Lr + h) > \rho/L$ . Esto reduce (2.5) a

$$\delta \leq \min \left\{ t_1 - t_0, \frac{\rho}{L} \right\}, \quad \rho < 1$$

Si  $t_1 - t_0 \leq \rho/L$ , podemos elegir  $\delta = t_1 - t_0$  y probamos el resultado. De lo contrario, elegimos  $\delta$  que satisfaga  $\delta \leq \rho/L$ , dividimos  $[t_0, t_1]$  en un número finito de subintervalos de longitud  $\delta$  y aplicamos repetidamente el Teorema 2.3. ◻

**Ejemplo 2.4.** Consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = A(t)x + g(t) = f(t, x)$$

donde  $A(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  son seccionalmente continuas. Sobre un intervalo finito  $[t_0, t_1]$ , los elementos de  $A(t)$  y  $g(t)$  son acotados, es decir  $\|A(t)\| \leq a$ , y  $\|g(t)\| \leq b$ , donde  $\|g\|$  puede ser cualquier norma en  $\mathbb{R}^n$  y  $\|A\|$  es la norma matricial inducida. Las condiciones del Teorema 2.7 se satisfacen porque

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\| &= \|A(t)(x - y)\| \\ &\leq \|A(t)\| \|x - y\| \\ &\leq a \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|f(t, x_0)\| &= \|A(t)x_0 + g(t)\| \\ &\leq a \|x_0\| + b \leq h, \text{ para todo } x_0 \text{ finito, } \forall t \in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

Por lo tanto, el Teorema 2.7 muestra que el sistema lineal tiene solución única en  $[t_0, t_1]$ . Como  $t_1$  puede ser arbitrariamente grande, concluimos que si  $A(t)$  y  $g(t)$  son seccionalmente continuas  $\forall t \geq t_0$ , entonces el sistema tiene una solución única  $\forall t \geq t_0$ .  $\circ$

Para un sistema lineal es razonable pedir Lipschitzidad global. Pero para sistemas no lineales esto es muy restrictivo. No así la condición de Lipschitz local, que está garantizada si la función del lado derecho es continuamente diferenciable.

**Ejemplo 2.5.** Consideremos el sistema escalar

$$\dot{x} = -x^3 = f(x) \tag{2.7}$$

La función  $f(x)$  no satisface la condición de Lipschitz global porque el Jacobiano  $\partial f/\partial x = -3x^2$  no está globalmente acotado. Sin embargo, la ecuación tiene la única solución

$$x(t) = \text{sign } x_0 \sqrt{\frac{x_0^2}{1 + 2x_0^2(t - t_0)}}$$

que está bien definida para todo  $x_0$  y para todo  $t \geq t_0$ .  $\circ$

Como la condición de Lipschitz global es muy conservadora, es útil disponer de otro resultado que, a expensas de pedir un mayor conocimiento acerca de la solución del sistema, sólo requiera que la función sea localmente Lipschitz.

**Teorema 2.8 (Existencia global y unicidad de vuelta).** Sea  $f(t, x)$  seccionalmente continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  para todo  $t \geq t_0$  y todo  $x$  en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $W$  un subconjunto compacto de  $D$ ,  $x_0 \in W$ , y supongamos que se sabe que toda solución de (2.1) permanece todo el tiempo en  $W$ . Entonces existe una solución única que está definida para todo  $t \geq t_0$ .

*Demostración.* Por el Teorema 2.3, existe una solución local única en  $[t_0, t_0 + \delta]$ . Sea  $[t_0, T)$  el máximo intervalo de existencia. Si  $T$  es finito, entonces la solución debe abandonar todo subconjunto compacto de  $D$  (Ejercicio 2.33). Como la solución nunca deja el conjunto compacto  $W$ , concluimos que debe ser  $T = \infty$ .  $\square$

El truco al aplicar el Teorema 2.8 es verificar que toda solución permanezca en un conjunto compacto sin resolver la ecuación diferencial. Vamos a ver en el Capítulo 3 que el método de Lyapunov va a ser útil para esto.

**Ejemplo 2.6.** Consideremos nuevamente el sistema (2.7). La función  $f(x)$  es localmente Lipschitz en  $\mathbb{R}$ . Si en algún instante  $x(t)$  es positiva, la derivada  $\dot{x}(t)$  va a ser negativa, y viceversa. Por lo tanto, comenzando con una condición inicial  $x(0) = a$ , la solución no puede dejar el conjunto compacto  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq |a|\}$ , y el Teorema 2.8 garantiza que (2.7) tiene una solución única para todo  $t \geq t_0$ .  $\circ$

## 2.3 Dependencia Continua Con Respecto a Condiciones Iniciales y Parámetros

Para que la solución de la ecuación de estado (2.1) sea de algún interés, debe depender continuamente del instante inicial  $t_0$ , del estado inicial  $x_0$ , y de la función del lado derecho  $f(t, x)$ . La forma integral (2.3) muestra que la dependencia continua del instante inicial es obvia.

Por dependencia continua de la condición inicial entendemos lo siguiente: sea  $y(t)$  la solución de (2.1) que comienza en  $y(t_0) = y_0$  y está definida en el intervalo compacto  $[t_0, t_1]$ ; dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $z_0$  en la bola  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y_0\| < \delta\}$ , la ecuación  $\dot{x} = f(t, x)$  tiene una solución única  $z(t)$  definida en  $[t_0, t_1]$ , con  $z(t_0) = z_0$ , y satisface  $\|z(t) - y(t)\| < \epsilon$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

Para definir dependencia continua de la función del lado derecho  $f$ , vamos a precisar en qué forma  $f$  es perturbada. Vamos a asumir que  $f$  depende continuamente de un conjunto de parámetros constantes, es decir,  $f = f(t, x, \lambda)$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}^p$ . Sea  $x(t, \lambda_0)$  una solución de  $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$  definida en  $[t_0, t_1]$ , con  $x(t_0, \lambda_0) = x_0$ . Se dice que la solución depende continuamente de  $\lambda$  si dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $\lambda$  en la bola  $\{\lambda \in \mathbb{R}^p \mid \|\lambda - \lambda_0\| < \delta\}$ , la ecuación  $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$  tiene una solución única  $x(t, \lambda)$  definida en  $[t_0, t_1]$ , con  $x(t_0, \lambda) = x_0$ , y satisface  $\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \epsilon$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

Antes de estudiar los dos tipos de continuidad recién definidos, necesitamos el siguiente resultado.

**Teorema 2.9.** Sea  $f(t, x)$  seccionalmente continua en  $t$  y Lipschitz en  $x$  en  $[t_0, t_1] \times W$ , con constante de Lipschitz  $L$ , donde  $W \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto y conexo. Sean  $y(t)$  y  $z(t)$  soluciones de

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

y

$$\dot{z} = f(t, z) + g(t, z), \quad z(t_0) = z_0$$

tal que  $y(t), z(t) \in W$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Supongamos que

$$\|g(t, x)\| \leq \mu, \quad \forall (t, x) \in [t_0, t_1] \times W,$$

para algún  $\mu > 0$ , y

$$\|y_0 - z_0\| \leq \gamma$$

Entonces

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \gamma e^{L(t-t_0)} + \frac{\mu}{L} [e^{L(t-t_0)} - 1] \quad (2.8)$$

para todo  $t \in [t_0, t_1]$ .

## 2.3 Dependencia Continua Con Respecto a Condiciones Iniciales y Parámetros 41

*Demostración.* Las soluciones  $y(t)$  y  $z(t)$  están dadas por

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \\ z(t) &= z_0 + \int_{t_0}^t [f(s, z(s)) + g(s, z(s))] ds \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones y tomando normas obtenemos

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| &\leq \|y_0 - z_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds + \int_{t_0}^t \|g(s, z(s))\| ds \\ &\leq \gamma + \mu(t - t_0) + \int_{t_0}^t L \|y(s) - z(s)\| ds \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall-Bellman a la función  $\|y(t) - z(t)\|$  resulta

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \gamma + \mu(t - t_0) + \int_{t_0}^t L[\gamma + \mu(s - t_0)]e^{L(s-t_0)} ds$$

Integrando el lado derecho por partes se obtiene (2.8). □

Tenemos entonces el siguiente teorema.

**Teorema 2.10 (Continuidad en condiciones iniciales y parámetros).** Sea  $f(t, x, \lambda)$  continua en sus argumentos y localmente Lipschitz en  $x$  (uniformemente en  $t$  y  $\lambda$ ) en  $[t_0, t_1] \times D \times \{\|\lambda - \lambda_0\| \leq c\}$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto y conexo. Sea  $y(t, \lambda_0)$  una solución de  $\dot{x} = f(t, x, \lambda_0)$  con  $y(t_0, \lambda_0) = y_0 \in D$ . Supongamos que  $y(t, \lambda_0)$  está definida y permanece en  $D$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . Entonces, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que si

$$\|y_0 - z_0\| < \delta \text{ y } \|\lambda - \lambda_0\| < \delta$$

la ecuación  $\dot{x} = f(t, x, \lambda)$  tiene una solución única  $z(t, \lambda)$  definida en  $[t_0, t_1]$ , con  $z(t_0, \lambda) = z_0$ , y satisface

$$\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \epsilon, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

*Demostración.* Por continuidad de  $y(t, \lambda_0)$  en  $t$  y la compacidad de  $[t_0, t_1]$ , sabemos que  $y(t, \lambda_0)$  está uniformemente acotada en  $[t_0, t_1]$ . Definamos un “tubo”  $U$  alrededor de la solución  $y(t, \lambda_0)$  de la siguiente manera

$$U = \{(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \mid \|x - y(t, \lambda_0)\| \leq \epsilon\},$$

como se ilustra en la Figura 2.1.

Supongamos que  $\epsilon$  se eligió lo suficientemente pequeño para que  $U \subset [t_0, t_1] \times D$ . El conjunto  $U$  es compacto; por lo tanto  $f(t, x, \lambda)$  es Lipschitz en  $x$  en  $U$  con constante de Lipschitz  $L$ , digamos. Por continuidad de  $f$  en  $\lambda$ , para cada  $\alpha > 0$ , existe  $\beta > 0$  (con  $\beta < c$ ) tal que

$$\|f(t, x, \lambda) - f(t, x, \lambda_0)\| < \alpha, \quad \forall (t, x) \in U, \quad \forall \|\lambda - \lambda_0\| < \beta$$

Tomemos  $\alpha < \epsilon$  y  $\|y_0 - z_0\| < \alpha$ . Por el teorema de existencia local y unicidad, existe una solución única  $z(t, \lambda)$  en algún intervalo  $[t_0, t_0 + \Delta]$ . La solución comienza dentro del tubo

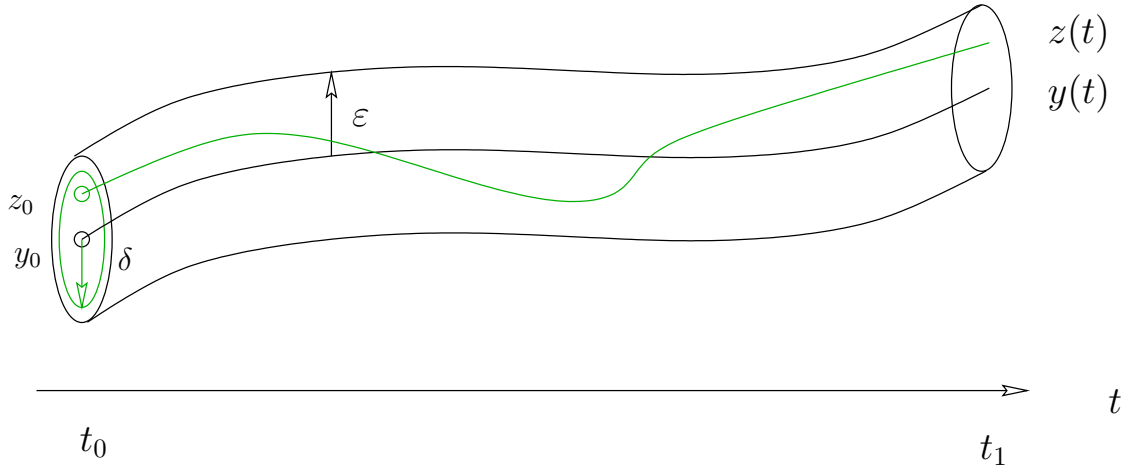


Figura 2.1: Tubo construido alrededor de la solución  $y(t)$

$U$  y mientras permanezca en el tubo puede extenderse. Vamos a mostrar que, eligiendo  $\alpha$  lo suficientemente pequeño, la solución permanece en el tubo  $U$  para todo  $t \in [t_0, t_1]$ . En particular, sea  $\tau$  el primer instante en que la solución deja el tubo; vamos a probar que  $\tau > t_1$ . En el intervalo  $[t_0, \tau]$ , todas las condiciones del Teorema 2.9 se satisfacen con  $\gamma = \mu = \alpha$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| &\leq \alpha e^{L(t-t_0)} + \frac{\alpha}{L} [e^{L(t-t_0)} - 1] \\ &< \frac{\alpha(1+L)}{L} e^{L(t-t_0)} \end{aligned}$$

Si elegimos  $\alpha \leq \epsilon L e^{-L(t_1-t_0)} / (1+L)$  aseguramos que la solución  $z(t, \lambda)$  no deja el tubo durante  $[t_0, t_1]$ . Por lo tanto  $z(t, \lambda)$  está definida en  $[t_0, t_1]$  y satisface  $\|z(t, \lambda) - y(t, \lambda_0)\| < \epsilon$ . La prueba se completa tomando  $\delta = \min\{\alpha, \beta\}$ .  $\square$

## 2.4 Diferenciabilidad de la Solución y Ecuaciones de Sensibilidad

Supongamos que  $f(t, x, \lambda)$  es continua en sus argumentos y tiene derivadas parciales continuas con respecto a  $x$  y  $\lambda$  para todo  $(t, x, \lambda) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ . Sea  $\lambda_0$  un valor nominal de  $\lambda$  y supongamos que la ecuación de estado nominal

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda_0), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.9}$$

tiene una solución única  $x(t, \lambda_0)$  en  $[t_0, t_1]$ . Por el Teorema 2.10 sabemos que para todo  $\lambda$  suficientemente cercano a  $\lambda_0$ , la ecuación de estado

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0$$

tiene una solución única  $x(t, \lambda)$  en  $[t_0, t_1]$  que es cercana a la solución nominal  $x(t, \lambda_0)$ . Escribamos esta solución como

$$x(t, \lambda) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s, \lambda), \lambda) ds$$

y derivemos parcialmente con respecto a  $\lambda$

$$x_\lambda(t, \lambda) = \int_{t_0}^t \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(s, x(s, \lambda), \lambda) x_\lambda(s, \lambda) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(s, x(s, \lambda), \lambda) \right] ds$$

donde  $x_\lambda(t, \lambda) = \partial x(t, \lambda) / \partial \lambda$  y  $\partial x_0 / \partial \lambda = 0$  porque  $x_0$  es independiente de  $\lambda$ . Derivando ahora con respecto a  $t$  obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} x_\lambda(t, \lambda) = A(t, \lambda) x_\lambda(t, \lambda) + B(t, \lambda), \quad x_\lambda(t_0, \lambda) = 0 \quad (2.10)$$

donde

$$A(t, \lambda) = \left. \frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial x} \right|_{x=x(t, \lambda)}, \quad B(t, \lambda) = \left. \frac{\partial f(t, x, \lambda)}{\partial \lambda} \right|_{x=x(t, \lambda)}$$

Para  $\lambda$  suficientemente cercano a  $\lambda_0$  las matrices  $A(t, \lambda)$  y  $B(t, \lambda)$  están definidas en  $[t_0, t_1]$ , por lo tanto  $x_\lambda(t, \lambda)$  está definida en el mismo intervalo. Para  $\lambda = \lambda_0$ , el lado derecho de (2.10) depende sólo de la solución nominal  $x(t, \lambda_0)$ . Sea  $S(t) = x_\lambda(t, \lambda_0)$ ;  $S(t)$  es la solución única de

$$\dot{S}(t) = A(t, \lambda_0) S(t) + B(t, \lambda_0), \quad S(t_0) = 0 \quad (2.11)$$

La función  $S(t)$  se denomina *función de sensibilidad* y (2.11) es la *ecuación de sensibilidad*. Las funciones de sensibilidad proporcionan estimas de primer orden del efecto de variaciones de los parámetros en las soluciones; también sirven para aproximar la solución cuando  $\|\lambda - \lambda_0\|$  es suficientemente pequeño:  $x(t, \lambda)$  puede expandirse en serie de Taylor alrededor de la solución nominal  $x(t, \lambda_0)$  y, despreciando términos de orden superior, se obtiene

$$x(t, \lambda) \approx x(t, \lambda_0) + S(t)(\lambda - \lambda_0) \quad (2.12)$$

Una forma de calcular  $S(t)$  es resolver (en general numéricamente) simultáneamente (2.9) y (2.10) evaluando la solución de (2.10) en  $\lambda = \lambda_0$ .

## 2.5 Principio de Comparación

Como la desigualdad de Gronwall-Bellman, el principio de comparación sirve para obtener cotas de la solución de (2.1) sin necesidad de calcular la solución misma. Se aplica a *desigualdades diferenciales* de la forma  $\dot{v} \leq f(t, v(t))$  para todo  $t$  en un cierto intervalo. El principio de comparación compara la solución de la desigualdad diferencial  $\dot{v} \leq f(t, v(t))$  con la de la ecuación diferencial  $\dot{u} = f(t, u)$ .

**Lema 2.11 (Principio de Comparación).** Consideremos la ecuación diferencial escalar

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

donde  $f(t, u)$  es continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $u$ , para todo  $t \geq 0$  y todo  $u \in J \subset \mathbb{R}$ . Sea  $[t_0, T)$  ( $T$  puede ser infinito) el máximo intervalo de existencia de la solución  $u(t)$  y supongamos que  $u(t) \in J$  para todo  $t \in [t_0, T)$ . Sea  $v(t)$  una función diferenciable que satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{v}(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) \leq u_0$$

con  $v(t) \in J$  para todo  $t \in [t_0, T)$ . Entonces

$$v(t) \leq u(t)$$

para todo  $t \in [t_0, T)$ . ◦

**Ejemplo 2.7.** La ecuación diferencial escalar

$$\dot{x} = f(x) = -(1 + x^2)x, \quad x(0) = a$$

tiene una solución única en  $[0, t_1]$  para algún  $t_1 > 0$ , porque  $f(x)$  es localmente Lipschitz. Sea  $v(t) = [x(t)]^2$ . Su derivada es

$$\dot{v}(t) = 2x(t)\dot{x}(t) = -2[x(t)]^2 - 2[x(t)]^4 \leq -2[x(t)]^2$$

Por lo tanto  $v(t)$  satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{v}(t) \leq -2v(t), \quad v(0) = a^2$$

Sea  $u(t)$  la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{u} = -2u, \quad u(0) = a^2 \quad \implies \quad u(t) = a^2 e^{-2t}$$

Por el principio de comparación la solución  $x(t)$  está definida para todo  $t \geq 0$  y satisface

$$|x(t)| = \sqrt{v(t)} \leq |a|e^{-t}, \quad \forall t \geq 0$$

◦

## 2.6 Ejercicios

### Ejercicio 2.1

Sea  $f(x)$  una función continuamente diferenciable. Mostrar que el punto de equilibrio  $x^*$  de  $\dot{x} = f(x)$  es aislado si la matriz Jacobiana  $[\partial f / \partial x](x^*)$  es no singular.

**Ayuda:** Usar el Teorema de la Función Implícita enunciado a continuación.

**Teorema 2.12 (Teorema de la Función Implícita).** Sea  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continuamente diferenciable en cada punto  $(x, y)$  de un conjunto cerrado  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Sea  $(x_0, y_0)$  un punto en  $\mathcal{S}$  para el cual  $f(x_0, y_0) = 0$  y para el cual la matriz Jacobiana  $[\partial f / \partial x](x_0, y_0)$  es no singular. Entonces existen entornos  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  de  $x_0$  y  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^m$  de  $y_0$  tales que para cada  $y \in \mathcal{V}$  la ecuación  $f(x, y) = 0$  tiene una solución única  $x \in \mathcal{U}$ . Además, esta solución puede expresarse como  $x = g(y)$ , donde  $g$  es continuamente diferenciable en  $y = y_0$ .

### Ejercicio 2.2

Sea  $y(t)$  una función escalar no negativa que satisface la desigualdad

$$y(t) \leq k_1 e^{-\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} [k_2 y(\tau) + k_3] d\tau, \quad k_1, k_2, k_3 \geq 0, \alpha > k_2.$$

Usando la desigualdad de Gronwall-Bellman mostrar que

$$y(t) \leq k_1 e^{-(\alpha-k_2)(t-t_0)} + \frac{k_3}{\alpha - k_2} [1 - e^{-(\alpha-k_2)(t-t_0)}].$$



**Ayuda:** Tomar  $z(t) = y(t)e^{\alpha(t-t_0)}$  y encontrar la desigualdad que satisface  $z$ .

### Ejercicio 2.3

Usando el Teorema del Mapeo Contractivo mostrar que el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\varepsilon x_1}{1 + x_1^2}\right) x_1 + \varepsilon x_2 &= 1 \\ \varepsilon x_1 + \left(1 + \frac{\varepsilon x_2}{1 + x_2^2}\right) x_2 &= 2, \end{aligned}$$

donde  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ , tiene una única solución real.

### Ejercicio 2.4

Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente Lipschitz en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $S \subset D$  un conjunto compacto (cerrado y acotado). Mostrar que existe una constante  $L > 0$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in S.$$

**Ayuda:** Por ser compacto, el conjunto  $S$  puede cubrirse por un número finito de entornos:

$$S \subset N(a_1, r_1) \cup N(a_2, r_2) \cup \dots \cup N(a_k, r_k).$$

Considerar los dos casos siguientes por separado:

- $x, y \in S \cap N(a_i, r_i)$  para algún  $i \in [1, 2, \dots, k]$ .
- $x, y \notin S \cap N(a_i, r_i)$  para ningún  $i \in [1, 2, \dots, k]$ ; en este caso notar que  $\|x - y\| \geq \min_i r_i$  y usar el hecho de que  $f(x)$  está uniformemente acotada en  $S$ .

### Ejercicio 2.5

Recordar que una función  $f : S_1 \rightarrow S_2$  se dice *continua* en un punto  $x \in S_1$  si dada una constante  $\varepsilon > 0$  existe alguna constante  $\delta > 0$  tal que

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

Una función  $f$  es continua en un conjunto  $S$  si es continua en todo punto de  $S$ , y es *uniformemente continua* en  $S$  si, dada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  — dependiente sólo de  $\varepsilon$  — tal que la desigualdad vale para todo  $x, y \in S$ .

Mostrar que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es Lipschitz en  $W \subset \mathbb{R}^n$ , entonces  $f(x)$  es uniformemente continua en  $W$ .

### Ejercicio 2.6

Mostrar que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es Lipschitz en un dominio  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$  y  $f(0) = 0$ , entonces existe una constante  $k > 0$  tal que  $\|f(x)\| \leq k\|x\|$  para todo  $x \in D$ .

**Ejercicio 2.7**

Sea el problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.13)$$

y sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene  $x = 0$ . Suponer que  $f(t, 0) = 0$  y  $f(t, x)$  es Lipschitz en  $x$  sobre  $[t_0, \infty) \times D$  con constante de Lipschitz  $L$  en  $\|\cdot\|_2$ , y que la solución  $x(t)$  está definida para todo  $t \geq t_0$  y pertenece a  $D$ .

(i) Mostrar que

$$\left| \frac{d}{dt} [x^T(t)x(t)] \right| \leq 2L\|x(t)\|_2^2.$$

(ii) Mostrar que

$$\|x_0\|_2 e^{-L(t-t_0)} \leq \|x(t)\|_2 \leq \|x_0\|_2 e^{L(t-t_0)}$$

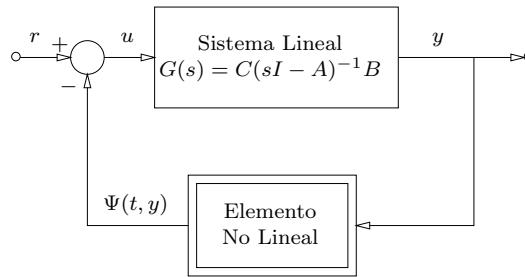
**Ejercicio 2.8**

Sea  $D_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$ . Para cada uno de los siguientes sistemas representados como  $\dot{x} = f(t, x)$  e introducidos en el Capítulo 1 determinar si  $f$  es: (a) localmente Lipschitz en  $x \in D_r$  para  $r$  suficientemente pequeño; (b) localmente Lipschitz en  $x \in D_r$  para cualquier  $r > 0$  finito; (c) globalmente Lipschitz en  $x$ .

- (i) La ecuación del péndulo con entrada de control.
- (ii) El circuito con diodo túnel.
- (iii) El sistema de masa-resorte con resorte lineal, amortiguamiento viscoso, fricción estática y fuerza externa nula.
- (iv) El oscilador de Van der Pol.
- (v) La ecuación de estado a lazo cerrado de tercer orden del ejemplo de control adaptable.
- (vi) El sistema  $\dot{x} = Ax - B\psi(Cx)$ , donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  son matrices constantes y  $\psi(\cdot)$  es una *alinealidad de zona muerta*, definida por

$$\psi(y) = \begin{cases} y + d, & \text{para } y < -d \\ 0, & \text{para } -d \leq y \leq d \\ y - d, & \text{para } y > d \end{cases}$$

(Este sistema representa un sistema lineal realimentado con alinealidad estática, como se ve en la figura, en particular con  $\psi$  estacionaria y  $r = 0$ .)



### Ejercicio 2.9

Sea  $f(t, x)$  seccionalmente continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  sobre  $[t_0, t_1] \times D$  para algún dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $W$  un subconjunto compacto de  $D$ . Sea  $x(t)$  la solución de  $\dot{x} = f(t, x)$  con  $x(t_0) = x_0 \in W$ . Asumiendo que  $x(t)$  está definida y pertenece a  $W$  para todo  $t \in [t_0, T)$ ,  $T < t_1$ , mostrar que

- (i)  $x(t)$  es uniformemente continua sobre  $[t_0, T)$ ,
- (ii)  $x(T)$  está definida y pertenece a  $W$ , y que entonces  $x(t)$  es una solución sobre  $[t_0, T]$ ,
- (iii) existe  $\delta > 0$  tal que la solución  $x(t)$  pueda extenderse sobre  $[t_0, T + \delta]$ .

### Ejercicio 2.10

Sea  $f(t, x)$  seccionalmente continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  sobre  $[t_0, t_1] \times D$  para algún dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $y(t)$  una solución de (2.13) sobre un intervalo abierto máximo  $[t_0, T) \subset [t_0, t_1]$  con  $T < \infty$ . Sea  $W$  cualquier conjunto compacto de  $D$ . Mostrar que existe algún  $t \in [t_0, T)$  tal que  $y(t) \notin W$ .

**Ayuda:** Usar el ejercicio anterior.

### Ejercicio 2.11

Sea  $f(t, x)$  seccionalmente continua en  $t$ , localmente Lipschitz en  $x$ , y

$$\|f(t, x)\| \leq k_1 + k_2\|x\|, \quad (t, x) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n.$$

- (i) Mostrar que la solución de (2.13) satisface

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| e^{k_2(t-t_0)} + \frac{k_1}{k_2} (e^{k_2(t-t_0)} - 1)$$

para todo  $t \geq t_0$  para el cual la solución existe.

- (ii) ¿Puede haber escape en tiempo finito de la solución?

**Ejercicio 2.12**

Sean  $f(t, x)$  y su derivada parcial respecto de  $x$  continuas en  $(t, x)$  para todo  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Sea  $x(t, a, \eta)$  la solución de  $\dot{x} = f(t, x)$  que comienza en  $x(a) = \eta$  y supongamos que  $x(t, a, \eta)$  está definida en  $[a, t_1]$ . Mostrar que  $x(t, a, \eta)$  es continuamente diferenciable con respecto de  $a$  y  $\eta$ . Sean  $x_a(t)$  y  $x_\eta(t)$  las respectivas derivadas parciales. Mostrar que satisfacen

$$x_a(t) + x_\eta(t)f(a, \eta) \equiv 0, \quad \forall t \in [a, t_1]$$

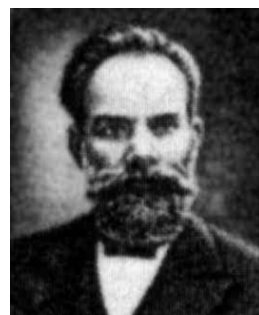
## Capítulo 3

# Estabilidad Según Lyapunov. Sistemas Estacionarios

La teoría de estabilidad juega un rol central en teoría de sistemas e ingeniería. Existen distintos tipos de problemas de estabilidad en los sistemas dinámicos. En este capítulo vamos a tratar estabilidad de puntos de equilibrio; más adelante en el curso veremos otros problemas de estabilidad, como el de estabilidad *entrada-salida*.

La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza *en el sentido de Lyapunov*, un matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre. Un punto de equilibrio se dice *estable* si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es *inestable*. Un punto de equilibrio se dice *asintóticamente estable* si todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima a infinito. Vemos estas nociones en más detalle en §3.1, donde presentamos también los teoremas básicos de Lyapunov para sistemas estacionarios. En §3.2 damos una extensión de la teoría básica de Lyapunov que se debe a LaSalle. En §3.3 analizamos *región de atracción* de un punto de equilibrio, y en §3.4 vemos cómo la estabilidad de un punto de equilibrio puede determinarse mediante linealización.

Los teoremas de estabilidad de Lyapunov dan condiciones suficientes para estabilidad de puntos de equilibrio. Existen teoremas *conversos* que establecen que, al menos conceptualmente, en los teoremas de Lyapunov muchas de estas condiciones son también necesarias. Trataremos estos teoremas conversos en el capítulo siguiente, junto a extensiones de los resultados para sistemas inestacionarios.



Aleksandr Lyapunov  
1857-1918

### 3.1 El Teorema de Estabilidad de Lyapunov

Consideremos el sistema estacionario

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.1}$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un mapa localmente Lipschitz desde un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $\bar{x} \in D$  es un PE de (3.1), es decir  $f(\bar{x}) = 0$ . Vamos a caracterizar y estudiar

la estabilidad de  $\bar{x}$ . Por conveniencia, vamos a asumir que  $\bar{x} = 0$  (esto no nos hace perder generalidad porque, si no es así, definimos  $y = x - \bar{x}$  y trabajamos con la ecuación  $\dot{y} = g(y)$ , donde  $g(y) \triangleq f(y + \bar{x})$ , que tiene un equilibrio en el origen.)

**Definición 3.1.** El PE  $x = 0$  de (3.1) es

- *estable*, si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon)$  tal que

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

- *inestable* si no es estable.
- *asintóticamente estable* (AE) si es estable y  $\delta$  puede elegirse tal que

$$\|x(0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Los tres tipos de estabilidad se pueden ver en la ecuación del péndulo (1.4) del Ejemplo 1.2.1. Los PE son  $(0, 0)$  y  $(\pi, 0)$ . Considerando que no hay fricción, o sea tomando  $k = 0$ , las trayectorias en el entorno del primer PE son órbitas cerradas. Empezando suficientemente cerca del PE se puede garantizar que las trayectorias van a permanecer en cualquier bola preespecificada alrededor del PE. Por lo tanto, el PE es estable. No es AE, sin embargo, porque las trayectorias que comienzan fuera del PE nunca tienden a él.

Si consideramos fricción ( $k > 0$ ), el PE en el origen es un foco estable. La inspección del retrato de fase de un foco estable muestra que el requisito  $\epsilon - \delta$  para estabilidad se satisface; más aún, las trayectorias que comienzan cerca del PE tienden a él cuando  $t$  tiende a  $\infty$ . El segundo PE en  $(\pi, 0)$  es un punto de ensilladura. Es obvio que el requisito  $\epsilon - \delta$  para estabilidad no se satisface porque, para cualquier  $\epsilon > 0$ , siempre hay una trayectoria que deja la bola  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{x}\| \leq \epsilon\}$ , aún cuando  $x(0)$  sea arbitrariamente cercano al PE.

La Definición 3.1 tiene como condición implícita la existencia de la solución para todo  $t \geq 0$ . Esta propiedad de existencia global (en el tiempo) de la solución no está garantizada, como ya vimos, por la Lipschitzidad local de  $f$ . Vamos a ver, sin embargo, que las condiciones adicionales que requiere el Teorema de Lyapunov van a garantizar la existencia global (en el tiempo) de la solución.

Recién vimos que para el ejemplo del péndulo se pueden determinar las propiedades de estabilidad analizando el retrato de fase. Este enfoque es difícil de extender a sistemas de orden mayor que dos. Vamos a ver que las conclusiones a las que llegamos analizando el retrato de fase del péndulo se pueden obtener también usando conceptos de energía. Definamos la energía del péndulo  $E(x)$  como la suma de sus energías cinética y potencial, con referencia de energía potencial elegida tal que  $E(0) = 0$ , es decir,

$$E(x) = \int_0^{x_1} (g/l) \sin y \, dy + \frac{1}{2} x_2^2 = (g/l)(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2 \quad (3.2)$$

Cuando no hay fricción ( $k = 0$ ), el sistema es conservativo, es decir, no hay disipación de energía. Por lo tanto,  $E = \text{constante}$  durante la evolución del sistema, o sea,  $dE/dt = 0$  sobre las trayectorias del sistema. Como  $E(x) = c$  forma contornos cerrados alrededor de  $x = 0$  para  $c$  pequeño, concluimos que  $x = 0$  es un PE estable. Cuando consideramos fricción ( $k > 0$ ), se disipa energía durante la evolución del sistema, o sea,  $dE/dt \leq 0$  sobre las trayectorias del sistema. Es decir que la energía decrece hasta que llega a cero, mostrando que la trayectoria tiende a  $x = 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

En 1892, Lyapunov mostró que algunas otras funciones, no sólo la energía, pueden usarse para determinar la estabilidad de un PE. Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene el origen. La derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (3.1) está dada por

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

**Teorema 3.1 (Lyapunov).** Sea el origen  $x = 0$  un PE de (3.1) y sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene el origen. Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\} \quad (3.3)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \text{en} \quad D \quad (3.4)$$

Entonces  $x = 0$  es estable. Más aún, si

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \text{en} \quad D - \{0\} \quad (3.5)$$

entonces  $x = 0$  es AE.

*Demostración.* Dado  $\epsilon > 0$ , elijamos  $r \in (0, \epsilon]$  tal que

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\} \subset D$$

Sea  $\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x)$ . Entonces  $\alpha > 0$  por (3.3). Tomemos  $\beta \in (0, \alpha)$  y sea

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r \mid V(x) \leq \beta\}$$

Entonces  $\Omega_\beta$  está en el interior de  $B_r$ ; <sup>1</sup> ver la Figura 3.1. El conjunto  $\Omega_\beta$  tiene la propiedad

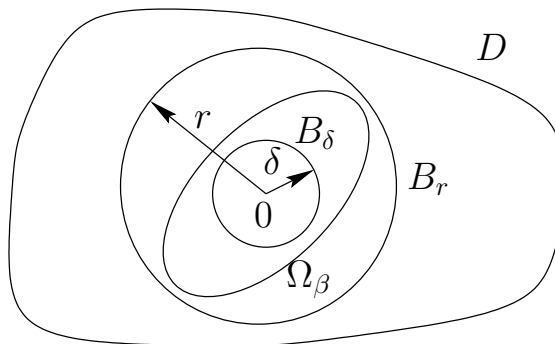


Figura 3.1: Representación geométrica de los conjuntos en la prueba del Teorema 3.1

de que toda trayectoria que comienza en  $\Omega_\beta$  en  $t = 0$  permanece en  $\Omega_\beta$  para todo  $t \geq 0$ . Esto sigue de (3.4) ya que

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0 \implies V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta, \quad \forall t \geq 0$$

<sup>1</sup>Si no fuera así, existiría un punto  $p \in \Omega_\beta$  que se encuentra sobre la frontera de  $B_r$ . En este punto,  $V(p) \geq \alpha > \beta$ , pero para todo  $x \in \Omega_\beta$ ,  $V(x) \leq \beta$ , lo cual es una contradicción.

Como  $\Omega_\beta$  es un conjunto compacto (cerrado por definición y acotado porque está contenido en  $B_r$ ), concluimos por el Teorema 2.9 que (3.1) tiene una solución única definida para todo  $t \geq 0$  cuando  $x(0) \in \Omega_\beta$ . Como  $V$  es continua y  $V(0) = 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\|x\| \leq \delta \implies V(x) < \beta$$

Entonces

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$$

y

$$x(0) \in B_\delta \implies x(0) \in \Omega_\beta \implies x(t) \in \Omega_\beta \implies x(t) \in B_r, \quad \forall t \geq 0$$

Por lo tanto

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < r \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

lo que muestra que el PE en  $x = 0$  es estable.

Supongamos ahora que (3.5) también vale. Para mostrar EA debemos probar que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Como  $V$  es continua y  $V(0) = 0$ , es suficiente mostrar que  $V(x(t)) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Como  $V(x(t))$  es monótonicamente decreciente y acotada inferiormente por cero,

$$V(x(t)) \rightarrow c \geq 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

Mostramos que  $c = 0$  por contradicción. Supongamos que  $c > 0$ . Por continuidad de  $V(x)$ , existe  $d > 0$  tal que  $B_d \subset \Omega_c$ . El límite  $V(x(t)) \rightarrow c > 0$  implica que la trayectoria  $x(t)$  permanece fuera de la bola  $B_d$  para todo  $t \geq 0$ . Sea  $-\gamma = \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{V}(x)$ , el cual existe porque la función continua  $\dot{V}(x)$  alcanza un máximo sobre el conjunto compacto  $\{d \leq \|x\| \leq r\}$ . Sabemos que  $-\gamma < 0$  por (3.5). Integrando  $\dot{V}(x)$  tenemos que

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau \leq V(x(0)) - \gamma t$$

Como el lado derecho se va a hacer negativo después de un cierto tiempo, la desigualdad contradice la suposición de que  $c > 0$ .  $\square$

Una función continuamente diferenciable que satisface (3.3) y (3.4) se denomina *función de Lyapunov*. La superficie  $V(x) = c$  se denomina *superficie de Lyapunov o superficie de nivel*. Usando superficies de Lyapunov, la Figura 3.2 da una interpretación intuitiva del Teorema 3.1. La condición  $\dot{V} \leq 0$  implica que cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov  $V(x) = c$  se introduce en el conjunto  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$  y nunca puede salir de él. Cuando  $\dot{V} < 0$ , la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra superficie de Lyapunov interior con un  $c$  menor. A medida que  $c$  decrece, la superficie de Lyapunov  $V(x) = c$  se achica hasta transformarse en el origen, mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si sólo sabemos que  $\dot{V} \leq 0$ , no podemos asegurar que la trayectoria tienda al origen, pero podemos concluir que el origen es estable porque la trayectoria puede ser encerrada en cualquier bola  $B_\epsilon$  sólo con requerir que el estado inicial  $x(0)$  pertenezca a una superficie de Lyapunov contenida en dicha bola.

Una función  $V(x)$  que satisface (3.3) se dice *definida positiva*. Si satisface la condición más débil  $V(x) \geq 0$  para  $x \neq 0$ , se dice *semidefinida positiva*. Una función se dice *definida negativa*



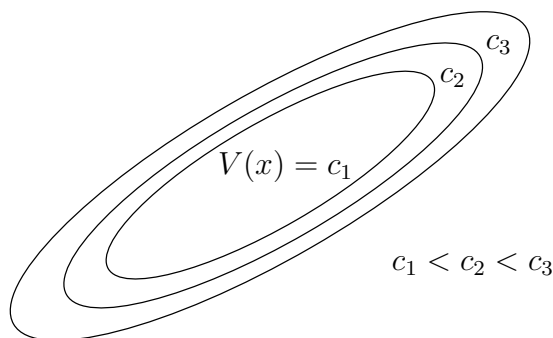


Figura 3.2: Curvas de nivel de una función de Lyapunov

o *semidefinida negativa* si  $-V(x)$  es definida positiva o semidefinida positiva, respectivamente. Si  $V(x)$  no tiene signo definido con respecto a alguno de estos cuatro casos se dice *indefinida*. El teorema de Lyapunov se puede enunciar, usando esta nueva terminología como: *el origen es estable si existe una función definida positiva y continuamente diferenciable tal que  $\dot{V}(x)$  es semidefinida negativa, y es AE si  $\dot{V}(x)$  es definida negativa*.

**Ejemplo 3.1.** Sea  $V$  la forma cuadrática

$$V(x) = x^T P x$$

donde  $P$  es una matriz real y simétrica.  $V(x)$  es (semi)definida positiva sí todos los autovalores de  $P$  son (no negativos) positivos, lo que vale sí todos los menores principales de  $P$  son (no negativos) positivos. Si  $V(x) = x^T P x$  es (semi)definida positiva, decimos que la matriz  $P$  es (semi)definida positiva y escribimos  $(P \geq 0)$   $P > 0$ .

Por ejemplo, si

$$P = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$$

entonces  $V(x)$  es positiva definida si  $a > \sqrt{5}$  y definida negativa si  $a < -\sqrt{5}$ . ○

**Ejemplo 3.2.** Consideremos la ecuación diferencial de primer orden

$$\dot{x} = -g(x)$$

donde  $g(x)$  es localmente Lipschitz en  $(-a, a)$  y satisface

$$g(0) = 0; \quad x g(x) > 0, \quad \forall x \neq 0, x \in (-a, a)$$

Este sistema tiene un PE aislado en el origen. Consideremos la función

$$V(x) = \int_0^x g(y) dy$$

En el dominio  $D = (-a, a)$ ,  $V(x)$  es continuamente diferenciable,  $V(0) = 0$  y  $V(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$ , es decir, es una candidata a función de Lyapunov válida. Calculemos su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} [-g(x)] = -[g(x)]^2 < 0, \quad \forall x \in D - \{0\}$$

Concluimos usando el Teorema 3.1 que el origen es AE. ○

**Ejemplo 3.3 (Péndulo sin fricción).** Consideremos la ecuación del péndulo sin fricción (ecuación (1.4) con  $k = 0$ ) con la función de energía (3.2) como función de Lyapunov. Tenemos que  $V(0) = 0$  y  $V(x)$  es definida positiva en el dominio  $-2\pi \leq x_1 \leq 2\pi$ . Además

$$\dot{V}(x) = (g/l)\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = 0$$

Por lo tanto se satisfacen las condiciones (3.3) y (3.4) del Teorema 3.1 probando que el origen es estable. Como  $\dot{V}(x) \equiv 0$  podemos también concluir que el origen no es AE.  $\circ$

**Ejemplo 3.4 (Péndulo con fricción).** Consideremos la ecuación del péndulo con fricción (ecuación (1.4) con  $k > 0$ ) con la función de energía (3.2) como función de Lyapunov. Tenemos que

$$\dot{V}(x) = (g/l)\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = -(k/m)x_2^2$$

$\dot{V}(x)$  es semidefinida negativa pero no es definida negativa porque se anula sobre todo el eje  $x_2 = 0$ . Por lo tanto sólo podemos concluir que el origen es estable. Sin embargo ya sabemos, analizando el retrato de fase, que en este caso el origen es AE, por lo tanto esta elección de función de Lyapunov junto con el Teorema 3.1 no son concluyentes para probar las propiedades de estabilidad del PE (vamos a ver más adelante que el Teorema de invariancia de LaSalle nos va a permitir probar AE usando la función de energía). Partiendo de la función de energía, reemplacemos el término  $(1/2)x_2^2$  por la forma cuadrática general  $(1/2)x^T Px$  y tratemos de elegir los elementos de  $P$  tal que  $V(x)$  sea una función de Lyapunov válida,

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}x^T Px + \left(\frac{g}{l}\right)(1 - \cos x_1) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \left(\frac{g}{l}\right)(1 - \cos x_1). \end{aligned}$$

Para que la forma cuadrática  $x^T Px$  sea definida positiva los elementos de  $P$  deben satisfacer

$$p_{11} > 0; \quad p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0.$$

La derivada  $\dot{V}(x)$  está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \left[ p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \left(\frac{g}{l}\right)\sin x_1 \right] x_2 + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2) \left[ -\left(\frac{g}{l}\right)\sin x_1 - \left(\frac{k}{m}\right)x_2 \right] \\ &= \left(\frac{g}{l}\right)(1 - p_{22})x_2 \sin x_1 - \left(\frac{g}{l}\right)p_{12}x_1 \sin x_1 + \left[ p_{11} - p_{12}\left(\frac{k}{m}\right) \right] x_1 x_2 \\ &\quad + \left[ p_{12} - p_{22}\left(\frac{k}{m}\right) \right] x_2^2 \end{aligned}$$

Ahora queremos elegir  $p_{11}$ ,  $p_{12}$  y  $p_{22}$  para que  $\dot{V}(x)$  sea definida negativa. Como los términos de productos cruzados  $x_2 \sin x_1$  y  $x_1 x_2$  son de signo indefinido, los cancelamos tomando  $p_{22} = 1$  y  $p_{11} = (k/m)p_{12}$ . Con esta elección  $p_{12}$  debe satisfacer

$$0 < p_{12} < \frac{k}{m}$$

para que  $V(x)$  sea definida positiva. Una posible elección es  $p_{12} = 0.5(k/m)$ , y así

$$\dot{V}(x) = -\frac{gk}{2lm}x_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}x_2^2.$$

El término  $x_1 \sin x_1 > 0$  para todo  $x_1 : 0 < |x_1| < \pi$ . Tomando  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| < \pi\}$  tenemos que  $V(x)$  es positiva definida y  $\dot{V}(x)$  es definida negativa en  $D$ . Por el Teorema 3.1 concluimos que el origen es AE.  $\circ$

El ejemplo anterior muestra que las condiciones del Teorema 3.1 son sólo suficientes. Si una dada candidata a función de Lyapunov no alcanza para probar que el PE es AE, esto no significa que no lo sea.

En el Ejemplo 3.4 enfocamos el problema en una forma inversa. Investigamos una expresión propuesta para  $V(x)$  y determinamos sus parámetros de forma que  $V(x)$  fuera definida positiva y  $\dot{V}(x)$  definida negativa. Esta idea es útil para buscar funciones de Lyapunov, y se aprovecha en el procedimiento siguiente.

### 3.1.1 Método del Gradiente Variable

El método del gradiente variable es un método para construir funciones de Lyapunov. Sea  $V(x)$  una función escalar de  $x$  y  $g(x) = (\partial V/\partial x)^T$ . Entonces

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) = g^T(x) f(x)$$

La idea es tratar de encontrar  $g(x)$  tal que sea el gradiente de una función definida positiva  $V(x)$  y tal que  $\dot{V}(x)$  sea definida negativa. Es fácil de probar que  $g(x)$  es el gradiente de una función escalar sí la matriz Jacobiana  $[\partial g/\partial x]$  es simétrica, es decir

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

Bajo esta restricción, elegimos  $g(x)$  tal que  $g^T(x) f(x)$  sea definida negativa. Luego  $V(x)$  se computa mediante la integral

$$V(x) = \int_0^x g^T(y) dy = \int_0^x \sum_{i=1}^n g_i(y) dy_i$$

Como la integral de un gradiente no depende del camino, podemos integrar a lo largo de los ejes:

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0, \dots, 0) dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, y_2, \dots, 0) dy_2 \\ + \dots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, y_n) dy_n$$

**Ejemplo 3.5.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - ax_2 \end{aligned}$$

donde  $a > 0$ ,  $h$  es localmente Lipschitz,  $h(0) = 0$  y además  $yh(y) > 0$  para todo  $y \neq 0$ ,  $y \in (-b, c)$  para ciertas constantes positivas  $b$  y  $c$ . La ecuación del péndulo es un caso particular de este sistema. Queremos elegir un vector de dos componentes  $g(x)$  tal que

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \tag{3.6}$$

$$\dot{V}(x) = g_1(x)x_2 - g_2(x)[h(x_1) + ax_2] < 0, \quad x \neq 0$$

$$V(x) = \int_0^x g^T(y) dy > 0, \quad x \neq 0$$

Probemos con

$$g(x) = \begin{bmatrix} \alpha(x)x_1 + \beta(x)x_2 \\ \gamma(x)x_1 + \delta(x)x_2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

donde las funciones escalares  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  son a determinar.

Empecemos calculando  $\dot{V}(x)$ :

$$\dot{V}(x) = \alpha(x)x_1x_2 + \beta(x)x_2^2 - a\gamma(x)x_1x_2 - a\delta(x)x_2^2 - \delta(x)x_2h(x_1) - \gamma(x)x_1h(x_1)$$

y para cancelar los productos cruzados (que no tienen signo definido) elegimos

$$\alpha(x)x_1 - a\gamma(x)x_1 - \delta(x)h(x_1) = 0 \quad (3.8)$$

de forma que

$$\dot{V}(x) = -[a\delta(x) - \beta(x)]x_2^2 - \gamma(x)x_1h(x_1)$$

Para simplificar elegimos  $\delta(x) = \delta$  constante,  $\gamma(x) = \gamma$  constante, y  $\beta(x) = \beta$  constante, por lo cual  $\alpha$  en (3.8) depende sólo de  $x_1$ . La condición de simetría (3.6) se reduce entonces a  $\beta = \gamma$ . La expresión de  $g(x)$  en (3.7) resulta

$$g(x) = \begin{bmatrix} a\gamma x_1 + \delta h(x_1) + \gamma x_2 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 \end{bmatrix}$$

Integrando obtenemos

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^{x_1} [a\gamma y_1 + \delta h(y_1)] dy_1 + \int_0^{x_2} (\gamma x_1 + \delta y_2) dy_2 \\ &= \frac{1}{2} a\gamma x_1^2 + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy + \gamma x_1 x_2 + \frac{1}{2} \delta x_2^2 \\ &= \frac{1}{2} x^T P x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy \end{aligned}$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} a\gamma & \gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

Elijiendo  $\delta > 0$  y  $0 < \gamma < a\delta$  aseguramos que  $V(x)$  es definida positiva y  $\dot{V}(x)$  es definida negativa. Por ejemplo, tomando  $\gamma = ka\delta$  con  $0 < k < 1$ , obtenemos la función de Lyapunov

$$V(x) = \frac{\delta}{2} x^T \begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy \quad (3.9)$$

que satisface las condiciones (3.3) y (3.4) del Teorema 3.1 en el dominio  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -b < x_1 < c\}$ . Concluimos que el origen es AE.  $\circ$

### 3.1.2 Sobre la Región de Atracción. Estabilidad Asintótica Global

Sea  $\phi(t; x)$  la solución de (3.1) que comienza en  $t = 0$  y supongamos que el origen  $x = 0$  es un PE AE. Definimos como *región (dominio) de atracción (RA)* del PE al conjunto de todos los puntos  $x$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; x) = 0$ . Es en general difícil o imposible encontrar analíticamente la RA. Sin embargo se pueden usar funciones de Lyapunov para estimarla con conjuntos contenidos en la RA. Por la prueba del Teorema 3.1 sabemos que si existe una función de Lyapunov que satisface las condiciones de estabilidad asintótica en un dominio  $D$ , y si  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$  está acotado y contenido en  $D$ , entonces toda trayectoria que comienza en  $\Omega_c$  permanece en  $\Omega_c$  y tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto  $\Omega_c$  es una estima de la RA. Esta estima puede ser conservadora, es decir, puede ser mucho más chica que la RA real.

Queremos saber bajo que condiciones la RA es todo el espacio  $\mathbb{R}^n$ . Esto será así si podemos probar que para todo estado inicial  $x$ , la trayectoria  $\phi(t; x)$  tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ , sin importar cuan grande es  $\|x\|$ . Si un PE AE tiene esta propiedad se dice que es *globalmente AE (GAE)*. Recordando otra vez la prueba del Teorema 3.1 vemos que se puede probar GAE si se puede asegurar que cada punto  $x \in \mathbb{R}^n$  puede incluirse en el interior de un conjunto acotado  $\Omega_c$ . Esto no siempre va a ser posible porque para valores grandes de  $c$  el conjunto  $\Omega_c$  puede no ser acotado. Consideremos por ejemplo la función

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

cuyas superficies de nivel  $V(x) = c$  se ven graficadas en la Figura 3.3.

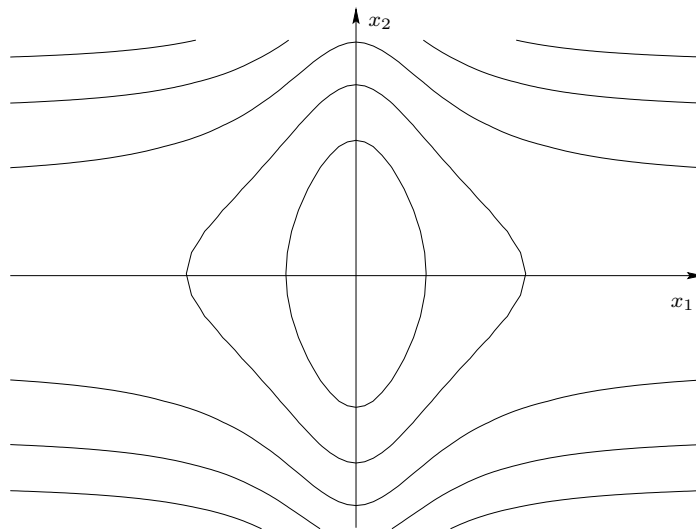


Figura 3.3: Superficies de Lyapunov de  $V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$

Las superficies de nivel son cerradas sólo para valores pequeños de  $c$ . En este caso,  $\Omega_c$  es acotado porque puede incluirse en una bola cerrada  $B_r$  para algún  $r > 0$ . A medida que  $c$  crece, se llega a un valor a partir del cual la superficies de nivel  $V(x) = c$  es abierta y  $\Omega_c$  no es acotado. Para que  $\Omega_c$  esté en el interior de una bola  $B_r$ ,  $c$  debe satisfacer  $c < \inf_{\|x\| \geq r} V(x)$ . Si

$$\ell = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|x\| \geq r} V(x) < \infty$$

entonces  $\Omega_c$  será acotado si  $c < \ell$ . En el ejemplo anterior,

$$\ell = \lim_{r \rightarrow \infty} \min_{\|x\|=r} \left[ \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \right] = \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \frac{x_1^2}{1+x_1^2} = 1$$

Por lo tanto  $\Omega_c$  será acotado sólo para  $c < 1$ . Una condición adicional que asegura que  $\Omega_c$  es acotado para todo valor de  $c$  es

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad \|x\| \rightarrow \infty$$

Una función que satisface esta condición se dice *radialmente no acotada*.

**Teorema 3.2 (Barbashin-Krasovskii).** Sea  $x = 0$  un PE de (3.1). Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \quad \text{y} \quad V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \tag{3.10}$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \implies V(x) \rightarrow \infty \tag{3.11}$$

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \tag{3.12}$$

entonces  $x = 0$  es GAE.

*Demostración.* Dado cualquier punto  $p \in \mathbb{R}^n$ , sea  $c = V(p)$ . La condición (3.11) implica que para cualquier  $c > 0$ , existe  $r > 0$  tal que  $V(x) > c$  cuando  $\|x\| > r$ . Por lo tanto  $\Omega_c \subset B_r$ , lo que implica que  $\Omega_c$  es acotado. El resto de la prueba es similar a la del Teorema 3.1.  $\square$

**Ejemplo 3.6.** Consideremos otra vez el sistema del Ejemplo 3.5, pero supongamos que la condición  $yh(y) > 0$  vale  $\forall y \neq 0$ . La función de Lyapunov (3.9) satisface (3.10) y (3.11) para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Su derivada

$$\dot{V}(x) = -a\delta(1-k)x_2^2 - a\delta k x_1 h(x_1)$$

es definida negativa para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  porque  $0 < k < 1$ . Por lo tanto el origen es AE.  $\circ$

Notemos que si el origen es GAE, entonces debe ser el *único* PE del sistema.

### 3.1.3 Inestabilidad

Vamos a ver un teorema que prueba que un PE es inestable. Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene al origen  $x = 0$ . Supongamos que  $V(0) = 0$  y que hay un punto  $x_0$  arbitrariamente cercano al origen tal que  $V(x_0) > 0$ . Elijamos  $r > 0$  tal que la bola  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$  esté contenida en  $D$ , y sea

$$U = \{x \in B_r \mid V(x) > 0\} \tag{3.13}$$

El conjunto  $U$  es no vacío. Su frontera está dada por la superficie  $V(x) = 0$  y la esfera  $\|x\| = r$ . Como  $V(0) = 0$ , el origen está sobre la frontera de  $U$  en el interior de  $B_r$ .

**Teorema 3.3 (Chetaev).** Sea  $x = 0$  un PE de (3.1). Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que  $V(0) = 0$  y  $V(x_0) > 0$  para algún  $x_0$  con  $\|x_0\|$  arbitrariamente pequeña. Definamos el conjunto  $U$  como en (3.13) y supongamos que  $\dot{V}(x) > 0$  en  $U$ . Entonces  $x = 0$  es inestable.

*Demostración.* El punto  $x_0$  está en el interior de  $U$  y  $V(x_0) = a > 0$ . La trayectoria  $x(t)$  que comienza en  $x(0) = x_0$  debe dejar el conjunto  $U$ . Para probar esto, notemos que mientras  $x(t)$  permanezca en  $U$ ,  $V(x(t)) \geq a$  porque  $\dot{V}(x) > 0$  en  $U$ . Sea

$$\gamma = \min\{\dot{V}(x) \mid x \in U \text{ y } V(x) \geq a\}$$

que existe porque la función continua  $\dot{V}(x)$  tiene un mínimo en el conjunto compacto  $\{x \in U \text{ y } V(x) \geq a\} = \{x \in B_r \mid V(x) \geq a\}$ . Entonces  $\gamma > 0$  y

$$V(x(t)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \geq a + \gamma t$$

Esta desigualdad muestra que  $x(t)$  no se puede quedar indefinidamente en  $U$  porque  $V(x)$  está acotada en  $U$ . Ahora,  $x(t)$  no puede dejar  $U$  a través de la superficie  $V(x) = 0$  porque  $V(x(t)) \geq a$ . Por lo tanto debe dejar  $U$  a través de la esfera  $\|x\| = r$ . Como esto pasa para  $\|x_0\|$  arbitrariamente pequeña, el origen es inestable.  $\square$

**Ejemplo 3.7.** Consideremos el sistema de segundo orden

$$\dot{x}_1 = x_1 + g_1(x)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + g_2(x)$$

donde  $g_1$  y  $g_2$  satisfacen

$$|g_i(x)| \leq k\|x\|_2^2$$

en un entorno  $D$  del origen. Esta desigualdad implica que  $g_i(0) = 0$ , por lo tanto el origen es un PE. Consideremos la función

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

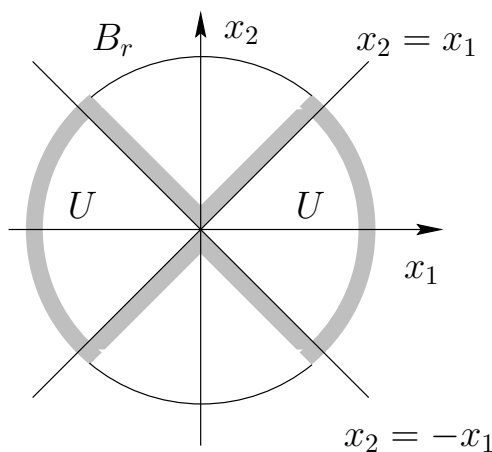


Figura 3.4: El conjunto  $U$  para  $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$

Sobre el eje  $x_2 = 0$ ,  $V(x) > 0$  en puntos arbitrariamente cercanos al origen. El conjunto  $U$  está graficado en la Figura 3.4. La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1g_1(x) - x_2g_2(x)$$

La magnitud del término  $x_1g_1(x) - x_2g_2(x)$  satisface

$$|x_1g_1(x) - x_2g_2(x)| \leq \sum_{i=1}^2 |x_i||g_i(x)| \leq 2k\|x\|_2^3$$

Por lo tanto,

$$\dot{V}(x) \geq \|x\|_2^2 - 2k\|x\|_2^3 = \|x\|_2^2(1 - 2k\|x\|_2)$$

Elijiendo  $r$  tal que  $B_r \subset D$  y  $r < 1/(2k)$ , vemos que todas las condiciones del Teorema 3.3 se satisfacen. Entonces el origen es inestable.  $\circ$

## 3.2 El Principio de Invariancia

En el Ejemplo 3.4 vimos que la función de energía no era suficiente para probar que el origen es AE porque  $\dot{V}(x) = -(k/m)x_2^2$  es sólo semidefinida negativa. Sin embargo  $\dot{V}(x)$  es siempre negativa salvo en el eje  $x_2 = 0$ , donde  $\dot{V}(x) = 0$ . Para que el sistema pueda mantener la condición  $\dot{V}(x) = 0$ , la trayectoria debe quedar confinada al eje  $x_2 = 0$ . Pero esto es imposible a menos que  $x_1 = 0$  porque

$$x_2(t) \equiv 0 \implies \dot{x}_2(t) \equiv 0 \implies \sin x_1(t) \equiv 0$$

Por lo tanto, en el segmento  $-\pi < x_1 < \pi$  del eje  $x_2 = 0$ , el sistema puede mantener la condición  $\dot{V}(x) = 0$  sólo en el origen. Es decir  $V(x(t))$  debe decrecer a cero y en consecuencia  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esta idea puede formalizarse en el principio de invariancia de LaSalle, que vamos a enunciar y demostrar luego de introducir algunos conceptos.

Sea  $x(t)$  una solución de (3.1).

- Un punto  $p$  es un *punto límite positivo* de  $x(t)$  si existe una secuencia  $\{t_n\}$ , con  $t_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , tal que  $x(t_n) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
- El conjunto de todos los puntos límites positivos de  $x(t)$  se denomina el *conjunto límite positivo* de  $x(t)$ .
- Un conjunto  $M$  es un *conjunto invariante* con respecto a (3.1) si

$$x(0) \in M \implies x(t) \in M, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- Un conjunto  $M$  es un *conjunto invariante positivo* si

$$x(0) \in M \implies x(t) \in M, \quad \forall t \geq 0$$

- Decimos que  $x(t)$  tiende a  $M$  cuando  $t$  tiende a infinito si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $T > 0$  tal que

$$\text{dist}(x(t), M) < \epsilon, \quad \forall t > T$$

donde  $\text{dist}(p, M)$  denota la distancia de un punto  $p$  a un conjunto  $M$ , es decir,  $\text{dist}(p, M) = \inf_{x \in M} \|p - x\|$ .



Un PE AE es el conjunto límite positivo de toda solución que comience suficientemente cerca del PE. Un ciclo límite estable es conjunto límite positivo de toda solución que comience suficientemente cerca del ciclo límite. La solución tiende al ciclo límite cuando  $t \rightarrow \infty$  pero no necesariamente a algún punto específico del ciclo límite, es decir el  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  no necesariamente existe. El PE y el ciclo límite son conjuntos invariantes porque toda solución que comience sobre ellos se queda allí para todo  $t \in \mathbb{R}$ . El conjunto  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$  con  $\dot{V}(x) \leq 0$  para todo  $x \in \Omega_c$  es un conjunto invariante positivo.

**Lema 3.4.** Si una solución  $x(t)$  de (3.1) es acotada y permanece en  $D$  para todo  $t \geq 0$ , entonces su conjunto límite positivo  $L^+$  es un conjunto invariante, no vacío y compacto. Además,

$$x(t) \rightarrow L^+ \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

◻

**Teorema 3.5 (LaSalle).** Sea  $\Omega \subset D$  un conjunto compacto que es invariante positivo con respecto a (3.1). Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ . Sea  $E$  el conjunto de todos los puntos de  $\Omega$  donde  $\dot{V}(x) = 0$ . Sea  $M$  el mayor conjunto invariante en  $E$ . Entonces toda solución que comienza en  $\Omega$  tiende a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Sea  $x(t)$  una solución de (3.1) que comienza en  $\Omega$ . Como  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega$ ,  $V(x(t))$  es una función decreciente de  $t$ . Como  $V(x)$  es continua en el conjunto compacto  $\Omega$ , está acotada inferiormente en  $\Omega$ , por lo tanto  $V(x(t))$  tiene un límite  $a$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Notemos también que el conjunto límite positivo  $L^+$  está en  $\Omega$  porque  $\Omega$  es un conjunto cerrado. Para cada  $p \in L^+$ , existe una secuencia  $t_n$  tal que  $t_n \rightarrow \infty$  y  $x(t_n) \rightarrow p$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por continuidad de  $V(x)$ ,  $V(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = a$ , lo que implica  $V(x) = a$  en  $L^+$ . Como  $L^+$  es un conjunto invariante (por Lema 3.4),  $\dot{V}(x) = 0$  en  $L^+$ . Por lo tanto,

$$L^+ \subset M \subset E \subset \Omega$$

Como  $x(t)$  es acotada,  $x(t)$  tiende a  $L^+$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (por Lema 3.4). Por lo tanto  $x(t)$  tiende a  $M$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . ◻

A diferencia del Teorema de Lyapunov, el Teorema 3.5 no requiere que  $V(x)$  sea definida positiva. Tampoco el conjunto  $\Omega$  está necesariamente ligado a la construcción de  $V(x)$ . Sin embargo, en muchas aplicaciones, la construcción de  $V(x)$  en si misma va a garantizar la existencia de un conjunto  $\Omega$ . En particular, si  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$  es acotado y  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\Omega_c$ , entonces podemos tomar  $\Omega = \Omega_c$ . Cuando  $V(x)$  es definida positiva,  $\Omega_c$  es acotado para  $c > 0$  suficientemente pequeño. Esto no es verdad en general si  $V(x)$  no es definida positiva. Por ejemplo si  $V(x) = (x_1 - x_2)^2$ , el conjunto  $\Omega_c$  no es acotado por más pequeño que sea  $c$ . Si  $V(x)$  es radialmente no acotada (o sea, verifica (3.11)), el conjunto  $\Omega_c$  es acotado para todo valor de  $c$ , sea  $V(x)$  definida positiva o no.

Cuando nuestro interés es el de mostrar que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , tenemos que probar que el máximo conjunto invariante en  $E$  es el origen. Esto se hace mostrando que ninguna solución, excepto la trivial  $x(t) = 0$ , puede permanecer idénticamente en  $E$ . Especializando el Teorema 3.5 a este caso, obtenemos los siguientes corolarios, que extienden los Teoremas 3.1 y 3.2.

**Corolario 3.6.** Sea  $x = 0$  un PE de (3.1). Sea  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable y definida positiva en un dominio  $D$  que contiene al origen  $x = 0$ , y tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $D$ . Sea  $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y supongamos que ninguna solución, excepto la trivial  $x(t) = 0$ , puede permanecer idénticamente en  $S$ . Entonces el origen es AE. ◻

**Corolario 3.7.** Sea  $x = 0$  un PE de (3.1). Sea  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable, radialmente no acotada y definida positiva, y tal que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$  y supongamos que ninguna solución, excepto la trivial  $x(t) = 0$ , puede permanecer idénticamente en  $S$ . Entonces el origen es GAE.  $\circ$

**Ejemplo 3.8.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) - h(x_2)\end{aligned}$$

donde  $g$  y  $h$  son localmente Lipschitz y satisfacen

$$\begin{aligned}g(0) &= 0, & yg(y) &> 0, & \forall y \neq 0, y \in (-a, a) \\ h(0) &= 0, & yh(y) &> 0, & \forall y \neq 0, y \in (-a, a)\end{aligned}$$

El sistema tiene un PE aislado en el origen. Dependiendo de las funciones  $g$  y  $h$ , podría tener otros PE. La ecuación de este sistema puede verse como una generalización de la del péndulo con  $h(x_2)$  como el término de fricción. Tomemos como candidata a función de Lyapunov la función de energía

$$V(x) = \int_0^{x_1} g(y)dy + \frac{1}{2}x_2^2 \quad (3.14)$$

Sea  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -a < x_i < a\}$ .  $V(x)$  es definida positiva en  $D$ . La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(x) = g(x_1)x_2 + x_2[-g(x_1) - h(x_2)] = -x_2h(x_2) \leq 0$$

Por lo tanto,  $\dot{V}(x)$  es semidefinida negativa. Para caracterizar el conjunto  $S = \{x \in D \mid \dot{V}(x) = 0\}$ , notemos que

$$\dot{V}(x) = 0 \implies x_2h(x_2) = 0 \implies x_2 = 0, \text{ ya que } -a < x_2 < a$$

Por lo tanto  $S = \{x \in D \mid x_2 = 0\}$ . Supongamos que  $x(t)$  es una trayectoria que pertenece idénticamente a  $S$ . Entonces

$$x_2(t) \equiv 0 \implies \dot{x}_2(t) \equiv 0 \implies g(x_1(t)) \equiv 0 \implies x_1(t) \equiv 0$$

Por lo tanto, la única solución que puede quedarse idénticamente en  $S$  es la trivial; concluimos que el origen es AE.

Supongamos ahora que el parámetro  $a = \infty$  y además  $g$  satisface la condición adicional

$$\int_0^y g(z)dz \rightarrow \infty \text{ cuando } |y| \rightarrow \infty$$

La función de Lyapunov (3.14) es radialmente no acotada. En forma similar a lo hecho arriba se puede probar que  $\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\mathbb{R}^2$ , y el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{V}(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$$

contiene ninguna otra solución salvo la trivial. Concluimos que en este caso el origen es GAE.  $\circ$

El teorema de LaSalle no sólo relaja el requisito del teorema de Lyapunov de que la derivada sea definida negativa, sino que lo extiende en tres direcciones:

- da una estima de la región de atracción que no es necesariamente de la forma  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$ ;
- se puede usar en casos donde exista un conjunto de equilibrio en lugar de un PE aislado;
- la función  $V(x)$  no tiene que ser definida positiva.

**Ejemplo 3.9.** Consideremos el sistema de primer orden (cf. §1.2.5)

$$\dot{y} = ay + u$$

y la ley de control adaptable

$$u = -ky, \quad \dot{k} = \gamma y^2, \quad \gamma > 0$$

Tomando  $x_1 = y$  y  $x_2 = k$ , el sistema a lazo cerrado se representa como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 - a)x_1 \\ \dot{x}_2 &= \gamma x_1^2 \end{aligned}$$

El eje  $x_1 = 0$  es un conjunto de equilibrio del sistema. Queremos probar que toda trayectoria del sistema tiende a este conjunto de equilibrio cuando  $t \rightarrow \infty$ , lo que significa que el control adaptable logra regular  $y$  a cero. Consideremos la candidata a función de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2$$

donde  $b > a$ . La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{\gamma}(x_2 - b)\dot{x}_2 \\ &= -x_1^2(x_2 - a) + x_1^2(x_2 - b) \\ &= -x_1^2(b - a) \leq 0 \end{aligned}$$

Como  $V(x)$  es radialmente no acotada, el conjunto  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) \leq c\}$  es un conjunto invariante positivo compacto. Por lo tanto, tomando  $\Omega = \Omega_c$  se cumplen todas las condiciones del Teorema 3.5. El conjunto  $E$  está dado por

$$E = \{x \in \Omega_c \mid x_1 = 0\}$$

Como todo punto en el eje  $x_1 = 0$  es un PE,  $E$  es un conjunto invariante. Por lo tanto, en este ejemplo,  $M = E$ . Por el Teorema 3.5 concluimos que toda trayectoria que comienza en  $\Omega_c$  tiende a  $E$  cuando  $t \rightarrow \infty$ ; es decir,  $x_1 \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . más aún, como  $V(x)$  es radialmente no acotada, esta conclusión es global.  $\circ$

Notemos que si no conocemos la constante  $a$ , o una cota de ella, la función de Lyapunov del ejemplo anterior no se conoce, sólo se sabe que existe.

### 3.3 Región de Atracción

Sea el origen  $x = 0$  un PE AE del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) \quad (3.15)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es localmente Lipschitz y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene el origen. Sea  $\phi(t; x)$  la solución de (3.15) con estado inicial  $x$  en  $t = 0$ . La región de atracción (RA) del origen,  $R_A$ , se define como

$$R_A = \{x \in D \mid \phi(t; x) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}$$

El siguiente Lema enuncia algunas propiedades de la RA.

**Lema 3.8.** Si  $x = 0$  es un PE AE de (3.15), entonces su RA  $R_A$  es un conjunto conexo e invariante. más aún, la frontera de  $R_A$  está formada por trayectorias.  $\circ$

**Ejemplo 3.10.** El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 - 1)x_2 \end{aligned}$$

es la ecuación de Van der Pol en tiempo invertido, es decir, reemplazando  $t$  por  $-t$ . El sistema tiene un PE en el origen y un ciclo límite (CL) inestable (ver Figura 3.5). El retrato de fase

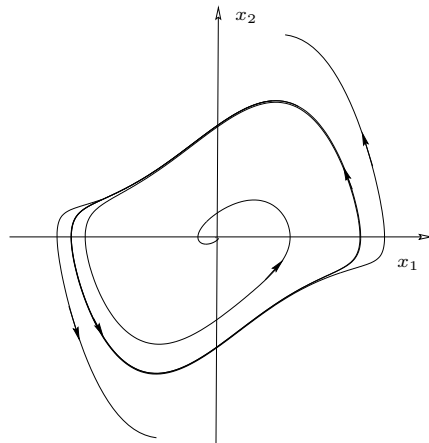


Figura 3.5: Retrato de fase para el Ejemplo 3.10

muestra que el origen es un foco estable, por lo tanto es AE. Esto se confirma linealizando, ya que obtenemos

$$A = \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

que tiene autovalores en  $-1/2 \pm j\sqrt{3}/2$ . La RA es acotada porque las trayectorias que comienzan afuera del CL no lo pueden cruzar para llegar al origen. Como no hay otro PE, la frontera de  $R_A$  tiene que ser el CL.  $\circ$

**Ejemplo 3.11.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

que tiene tres PE aislados en  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, 0)$  y  $(-\sqrt{3}, 0)$ . El retrato de fase, graficado en la Figura 3.6, muestra que el origen es un foco estable y los otros dos PE son ensilladuras. Por lo tanto, el origen es AE y los otros PE son inestables, lo que se puede confirmar linealizando. De la figura se puede ver que las trayectorias estables de la ensilladura forman dos *separatrices* que son la frontera de la RA, la cual es no acotada.  $\circ$

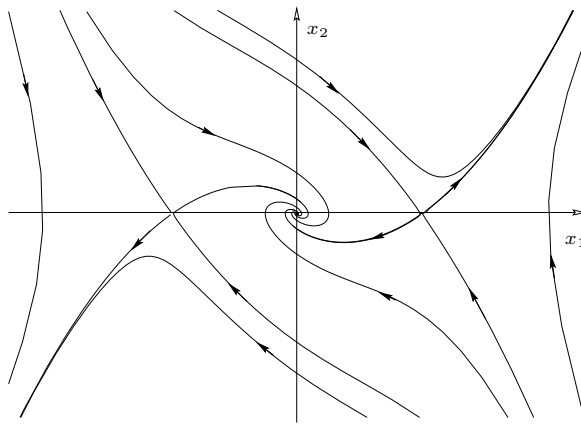


Figura 3.6: Retrato de fase para el Ejemplo 3.11

**Ejemplo 3.12.** El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

tiene un PE aislado en el origen y un continuo de PEs sobre el círculo unitario: cada punto sobre el círculo unitario es un PE. Es claro que  $R_A$  debe estar confinada al interior del círculo unitario. Las trayectorias de este sistemas son los radios del círculo unitario, lo que se puede ver transformando a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \theta, & x_2 &= \rho \sen \theta \\ \dot{\rho} &= -\rho(1 - \rho^2) \end{aligned}$$

Toda trayectoria que comienza con  $\rho < 1$  tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto,  $R_A$  es el interior del círculo unitario.  $\circ$

El método de Lyapunov puede usarse para encontrar estimas de la RA. Por una estima de la RA entendemos un conjunto  $\Omega \subset R_A$  tal que toda trayectoria que comienza en  $\Omega$  tienda al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Vamos primero a mostrar que el dominio  $D$  del Teorema 3.1 no es una estima de  $R_A$ . Vimos en el Teorema 3.1 que si  $D$  es un dominio que contiene el origen, y si podemos encontrar una función de Lyapunov  $V(x)$  que es definida positiva en  $D$  y  $\dot{V}(x)$  es definida negativa en  $D$ , entonces el origen es AE. Se podría pensar que  $D$  es una estima de la RA. Esto no es cierto, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.13.** Consideremos otra vez el sistema (3.17), que es un caso especial del sistema del Ejemplo 3.5 con  $h(x_1) = x_1 - \frac{1}{3}x_1^3$  y  $a = 1$ . Por lo tanto, una función de Lyapunov es (3.9), donde tomamos, por ejemplo,  $\delta = 1$ ,  $k = 1/2$ :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}x^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x + \int_0^{x_1} (y - \frac{1}{3}y^3) dy \\ &= \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{12}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \end{aligned}$$

Definiendo el dominio  $D$  como

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{3} < x_1 < \sqrt{3}\}$$

vemos que  $V(x) > 0$  en  $D$  y  $\dot{V}(x) < 0$  en  $D - \{0\}$ . Sin embargo, se puede ver en el retrato de fase de la Figura 3.6 que  $D$  no está incluido en  $R_A$ .  $\circ$

El ejemplo anterior muestra que el hecho de que  $\dot{V}(x) < 0$  en una región no implica que la región sea una estima de la RA. Aunque una trayectoria que comienza en  $D$  se va a mover de una superficie de nivel  $V(x) = c_1$  a otra interior  $V(x) = c_2$  con  $c_2 < c_1$ , no hay garantía de que la trayectoria permanecerá para siempre en  $D$ . Una vez que la trayectoria sale de  $D$ , no hay garantía de que  $\dot{V}(x)$  sea negativa. Para que una región sea una estima de la RA debe ser un conjunto invariante positivo, es decir, toda trayectoria que comienza en el conjunto debe permanecer dentro de él en todo tiempo futuro. La estima más simple de la RA es el conjunto

$$\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$$

cuando  $\Omega_c$  es acotado y está contenido en  $D$ . Esto sigue como corolario del Teorema 3.5.

Usando los resultados de linealización de §3.4, sabemos que si la matriz Jacobiana

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0}$$

es Hurwitz, entonces siempre podemos encontrar una función de Lyapunov cuadrática  $V(x) = x^T P x$  resolviendo la ecuación de Lyapunov (3.20). Entonces, si  $A$  es Hurwitz, *podemos siempre estimar la RA del origen*. Esto lo ilustramos en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.14.** Consideremos nuevamente el sistema del Ejemplo 3.10. Vimos que el origen es AE. Tomando  $Q = I$  y  $A$  de (3.16), obtenemos como única solución de la ecuación de Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$ , la matriz definida positiva

$$P = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

La función cuadrática  $V(x) = x^T P x > 0$  es una función de Lyapunov para el sistema en un entorno del origen. Tenemos que determinar un dominio  $D$  alrededor del origen donde  $\dot{V}(x)$  sea definida negativa y un conjunto  $\Omega_c \subset D$  que sea acotado. Nos va a interesar encontrar  $\Omega_c$  lo más grande posible, es decir, el mayor valor para la constante  $c$ , porque  $\Omega_c$  será nuestra estima de la RA.

La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema es

$$\dot{V}(x) = -(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^3 x_2 - 2x_1^2 x_2^2)$$

El primer término del lado derecho es la contribución de la parte lineal  $Ax$ , mientras que el segundo es la contribución de la parte no lineal  $g(x) = f(x) - Ax$ , que llamaremos el término de perturbación. Como

$$\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \|x\|_2 \rightarrow 0$$

sabemos que hay una bola abierta  $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < r\}$  en donde  $\dot{V}(x)$  es definida negativa. Una vez que encontremos  $D$ , podemos encontrar  $\Omega_c \subset D$  eligiendo

$$c < \min_{\|x\|_2=r} V(x) = \lambda_{\min}(P)r^2$$

donde  $\lambda_{\min}(\cdot)$  denota el mínimo autovalor de una matriz. Por lo tanto, para agrandar la RA tenemos que encontrar la bola más grande para la cual  $\dot{V}(x)$  es definida negativa. Tenemos que

$$\dot{V}(x) \leq -\|x\|_2^2 + |x_1||x_1x_2||x_1 - 2x_2| \leq -\|x\|_2^2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\|x\|_2^4$$

donde usamos  $|x_1| \leq \|x\|_2$ ,  $|x_1x_2| \leq \frac{1}{2}\|x\|_2^2$  y  $|x_1 - 2x_2| \leq \sqrt{5}\|x\|_2$ . Por lo tanto,  $\dot{V}(x)$  es definida negativa en la bola  $D$  con radio dado por  $r^2 = 2/\sqrt{5} = 0.8944$ . En este ejemplo se puede encontrar una estima menos conservadora trabajando en coordenadas polares. Tomando

$$x_1 = \rho \cos \theta, \quad x_2 = \rho \sin \theta$$

tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\rho^2 + \rho^4 \cos^2 \theta \sin \theta (2 \sin \theta - \cos \theta) \\ &\leq -\rho^2 + \rho^4 |\cos^2 \theta \sin \theta| |2 \sin \theta - \cos \theta| \\ &\leq -\rho^2 + \rho^4 \times 0.3849 \times 2.2361 \\ &\leq -\rho^2 + 0.861\rho^4 < 0, \quad \text{para} \quad \rho^2 < 1/0.861 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Usando (3.18) junto con  $\lambda_{\min}(P) \geq 0.69$ , elegimos

$$c = 0.8 < \frac{0.69}{0.861}$$

El conjunto  $\Omega_c$  con  $c = 0.8$  es una estima de la RA. ◦

### 3.4 Sistemas Lineales y Linealización

El sistema lineal invariante

$$\dot{x} = Ax \tag{3.19}$$

tiene un equilibrio en el origen, que es aislado sí  $\det A \neq 0$ . Si  $\det A = 0$ , todo punto en el kernel o subespacio nulo de  $A$  es un PE. Un sistema lineal no puede tener múltiples PE aislados, porque si  $\bar{x}$  y  $\bar{z}$  son dos PE de (3.19), entonces, por linealidad, todo punto en la recta que conecta a  $\bar{x}$  y  $\bar{z}$  es un PE. Las propiedades de estabilidad del origen pueden caracterizarse mediante la ubicación de los autovalores de  $A$ .

**Teorema 3.9 (Estabilidad del Origen en Sistemas Lineales).** El PE  $x = 0$  de (3.19) es estable sí todos los autovalores de  $A$  tienen parte real no positiva y cada autovalor con parte real nula tiene un bloque de Jordan asociado de orden 1. El PE  $x = 0$  es GAE sí todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa.  $\circ$

Cuando todos los los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa, se dice que  $A$  es una *matriz de estabilidad* o *matriz Hurwitz*. La estabilidad del origen puede también investigarse usando el método de Lyapunov. Consideremos la candidata a función de Lyapunov

$$V(x) = x^T P x$$

donde  $P$  es una matriz real simétrica definida positiva. La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T (PA + A^T P)x = -x^T Q x$$

donde  $Q$  es una matriz simétrica definida por

$$PA + A^T P = -Q \tag{3.20}$$

Si  $Q$  es definida positiva, podemos concluir por el Teorema 3.1 que el origen es AE. En el caso de sistemas lineales, es posible revertir los pasos del método de Lyapunov. Supongamos que comenzamos eligiendo  $Q$  como una matriz real simétrica definida positiva, y resolvemos (3.20) para encontrar  $P$ . Si (3.20) tiene una solución definida positiva, podemos nuevamente concluir que el origen es AE. La ecuación (3.20) se denomina *ecuación de Lyapunov*.

**Teorema 3.10.** Una matriz  $A$  es Hurwitz, o sea, todos sus autovalores tienen parte real negativa, sí dada una matriz  $Q$  simétrica y definida positiva, existe una matriz  $P$  simétrica y definida positiva que satisface la ecuación de Lyapunov (3.20). Más aún, si  $A$  es Hurwitz, entonces  $P$  es la única solución de (3.20).

*Demostración.* La suficiencia sigue del Teorema 3.1 con la función de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ , como ya mostramos. Para probar la necesidad, supongamos que todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa y consideremos la siguiente matriz  $P$

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt \tag{3.21}$$

El integrando es una suma de términos de la forma  $t^{k-1} e^{\lambda_i t}$  con  $\text{Re } \lambda_i < 0$ . Por lo tanto, la integral existe. La matriz  $P$  es simétrica. Para probar que es definida positiva, suponemos lo contrario, es decir, que existe un vector  $x \neq 0$  tal que  $x^T P x = 0$ . Sin embargo,

$$\begin{aligned} x^T P x = 0 &\implies \int_0^{\infty} x^T e^{A^T t} Q e^{A t} x dt = 0 \\ &\implies e^{A t} x \equiv 0, \forall t \geq 0 \implies x = 0 \end{aligned}$$

porque  $e^{A t}$  es no-singular para todo  $t$ . Esta contradicción muestra que  $P$  es definida positiva. Sustituyendo (3.21) en (3.20) se obtiene

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} A dt + \int_0^{\infty} A^T e^{A^T t} Q e^{A t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} e^{A^T t} Q e^{A t} \\ &= e^{A^T t} Q e^{A t} \Big|_0^{\infty} = -Q \end{aligned}$$



lo que muestra que  $P$  es una solución de (3.20). Para mostrar que es la única solución, supongamos que existe otra solución  $\bar{P} \neq P$ . Entonces,

$$(P - \bar{P})A + A^T(P - \bar{P}) = 0$$

Pre-multiplicando por  $e^{A^T t}$  y post-multiplicando por  $e^{At}$ , obtenemos

$$0 = \frac{d}{dt} e^{A^T t} (P - \bar{P}) e^{At}$$

Por lo tanto,

$$e^{A^T t} (P - \bar{P}) e^{At} \equiv \text{constante} \forall t$$

Evaluando en  $t = 0$  y  $t = \infty$  obtenemos  $\bar{P} = P$ . □

La resolución de la ecuación de Lyapunov (3.20) no es numéricamente más ventajosa que calcular los autovalores de  $A$ . La ventaja de este método es que nos provee de una función de Lyapunov cuando  $A$  es Hurwitz. Esto nos va a servir para sacar conclusiones sobre el sistema cuando el lado derecho  $Ax$  esté perturbado.

Volvamos al sistema no lineal (3.1)

$$\dot{x} = f(x)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continuamente diferenciable desde un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Supongamos que el origen  $x = 0$  está en el interior de  $D$  y es un PE del sistema; es decir  $f(0) = 0$ . Por el teorema del valor medio

$$f_i(x) = f_i(0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x \tag{3.22}$$

donde  $z_i$  es un punto sobre el segmento de línea que conecta  $x$  al origen. La igualdad (3.22) vale para todo punto  $x \in D$  tal que el segmento de línea que conecta  $x$  al origen esté totalmente contenido en  $D$ . Como  $f(0) = 0$ , podemos escribir  $f_i(x)$  como

$$f_i(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(0)x + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x$$

Por lo tanto

$$f(x) = Ax + g(x)$$

donde

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad g_i(x) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right] x$$

La función  $g_i(x)$  satisface

$$|g_i(x)| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(0) \right\| \|x\|$$

Por continuidad de  $\partial f / \partial x$  vemos que

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \|x\| \rightarrow 0$$

Esto sugiere que en un entorno pequeño del origen podemos aproximar al sistema no lineal (3.1) por su linealización alrededor del origen

$$\dot{x} = Ax \quad \text{donde} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$$

El siguiente teorema, conocido como el *método indirecto de Lyapunov*, da condiciones para determinar la estabilidad del origen del sistema no lineal, a través del estudio de la estabilidad del sistema linealizado.

**Teorema 3.11 (Método Indirecto de Lyapunov).** Sea  $x = 0$  un PE del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x)$$

donde  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continuamente diferenciable y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un entorno del origen. Sea

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0}$$

Entonces

- (i) El origen es AE si todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa.
- (ii) El origen es inestable si uno o más autovalores de  $A$  tiene parte real positiva.

*Demostración.* Para probar la primera parte, asumamos que  $A$  es Hurwitz. Por el Teorema 3.10 sabemos que dada cualquier  $Q > 0$  simétrica, la solución  $P$  de (3.20) es definida positiva. Usamos

$$V(x) = x^T P x$$

como candidata a función de Lyapunov para el sistema no lineal. La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T P f(x) + [f(x)]^T P x \\ &= x^T P [Ax + g(x)] + [x^T A^T + g^T(x)] P x \\ &= x^T (PA + A^T P)x + 2x^T P g(x) \\ &= -x^T Q x + 2x^T P g(x) \end{aligned}$$

El primer término en el lado derecho es definido negativo, mientras que el segundo es, en general, indefinido. La función  $g(x)$  satisface

$$\frac{\|g(x)\|_2}{\|x\|_2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \|x\|_2 \rightarrow 0$$

Por lo tanto, dado  $\gamma > 0$  existe  $r > 0$  tal que

$$\|g(x)\|_2 < \gamma \|x\|_2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

Entonces

$$\dot{V}(x) < -x^T Q x + 2\gamma \|P\|_2 \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

pero

$$x^T Q x \geq \lambda_{\min}(Q) \|x\|_2^2$$

Notar que  $\lambda_{\min}(Q)$  es real y positivo porque  $Q$  es simétrica y definida positiva. Por lo tanto

$$\dot{V}(x) < -[\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma\|P\|_2] \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < r$$

Eligiendo  $\gamma < \lambda_{\min}(Q)/(2\|P\|_2)$  aseguramos que  $\dot{V}(x)$  es negativa definida. Por el Teorema 3.1, el origen es AE.

Para probar la segunda parte, consideremos primero el caso en que  $A$  no tiene autovalores en el eje imaginario, es decir  $A$  tiene un grupo de autovalores en el semiplano derecho abierto y otro grupo en el semiplano izquierdo abierto. Entonces existe una matriz no singular  $T$  tal que

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son matrices Hurwitz. Sea

$$z = Tx = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

donde la partición de  $z$  es compatible con las dimensiones de  $A_1$  y  $A_2$ . El cambio de variables  $z = Tx$  transforma el sistema original

$$\dot{x} = f(x) = Ax + g(x)$$

a la forma

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -A_1 z_1 + g_1(z) \\ \dot{z}_2 &= -A_2 z_2 + g_2(z) \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde las funciones  $g_i(z)$  tienen la propiedad de que para todo  $\gamma > 0$  existe  $r > 0$  tal que

$$\|g_i(z)\|_2 < \gamma \|z\|_2, \quad \forall \|z\|_2 \leq r, \quad i = 1, 2 \tag{3.24}$$

El origen  $z = 0$  es un PE para el sistema en las coordenadas  $z$ . Notemos que toda propiedad de estabilidad de  $z = 0$  se aplica directamente al PE  $x = 0$  en las coordenadas originales ya que  $T$  es no singular. Para mostrar que el origen es inestable, vamos a usar el Teorema 3.3. La función  $V(z)$  del teorema se va a construir como en el Ejemplo 3.7, sólo que ahora trabajamos con vectores en lugar de escalares. Sean  $Q_1$  y  $Q_2$  matrices simétricas, definidas positivas, con las mismas dimensiones que  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente. Como  $A_1$  y  $A_2$  son Hurwitz, sabemos por el Teorema 3.10 que las ecuaciones de Lyapunov

$$P_i A_i + A_i^T P_i^T = -Q_i, \quad i = 1, 2 \tag{3.25}$$

tienen soluciones únicas definidas positivas  $P_1$  y  $P_2$ . Sea

$$V(z) = z_1^T P_1 z_1 - z_2^T P_2 z_2 = z^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} z$$

En el subespacio  $z_2 = 0$ ,  $V(z) > 0$  en puntos arbitrariamente cercanos al origen. Sea

$$U = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\|_2 \leq r \text{ y } V(z) > 0\}$$

En  $U$ , usando (3.23), (3.24) y (3.25), tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -z_1^T(P_1A_1 + A_1^TP_1)z_1 + 2z_1^TP_1g_1(z) - z_2^T(P_2A_2 + A_2^TP_2)z_2 - 2z_2^TP_2g_2(z) \\ &= z_1^TQ_1z_1 + z_2^TQ_2z_2 + 2z^T \begin{bmatrix} P_1g_1(z) \\ -P_2g_2(z) \end{bmatrix} \\ &\geq \lambda_{\min}(Q_1)\|z_1\|_2^2 + \lambda_{\min}(Q_2)\|z_2\|_2^2 - 2\|z\|_2\sqrt{\|P_1\|_2^2\|g_1(z)\|_2^2 + \|P_2\|_2^2\|g_2(z)\|_2^2} \\ &> (\alpha - 2\sqrt{2}\beta\gamma)\|z\|_2^2 \end{aligned}$$

donde  $\alpha = \min\{\lambda_{\min}(Q_1), \lambda_{\min}(Q_2)\}$  y  $\beta = \max\{\|P_1\|_2, \|P_2\|_2\}$ . Eligiendo  $\gamma < \alpha/(2\sqrt{2}\beta)$  nos aseguramos que  $\dot{V} > 0$  en  $U$ . Por lo tanto, el origen es inestable por el Teorema 3.3.

Notar que definiendo las matrices

$$P = T^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} T, \quad Q = T^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} T$$

que satisfacen la ecuación

$$PA + A^TP = Q > 0$$

se puede probar el resultado aplicando el Teorema 3.3 en las coordenadas originales, usando el hecho de que la función  $V(x) = x^TPx$  es positiva en puntos arbitrariamente cercanos al origen.

Supongamos ahora que  $A$  tiene además autovalores sobre el eje imaginario. El truco para tratar este caso es trasladar el eje imaginario. Supongamos que todos los autovalores de  $A$  en el semiplano derecho abierto tienen parte real mayor que  $\delta > 0$ . Entonces la matriz  $A - (\delta/2)I$  tiene el mismo número que  $A$  de autovalores en el semiplano derecho abierto, y ningún autovalor sobre el eje imaginario. Usando argumentos similares a los utilizados recién podemos calcular matrices  $P = P^T$  y  $Q = Q^T > 0$  tales que

$$P[A - (\delta/2)I] + [A - (\delta/2)I]^TP = Q$$

y además  $V(x) = x^TPx$  es positiva en puntos arbitrariamente cercanos al origen. La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T(PA + A^TP)x + 2x^TPg(x) \\ &= x^T[P[A - (\delta/2)I] + [A - (\delta/2)I]^TP]x + \delta x^TPx + 2x^TPg(x) \\ &= x^TQx + \delta V(x) + 2x^TPg(x) \end{aligned}$$

En el conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq r \text{ y } V(x) > 0\}$$

donde  $r$  se elige tal que  $\|g(x)\|_2 < \gamma\|x\|_2$ ,  $\forall \|x\|_2 \leq r$ ,  $\dot{V}(x)$  satisface

$$\dot{V}(x) \geq \lambda_{\min}(Q)\|x\|_2^2 - 2\|P\|_2\|x\|_2\|g(x)\|_2 \geq (\lambda_{\min}(Q) - 2\gamma\|P\|_2)\|x\|_2^2$$

que es positiva para  $\gamma < \lambda_{\min}(Q)/(2\|P\|_2)$ . Aplicando el Teorema 3.3, concluimos que el origen es inestable.  $\square$

**Ejemplo 3.15.** Consideremos el sistema escalar

$$\dot{x} = ax^3$$

Linealizando alrededor del origen obtenemos

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} = 3ax^2 \Big|_{x=0} = 0$$

El autovalor está sobre el eje imaginario, por lo que no podemos decir nada acerca de la estabilidad del origen como PE del sistema no lineal usando el sistema linealizado. Esta conclusión es genuina ya que el origen puede ser AE, estable o inestable dependiendo del valor del parámetro  $a$ . Si  $a < 0$ , el origen es AE como puede probarse usando la función de Lyapunov  $V(x) = x^4$ . Si  $a = 0$ , el sistema es lineal y el origen es estable. Si  $a > 0$ , el origen es inestable, como puede concluirse usando el Teorema 3.3 y la función  $V(x) = x^4$ , cuya derivada sobre las trayectorias del sistema es  $\dot{V}(x) = 4ax^6 > 0$  si  $a > 0$ .  $\circ$

## 3.5 Ejercicios

### Ejercicio 3.1

Sea el sistema escalar  $\dot{x} = ax^p + g(x)$ , donde  $p$  es un entero positivo y  $g(x)$  satisface  $|g(x)| \leq k|x|^{p+1}$  en algún entorno del origen  $x = 0$ .

- (i) Mostrar que el origen es AS si  $p$  es impar y  $a < 0$ .
- (ii) Mostrar que el origen es inestable si  $p$  es impar y  $a > 0$  o  $p$  es par y  $a \neq 0$ .

### Ejercicio 3.2

Para cada uno de los siguientes sistemas usar una candidata a función de Lyapunov cuadrática para mostrar que el origen es AS. Luego investigar si el origen es GAE.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned} \tag{a}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 &= (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{aligned} \tag{b}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned} \tag{c}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2^3 \end{aligned} \tag{d}$$

### Ejercicio 3.3

Usando  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  estudiar la estabilidad del origen del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1(k^2 - x_1^2 - x_2^2) + x_2(x_1^2 + x_2^2 + k^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1(k^2 + x_1^2 + x_2^2) + x_2(k^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

- (i) Cuando  $k = 0$ .
- (ii) Cuando  $k \neq 0$ .

### Ejercicio 3.4

Usando el método del gradiente variable, encontrar una función de Lyapunov  $V(x)$  para mostrar estabilidad asintótica del origen del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(x_1 + x_2) - \operatorname{sen}(x_1 + x_2).\end{aligned}$$

### Ejercicio 3.5

Sea  $V(x) = x_1^2/(1 + x_1^2) + x_2^2$  y sea el sistema de segundo orden

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{6x_1}{(1 + x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{2(x_1 + x_2)}{(1 + x_1^2)^2}\end{aligned}$$

- (i) Mostrar que  $V(x) > 0$  y  $\dot{V}(x) < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ .
- (ii) Sea la hipérbola  $x_2 = 2/(x_1 - \sqrt{2})$ . Mostrar, investigando el campo vectorial sobre la frontera de esta hipérbola, que las trayectorias a la derecha de la rama en el primer cuadrante no pueden cruzar esa rama.
- (iii) Mostrar que el origen no es globalmente asintóticamente estable.

**Ayuda:** En la parte (ii) mostrar que  $\dot{x}_2/\dot{x}_1 = -1/(1 + 2\sqrt{2}x_1 + 2x_1^2)$  sobre la hipérbola, y comparar con la pendiente de las tangentes a la hipérbola.

### Ejercicio 3.6

Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - \operatorname{sat}(2x_1 + x_2).\end{aligned}$$

- (i) Mostrar que el origen es asintóticamente estable.
- (ii) Mostrar que todas las trayectorias que comienzan a la derecha de la curva  $x_1x_2 = c$  (con  $c > 0$  suficientemente grande) no pueden alcanzar el origen.
- (iii) Mostrar que el origen no es GAE.

**Ayuda:** En la parte (ii) considerar  $V(x) = x_1x_2$ ; calcular  $\dot{V}(x)$  y mostrar que sobre la curva  $V(x) = c$  la derivada  $\dot{V}(x) > 0$  cuando  $c$  es suficientemente grande.

**Ejercicio 3.7**

**Método de Krasovskii.** Sea el sistema  $\dot{x} = f(x)$  con  $f(0) = 0$ , con  $f(x)$  continuamente diferenciable y tal que el Jacobiano  $[\partial f/\partial x]$  satisface

$$P \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right] + \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right]^T P \leq -I, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{donde } P = P^T > 0.$$

(i) Usando la representación  $f(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma x) x d\sigma$ , mostrar que

$$x^T P f(x) + f^T(x) P x \leq -x^T x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Mostrar que  $V(x) = f^T(x) P f(x)$  es definida positiva para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(iii) Mostrar que  $V(x)$  es radialmente no acotada.

(iv) Usando  $V(x)$  como candidata a función de Lyapunov, mostrar que el origen es GAE.

**Ejercicio 3.8**

Mostrar que el origen del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^6 \\ \dot{x}_2 &= x_2^3 + x_1^6 \end{aligned}$$

es inestable.

**Ejercicio 3.9**

Mostrar que el origen del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^6 - x_2^3 \end{aligned}$$

es inestable.

**Ayuda:** Mostrar que el conjunto  $\Gamma = \{0 \leq x_1 \leq 1\} \cap \{x_2 \geq x_1^3\} \cap \{x_2 \leq x_1^2\}$  es no vacío y positivamente invariante. Luego investigar el comportamiento de las trayectorias dentro de  $\Gamma$ .

**Ejercicio 3.10**

Dado el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 \text{sat}(x_2^2 - x_3^2) \\ \dot{x}_3 &= x_3 \text{sat}(x_2^2 - x_3^2) \end{aligned}$$

donde  $\text{sat}(\cdot)$  es la función saturación, mostrar que el origen es el único PE y usar  $V(x) = x^T x$  para mostrar que es GAE.

**Ejercicio 3.11**

Para el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (x_1x_2 - 1)x_1^3 + (x_1x_2 - 1 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

- (i) Mostrar que  $x = 0$  es el único punto de equilibrio.
- (ii) Mostrar, por linealización, que  $x = 0$  es AE.
- (iii) Mostrar que  $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1x_2 \geq 2\}$  es positivamente invariante en el primer cuadrante.
- (iv) ¿Es el equilibrio GAE? Justificar la respuesta.

**Ejercicio 3.12**

Mostrar que el origen de

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1^3 - x_2\end{aligned}$$

es AE y estimar la región de atracción.

**Ejercicio 3.13**

Para cada uno de los siguientes sistemas usar linealización para mostrar que el origen es AE. Luego mostrar que el origen es GAE.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= (x_1 + x_2) \operatorname{sen} x_1 - 3x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -ax_1 - bx_2, \end{cases} \quad a, b > 0.$$

**Ejercicio 3.14**

Mostrar que el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_1(3 - x_1x_2)\end{aligned}$$

tiene un equilibrio GAE.

**Ayuda:** Encuentre el equilibrio y haga un cambio de coordenadas  $(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2)$  para correrlo al origen. Luego use una función de la forma

$$V(y_1, y_2) = k_1 \frac{y_1^2}{2} + k_2 \frac{y_2^2}{2} + k_3 \frac{y_1^4}{4}$$

para mostrar que el origen es GAE en las coordenadas  $(y_1, y_2)$ .



# Capítulo 4

## Estabilidad Según Lyapunov. Sistemas Inestacionarios

Este capítulo extiende el método de Lyapunov a sistemas no lineales inestacionarios. Definimos los conceptos de estabilidad uniforme, estabilidad asintótica uniforme, y estabilidad exponencial de un punto de equilibrio, y damos sus teoremas correspondientes. Presentamos además teoremas *conversos*, que establecen la existencia de funciones de Lyapunov para clases de sistemas no lineales. Finalmente, extendemos el principio de invariancia de LaSalle a sistemas inestacionarios.

### 4.1 El Teorema de Estabilidad de Lyapunov

Consideremos el sistema inestacionario

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{4.1}$$

donde  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es seccionalmente continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  en  $[0, \infty) \times D$ , y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene al origen  $x = 0$ . El origen es un PE de (4.1) para  $t = 0$  si

$$f(t, 0) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Un equilibrio en el origen puede ser la translación de un PE que no está en cero o, más generalmente, la translación de una solución no nula del sistema. Para ver este último punto, supongamos que  $\tilde{y}(\tau)$  es una solución del sistema

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\tau, y)$$

definida para todo  $\tau \geq a$ . El cambio de variables

$$x = y - \tilde{y}(\tau); \quad t = \tau - a$$

transforma al sistema en la forma

$$\dot{x} = g(t + a, x + \tilde{y}(t + a)) - \dot{\tilde{y}}(t + a) \triangleq f(t, x)$$

Como

$$\dot{\tilde{y}}(t + a) = g(t + a, \tilde{y}(t + a)), \quad \forall t \geq 0$$

el origen  $x = 0$  es un PE del sistema transformado para  $t = 0$ . Por lo tanto, examinando la estabilidad del origen como un PE del sistema transformado, determinamos la estabilidad de la solución  $\tilde{y}(\tau)$  del sistema original. Notar que si  $\tilde{y}(\tau)$  no es constante, el sistema transformado es inestacionario aunque el sistema original sea estacionario. Por lo tanto, el estudio de estabilidad de soluciones en el sentido de Lyapunov sólo puede hacerse mediante el estudio de la estabilidad de equilibrios de sistemas inestacionarios.

Antes de definir estabilidad para el sistema (4.1), veamos un par de ejemplos.

**Ejemplo 4.1 (Estabilidad no uniforme en  $t$ ).** El sistema lineal de primer orden

$$\dot{x} = (6t \operatorname{sen} t - 2t)x$$

tiene como solución

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) \exp \left[ \int_{t_0}^t (6t \operatorname{sen} \tau - 2\tau) d\tau \right] \\ &= x(t_0) \exp [6 \operatorname{sen} t - 6t \cos t - t^2 - 6 \operatorname{sen} t_0 + 6t_0 \cos t_0 + t_0^2] \end{aligned}$$

Para cualquier  $t_0$ , el término  $-t^2$  va a dominar, lo que muestra que la exponencial está acotada para todo  $t \geq t_0$  por una constante  $c(t_0)$  dependiente de  $t_0$ . Por lo tanto

$$|x(t)| < |x(t_0)|c(t_0), \quad \forall t \geq t_0$$

Para cualquier  $\epsilon > 0$ , la elección  $\delta = \epsilon/c(t_0)$  muestra que el origen es estable. Supongamos ahora que  $t_0$  toma sucesivamente los valores  $t_0 = 2n\pi$  con  $n = 0, 1, \dots$ , y supongamos que  $x(t)$  es evaluada  $\pi$  segundos más tarde en cada caso. Tenemos

$$x(t_0 + \pi) = x(t_0) \exp[(4n + 1)(6 - \pi)\pi]$$

Esto implica que, para  $x(t_0) \neq 0$ ,

$$\frac{x(t_0 + \pi)}{x(t_0)} \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad n \rightarrow \infty$$

Por lo tanto, dado  $\epsilon > 0$ , no existe  $\delta$  independiente de  $t_0$  tal que la propiedad de estabilidad valga uniformemente en  $t_0$ . ◦

**Ejemplo 4.2 (Estabilidad asintótica no uniforme).** El sistema lineal de primer orden

$$\dot{x} = -\frac{x}{1+t}$$

tiene como solución

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) \exp \left[ \int_{t_0}^t \frac{-1}{1+\tau} d\tau \right] \\ &= x(t_0) \frac{1+t_0}{1+t} \end{aligned}$$

Como  $|x(t)| \leq |x(t_0)|$  para todo  $t \geq t_0$ , el origen es estable; es más, dado  $\epsilon > 0$  podemos elegir  $\delta$  independiente de  $t_0$ . También es claro que

$$x(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty$$

Es decir, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $T(\epsilon, t_0)$  tal que  $|x(t)| < \epsilon$  para todo  $t \geq t_0 + T$ . Por lo tanto, de acuerdo a la Definición 3.1, el origen es AE. Notemos, sin embargo, que la convergencia de  $x(t)$  al origen no es uniforme con respecto a  $t_0$  porque  $T$  no puede elegirse independiente de  $t_0$ . ◦

Nos va a interesar entonces definir estabilidad del origen como una propiedad uniforme con respecto al instante inicial.

**Definición 4.1 (Estabilidad Uniforme).** El PE  $x = 0$  de (4.1) es

- *estable*, si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$  tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (4.2)$$

- *uniformemente estable*, si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , independiente de  $t_0$ , tal que (4.2) se satisface.
- *inestable*, si no es estable.
- *asintóticamente estable*, si es estable y existe  $c = c(t_0)$  tal que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , para todo  $\|x(t_0)\| < c$ .
- *uniformemente asintóticamente estable*, si es uniformemente estable y existe  $c > 0$  independiente de  $t_0$  tal que para todo  $\|x(t_0)\| < c$ ,  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , uniformemente en  $t_0$ ; es decir, para cada  $\epsilon > 0$  existe  $T = T(\epsilon)$  tal que

$$\|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\epsilon), \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

- *globalmente uniformemente asintóticamente estable*, si es uniformemente estable y para cada par de números positivos  $\epsilon$  y  $c$ , existe  $T = T(\epsilon, c)$  tal que

$$\|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\epsilon, c), \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

◊

Podemos caracterizar las propiedades introducidas en Definición 4.1 en términos de un tipo especial de funciones escalares, conocidas como funciones clase  $\mathcal{K}$  y clase  $\mathcal{KL}$ .

**Definición 4.2 (Función de Clase  $\mathcal{K}$ ).** Una función continua  $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}$  si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ . Se dice que pertenece a la clase  $\mathcal{K}_\infty$  si  $a = \infty$  y  $\alpha(r) \rightarrow \infty$  cuando  $r \rightarrow \infty$ .

◊

**Definición 4.3 (Función de Clase  $\mathcal{KL}$ ).** Una función continua  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  pertenece a la clase  $\mathcal{KL}$  si, para cada  $s$  fijo, el mapeo  $\beta(r, s)$  es clase  $\mathcal{K}$  con respecto a  $r$ , y, para cada  $r$  fijo, el mapeo  $\beta(r, s)$  es decreciente con respecto a  $s$  y  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .

◊

**Ejemplo 4.3 (Funciones clase  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{KL}$ ).**

- $\alpha(r) = \arctan r$  es clase  $\mathcal{K}$  pero no  $\mathcal{K}_\infty$ .
- $\alpha(r) = r^c$  con  $c$  cualquier número real positivo, es clase  $\mathcal{K}_\infty$ .
- $\beta(r, s) = r/(ksr + 1)$ , con  $k$  cualquier número real positivo, es clase  $\mathcal{KL}$ .
- $\beta(r, s) = r^c e^{-s}$ , con  $c$  cualquier número real positivo, es clase  $\mathcal{KL}$ .

◊

**Lema 4.1.** [Propiedades de funciones clase  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{KL}$ ] Sean  $\alpha_1(\cdot)$  y  $\alpha_2(\cdot)$  funciones clase  $\mathcal{K}$  en  $[0, a)$ ,  $\alpha_3(\cdot)$  y  $\alpha_4(\cdot)$  funciones clase  $\mathcal{K}_\infty$ , y  $\beta(\cdot, \cdot)$  una función clase  $\mathcal{KL}$ . Denotemos  $\alpha_i^{-1}(\cdot)$  a la inversa de  $\alpha_i(\cdot)$ . Entonces

- $\alpha_1^{-1}$  está definida en  $[0, \alpha_1(a))$  y es clase  $\mathcal{K}$ .
- $\alpha_3^{-1}$  está definida en  $[0, \infty)$  y es clase  $\mathcal{K}_\infty$ .
- $\alpha_1 \circ \alpha_2$  es clase  $\mathcal{K}$ .
- $\alpha_3 \circ \alpha_4$  es clase  $\mathcal{K}_\infty$ .
- $\sigma(r, s) = \alpha_1(\beta(\alpha_2(r), s))$  es clase  $\mathcal{KL}$ .

◦

El siguiente lema da definiciones equivalentes para estabilidad uniforme y EA uniforme usando funciones clase  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{KL}$ .

**Lema 4.2 (Estabilidad uniforme y funciones clase  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{KL}$ ).** El PE  $x = 0$  de (4.1) es

- *uniformemente estable* sí existe una función  $\alpha(\cdot)$  clase  $\mathcal{K}$  y una constante positiva  $c$ , independiente de  $t_0$ , tal que

$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \quad (4.3)$$

- *uniformemente asintóticamente estable* sí existe una función  $\beta(\cdot, \cdot)$  clase  $\mathcal{KL}$  y una constante positiva  $c$ , independiente de  $t_0$ , tal que

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \quad (4.4)$$

- *globalmente uniformemente asintóticamente estable* sí (4.4) se satisface para cualquier estado inicial  $x(t_0)$ .

◦

Para sistemas estacionarios, estabilidad y EA según la Definición 3.1 implican la existencia de funciones clase  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{KL}$  que satisfacen (4.3) y (4.4). Esto es porque para sistemas estacionarios, la estabilidad y EA del origen son uniformes con respecto al instante inicial.

Un caso especial de estabilidad asintótica uniforme ocurre cuando la función  $\beta$  en (4.4) tiene la forma  $\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}$ .

**Definición 4.4 (Estabilidad Exponencial).** El PE  $x = 0$  de (4.1) es *exponencialmente estable* si la desigualdad (4.4) se satisface con

$$\beta(r, s) = kre^{-\gamma s}, \quad k > 0, \quad \gamma > 0$$

y es *globalmente exponencialmente estable* si esta condición se satisface para cualquier estado inicial.

◦

Una función definida positiva puede acotarse con funciones clase  $\mathcal{K}$ , como lo muestra el siguiente lema.

**Lema 4.3 (Signo definido y funciones clase  $\mathcal{K}$ ).** Sea  $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua definida positiva, definida en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene al origen. Sea  $B_r \subset D$  para algún  $r > 0$ . Entonces existen  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , funciones clase  $\mathcal{K}$  definidas en  $[0, r)$ , tal que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

para todo  $x \in B_r$ . Más aún, si  $D = \mathbb{R}^n$  y  $V(x)$  es radialmente no acotada, entonces  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  pueden elegirse clase  $\mathcal{K}_\infty$  y la desigualdad anterior vale para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Definamos  $\psi(s)$  como

$$\psi(s) = \inf_{s \leq \|x\| \leq r} V(x) \quad \text{para } 0 \leq s \leq r$$

La función  $\psi(s)$  es continua, definida positiva, y creciente. Más aún,  $V(x) \geq \psi(\|x\|)$  para  $0 \leq \|x\| \leq r$ . Como  $\psi(\cdot)$  no es necesariamente estrictamente creciente, definimos una función  $\alpha_1(s)$  clase  $\mathcal{K}$  tal que  $\alpha_1(s) \leq k\psi(s)$  con  $0 < k < 1$ . Entonces,

$$V(x) \geq \psi(\|x\|) \geq \alpha_1(\|x\|) \quad \text{para } \|x\| \leq r$$

Por otro lado, definamos  $\phi(s)$  como

$$\phi(s) = \sup_{\|x\| \leq s} V(x) \quad \text{para } 0 \leq s \leq r$$

La función  $\phi(s)$  es continua, definida positiva, y creciente (no necesariamente estrictamente creciente). Más aún,  $V(x) \leq \phi(\|x\|)$  para  $\|x\| \leq r$ . Sea  $\alpha_2(s)$  una función clase  $\mathcal{K}$  tal que  $\alpha_2(s) \geq k\phi(s)$  con  $k > 1$ . Entonces,

$$V(x) \leq \phi(\|x\|) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad \text{para } \|x\| \leq r$$

Si  $V(x)$  es radialmente no acotada, entonces existen constantes positivas  $c$  y  $r_1$  tales que  $V(x) \geq c$  para todo  $\|x\| > r_1$ . Las definiciones de  $\psi(s)$  y  $\phi(s)$  son ahora

$$\psi(s) = \inf_{\|x\| \geq s} V(x), \quad \phi(s) = \sup_{\|x\| \leq s} V(x), \quad \text{para } s \geq 0$$

Estas funciones son continuas, definidas positivas, crecientes, y tienden a infinito cuando  $s \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, las funciones  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  pueden elegirse clase  $\mathcal{K}_\infty$ .  $\square$

Si  $V(x) = x^T P x$  es una función definida positiva cuadrática, el lema anterior sigue de las desigualdades

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2 \leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|_2^2$$

Vamos a ver ahora el método de Lyapunov para demostrar estabilidad asintótica uniforme para sistemas inestacionarios. Este método da condiciones suficientes para que la desigualdad (4.4) se satisfaga. La función  $\beta(\cdot, \cdot)$  de clase  $\mathcal{KL}$  en dicha desigualdad resultará de la solución de una ecuación diferencial escalar autónoma, cuyas propiedades se dan en el siguiente resultado.

**Lema 4.4.** Consideremos la ecuación diferencial escalar

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = y_0$$

donde  $\alpha(\cdot)$  es una función localmente Lipschitz y clase  $\mathcal{K}$  definida en  $[0, a)$ . Para toda  $0 \leq y_0 < a$ , esta ecuación tiene una única solución  $y(t)$  definida para todo  $t \geq t_0$ . Más aún,

$$y(t) = \sigma(y_0, t - t_0)$$

donde  $\sigma(r, s)$  es una función clase  $\mathcal{KL}$  definida en  $[0, a) \times [0, \infty)$ .  $\circ$

Dos simples ejemplos del Lema 4.4 son:

(i)  $\dot{y} = -ky$ ,  $k > 0$ , cuya solución es

$$y(t) = y_0 e^{-k(t-t_0)} \implies \sigma(r, s) = r e^{-ks}$$

(ii)  $\dot{y} = -ky^2$ ,  $k > 0$ , cuya solución es

$$y(t) = \frac{y_0}{ky_0(t-t_0) + 1} \implies \sigma(r, s) = \frac{r}{krs + 1}$$

El siguiente es el teorema principal de esta sección.

**Teorema 4.5 (Estabilidad Asintótica Uniforme).** Sea  $x = 0$  un PE de (4.1) y sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene al origen. Sea  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x) \tag{4.6}$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$ , donde  $W_i(x)$  son funciones continuas definidas positivas en  $D$ . Entonces  $x = 0$  es uniformemente AE.

*Demostración.* La derivada de  $V$  sobre las trayectorias de (4.1) satisface

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x)$$

Elijamos  $r > 0$  y  $\rho > 0$  tales que  $B_r \subset D$  y  $\rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$ . Entonces el conjunto  $\{x \in B_r \mid W_1(x) \leq \rho\}$  está en el interior de  $B_r$ . Definamos el conjunto variante en el tiempo

$$\Omega_{t, \rho} = \{x \in B_r \mid V(t, x) \leq \rho\}$$

El conjunto  $\Omega_{t, \rho}$  contiene al conjunto  $\{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$  ya que

$$W_2(x) \leq \rho \implies V(t, x) \leq \rho$$

Por otro lado,  $\Omega_{t, \rho}$  es un subconjunto de  $\{x \in B_r \mid W_1(x) \leq \rho\}$  ya que

$$V(t, x) \leq \rho \implies W_1(x) \leq \rho$$

Por lo tanto

$$\{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\} \subset \Omega_{t, \rho} \subset \{x \in B_r \mid W_1(x) \leq \rho\} \subset B_r \subset D$$

para todo  $t \geq 0$ . Para cualquier  $t_0 \geq 0$  y cualquier  $x_0 \in \Omega_{t_0, \rho}$ , la solución que comienza en  $(t_0, x_0)$  permanece en  $\Omega_{t, \rho}$  para todo  $t \geq t_0$ . Esto es porque  $\dot{V}(t, x)$  es negativa en  $D - \{0\}$  y por lo tanto  $V(t, x)$  es decreciente. Entonces la solución que comienza en  $(t_0, x_0)$  está definida para todo  $t \geq t_0$  y  $x(t) \in B_r$ . En el resto de la demostración vamos a asumir que  $x_0 \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$ . Por el Lema 4.3, existen funciones  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  clase  $\mathcal{K}$ , definidas en  $[0, r]$ , tales que

$$W_1(x) \geq \alpha_1(\|x\|), \quad W_2(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad W_3(x) \geq \alpha_3(\|x\|)$$

Por lo tanto,  $V$  y  $\dot{V}$  satisfacen las desigualdades

$$\begin{aligned}\alpha_1(\|x\|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \\ \dot{V}(t, x) &\leq -\alpha_3(\|x\|)\end{aligned}$$

Entonces

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|) \leq -\alpha_3(\alpha_2^{-1}(V)) \triangleq -\alpha(V)$$

La función  $\alpha(\cdot)$  es clase  $\mathcal{K}$  definida en  $[0, r]$  (ver Lema 4.1). Supongamos (sin pérdida de generalidad) que  $\alpha(\cdot)$  es localmente Lipschitz. Sea  $y(t)$  la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{y} = -\alpha(y), \quad y(t_0) = V(t_0, x(t_0)) \geq 0$$

Por el Lema 2.11 (principio de comparación)

$$V(t, x(t)) \leq y(t), \quad \forall t \geq t_0$$

Por el Lema 4.4, existe una función  $\sigma(r, s)$  de clase  $\mathcal{KL}$  definida en  $[0, r) \times [0, \infty)$  tal que

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0) \quad \forall V(t_0, x(t_0)) \in [0, \rho]$$

Por lo tanto, toda solución que comienza en  $\Omega_{t_0, \rho}$ , satisface la desigualdad

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq \alpha_1^{-1}(V(t, x(t))) \leq \alpha_1^{-1}(\sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0)) \\ &\leq \alpha_1^{-1}(\sigma(\alpha_2(\|x(t_0)\|), t - t_0)) \triangleq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)\end{aligned}$$

Por el Lema 4.1, la función  $\beta(\cdot, \cdot)$  es clase  $\mathcal{KL}$ . Por lo tanto, la desigualdad (4.4) se satisface para toda  $x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$ , lo que implica que  $x = 0$  es uniformemente asintóticamente estable.  $\square$

Una función  $V(t, x)$  que satisface la desigualdad (4.5) se denomina *definida positiva*; una función  $V(t, x)$  que satisface la desigualdad (4.6) se denomina *decreciente*. Una función  $V(t, x)$  que satisface (4.5) y (4.6) se denomina función de Lyapunov.

En la prueba del Teorema 4.5 se da una estima de la región de atracción del origen a través del conjunto

$$\{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$$

Esta estima nos permite obtener una versión global del Teorema 4.5.

**Corolario 4.6 (Estabilidad Asintótica Uniforme Global).** Supongamos que las condiciones del Teorema 4.5 se satisfacen para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $W_1(x)$  es radialmente no acotada. Entonces  $x = 0$  es globalmente uniformemente AE.  $\circ$

El siguiente corolario da la versión para estabilidad exponencial.

**Corolario 4.7 (Estabilidad Exponencial Uniforme).** Supongamos que las condiciones del Teorema 4.5 se satisfacen con

$$W_1(x) \geq k_1\|x\|^c, \quad W_2(x) \leq k_2\|x\|^c, \quad W_3(x) \geq k_3\|x\|^c$$

para ciertas constantes positivas  $k_1, k_2, k_3$  y  $c$ . Entonces  $x = 0$  es exponencialmente estable. Más aún, si las condiciones valen globalmente, entonces  $x = 0$  es globalmente exponencialmente estable.

*Demostración.*  $V$  y  $\dot{V}$  satisfacen las desigualdades

$$\begin{aligned} k_1 \|x\|^c &\leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^c, \\ \dot{V}(t, x) &\leq -k_3 \|x\|^c \leq -\frac{k_3}{k_2} V(t, x). \end{aligned}$$

Por el principio de comparación (Lema 2.11),

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x(t_0)) e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \left[ \frac{V(t, x(t))}{k_1} \right]^{1/c} \leq \left[ \frac{V(t_0, x(t_0)) e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)}}{k_1} \right]^{1/c} \\ &\leq \left[ \frac{k_2 \|x(t_0)\|^c e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)}}{k_1} \right]^{1/c} = \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^{1/c} \|x(t_0)\| e^{-(k_3/k_2)(t-t_0)} \end{aligned}$$

La cota de arriba muestra que el origen es exponencialmente estable. Si todas las hipótesis valen globalmente, la desigualdad vale para todo  $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Ejemplo 4.4 (Sistema globalmente exponencialmente estable).** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - g(t) x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

donde  $g(t)$  es continuamente diferenciable y satisface

$$0 \leq g(t) \leq k, \quad \dot{g}(t) \leq g(t), \quad \forall t \geq 0$$

Tomemos  $V(t, x) = x_1^2 + [1 + g(t)] x_2^2$  como candidata a función de Lyapunov. Es fácil de ver que

$$x_1^2 + x_2^2 \leq V(t, x) \leq x_1^2 + (1 + k) x_2^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto,  $V(t, x)$  es definida positiva, decreciente, y radialmente no acotada. La derivada de  $V$  sobre las trayectorias del sistema está dada por

$$\dot{V}(t, x) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - [2 + 2g(t) - \dot{g}(t)]x_2^2$$

Usando la desigualdad

$$2 + 2g(t) - \dot{g}(t) \geq 2 + 2g(t) - g(t) \geq 2$$

obtenemos

$$\dot{V}(t, x) \leq -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 = - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq -x^T Q x$$

donde  $Q$  es definida positiva; por lo tanto  $\dot{V}(t, x)$  es definida negativa. Todas las condiciones del Teorema 4.5 se satisfacen globalmente con funciones cuadráticas  $W_1$ ,  $W_2$  y  $W_3$  definidas positivas. Por el Corolario 4.7, concluimos que el origen es globalmente exponencialmente estable.  $\circ$



**Ejemplo 4.5 (Sistema lineal inestacionario).** El sistema lineal no estacionario

$$\dot{x} = A(t)x \quad (4.7)$$

tiene un PE en  $x = 0$ . Sea  $A(t)$  continua para todo  $t \geq 0$ . Supongamos que existe una matriz  $P(t)$  simétrica, , acotada y definida positiva, es decir,

$$0 \leq c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I, \quad \forall t \geq 0$$

Supongamos además que  $P(t)$  es continuamente diferenciable y satisface la ecuación diferencial matricial

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t) \quad (4.8)$$

donde  $Q(t)$  es continua, simétrica y definida positiva; es decir,

$$Q(t) \geq c_3 I > 0, \quad \forall t \geq 0$$

Consideremos la candidata a función de Lyapunov

$$V(t, x) = x^T P(t)x$$

La función  $V(t, x)$  es definida positiva, decreciente y radialmente no acotada, ya que

$$c_1 \|x\|_2^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|_2^2$$

La derivada de  $V$  sobre las trayectorias del sistema (4.7) está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= x^T \dot{P}(t)x + x^T P(t)\dot{x} + \dot{x}^T P(t)x \\ &= x^T [\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t)]x \\ &= -x^T Q(t)x \\ &\leq -c_3 \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\dot{V}(t, x)$  es definida negativa. Todas las condiciones del Corolario 4.7 se satisfacen globalmente con  $c=2$ . Concluimos que el origen es globalmente exponencialmente estable.  $\circ$

Si la matriz  $Q(t)$  se elige también acotada, además de definida positiva, es decir

$$0 < c_3 I \leq Q(t) \leq c_4 I, \quad \forall t \geq 0$$

y si  $A(t)$  es continua y acotada, entonces puede probarse que cuando el origen es uniformemente asintóticamente estable, existe una solución de (4.8) con las propiedades requeridas, como lo muestra el siguiente resultado.

**Teorema 4.8.** Sea  $x = 0$  un PE uniformemente asintóticamente estable de (4.7). Supongamos que  $A(t)$  es continua y acotada. Sea  $Q(t)$  una matriz continua, acotada, simétrica y definida positiva. Entonces, existe una matriz  $P(t)$  continuamente diferenciable, simétrica, acotada y definida positiva, que satisface (4.8), y  $V(t, x) = x^T P(t)x$  es una función de Lyapunov para el sistema (4.7) que satisface las condiciones del Teorema 4.5.  $\circ$

## 4.2 Teoremas Conversos

El Teorema 4.5 y sus corolarios establecen estabilidad asintótica uniforme (o estabilidad exponencial) del origen requiriendo la existencia de una función de Lyapunov que satisfaga ciertas condiciones. Aquí cabe preguntarnos: ¿existe una función que satisfaga las condiciones del teorema?, ¿cómo la encontramos si existe? Los teoremas conversos dan una respuesta afirmativa a la primera pregunta. Para responder a la segunda pregunta vamos a ver más adelante que será necesario especializar el análisis a ciertas clases de sistemas no lineales.

**Teorema 4.9.** Sea  $x = 0$  un PE del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(t, x)$$

donde  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable,  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ , y la matriz Jacobiana  $\partial f / \partial x$  es acotada en  $D$ , uniformemente en  $t$ . Sean  $k, \gamma$  y  $r_0$  constantes positivas con  $r_0 < r/k$ . Sea  $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r_0\}$ . Supongamos que las trayectorias del sistema satisfacen

$$\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\|e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad \forall x(t_0) \in D_0, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Entonces existe una función  $V : [0, \infty) \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las desigualdades

$$c_1\|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2\|x\|^2 \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3\|x\|^2 \tag{4.10}$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4\|x\| \tag{4.11}$$

para ciertas constantes positivas  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$ . Más aún, si  $r = \infty$  y el origen es globalmente exponencialmente estable, entonces  $V(t, x)$  está definida y satisface las desigualdades de arriba en todo  $\mathbb{R}^n$ . Si el sistema es estacionario,  $V$  puede elegirse independiente de  $t$ .

*Demostración.* Debido a la equivalencia de normas, es suficiente probar el teorema para la norma 2. Sea  $\phi(\tau, t, x)$  la solución del sistema que comienza en  $(t, x)$ ; es decir,  $\phi(t, t, x) = x$ . Para todo  $x \in D_0$ ,  $\phi(\tau, t, x) \in D$  para todo  $\tau \geq t$ . Sea

$$V(t, x) = \int_t^{t+T} \phi^T(\tau, t, x) \phi(\tau, t, x) d\tau$$

donde  $T$  es una constante positiva que se va a elegir después. Dada la cota exponencial decreciente de las trayectorias, tenemos

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \int_t^{t+T} \|\phi(\tau, t, x)\|_2^2 d\tau \\ &\leq \int_t^{t+T} k^2 e^{-2\gamma(\tau-t)} d\tau \|x\|_2^2 = \frac{k^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma T}) \|x\|_2^2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Por otro lado, la matriz Jacobiana  $\partial f / \partial x$  es acotada en  $D$ . Sea

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\|_2 \leq L, \quad \forall x \in D \tag{4.13}$$

La función  $f(t, x)$  es Lipschitz en  $D$  con constante de Lipschitz  $L$ . Por lo tanto, la solución  $\phi(\tau, t, x)$  tiene la cota inferior (ver Ejercicio 2.7)

$$\|\phi(\tau, t, x)\|_2^2 \geq \|x\|_2^2 e^{-2L(\tau-t)}$$

Entonces,

$$V(t, x) \geq \int_t^{t+T} e^{-2L(\tau-t)} d\tau \|x\|_2^2 = \frac{1}{2L} (1 - e^{-2LT}) \|x\|_2^2 \quad (4.14)$$

Combinando (4.12) y (4.14) vemos que  $V(t, x)$  satisface (4.9) con

$$c_1 = \frac{1 - e^{-2LT}}{2L} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{k^2(1 - e^{-2\gamma T})}{2\gamma}$$

Para calcular la derivada de  $V$  sobre las trayectorias del sistema, definamos las funciones de sensibilidad

$$\phi_t(\tau, t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\tau, t, x); \quad \phi_x(\tau, t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \phi(\tau, t, x);$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &= \phi^T(t+T, t, x) \phi(t+T, t, x) - \phi^T(t, t, x) \phi(t, t, x) \\ &\quad + \int_t^{t+T} 2\phi^T(\tau, t, x) \phi_t(\tau, t, x) d\tau + \int_t^{t+T} 2\phi^T(\tau, t, x) \phi_x(\tau, t, x) d\tau f(t, x) \\ &= \phi^T(t+T, t, x) \phi(t+T, t, x) - \|x\|_2^2 \\ &\quad + \int_t^{t+T} 2\phi^T(\tau, t, x) [\phi_t(\tau, t, x) + \phi_x(\tau, t, x) f(t, x)] d\tau \end{aligned}$$

Es fácil de probar (ver Ejercicio 2.12) que

$$\phi_t(\tau, t, x) + \phi_x(\tau, t, x) f(t, x) \equiv 0, \quad \forall \tau \geq t$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &= \phi^T(t+T, t, x) \phi(t+T, t, x) - \|x\|_2^2 \\ &\leq -(1 - k^2 e^{-2\gamma T}) \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

Eligiendo  $T = \ln(2k^2)/(2\gamma)$ , la desigualdad (4.10) se satisface con  $c_3 = 1/2$ . Para probar la desigualdad (4.11), notemos que  $\phi_x(\tau, t, x)$  satisface la ecuación de sensibilidad

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \phi_x = \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \phi(\tau, t, x)) \phi_x, \quad \phi_x(t, t, x) = I$$

Por la condición (4.13),  $\phi_x$  satisface la cota (ver Ejercicio 2.7)

$$\|\phi_x(\tau, t, x)\|_2 \leq e^{L(\tau-t)}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial V}{\partial x}(t, x) \right\|_2 &= \left\| \int_t^{t+T} 2\phi^T(\tau, t, x)\phi_x(\tau, t, x)d\tau \right\|_2 \\ &\leq \int_t^{t+T} 2\|\phi^T(\tau, t, x)\|_2\|\phi_x(\tau, t, x)\|_2 d\tau \\ &\leq \int_t^{t+T} 2ke^{-\gamma(\tau-t)}e^{L(\tau-t)}d\tau\|x\|_2 \\ &= \frac{2k}{\gamma-L}[1 - e^{(\gamma-L)T}]\|x\|_2 \end{aligned}$$

Vemos que la desigualdad (4.11) se satisface con  $c_4 = 2k[1 - e^{(\gamma-L)T}]/(\gamma - L)$ .

Si todas las hipótesis valen globalmente, entonces  $r_0$  puede tomarse arbitrariamente grande.

Si el sistema es autónomo,  $\phi(\tau, t, x)$  depende sólo de  $\tau - t$ ; es decir  $\phi(\tau, t, x) = \psi(\tau - t, x)$ .

Entonces

$$V(t, x) = \int_t^{t+T} \psi^T(\tau - t, x)\psi(\tau - t, x)d\tau = \int_0^T \psi^T(s, x)\psi(s, x)ds$$

que es independiente de  $t$ . □

El siguiente teorema vincula la estabilidad exponencial del origen del sistema no lineal con la estabilidad exponencial de su linealización alrededor del origen.

**Teorema 4.10.** Sea  $x = 0$  un PE del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(t, x)$$

donde  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable,  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$ , y la matriz Jacobiana  $\partial f/\partial x$  es acotada y Lipschitz en  $D$ , uniformemente en  $t$ . Sea

$$A(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right|_{x=0}$$

Entonces el origen es un PE exponencialmente estable del sistema no lineal sí es un PE exponencialmente estable para el sistema lineal

$$\dot{x} = A(t)x$$

*Demostración.* Como la matriz Jacobiana  $\partial f/\partial x$  es acotada y Lipschitz en  $D$ , uniformemente en  $t$ , tenemos que

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, x_2) \right\|_2 \leq L_1\|x_1 - x_2\|_2, \quad \forall x_1, x_2 \in D, \forall t \geq 0$$

para todo  $1 \leq i \leq n$ . Por el teorema del valor medio

$$f_i(t, x) = f_i(t, 0) + \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i)x$$

donde  $z_i$  es un punto en el segmento que conecta  $x$  al origen. Como  $f(t, 0) = 0$  (porque el origen es un PE), podemos escribir

$$f_i(t, x) = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i)x = \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0)x + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0) \right] x$$

Por lo tanto

$$f(t, x) = A(t)x + g(t, x)$$

donde

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, 0) \quad \text{y} \quad g_i(t, x) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0) \right] x$$

La función  $g(t, x)$  satisface

$$\|g(t, x)\|_2 \leq \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, z_i) - \frac{\partial f_i}{\partial x}(t, 0) \right\|_2^2 \right)^{1/2} \|x\|_2 \leq L\|x\|_2^2$$

donde  $L = \sqrt{n}L_1$ .

Ahora supongamos que el origen es un PE exponencialmente estable del sistema lineal y  $A(t)$  es continua y acotada. Entonces el Teorema 4.8 garantiza la existencia de una matriz  $P(t)$  continuamente diferenciable, simétrica, acotada y definida positiva, que satisface (4.8), donde  $Q(t)$  es continua, acotada, simétrica y definida positiva. Vamos a usar  $V(t, x) = x^T P(t)x$  como candidata a función de Lyapunov para el sistema no lineal. La derivada de  $V(t, x)$  sobre las trayectorias del sistema satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= x^T P(t)f(t, x) + f^T(t, x)P(t)x + x^T \dot{P}(t)x \\ &= x^T [P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + \dot{P}(t)]x + 2x^T P(t)g(t, x) \\ &= -x^T Q(t)x + 2x^T P(t)g(t, x) \\ &\leq -c_3\|x\|_2^2 + 2c_2L\|x\|_2^3 \\ &\leq -(c_3 - 2c_2L\rho)\|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < \rho \end{aligned}$$

Eligiendo  $\rho < \min\{r, c_3/(2c_2L)\}$  nos aseguramos que  $\dot{V}(t, x)$  es definida negativa en  $\|x\|_2 < \rho$ . Vemos que todas las condiciones del Corolario 4.7 se satisfacen en  $\|x\|_2 < \rho$ , por lo tanto el origen es exponencialmente estable.

Supongamos ahora que el origen es un PE exponencialmente estable del sistema no lineal. Entonces existen constantes  $k$ ,  $\gamma$  y  $c$  tales que

$$\|x(t)\|_2 \leq k\|x(0)\|_2 e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall \|x(0)\|_2 < c$$

Eligiendo  $r_0 < \min\{c, r/k\}$ , todas las condiciones del Teorema 4.9 se satisfacen. Sea  $V(t, x)$  la función de Lyapunov dada por el Teorema 4.9, la que tomamos como candidata a función de Lyapunov para el sistema lineal

$$\dot{x} = A(t)x = f(t, x) - [f(t, x) - A(t)x] = f(t, x) - g(t, x)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}A(t)x &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f(t, x) - \frac{\partial V}{\partial x}g(t, x) \\ &\leq -c_3\|x\|_2^2 + c_4L\|x\|_2^3 \\ &\leq -(c_3 - c_4L\rho)\|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 < \rho \end{aligned}$$

Eligiendo  $\rho < \min\{r_0, c_3/(c_4L)\}$ , resulta  $\dot{V}(t, x)$  definida negativa en  $\|x\|_2 < \rho$ . Entonces todas las condiciones del Corolario 4.7 se satisfacen en  $\|x\|_2 < \rho$ , por lo tanto el origen es un PE exponencialmente estable para el sistema lineal.  $\square$

**Ejemplo 4.6.** Consideremos el sistema de primer orden

$$\dot{x} = -x^3$$

Vimos en el Ejemplo 3.15 que el origen es AE, pero la linealización alrededor del origen es  $\dot{x} = 0$  cuya matriz  $A$  no es Hurwitz. Usando el Teorema 4.10, concluimos que el origen no es exponencialmente estable.  $\circ$

El siguiente teorema es un teorema converso para estabilidad asintótica uniforme.

**Teorema 4.11.** Sea  $x = 0$  un PE del sistema no lineal

$$\dot{x} = f(t, x)$$

donde  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continuamente diferenciable,  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ , y la matriz Jacobiana  $\partial f / \partial x$  es acotada en  $D$ , uniformemente en  $t$ . Sea  $\beta(\cdot, \cdot)$  una función clase  $\mathcal{KL}$  y  $r_0$  una constante positiva tal que  $\beta(r_0, 0) < r$ . Sea  $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r_0\}$ . Supongamos que las trayectorias del sistema satisfacen

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall x(t_0) \in D_0, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Entonces existe una función  $V : [0, \infty) \times D_0 \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface las desigualdades

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) &\leq -\alpha_3(\|x\|) \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| &\leq \alpha_4(\|x\|) \end{aligned} \tag{4.15}$$

donde  $\alpha_1(\cdot)$ ,  $\alpha_2(\cdot)$ ,  $\alpha_3(\cdot)$  y  $\alpha_4(\cdot)$  son funciones clase  $\mathcal{K}$  definidas en  $[0, r_0]$ . Si el sistema es estacionario,  $V$  puede elegirse independiente de  $t$ .  $\circ$

### 4.3 Teoremas de Invariancia

Para sistemas estacionarios, el teorema de invariancia de LaSalle muestra que las trayectorias del sistema tienden al máximo conjunto invariante contenido en el conjunto  $E = \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$ . En el caso de sistemas inestacionarios, no está claro, en principio, como definir el conjunto  $E$ , ya que  $\dot{V}(t, x)$  es función tanto del tiempo como del estado. La situación se simplifica si se puede probar que

$$\dot{V}(t, x) \leq -W(x) \leq 0$$

porque entonces  $E$  puede definirse como el conjunto de puntos donde  $W(x) = 0$ . Sería de esperar que las trayectorias del sistema tiendan a  $E$  cuando  $t$  tiende a infinito. Ese es precisamente el resultado del siguiente teorema, que enunciamos después de un Lema preliminar.

**Lema 4.12 (Lema de Barbalat).** Sea  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función uniformemente continua en  $[0, \infty)$ . Supongamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$  existe y es finito. Entonces

$$\phi(t) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

*Demostración.* Supongamos que no es cierto, entonces existe una constante positiva  $k_1$  tal que para todo  $T > 0$  se puede encontrar  $T_1 \geq T$  tal que  $|\phi(T_1)| \geq k_1$ . Como  $\phi(t)$  es uniformemente continua, existe una constante positiva  $k_2$  tal que  $|\phi(t + \tau) - \phi(t)| < k_1/2$  para todo  $t \geq 0$  y todo  $0 \leq \tau \leq k_2$ . Entonces

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &= |\phi(t) - \phi(T_1) + \phi(T_1)| \\ &\geq |\phi(T_1)| + |\phi(t) - \phi(T_1)| \\ &> k_1 - k_1/2 = k_1/2, \quad \forall t \in [T_1, T_1 + k_2] \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left| \int_{T_1}^{T_1+k_2} \phi(t) dt \right| = \int_{T_1}^{T_1+k_2} |\phi(t)| dt > k_1 k_2 / 2$$

donde la igualdad es válida porque  $\phi(t)$  conserva el signo para  $t \in [T_1, T_1 + k_2]$ . Por lo tanto la integral  $\int_0^t \phi(\tau) d\tau$  no puede tener un límite finito cuando  $t \rightarrow \infty$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

**Teorema 4.13 (Principio de invariancia para sistemas inestacionarios).** Sea  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$  y supongamos que  $f(t, x)$  es seccionalmente continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$ , uniformemente en  $t$ , en  $[0, \infty) \times D$ . Sea  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$\begin{aligned} W_1(x) &\leq V(t, x) \leq W_2(x) \\ \dot{V}(t, x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W(x) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$ , donde  $W_1(x)$  y  $W_2(x)$  son funciones continuas definidas positivas y  $W(x)$  es una función continua y semidefinida positiva en  $D$ . Sea  $\rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$ . Entonces todas las soluciones de  $\dot{x} = f(t, x)$  con  $x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$  son acotadas y satisfacen

$$W(x(t)) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

Más aún, si todas las hipótesis valen globalmente y  $W_1(x)$  es radialmente no acotada, el resultado vale para toda  $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Como en la demostración del Teorema 4.5, se puede probar que

$$x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\} \implies x(t) \in \Omega_{t, \rho}, \quad \forall t \geq t_0$$

ya que  $\dot{V}(t, x) \leq 0$ . Por lo tanto,  $\|x(t)\| < r$  para todo  $t \geq t_0$ . Como  $V(t, x(t))$  es monótonicamente no creciente y acotada por abajo por cero, tiene límite finito cuando  $t \rightarrow \infty$ .

De (4.16) tenemos

$$\int_{t_0}^t W(x(\tau)) d\tau \leq - \int_{t_0}^t \dot{V}(\tau, x(\tau)) d\tau = V(t_0, x(t_0)) - V(t, x(t))$$

Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t W(x(\tau)) d\tau$  existe y es finito. Como  $\|x(t)\| < r$  para todo  $t \geq t_0$  y  $f(t, x)$  es localmente Lipschitz en  $x$ , uniformemente en  $t$ , concluimos que  $x(t)$  es uniformemente continua en  $t$  en  $[t_0, \infty)$ . En consecuencia,  $W(x(t))$  es uniformemente continua en  $t$  en  $[t_0, \infty)$  ya que  $W(x)$  es uniformemente continua en  $x$  en el conjunto compacto  $B_r$ . Por el Lema de Barbalat concluimos que  $W(x(t)) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si todas las hipótesis valen globalmente y  $W_1(x)$  es radialmente no acotada, entonces para cada  $x(t_0)$  podemos elegir  $\rho$  lo suficientemente grande tal que  $x(t_0) \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid W_2(x) \leq \rho\}$ .  $\square$

El límite  $W(x(t)) \rightarrow 0$  implica que  $x(t)$  tiende a  $E$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , donde

$$E = \{x \in D \mid W(x) = 0\}$$

Por lo tanto, el conjunto límite positivo de  $x(t)$  es un subconjunto de  $E$ . Esta conclusión (de que  $x(t)$  tiende a  $E$ ) es mucho más débil que el principio de invariancia de LaSalle para sistemas estacionarios, que concluye que  $x(t)$  tiende al mayor conjunto invariante contenido en  $E$ . Esta conclusión más fuerte para sistemas estacionarios es consecuencia de la propiedad de estos sistemas enunciada en el Lema 3.4, que dice que el conjunto límite positivo es un conjunto invariante. Existen algunos casos especiales de sistemas inestacionarios para los cuales el conjunto límite positivo tiene una cierta propiedad de invariancia. Sin embargo, para un sistema inestacionario genérico, el conjunto límite positivo no es invariante. El hecho de que, para sistemas estacionarios,  $x(t)$  tiende al mayor conjunto invariante contenido en  $E$ , nos permitió llegar al Corolario 3.6, que prueba estabilidad asintótica del origen mostrando que el conjunto  $E$  no contiene ninguna trayectoria completa del sistema salvo la solución trivial. Para sistemas inestacionarios no existe una extensión del Corolario 3.6 que permita demostrar estabilidad asintótica.

Sin embargo, si además de satisfacer  $\dot{V}(t, x) \leq 0$ , la integral de  $\dot{V}(t, x)$  satisface cierta desigualdad, se puede concluir estabilidad asintótica, como establece el siguiente teorema.

**Teorema 4.14 (Estabilidad asintótica con  $\dot{V}(t, x)$  semidefinida positiva).** Sea  $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$  y supongamos que  $f(t, x)$  es seccionalmente continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  sobre  $[0, \infty) \times D$ . Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = f(t, x)$  en  $t = 0$ . Sea  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable que satisface

$$\begin{aligned} W_1(x) &\leq V(t, x) \leq W_2(x) \\ \dot{V}(t, x) &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq 0 \\ \int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, \phi(\tau, t, x)) d\tau &\leq -\lambda V(t, x), \quad 0 < \lambda < 1 \end{aligned}$$

para todo  $t \geq 0$  y  $x \in D$  para algún  $\delta > 0$ , donde  $W_1(x)$  y  $W_2(x)$  son funciones definidas positivas en  $D$ , y  $\phi(\tau, t, x)$  es la solución del sistema que comienza en  $(t, x)$ .

Entonces, el origen es uniformemente asintóticamente estable. Si todas las condiciones valen globalmente y  $W_1(x)$  es radialmente no acotada, entonces el origen es globalmente uniformemente asintóticamente estable.

Si

$$W_1(x) \geq k_1 \|x\|^c, \quad W_2(x) \leq k_2 \|x\|^c, \quad k_1 > 0, k_2 > 0, c > 0,$$

entonces el origen es exponencialmente estable.

*Demostración.* Como en la demostración del Teorema 4.5, se puede probar que

$$x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\} \implies x(t) \in \Omega_{t, \rho}, \quad \forall t \geq t_0$$

donde  $\rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$ , ya que  $\dot{V}(t, x) \leq 0$ . Además, para todo  $t \geq t_0$ , tenemos

$$\begin{aligned} V(t + \delta, x(t + \delta)) &= V(t, x(t)) + \int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, \phi(\tau, t, x)) d\tau \\ &\leq (1 - \lambda)V(t, x(t)) \end{aligned}$$



Más aún, como  $\dot{V}(t, x) \leq 0$

$$V(\tau, x(\tau)) \leq V(t, x(t)), \quad \forall \tau \in [t, t + \delta]$$

Para cualquier  $t \geq t_0$ , sea  $N$  el menor número natural tal que  $t \leq t_0 + N\delta$ . Dividamos el intervalo  $[t_0, t_0 + (N - 1)\delta]$  en  $N - 1$  subintervalos iguales de longitud  $\delta$ . Entonces,

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &\leq V(t_0 + (N - 1)\delta, x(t_0 + (N - 1)\delta)) \\ &\leq (1 - \lambda)V(t_0 + (N - 2)\delta, x(t_0 + (N - 2)\delta)) \\ &\quad \vdots \\ &\leq (1 - \lambda)^{N-1}V(t_0, x(t_0)) \\ &\leq \frac{1}{1 - \lambda}(1 - \lambda)^{(t-t_0)/\delta}V(t_0, x(t_0)) \\ &= \frac{1}{1 - \lambda}e^{-b(t-t_0)}V(t_0, x(t_0)) \end{aligned}$$

donde  $b = (1/\delta) \ln(1/(1 - \lambda))$ . Tomando

$$\sigma(r, s) = \frac{r}{1 - \lambda}e^{-bs}$$

puede verse fácilmente que  $\sigma(r, s)$  es una función clase  $\mathcal{KL}$  y que  $V(t, x(t))$  satisface

$$V(t, x(t)) \leq \sigma(V(t_0, x(t_0)), t - t_0), \quad \forall V(t_0, x(t_0)) \in [0, \rho]$$

Desde aquí la prueba es idéntica a la del Teorema 4.5 y sus corolarios. □

**Ejemplo 4.7 (Sistema lineal inestacionario revisitado).** Sea el sistema

$$\dot{x} = A(t)x$$

donde  $A(t)$  es continua  $\forall t \geq 0$ . Supongamos que existe una matriz simétrica  $P(t)$  que satisface

$$0 < c_1 I \leq P(t) \leq c_2 I, \quad \forall t \geq 0$$

y la ecuación diferencial matricial

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + C^T(t)C(t)$$

donde  $C(t)$  es continua. La derivada de la función cuadrática

$$V(t, x) = x^T P(t)x$$

a lo largo de las trayectorias del sistema es

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= x^T \left( \dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) \right) x \\ &= -x^T C^T(t)C(t)x \leq 0. \end{aligned}$$

De la teoría de sistemas lineales inestacionarios sabemos que las trayectorias del sistema que comienzan en el punto  $x$  están dadas por

$$\phi(\tau, t, x) = \Phi(\tau, t)x,$$

donde  $\Phi(\tau, t)$  es la *matriz de transición de estados*. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, \phi(\tau, t, x)) d\tau &= -x^T \left[ \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \right] x \\ &= -x^T W(t, t + \delta) x, \end{aligned}$$

donde

$$W(t, t + \delta) = \int_t^{t+\delta} \Phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau.$$

Supongamos que existe una constante  $k < c_2$  tal que

$$W(t, t + \delta) \geq kI, \quad \forall t \geq 0.$$

Entonces

$$\int_t^{t+\delta} \dot{V}(\tau, \phi(\tau, t, x)) d\tau \leq -k \|x\|_2^2 \leq -\frac{k}{c_2} V(t, x).$$

Así, todas las hipótesis del Teorema 4.14 se satisfacen globalmente y concluimos que el origen es globalmente exponencialmente estable.

Los lectores familiares con la teoría de sistemas lineales reconocerán que la matriz  $W(t, t + \delta)$  es el *Gramiano de observabilidad* del par  $(A(t), C(t))$  y que la desigualdad  $W(t, t + \delta) \geq kI$  está garantizada si el par  $(A(t), C(t))$  es uniformemente observable.

Comparando este ejemplo con el Ejemplo 4.5 vemos que el Teorema 4.14 permite relajar el requerimiento de que la matriz  $Q(t)$  en (4.8) sea definida positiva a pedir que  $Q(t) = C^T(t)C(t)$  con el par  $(A(t), C(t))$  sea uniformemente observable.  $\circ$

## 4.4 Ejercicios

### Ejercicio 4.1

Dado el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2 + 3t + 2 - 3x_1 - 2(t + 1)x_2 \end{aligned}$$

- (i) Verificar que  $x_1(t) = t$ ,  $x_2(t) = 1$  es una solución.
- (ii) Mostrar que si  $x(0)$  está suficientemente cerca de  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  entonces  $x(t)$  se aproxima a  $\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ .

### Ejercicio 4.2

Considerar el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + g(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= g(t)x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

donde  $g(t)$  es continuamente diferenciable y  $|g(t)| \leq 1$  para todo  $t \geq 0$ . Mostrar que el origen es uniformemente asintóticamente estable. ¿Es el origen globalmente uniformemente asintóticamente estable?

**Ejercicio 4.3**

Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - g(t)x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - g(t)x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned}$$

donde  $g(t)$  es una función continuamente diferenciable, acotada, y  $g(t) \geq k > 0$  para todo  $t \geq 0$ . ¿Es el origen uniformemente asintóticamente estable? ¿Es exponencialmente estable?

**Ejercicio 4.4**

Considerar el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + (x_1^2 + x_2^2) \sin t \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + (x_1^2 + x_2^2) \cos t.\end{aligned}$$

Mostrar que el origen es exponencialmente estable y estimar la región de atracción.



# Capítulo 5

## Estabilidad de Sistemas Perturbados

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x) \quad (5.1)$$

donde  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  son seccionalmente continuas en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  en  $[0, \infty) \times D$  y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene el origen  $x = 0$ . Pensamos a (5.1) como una perturbación del sistema nominal

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (5.2)$$

El término de perturbación  $g(t, x)$  puede provenir de errores de modelado, envejecimiento, incertidumbres, etc. Típicamente no conocemos el término  $g(t, x)$  pero tenemos alguna información sobre él, como por ejemplo una cota superior de  $\|g(t, x)\|$ . La representación *aditiva* de la perturbación en (5.1) modela, por ejemplo, perturbaciones que no modifican el orden del sistema.

Supongamos que el sistema nominal (5.2) tiene un PE uniformemente AE en el origen. ¿Qué podemos decir acerca de la estabilidad del sistema perturbado (5.1)? Una forma natural de encarar esta cuestión es la de usar una función de Lyapunov del sistema nominal como candidata a función de Lyapunov para el sistema perturbado. Esto es lo que hicimos con el análisis de la linealización en la sección §3.4. El elemento nuevo que introducimos ahora es que el término de perturbación puede ser mucho más general que en el caso de linealización. En las primeras dos secciones, vamos a analizar el caso en que el término de perturbación se anula en el origen, es decir  $g(t, 0) = 0$ , de forma que el origen  $x = 0$  sigue siendo un PE del sistema perturbado. El caso  $g(t, 0) \neq 0$  se tratará en la sección §5.3. Un caso particular de perturbación que no necesariamente se anula en el origen nos servirá para introducir el concepto de estabilidad entrada-estado (ISS) en la sección §5.4.

### 5.1 Perturbación de un PE Exponencialmente Estable

Supongamos entonces que  $g(t, 0) = 0$  y que  $x = 0$  es un PE *exponencialmente* estable del sistema nominal (5.2). Sea  $V(t, x)$  una función de Lyapunov que satisface

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^2 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2 \quad (5.4)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\| \quad (5.5)$$

para todo  $(t, x) \in [0, \infty) \times D$  y para ciertas constantes positivas  $c_1, c_2, c_3$  y  $c_4$ . La existencia de una función de Lyapunov que satisface (5.3)-(5.5) está garantizada por el Teorema 4.9, con algunas hipótesis adicionales. Supongamos además que el término de perturbación  $g(t, x)$  satisface la *cota de crecimiento lineal*

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in D \quad (5.6)$$

donde  $\gamma$  es una constante no negativa. La propiedad (5.6) es natural dadas las hipótesis que hicimos sobre  $g(t, x)$ . Como  $g(t, x)$  se anula en el origen y es localmente Lipschitz en un entorno acotado del origen, entonces es fácil de probar que satisface (5.6) en dicho entorno. Usamos  $V$  como candidata a función de Lyapunov para el sistema perturbado (5.1). Planteamos

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x).$$

Usando (5.4)-(5.6), acotamos  $\dot{V}$  de la siguiente manera

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\| \leq -c_3 \|x\|^2 + c_4 \gamma \|x\|^2.$$

Si  $\gamma$  es lo suficientemente pequeña tal que satisface la cota

$$\gamma < \frac{c_3}{c_4} \quad (5.7)$$

entonces

$$\dot{V}(t, x) \leq -(c_3 - c_4 \gamma) \|x\|^2 < 0, \quad \forall x \in D - \{0\}.$$

Por lo tanto, usando el Corolario 4.7, podemos probar el siguiente lema.

**Lema 5.1 (Estabilidad exponencial robusta).** Sea  $x = 0$  un PE exponencialmente estable del sistema nominal (5.2). Sea  $V(t, x)$  una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface (5.3)-(5.5) en  $[0, \infty) \times D$ . Supongamos que el término de perturbación  $g(t, x)$  satisface (5.6)-(5.7). Entonces el origen es un PE exponencialmente estable del sistema perturbado (5.1). Más aún, si las hipótesis valen globalmente, entonces el origen es globalmente exponencialmente estable.  $\circ$

Este lema es conceptualmente importante porque muestra que la estabilidad exponencial del origen es *robusta* con respecto a una clase de perturbaciones que satisface (5.6)-(5.7). Para poder enunciar esta propiedad de robustez no es necesario conocer  $V(t, x)$  explícitamente, sólo hace falta saber que el origen es un PE exponencialmente estable del sistema nominal, porque entonces, usando el Teorema 4.9 (asumiendo además que la matriz Jacobiana  $\partial f / \partial x$  es acotada), podemos garantizar la existencia de una  $V(t, x)$  que satisface (5.3)-(5.5). Sin embargo, si no conocemos a  $V(t, x)$  explícitamente, entonces no podemos calcular la cota (5.7), en cuyo caso sólo podemos decir que el origen es exponencialmente estable para toda perturbación que satisface (5.6) con  $\gamma$  suficientemente pequeña.

**Ejemplo 5.1.** Consideremos el sistema

$$\dot{x} = Ax + g(t, x)$$

donde  $A$  es Hurwitz y  $g(t, x)$  satisface (5.6) con  $D = \mathbb{R}^n$ . Sea  $Q = Q^T > 0$  y calculemos la solución  $P$  de la ecuación de Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$ . Por el Teorema 3.10 sabemos

que hay una única solución  $P = P^T > 0$ . La función de Lyapunov cuadrática  $V(x) = x^T P x$  satisface (5.3)-(5.5). En particular,

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(P)\|x\|_2^2 &\leq x^T P x \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|_2^2 \\ \frac{\partial V}{\partial x} A x &= -x^T Q x \leq -\lambda_{\min}(Q)\|x\|_2^2 \\ \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\|_2 &= \|2x^T P\|_2 \leq 2\|P\|_2\|x\|_2 = 2\lambda_{\max}(P)\|x\|_2. \end{aligned}$$

La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema satisface

$$\dot{V}(x) \leq -\lambda_{\min}(Q)\|x\|_2^2 + 2\lambda_{\max}(P)\gamma\|x\|_2^2.$$

Por lo tanto el origen es globalmente exponencialmente estable si

$$\gamma < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (5.8)$$

Esta cota depende de la elección de  $Q$ , sin embargo el máximo del lado derecho de (5.8) se obtiene para  $Q = I$  (ver el Ejercicio 5.1).  $\circ$

**Ejemplo 5.2.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 2x_2 + \beta x_2^3 \end{aligned}$$

donde la constante  $\beta \geq 0$  es desconocida. Este sistema tiene la forma (5.1) con

$$f(x) = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta x_2^3 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de  $A$  son  $-1 \pm j\sqrt{3}$ , por lo tanto  $A$  es Hurwitz. La solución de la ecuación de Lyapunov  $PA + A^T P = -I$  es

$$P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/8 \\ 1/8 & 5/16 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

La función de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$  satisface (5.4)-(5.5) con  $c_3 = 1$  y

$$c_4 = 2\lambda_{\max}(P) = 3.026$$

El término de perturbación  $g(x)$  satisface

$$\|g(x)\|_2 = \beta|x_2|^3 \leq \beta k_2^2|x_2| \leq \beta k_2^2\|x\|_2$$

para todo  $|x_2| \leq k_2$ , donde  $k_2$  es una constante que vamos a determinar después, porque a esta altura no sabemos una cota para  $x_2(t)$ , aunque sí sabemos que estará acotada cuando la trayectoria  $x(t)$  se mueva dentro de un conjunto compacto. Usando  $V(x)$  como candidata a función de Lyapunov para el sistema perturbado, obtenemos

$$\dot{V}(x) \leq -\|x\|_2^2 + 3.026\beta k_2^2\|x\|_2^2$$

Por lo tanto,  $\dot{V}(x)$  es definida negativa si

$$\beta < \frac{1}{3.026 k_2^2} \quad (5.10)$$

Para estimar una cota de  $k_2$ , sea  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) \leq c\}$ . Para cualquier constante positiva  $c$ , el conjunto  $\Omega_c$  es cerrado y acotado. La frontera de  $\Omega_c$  es la superficie de nivel

$$V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{5}{16}x_2^2 = c$$

El mayor valor de  $|x_2|$  sobre la superficie  $V(x) = c$  se puede determinar derivando la ecuación de la superficie con respecto a  $x_1$  e igualando a cero. Esto da

$$3x_1 + \frac{1}{4}x_2 = 0$$

Por lo tanto, los valores extremos de  $x_2$  se obtienen en la intersección de la recta  $x_1 = -x_2/12$  con la superficie de nivel. Haciendo esto da un máximo para  $x_2^2$  de  $96c/29$ . Por lo tanto, todos los puntos en el interior de  $\Omega_c$  satisfacen la cota

$$|x_2| \leq k_2 \quad \text{donde} \quad k_2^2 = \frac{96c}{29}$$

Entonces, usando (5.10), si

$$\beta < \frac{29}{96c \times 3.026} \approx \frac{0.1}{c} \quad (5.11)$$

$\dot{V}(x)$  será definida negativa en  $\Omega_c$  y podemos concluir que el origen  $x = 0$  es exponencialmente estable, siendo  $\Omega_c$  una estima de la RA.

Vamos a aprovechar este ejemplo para mostrar que la cota (5.7) puede ser muy conservadora. Usando esa cota, llegamos a la desigualdad (5.10). Esta desigualdad permite al término de perturbación  $g(t, x)$  ser cualquier vector de dos componentes que satisfaga  $\|g(t, x)\|_2 \leq \beta k_2^2 \|x\|_2$ . Esta clase de perturbaciones es más general que la perturbación específica que tenemos en este problema. Aquí tenemos una *perturbación estructurada* en el sentido de que la primera componente de  $g$  es siempre cero, mientras que nuestro análisis permitía *perturbaciones no estructuradas* donde el vector  $g$  puede cambiar en todas las direcciones. No tener en cuenta la estructura de la perturbación lleva en general a resultados conservadores.

Repitamos el análisis, esta vez teniendo en cuenta la estructura de la perturbación. Volvemos a calcular la derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -\|x\|_2^2 + 2x^T P g(x) \\ &= -\|x\|_2^2 + 2\beta x_2^2 \left( \frac{1}{8}x_1x_2 + \frac{5}{16}x_2^2 \right) \\ &\leq -\|x\|_2^2 + 2\beta x_2^2 \left( \frac{1}{16}\|x\|_2^2 + \frac{5}{16}\|x\|_2^2 \right) \\ &\leq -\|x\|_2^2 + \frac{3}{4}\beta k_2^2 \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\dot{V}(x)$  es definida negativa si  $\beta < 4/(3k_2^2)$ . Usando otra vez el hecho de que para todo  $x \in \Omega_c$ ,  $|x_2|^2 \leq k_2^2 = \frac{96c}{29}$ , llegamos a la cota

$$\beta < \frac{0.4}{c}$$

que es cuatro veces mayor que (5.11). ◦



## 5.2 Perturbación de un PE Uniformemente AE

Cuando el origen del sistema nominal (5.2) no es exponencialmente estable sino sólo uniformemente AE, el análisis se hace más complicado. Supongamos que el sistema nominal tiene una función de Lyapunov definida positiva y decreciente  $V(t, x)$  que satisface

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x)$$

para todo  $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ , donde  $W_3(x)$  es definida positiva y continua. La derivada de  $V(t, x)$  sobre las trayectorias del sistema (5.1) satisface

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \leq -W_3(x) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \right\|$$

Para lograr que  $\dot{V}(t, x)$  sea definida negativa necesitamos probar que

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} g(t, x) \right\| < W_3(x)$$

para todo  $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ . Es claro que esto requiere que pongamos una cota a  $\|g(t, x)\|$  que va a depender de la naturaleza de la función de Lyapunov del sistema nominal. Una clase de funciones de Lyapunov para las cuales el análisis es tan simple como para el caso de estabilidad exponencial es el caso en que  $V(t, x)$  es definida positiva, decreciente, y satisface

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \phi^2(x) \tag{5.12}$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \leq c_4 \phi(x) \tag{5.13}$$

para todo  $(t, x) \in [0, \infty) \times D$ , para ciertas constantes positivas  $c_3$  y  $c_4$ , y donde  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es definida positiva y continua. Una función de Lyapunov que satisface (5.12)-(5.13) se denomina *tipo-cuadrática*. Es claro que una función de Lyapunov que satisface (5.3)-(5.5) es de tipo cuadrática, pero una función de Lyapunov tipo cuadrática puede existir aunque el origen no sea exponencialmente estable (ver Ejemplo 5.3 más abajo).

Si el sistema nominal (5.2) tiene una función de Lyapunov tipo cuadrática, entonces su derivada sobre las trayectorias del sistema (5.1) satisface

$$\dot{V}(t, x) \leq -c_3 \phi^2(x) + c_4 \phi(x) \|g(t, x)\|$$

Supongamos ahora que el término de perturbación satisface la cota

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \phi(x), \quad \gamma < \frac{c_3}{c_4}$$

Entonces

$$\dot{V}(t, x) \leq -(c_3 - \gamma c_4) \phi^2(x)$$

lo que muestra que  $\dot{V}(t, x)$  es definida negativa.

**Ejemplo 5.3.** Consideremos el sistema escalar

$$\dot{x} = -x^3 + g(t, x)$$

El sistema nominal  $\dot{x} = -x^3$  tiene un PE globalmente AE en el origen, pero como vimos en el Ejemplo 4.6, el origen no es exponencialmente estable. Por lo tanto no existe una función de Lyapunov que satisfaga (5.3)-(5.5). La función de Lyapunov  $V(x) = x^4$  satisface (5.12)-(5.13) con  $\phi(x) = |x|^3$  y  $c_3 = c_4 = 4$ . Supongamos que el término de perturbación satisface la cota  $|g(t, x)| \leq \gamma|x|^3$  para todo  $x$ , con  $\gamma < 1$ . Entonces la derivada de  $V(t, x)$  sobre las trayectorias del sistema perturbado satisface

$$\dot{V}(t, x) \leq -4(1 - \gamma)x^2$$

Por lo tanto, el origen es un PE globalmente uniformemente AE del sistema perturbado.  $\circ$

En contraste con el caso de estabilidad exponencial, es importante remarcar que un sistema nominal con un PE en el origen uniformemente AE, pero no exponencialmente estable, *no es robusto* a perturbaciones con cotas de crecimiento lineal arbitrariamente pequeñas del tipo (5.6). Vemos esto con un ejemplo.

**Ejemplo 5.4.** Consideremos el sistema del ejemplo anterior con  $g(x) = \gamma x$ ,  $\gamma > 0$ , es decir

$$\dot{x} = -x^3 + \gamma x$$

Se puede ver fácilmente, mediante linealización, que para cualquier  $\gamma > 0$ , sin importar cuan chica sea, el origen es inestable.  $\circ$

### 5.3 Perturbación No Evanesciente

Veamos ahora el caso más general en que no sabemos si  $g(t, 0) = 0$ . En este caso, el origen  $x = 0$  puede no ser un PE del sistema perturbado (5.1); no podemos entonces estudiar estabilidad del origen como PE o asumir que la solución del sistema perturbado tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Lo más que podemos esperar es que si el término de perturbación  $g(t, x)$  es chico en algún sentido, entonces la trayectoria  $x(t)$  esté *finalmente acotada* por una cota pequeña, es decir, que  $\|x(t)\|$  sea pequeña para  $t$  suficientemente grande.

**Definición 5.1 (Solución finalmente acotada).** Las soluciones de  $\dot{x} = f(t, x)$  se dicen uniformemente finalmente acotadas si existen constantes positivas  $b$  y  $c$ , y para cada  $\alpha \in (0, c)$  existe una constante positiva  $T = T(\alpha)$  tales que

$$\|x(t_0)\| < \alpha \implies \|x(t)\| \leq b, \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (5.14)$$

Se dicen globalmente uniformemente finalmente acotadas si (5.14) vale para  $\alpha$  arbitrariamente grande.  $\circ$

La constante  $b$  en (5.14) se denomina *cota final*. En el caso de sistemas autónomos no necesitamos usar el término “uniforme” ya que la solución depende sólo de  $t - t_0$ . El siguiente teorema “estilo Lyapunov” es muy útil para probar cota final.

**Teorema 5.2 (Solución finalmente acotada).** Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un dominio que contiene al origen y sea  $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  seccionalmente continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$ . Sea  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x) \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -W_3(x), \quad \forall \|x\| \geq \mu > 0 \quad (5.16)$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$ , donde  $W_i(x)$  son funciones continuas definidas positivas en  $D$ . Tomemos  $r > 0$  tal que  $B_r \subset D$  y supongamos que  $\mu$  es lo suficientemente pequeña tal que

$$\eta \triangleq \max_{\|x\| \leq \mu} W_2(x) < \min_{\|x\|=r} W_1(x) \quad (5.17)$$

Tomemos  $\rho$  tal que  $\eta < \rho < \min_{\|x\|=r} W_1(x)$ . Entonces existe un tiempo finito  $t_1$  (dependiente de  $x(t_0)$  y  $\mu$ ) y una función  $\beta(\cdot, \cdot)$  de clase  $\mathcal{KL}$  tales que  $\forall x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$ , las soluciones de  $\dot{x} = f(t, x)$  satisfacen

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t < t_1 \quad (5.18)$$

$$x(t) \in \{x \in B_r \mid W_1(x) \leq \eta\}, \quad \forall t \geq t_1 \quad (5.19)$$

Más aún, si  $D = \mathbb{R}^n$  y  $W_1(x)$  es radialmente no acotada, entonces (5.18) y (5.19) valen para todo estado inicial  $x(t_0)$  y todo  $\mu$ .

*Demostración.* La prueba tiene mucho en común con la prueba del Teorema 4.5, por lo tanto vamos a usar ideas y terminología de dicha prueba a medida que necesitemos. Definamos el conjunto variante en el tiempo  $\Omega_{t, \eta} = \{x \in B_r \mid V(t, x) \leq \eta\}$ . Entonces,

$$B_\mu \subset \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \eta\} \subset \Omega_{t, \eta} \subset \{x \in B_r \mid W_1(x) \leq \eta\} \subset \{x \in B_r \mid W_1(x) \leq \rho\} \\ \Omega_{t, \eta} \subset \Omega_{t, \rho} \subset \{x \in B_r \mid W_1(x) \leq \rho\} \subset B_r \subset D$$

Los conjuntos  $\Omega_{t, \rho}$  y  $\Omega_{t, \eta}$  tienen la propiedad de que una solución que comience en cualquiera de ellos no sale del conjunto ya que  $\dot{V}(t, x)$  es negativa en la frontera. Por lo tanto, si  $x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$ , la solución  $x(t)$  quedará en  $\Omega_{t, \rho}$  para todo  $t \geq t_0$ . Para una solución que comienza en  $\Omega_{t, \eta}$ , la relación (5.19) vale para todo  $t \geq t_0$ . Para una solución que comienza dentro de  $\Omega_{t, \rho}$  pero fuera de  $\Omega_{t, \eta}$ , sea  $t_1$  el primer instante en que entra a  $\Omega_{t, \eta}$  (que podría ser  $\infty$  si la solución nunca entra en dicho conjunto). Para todo  $t \in [t_0, t_1)$ , las desigualdades (5.15) y (5.16) valen. Por lo tanto, de manera similar a la prueba del Teorema 4.5, existe una función  $\alpha(\cdot)$  clase  $\mathcal{K}$  tal que  $\dot{V} \leq -\alpha(V)$ . En consecuencia, existe una función  $\beta(\cdot, \cdot)$  de clase  $\mathcal{KL}$  que satisface (5.18). Como  $\beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , existe un tiempo finito a partir del cual  $\beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) < \mu$  para todo  $t$ . Por lo tanto,  $t_1$  debe ser finito, es decir, la solución debe entrar en  $\Omega_{t, \eta}$  en tiempo finito. Una vez dentro del conjunto, la solución se queda ahí para todo  $t \geq t_1$ . Entonces también  $x(t) \in \{x \in B_r \mid W_1(x) \leq \eta\}$  para todo  $t \geq t_1$ . Si  $D = \mathbb{R}^n$  y  $W_1(x)$  es radialmente no acotada, entonces para cualquier estado inicial  $x(t_0)$  y cualquier  $\mu$ , podemos elegir  $r$  y  $\rho$  lo suficientemente grandes para que (5.17) se satisfaga y  $x(t_0) \in \{x \in B_r \mid W_2(x) \leq \rho\}$ .  $\square$

**Corolario 5.3 (Cota Final).** Bajo las hipótesis del Teorema 5.2, sean  $\alpha_1(\cdot)$  y  $\alpha_2(\cdot)$  funciones clase  $\mathcal{K}$  definidas en  $[0, r]$  tales que

$$\alpha_1(\|x\|) \leq W_1(x) \quad \text{and} \quad W_2(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \quad \forall x \in D$$

Supongamos que  $\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$  y  $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ . Entonces las soluciones de  $\dot{x} = f(t, x)$  están uniformemente finalmente acotadas con cota final  $\alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu))$ .  $\circ$

**Corolario 5.4.** Bajo las hipótesis del Corolario 5.3, las soluciones de  $\dot{x} = f(t, x)$  satisfacen

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) \quad (5.20)$$

◦

**Corolario 5.5.** Supongamos que las hipótesis del Teorema 5.2 se satisfacen con

$$W_1(x) \geq k_1\|x\|^c, \quad W_2(x) \leq k_2\|x\|^c, \quad W_3(x) \geq k_3\|x\|^c$$

para ciertas constantes positivas  $k_i$  y  $c$ . Supongamos además que  $\mu < r(k_1/k_2)^{1/c}$  y  $\|x(t_0)\| < r(k_1/k_2)^{1/c}$ . Entonces (5.18) y (5.19) toman la forma

$$\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\|e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad \forall t_0 \leq t < t_1 \quad (5.21)$$

$$\|x(t)\| \leq \mu k, \quad \forall t \geq t_1 \quad (5.22)$$

donde  $k = (k_2/k_1)^{1/c}$  y  $\gamma = k_3/(k_2c)$ . ◦

Es importante notar que la cota final obtenida en el Corolario 5.3 es una función clase  $\mathcal{K}$  de  $\mu$ , porque cuanto más chico sea  $\mu$ , más chica va a ser la cota final. Cuando  $\mu \rightarrow 0$ , la cota final también tiende a cero.

**Ejemplo 5.5.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 2x_2 + \beta x_2^3 + d(t) \end{aligned}$$

donde la constante  $\beta \geq 0$  es desconocida y  $d(t)$  es una perturbación uniformemente acotada que satisface  $|d(t)| \leq \delta$  para todo  $t \geq 0$ . Este sistema ya fue analizado en el Ejemplo 5.2, sólo que ahora le agregamos el término de perturbación  $d(t)$ . Nuevamente el sistema puede pensarse como una perturbación de un sistema lineal nominal con función de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ , con  $P$  dada en (5.9). Usamos  $V(x)$  como candidata a función del Lyapunov para el sistema perturbado, pero tratamos los términos  $\beta x_2^3$  y  $d(t)$  en forma diferente ya que el primero se anula en el origen mientras que el segundo no. La derivada de  $V(x)$  sobre las trayectorias del sistema satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= -\|x\|_2^2 + 2\beta x_2^2(x_1 x_2/8 + 5x_2^2/16) + 2d(t)(x_1/8 + 5x_2/16) \\ &\leq -\|x\|_2^2 + 3\beta k_2^2 \|x\|_2^2 + \sqrt{29}\delta \|x\|_2/8 \end{aligned}$$

donde usamos la desigualdad  $|2x_1 + 5x_2| \leq \|x\|_2 \sqrt{4 + 25}$ , y  $k_2$  es una cota superior de  $|x_2|$ . Supongamos que  $\beta \leq 4(1 - \zeta)/(3k_2^2)$ , donde  $0 < \zeta < 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= -\zeta \|x\|_2^2 + \sqrt{29}\delta \|x\|_2/8 \\ &\leq -(1 - \theta)\zeta \|x\|_2^2, \quad \forall \|x\|_2 \geq \mu = \sqrt{29}\delta/(8\zeta\theta) \end{aligned} \quad (5.23)$$

donde  $0 < \theta < 1$ . Como vimos en el Ejemplo 5.2,  $|x_2|^2$  está acotado en  $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid V(x) \leq c\}$  por  $k_2^2 = 96c/29$ . Por lo tanto, si  $\beta < 0.4(1 - \zeta)/c$  y  $\delta$  es tan pequeña que  $\mu^2 \lambda_{\max}(P) < c$ , entonces  $B_\mu \subset \Omega_c$  y todas las trayectorias que comienzan dentro de  $\Omega_c$  permanecen dentro de  $\Omega_c$  para todo tiempo futuro (ya que, por (5.23),  $V(x)$  decrece afuera de  $B_\mu$  y  $\Omega_c$  es una superficie de nivel de  $V(x)$ ). Más aún, las condiciones del Teorema 5.2 (y Corolario 5.5) se

satisfacen en  $\Omega_c$ . Por lo tanto, las soluciones del sistema perturbado están uniformemente finalmente acotadas con cota final

$$b = \frac{\sqrt{29}\delta}{8\zeta\theta} \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}}$$

◦

Veamos ahora cómo se puede usar el Teorema 5.2 para analizar la estabilidad del sistema perturbado (5.1) cuando el origen del sistema nominal es UAE.

**Lema 5.6.** Sea  $x = 0$  un PE UAE del sistema nominal (5.2). Sea  $V(t, x)$  una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface las desigualdades (4.15) en  $[0, \infty) \times D$ , donde  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$  y  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  son funciones clase  $\mathcal{K}^1$ . Supongamos que el término de perturbación  $g(t, x)$  satisface la cota uniforme

$$\|g(t, x)\| \leq \delta < \frac{\theta\alpha_3(\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)))}{\alpha_4(r)} \quad (5.24)$$

para todo  $t \geq 0$ , todo  $x \in D$  y cierta constante positiva  $\theta < 1$ . Entonces, para todo  $\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ , la solución  $x(t)$  del sistema perturbado (5.1) satisface

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t < t_1 \\ x(t) &\leq \rho(\delta), \quad \forall t \geq t_1 \end{aligned}$$

para cierta función  $\beta(\cdot, \cdot)$  de clase  $\mathcal{KL}$  y cierto tiempo finito  $t_1$ , donde  $\rho(\delta)$  es una función clase  $\mathcal{K}$  definida por

$$\rho(\delta) = \alpha_1^{-1} \left( \alpha_2 \left( \alpha_3^{-1} \left( \frac{\delta\alpha_4(r)}{\theta} \right) \right) \right)$$

*Demostración.* Usamos  $V(t, x)$  como candidata a función de Lyapunov para el sistema perturbado (5.1). La derivada de  $V(t, x)$  sobre las trayectorias de (5.1) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq -\alpha_3(\|x\|) + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t, x)\| \\ &\leq -\alpha_3(\|x\|) + \delta\alpha_4(\|x\|) \\ &\leq -(1 - \theta)\alpha_3(\|x\|) - \theta\alpha_3(\|x\|) + \delta\alpha_4(r), \quad 0 < \theta < 1 \\ &\leq -(1 - \theta)\alpha_3(\|x\|), \quad \forall \|x\| \geq \alpha_3^{-1} \left( \frac{\delta\alpha_4(r)}{\theta} \right) \end{aligned}$$

La prueba se completa usando el Teorema 5.2 y el Corolario 5.3. □

## 5.4 Estabilidad Entrada-Estado

Consideremos ahora el sistema con entrada

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (5.25)$$

---

<sup>1</sup>El Teorema 4.11 da condiciones para la existencia de dicha función.

donde  $f : [0, \infty) \times D \times D_u \rightarrow \mathbb{R}^n$  es seccionalmente continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  y  $u$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene a  $x = 0$ , y  $D_u \subset \mathbb{R}^m$  es un dominio que contiene a  $u = 0$ . La entrada  $u(t)$  es una función acotada y seccionalmente continua de  $t$  para todo  $t \geq 0$ . Supongamos que el sistema

$$\dot{x} = f(t, x, 0) \quad (5.26)$$

tiene un PE UAE en el origen  $x = 0$ . Una forma de analizar el comportamiento entrada-estado del sistema forzado (5.25), es considerar a (5.25) como una perturbación del sistema no forzado (5.26), y aplicar las técnicas de la sección anterior. Por ejemplo, si el sistema no forzado satisface las hipótesis del Lema 5.6 y el término de perturbación satisface la cota

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| \leq L\|u\| \quad L \geq 0$$

para todo  $t \geq 0$  y todo  $(x, u)$  en algún entorno de  $(0, 0)$ , entonces el Lema 5.6 garantiza que para  $\|x(t_0)\|$  y  $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|$  suficientemente pequeños, la solución de (5.25) satisface

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \rho \left( L \sup_{\tau \geq t_0} \|u(\tau)\| \right), \quad \forall t \geq t_0$$

Esto motiva la siguiente definición de la propiedad de estabilidad entrada-estado (Input to State Stability, ISS).

**Definición 5.2 (Estabilidad Entrada-Estado, ISS).** El sistema (5.25) es *localmente estable entrada-estado* si existen una función  $\beta$  de clase  $\mathcal{KL}$ , una función  $\gamma$  de clase  $\mathcal{K}$ , y constantes positivas  $k_1$  y  $k_2$  tales que, para cualquier estado inicial  $x(t_0)$  con  $\|x(t_0)\| < k_1$  y cualquier entrada  $u(t)$  con  $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\| < k_2$ , la solución  $x(t)$  existe y satisface

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\| \right) \quad (5.27)$$

para todo  $t \geq t_0 \geq 0$ . Es *estable entrada-estado* si  $D = \mathbb{R}^n$ ,  $D_u = \mathbb{R}^m$ , y la desigualdad (5.27) se satisface para cualquier estado inicial  $x(t_0)$  y cualquier entrada acotada  $u(t)$ .  $\circ$

La desigualdad (5.27) garantiza que para cualquier entrada acotada  $u(t)$ , el estado  $x(t)$  se va a mantener acotado. Más aún, cuando  $t$  aumenta, el estado  $x(t)$  va a tener una cota final que es una función clase  $\mathcal{K}$  de  $\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|$ . Puede probarse que si  $u(t)$  converge a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , también lo hace  $x(t)$ . Notar que, con  $u(t) \equiv 0$ , (5.27) se reduce a

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0)$$

Por lo tanto, ISS local implica que el origen del sistema no forzado es UAE, mientras que ISS implica que es GUAE.

El siguiente teorema tipo Lyapunov da una condición suficiente para ISS.<sup>2</sup>

**Teorema 5.7.** Sea  $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ ,  $D_u = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\| < r_u\}$ , y  $f : [0, \infty) \times D \times D_u \rightarrow \mathbb{R}^n$  seccionalmente continua en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  y  $u$ . Sea  $V : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) &\leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x, u) &\leq -\alpha_3(\|x\|), \quad \forall \|x\| \geq \rho(\|u\|) > 0 \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Para sistemas estacionarios se ha mostrado que las condiciones del Teorema 5.7 son también necesarias [Sontag and Wang, 1995].

$\forall (t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times D_u$ , donde  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  y  $\rho$  son funciones clase  $\mathcal{K}$ . Entonces el sistema (5.25) es localmente ISS con  $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$ ,  $k_1 = \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r))$ , y  $k_2 = \rho^{-1}(\min\{k_1, \rho(r_u)\})$ . Más aún, si  $D = \mathbb{R}^n$ ,  $D_u = \mathbb{R}^m$ , y  $\alpha_1$  es clase  $\mathcal{K}_\infty$ , entonces (5.25) es ISS con  $\gamma = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$ .

*Demostración.* Usando el Teorema 5.2 y sus Corolarios 5.3 y 5.4, sabemos que para  $x(t_0)$  y  $u(t)$  tales que

$$\|x(t_0)\| < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad \rho \left( \sup_{t \geq t_0} \|u(t)\| \right) < \min\{\alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \rho(r_u)\} \quad (5.28)$$

la solución  $x(t)$  existe y satisface

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma \left( \sup_{\tau \geq t_0} \|u(\tau)\| \right), \quad \forall t \geq t_0 \quad (5.29)$$

Como  $x(t)$  depende sólo de  $u(\tau)$  para  $t_0 \leq \tau \leq t$ , el supremo en el lado derecho de (5.29) puede tomarse en  $[t_0, t]$ , lo que prueba (5.27). En el caso global, la función  $\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1$  es clase  $\mathcal{K}_\infty$ . Entonces, para cualquier  $x(t_0)$  y  $u(t)$  acotada, podemos elegir  $r$  y  $r_u$  lo suficientemente grandes para que se cumplan las desigualdades (5.28).  $\square$

Los siguientes Lemas son consecuencia de los teoremas conversos de Lyapunov.

**Lema 5.8 (Estabilidad asintótica uniforme e ISS).** Supongamos que en algún entorno de  $(x, u) = (0, 0)$ , la función  $f(t, x, u)$  es continuamente diferenciable y las matrices Jacobianas  $[\partial f / \partial x]$  y  $[\partial f / \partial u]$  están acotadas, uniformemente en  $t$ . Si el sistema no forzado (5.26) tiene un PE UAE en el origen  $x = 0$ , entonces el sistema (5.26) es localmente ISS.

*Demostración.* Por el Teorema 4.11 (converso de Lyapunov), el sistema no forzado (5.26) tiene una función de Lyapunov  $V(t, x)$  que satisface las desigualdades (4.15) en algún entorno acotado de  $x = 0$ . Como  $[\partial f / \partial u]$  está acotada, el término de perturbación satisface

$$\|f(t, x, u) - f(t, x, 0)\| \leq L \|u\|, \quad L > 0 \quad (5.30)$$

para todo  $t \geq t_0$  y todo  $(x, u)$  en algún entorno acotado de  $(x, u) = (0, 0)$ . Puede verificarse que  $V(t, x)$  satisface las condiciones del Teorema 5.7 en algún entorno acotado de  $(x, u) = (0, 0)$ .  $\square$

Para sistemas estacionarios, las hipótesis del Lema 5.8 de que los Jacobianos estén acotados se satisfacen trivialmente si  $f(x, u)$  es continuamente diferenciable. Por lo tanto, para *sistemas estacionarios* el Lema dice que *si  $f(x, u)$  es continuamente diferenciable y el origen de (5.26) es AE, entonces (5.25) es localmente ISS.*

**Lema 5.9 (Estabilidad exponencial e ISS).** Supongamos que  $f(t, x, u)$  es continuamente diferenciable y globalmente Lipschitz en  $(x, u)$ , uniformemente en  $t$ . Si el sistema no forzado (5.26) tiene un PE globalmente exponencialmente estable en el origen  $x = 0$ , entonces el sistema (5.25) es ISS.

*Demostración.* Por el Teorema 4.11 (converso de Lyapunov), el sistema no forzado (5.26) tiene una función de Lyapunov  $V(t, x)$  que satisface las desigualdades (4.15) globalmente. Como  $f$  es globalmente Lipschitz en  $(x, u)$ , el término de perturbación satisface (5.30) para todo  $t \geq t_0$  y todo  $(x, u)$ . Puede verificarse que  $V(t, x)$  satisface las condiciones del Teorema 5.7 globalmente.  $\square$

Si el origen del sistema no forzado (5.26) es GUAE pero no globalmente exponencialmente estable, el sistema (5.25) no es necesariamente ISS incluso cuando  $f$  es globalmente Lipschitz en  $(x, u)$  (Ver el Ejercicio 5.5).

Los siguientes ejemplos ilustran el uso del Teorema 5.7.

**Ejemplo 5.6.** El sistema

$$\dot{x} = -x^3 + u$$

tiene un PE GAE en el origen cuando  $u = 0$ . Tomando  $V = x^2/2$ , tenemos

$$\dot{V} = -x^4 + xu = -(1 - \theta)x^4 - \theta x^4 + xu \leq -(1 - \theta)x^4, \quad \forall |x| \geq \left(\frac{|u|}{\theta}\right)^{1/3}$$

donde  $\theta$  es una constante tal que  $0 < \theta < 1$ . Probamos entonces que el sistema es ISS con  $\gamma(a) = (a/\theta)^{1/3}$ .  $\circ$

**Ejemplo 5.7.** El sistema

$$\dot{x} = f(x, u) = -x - 2x^3 + (1 + x^2)u^2$$

tiene un PE globalmente exponencialmente estable en el origen cuando  $u = 0$ , pero el Lema 5.9 no se aplica porque  $f$  no es globalmente Lipschitz en  $x$ . Sin embargo, tomando  $V = x^2/2$  obtenemos

$$\dot{V} = -x^2 - 2x^4 + x(1 + x^2)u^2 \leq -x^4, \quad \forall |x| \geq u^2$$

Por lo tanto el sistema es ISS con  $\gamma(a) = a^2$ .  $\circ$

**Ejemplo 5.8.** Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(x, u) = -x + (1 + x^2)u$$

Como en el ejemplo anterior, cuando  $u = 0$  el origen es un PE exponencialmente estable, pero el Lema 5.9 no se aplica porque  $f$  no es globalmente Lipschitz en  $x$ . En este caso puede verse que el sistema no es ISS tomando  $u(t) \equiv 1$ , ya que la solución del sistema resultante

$$\dot{x} = -x + x^2$$

que comienza en  $x(0) = 0$  diverge a infinito (notar que  $\dot{x} \geq 3/4$  para todo  $x$ ). De acuerdo al Lema 5.8, el sistema es localmente ISS. El Teorema 5.7 puede usarse para estimar las cotas del estado inicial y la entrada (las constantes  $k_1$  y  $k_2$  de la Definición 5.2). Sea  $D = \{|x| < r\}$  y  $D_u = R$ . Con  $V(x) = x^2/2$ , tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -x^2 + x(1 + x^2)u \\ &\leq -(1 - \theta)x^2 - \theta x^2 + |x|(1 + r^2)|u| \\ &\leq -(1 - \theta)x^2, \quad \forall \frac{(1 + r^2)|u|}{\theta} \leq |x| < r \end{aligned}$$

donde  $0 < \theta < 1$ . Por lo tanto, el sistema es localmente ISS con  $k_1 = r$ ,  $k_2 = r\theta/(1 + r^2)$ , y  $\gamma(a) = a(1 + r^2)/\theta$ .  $\circ$



## 5.5 Ejercicios

### Ejercicio 5.1

Sea la ecuación de Lyapunov  $PA + A^T P = -Q$ , donde  $Q = Q^T > 0$  y  $A$  es Hurwitz. Sea  $\mu(Q) = \lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)$ .

- (i) Mostrar que  $\mu(kQ) = \mu(Q)$  para cualquier número positivo  $k$ .
- (ii) Sea  $\hat{Q} = \hat{Q}^T > 0$  tal que  $\lambda_{\min}(\hat{Q}) = 1$ . Mostrar que  $\mu(I) \geq \mu(\hat{Q})$ .
- (iii) Mostrar que  $\mu(I) \geq \mu(Q)$  para toda  $Q = Q^T > 0$ .

**Ayuda:** Para la parte ((ii)), si  $P_1$  y  $P_2$  son las soluciones de la ecuación de Lyapunov para  $Q = I$  y  $Q = \hat{Q}$  respectivamente, mostrar que

$$P_1 - P_2 = \int_0^\infty e^{A^T t} (I - \hat{Q}) e^{At} dt \leq 0.$$

### Ejercicio 5.2

Sea el sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$  y sea  $u = Fx$  una realimentación de estados estabilizante; es decir, tal que la matriz  $(A + BF)$  es Hurwitz. Supongamos que, debido a limitaciones físicas, debemos usar un limitador para evitar que el valor de las componentes  $u_i$  de  $u$  no superen en valor absoluto el máximo preestablecido  $L > 0$ , o sea que  $|u_i(t)| \leq L$ .

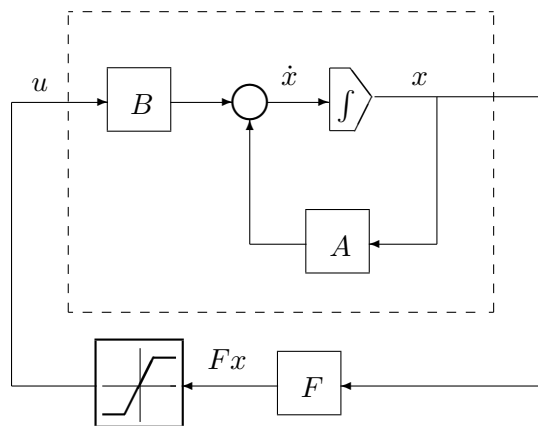


Figura 5.1: Realimentación de estados saturada

El sistema a lazo cerrado, ilustrado en la Figura 5.1, puede representarse por

$$\dot{x} = Ax + BL\text{sat}(Fx/L),$$

donde  $\text{sat}(v)$  es un vector cuya componente  $i$ -ésima es la función saturación

$$\text{sat}(v_i) = \begin{cases} -1, & \text{para } v_i < -1 \\ v_i, & \text{para } |v_i| \leq 1 \\ 1, & \text{para } v_i > 1 \end{cases}$$

Sumando y restando el término  $BFx$ , podemos reescribir el sistema lazo cerrado como

$$\dot{x} = (A + BF)x + Bh(Fx),$$

donde  $h(v) = L\text{sat}(v/L) - v$ . Así, el efecto del limitador puede verse como una perturbación del sistema nominal sin limitaciones en la entrada.

- (i) Mostrar que  $|h_i(v)| \leq \delta/(1 + \delta)|v_i|$  si  $|v_i| \leq L(1 + \delta)$ .
- (ii) Sea  $P$  la solución de  $P(A + BF) + (A + BF)^T P = -I$ . Mostrar que la derivada de  $V(x) = x^T P x$  a lo largo de las trayectorias del sistema a lazo cerrado es definida negativa en la región  $\{x : |(Fx)_i| \leq L(1 + \delta)\}$  si  $\delta/(1 + \delta) < 1/(2\|PB\|_2\|F\|_2)$ .
- (iii) Mostrar que el origen es asintóticamente estable y discutir cómo puede estimarse la región de atracción.
- (iv) Aplicar los resultados anteriores al caso

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1.9 \end{bmatrix},$$

y  $L = 1$ . Estimar la región de atracción del origen.

### Ejercicio 5.3

Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \gamma(t)x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\gamma(t)x_1 - x_2 + h(t)\cos x_1 \end{aligned}$$

donde  $\gamma(t)$  y  $h(t)$  son funciones continuas, y  $|h(t)| \leq H$  para todo  $t \geq 0$ . Mostrar que las soluciones del sistema son globalmente uniformemente finalmente acotada y estimar la cota final.

### Ejercicio 5.4

Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left[ (\sin x_2)^2 - 1 \right] x_1 \\ \dot{x}_2 &= -bx_1 - (1 + b)x_2. \end{aligned}$$

- (i) Con  $b = 0$ , mostrar que el origen es exponencialmente estable y globalmente asintóticamente estable.
- (ii) Con  $b \neq 0$ , mostrar que el origen es exponencialmente estable para  $|b|$  suficientemente pequeño, pero que no puede ser GAE por más pequeño que sea  $|b|$ .
- (iii) Discutir los resultados de las partes (i) y (ii) en relación a los resultados de perturbación de puntos de PE, y mostrar que cuando  $b = 0$  el origen no es globalmente exponencialmente estable.

**Ejercicio 5.5**

Sea el sistema escalar

$$\dot{x} = \frac{-x}{1+x^2}$$

y  $V(x) = x^4$ .

(i) Mostrar que las desigualdades (4.15) se satisfacen con

$$\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = r^4, \quad \alpha_3(r) = \frac{4r^4}{1+r^2}, \quad \alpha_4(r) = 4r^3$$

(ii) Verificar que estas funciones son clase  $\mathcal{K}_\infty$ .

(iii) Mostrar que el lado derecho de (5.24) tiende a cero cuando  $r \rightarrow \infty$ .

(iv) Considerar el sistema perturbado

$$\dot{x} = \frac{-x}{1+x^2} + \delta$$

donde  $\delta$  es una constante positiva. Mostrar que para toda  $\delta > 1/2$  la solución  $x(t)$  escapa a infinito para cualquier condición inicial  $x(0)$ .

**Ejercicio 5.6**

Investigar la estabilidad entrada-estado (ISS) de cada uno de los siguientes sistemas escalares

$$\dot{x} = -(1+u)x^3, \quad \dot{x} = -(1+u)x^3 - x^5,$$

$$\dot{x} = -x + x^2u, \quad \dot{x} = x - x^3 + u.$$

**Ejercicio 5.7**

Sea el sistema

$$\dot{x}_1 = x_1 \left[ \left( \sin \frac{\pi x_2}{2} \right)^2 - 1 \right]$$

$$\dot{x}_2 = -x_2 + u.$$

(i) Con  $u = 0$ , mostrar que el origen es GAE.

(ii) Mostrar que para cualquier entrada acotada  $u(t)$ , el estado  $x(t)$  es acotado.

(iii) Con  $u(t) \equiv 1$ ,  $x_1(0) = a$ , y  $x_2(0) = 1$ , mostrar que la solución es  $x_1(t) \equiv a, x_2(t) \equiv 1$ .

(iv) Es el sistema ISS?



**Parte II**

**Control**



# Capítulo 6

## Control en Realimentación

Los últimos capítulos tratan sobre el diseño de control en realimentación. Introducimos varias herramientas de diseño, incluyendo linealización, tabulación de ganancia, linealización exacta por realimentación, control integral, etc. La mayoría de las herramientas de análisis que hemos visto en los capítulos anteriores entran en juego en estos últimos capítulos. En particular, en este capítulo comenzamos con una sección general sobre problemas de control a modo de introducción a los capítulos que siguen. Luego presentamos dos secciones sobre diseño vía linealización, y diseño por tabulación de ganancia (*gain scheduling*).

### 6.1 Problemas de Control

Muchas tareas de control requieren el uso de control por realimentación. En general, un objetivo básico de un sistema de control es hacer que alguna salida, digamos  $y$ , se comporte de forma deseada mediante la manipulación de alguna entrada, digamos  $u$ . El objetivo más simple puede ser tratar de mantener  $y$  pequeña (o cercana a algún punto de equilibrio) — un problema de *regulación* o *estabilización* — o tratar de mantener la diferencia  $y - r$  pequeña, donde  $r$  es una señal de entrada de referencia perteneciente a cierta clase de señales deseadas — un problema de *servomecanismo* o *seguimiento*. Por ejemplo:

- En un avión comercial la aceleración vertical debe mantenerse por debajo de cierto valor para garantizar comodidad a los pasajeros.
- En un amplificador de audio la potencia de señales de ruido en la salida debe ser suficientemente pequeña para obtener buena fidelidad.
- En la fabricación de papel el contenido de humedad debe mantenerse entre ciertos valores especificados.

Cada problema de control, a su vez, puede tener distintas versiones, dependiendo de los elementos disponibles para resolverlo. Por ejemplo, uno puede resolver un problema de regulación por *realimentación de estados*, si es que todos los estados necesarios son medibles, o bien, por *realimentación de salida*.

En un problema de control típico existen objetivos de diseño adicionales a los básicos de regulación o seguimiento. Por ejemplo, pueden existir requerimientos especiales sobre la respuesta transitoria de  $y$ , o restricciones en los valores de la entrada de control  $u$ . Estos objetivos adicionales pueden no ser completamente compatibles entre sí, por lo que en muchos

casos forzosamente se cae en soluciones de compromiso. El deseo de optimizar estas soluciones de compromiso da lugar a la formulación de varios problemas de control óptimo.

Un objetivo de control adicional particularmente importante es el de mantener los objetivos básicos de diseño ante la presencia de incertidumbres en el modelo matemático del sistema. El diseño de control con tolerancia de incertidumbres de modelado lleva a la formulación de problemas de control *robusto*, o bien problemas de control *adaptable*. En control robusto, la incertidumbre de modelado se caracteriza como una perturbación de un modelo nominal. En control adaptable, por otro lado, la incertidumbre se caracteriza en términos de un conjunto de parámetros desconocidos, y se diseña la realimentación de forma que estos parámetros puedan estimarse mientras el sistema se encuentra en operación. Existen también formulaciones mixtas, que combinan control robusto y adaptable.

En este curso nos limitamos a describir los problemas básicos de estabilización, seguimiento, y rechazo de perturbaciones. Comenzamos con el problema de estabilización, en sus versiones de realimentación de estados, y realimentación de salida.

### 6.1.1 Estabilización

**Realimentación de estados.** El problema de estabilización para el sistema

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

es el problema de diseñar una ley de control

$$u = \gamma(t, x)$$

tal que el origen  $x = 0$  sea un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable del sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = f(t, x, \gamma(t, x)).$$

Una vez que sabemos como resolver este problema, podemos estabilizar el sistema con respecto a un punto  $p$  arbitrario mediante traslación del origen con el cambio de variables  $\xi = x - p$ . Más aún,  $p$  no tiene que ser un punto de equilibrio del sistema a lazo abierto (basta que exista  $q$  tal que  $f(t, p, q) = 0, \forall t$ ).

La ley de control en realimentación  $u = \gamma(t, x)$  suele llamarse “realimentación estática”, puesto que es una función estática de  $x$ . Alternativamente, puede usarse una ley de control dinámica

$$\begin{aligned} u &= \gamma(t, x, z) \\ \dot{z} &= g(t, x, z), \end{aligned}$$

donde  $z$  es la solución de un sistema dinámico cuya entrada es  $x$ . Un ejemplo típico de realimentación dinámica es el control con *acción integral*, que veremos más adelante.

**Realimentación de salida.** El problema de estabilización por realimentación de salida para el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) \\ y &= h(t, x, u) \end{aligned}$$



consiste en diseñar el control estático

$$u = \gamma(t, y)$$

o bien (mas común en este caso ya que por lo general se necesita construir un *observador* para estimar el estado  $x$ ) el control dinámico

$$\begin{aligned} u &= \gamma(t, y, z) \\ \dot{z} &= g(t, y, z) \end{aligned}$$

tal que  $x = 0$  ( $z = 0$ ) sea un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable del sistema a lazo cerrado  $\dot{x} = f(t, x, \gamma(\cdot))$ .

**Sistemas lineales estacionarios.** Naturalmente, el problema de estabilización por realimentación se simplifica si el sistema es lineal y estacionario,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

El control  $u = Kx$  preserva la linealidad del sistema, y el origen del sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

es exponencialmente estable sii  $A + BK$  es Hurwitz. La teoría de sistemas lineales establece que si el par  $(A, B)$  es *controlable*, se pueden asignar arbitrariamente todos los autovalores de  $A + BK$  mediante elección apropiada de  $F$ . Si  $(A, B)$  es *estabilizable*, sólo pueden asignarse los autovalores controlables, pero los no controlables de  $A$  (a lazo abierto) deben tener parte real negativa.

Cuando los estados no están disponibles para realimentación, se puede construir un observador, y se realimentan los estados estimados  $\hat{x}$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + H(C\hat{x} + Du - y) \\ u &= K\hat{x} \end{aligned}$$

En este caso, para asegurar que  $\hat{x}(t)$  converge a  $x(t)$ , la matriz  $A + HC$  debe ser Hurwitz. La teoría de sistemas lineales garantiza que si el par  $(A, C)$  es *observable*, se pueden asignar arbitrariamente todos los autovalores de  $A + HC$  mediante elección apropiada de  $H$ .

Una propiedad importante de los sistemas lineales es el *principio de separación*, que establece que el problema de estabilización por realimentación de salida puede resolverse combinando las soluciones de

- (i) El problema de estabilización mediante realimentación estática de estados,  $u = Kx$ ,
- (ii) El problema de observación de  $x$  a partir de la medición de  $u$  e  $y$ .

Si las matrices  $A + BK$  y  $A + HC$  son Hurwitz, el sistema a lazo cerrado realimentado vía observador es estable, y con los autovalores a lazo cerrado deseados. Esto puede comprobarse planteando la dinámica del sistema total planta/error de estimación,  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ ,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

**Sistemas no lineales.** Para sistemas no lineales generales el problema de estabilización es más difícil y no hay una solución unificada como en el caso lineal. La forma más práctica de encararlo es recurrir a los resultados disponibles en el caso lineal, es decir, vía linealización. Vamos a estudiar dos métodos de este tipo:

- (i) *Diseño vía linealización (Sección 6.2):* linealizamos el sistema alrededor del origen, y diseñamos un control lineal estabilizante para la linealización. La estabilidad alcanzada en el sistema no lineal será local, aunque podemos estimar la región de atracción. La validez de esta idea está garantizada por el Método Indirecto de Lyapunov (Teorema 3.11).
- (ii) *Control por ganancia tabulada (Sección 6.3):* linealizamos el sistema alrededor de una familia de puntos de equilibrio deseados, diseñamos un control lineal estabilizante para cada linealización, y usamos algún mecanismo para conmutar de uno a otro.

En el Capítulo 7 veremos una idea de linealización distinta; trabajaremos con clases especiales de sistemas no lineales que pueden transformarse en sistemas lineales mediante realimentación y (posiblemente) cambio de coordenadas. Luego de esta transformación se puede diseñar un controlador lineal estabilizante para el sistema lineal obtenido. A diferencia de la anterior, este tipo de linealización no involucra ninguna aproximación; es exacta. Esta exactitud, sin embargo, asume conocimiento perfecto de las ecuaciones de estado del sistema y usa este conocimiento para cancelar en forma exacta las alinealidades del sistema. Como en la práctica es imposible el conocimiento exacto del modelo del sistema, este método siempre resulta en un sistema a lazo cerrado que es una perturbación del sistema a lazo cerrado nominal. La validez del método, entonces, utiliza los resultados de teoría de Lyapunov para sistemas perturbados vistos en el Capítulo 5.

Cuando un sistema lineal se estabiliza por realimentación, el origen del sistema a lazo cerrado es globalmente asintóticamente estable. Para sistemas no lineales hay distintas posibilidades de estabilización, que ilustramos sobre un ejemplo.

**Ejemplo 6.1.** Supongamos que deseamos estabilizar el origen del sistema escalar

$$\dot{x} = x^2 + u$$

usando realimentación.

- *Estabilización Local:* PE AE sin estima de la RA.

Linealizando sobre el PE  $x = 0$  obtenemos el sistema  $\dot{x} = u$ , para el cual calculamos un control lineal local  $u = -kx$ ,  $k > 0$ , obteniendo

$$\dot{x} = -kx + x^2$$

El PE  $x = 0$  del sistema a lazo cerrado de arriba es AE, por lo tanto  $u = -kx$  consigue estabilización local.

- *Estabilización Regional:* PE AE con una RA garantizada.

Es fácil de ver que la RA de  $u = -kx$  es  $\{x \in \mathbb{R} : x < k\}$ , por lo tanto obtenemos estabilización regional en  $\{x \in \mathbb{R} : x < k\}$ .

- *Estabilización Semiglobal:* PE AE con RA compacta arbitrariamente grande.

Se puede diseñar el control tal que cualquier conjunto compacto (tan grande como se quiera) esté contenido en la RA. En el ejemplo, aumentando  $k$  agrandamos la RA; dado cualquier conjunto compacto  $B_r = \{|x| \leq r\}$ , lo podemos incluir en la RA tomando  $k > r$ .

- *Estabilización Global:* PE GAE.

Para el ejemplo,  $u = -kx$  no consigue estabilización global. Esto es fácil de ver ya que, dado  $r$ , elegimos  $k > r$ , pero una vez que  $k$  está fija, las condiciones iniciales en la región  $\{x > k\}$  dan soluciones que divergen.

Sin embargo, el control no lineal  $u = -x^2 - kx$  consigue estabilización global, ya que el sistema a lazo cerrado  $\dot{x} = -kx$  es GAE.

◊

### 6.1.2 Seguimiento en Presencia de Perturbaciones

Pasemos ahora a describir un problema de control más general; concretamente, el problema de seguimiento en presencia de perturbaciones. En este caso el sistema está modelado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, u, w) \\ y &= h(t, x, u, w) \\ y_m &= h_m(t, x, u, w)\end{aligned}$$

donde  $x$  es el estado,  $u$  es la entrada de control,  $w$  es la señal de perturbación,  $y$  es la salida a controlar, e  $y_m$  es la salida medida.

El objetivo de control básico es diseñar la entrada de control de forma que la salida controlada  $y$  siga una señal de referencia  $y_R$ , por ejemplo, asintóticamente:

$$e(t) = y(t) - y_R(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

A veces esto es imposible para cierto tipo de señales de perturbación  $w$ , entonces se puede pedir, alternativamente, que  $e(t)$  esté finalmente acotada, es decir

$$\|e(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq T$$

o, si  $w \in \mathcal{L}_2$ , minimizar la ganancia  $\mathcal{L}_2$  del operador a lazo cerrado entre  $w$  y  $e$ .

Una clase importante de problemas de seguimiento se da cuando  $y_R$  es una señal constante. En este caso el problema se convierte en uno de *regulación*, y se resuelve estabilizando el lazo cerrado alrededor de un PE en donde  $y = y_R$ .

Las leyes de control por realimentación para el problema de seguimiento se clasifican de la misma forma vista para el problema de estabilización. Hablamos de realimentación de estados si  $x$  puede medirse; o sea,  $y_m = x$ ; de lo contrario hablamos de realimentación de salida. En forma análoga, la realimentación puede ser estática o dinámica, y puede alcanzar seguimiento local, regional, semiglobal o global. La diferencia en este caso es que la localidad o globalidad se refiere no sólo al tamaño de las condiciones iniciales, sino también al tamaño de las señales externas. Por ejemplo, en un problema típico, seguimiento local significa que se alcanza seguimiento para estados iniciales y señales externas suficientemente pequeñas, mientras que seguimiento global significa que se alcanza seguimiento para cualquier estado inicial y cualquier  $(y, w)$  en una determinada clase de señales.

## 6.2 Diseño Vía Linealización

Ilustramos el diseño vía linealización para los problemas de estabilización y regulación. En cada caso, comenzamos con el control por realimentación de estados y luego presentamos el control por realimentación de salidas.

### 6.2.1 Estabilización

#### Realimentación de estados

Consideramos el sistema

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p, \quad (6.1)$$

donde  $f(0, 0) = 0$ ,  $f(x, u)$  es continuamente diferenciable en un dominio que contiene el origen  $(x, u) = (0, 0)$ . Linealizando alrededor de  $(x, u) = (0, 0)$  obtenemos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6.2)$$

donde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,u)=(0,0)} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x,u)=(0,0)}. \quad (6.3)$$

De la teoría de sistemas lineales, recordamos ahora algunas propiedades que vamos a usar en adelante. Para más detalles y demostraciones ver por ejemplo Chen [1999, Capítulos 6 y 8] o Bay [1999, Capítulos 8 y 10].

**Definición 6.1 (Controlabilidad).** La ecuación de estados (6.2), o el par  $(A, B)$ , se dice *controlable* si para cualquier estado inicial  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  y cualquier estado final  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , existe una entrada  $u$  que transfiere el estado  $x$  de  $x_0$  a  $x_1$  en tiempo finito. En caso contrario, la ecuación (6.2), o el par  $(A, B)$ , se dice *no controlable*. ◻

**Proposición 6.1 (Test de Controlabilidad).** El par  $(A, B)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , es controlable si y sólo si la *matriz de controlabilidad*,

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad C \in \mathbb{R}^{n \times np},$$

es de rango  $n$  (rango fila pleno). ◻

**Proposición 6.2 (Invariancia de la controlabilidad respecto a realimentación).** El par  $(A + BK, B)$ , para cualquier matriz  $K^{p \times n}$ , es controlable si y sólo si el par  $(A, B)$  es controlable. ◻

**Proposición 6.3 (Controlabilidad y asignabilidad de autovalores).** Todos los autovalores de  $(A + BK)$  pueden asignarse arbitrariamente (siempre y cuando los autovalores complejos conjugados se asignen en pares) eligiendo la matriz constante real  $K$  si y sólo si  $(A, B)$  es controlable. ◻

Asumiendo  $(A, B)$  controlable, calculamos  $K$  tal que  $A + BK$  sea Hurwitz, y aplicamos  $u = Kx$  al sistema no lineal, obteniendo el sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = f(x, Kx).$$

Obviamente  $x = 0$  es un PE del sistema y la linealización es

$$\dot{x} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, Kx) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, Kx) K \right]_{x=0} = (A + BK)x.$$

Como  $A + BK$  es Hurwitz, el Teorema 3.11 garantiza que  $x = 0$  es un PE exponencialmente estable del sistema no lineal. Como subproducto del enfoque de linealización, disponemos además de una función de Lyapunov para estimar la RA:

$$V(x) = x^T P x,$$

donde  $P = P^T > 0$  se calcula de la ecuación de Lyapunov

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P = -I.$$

**Ejemplo 6.2 (Control del péndulo por linealización y realimentación de estados).** Consideremos la ecuación del péndulo

$$\ddot{\theta} = -a \operatorname{sen} \theta - b \dot{\theta} + c T$$

donde  $a = g/l > 0$ ,  $b = k/m \geq 0$ ,  $c = 1/(ml^2) > 0$ ,  $\theta$  es el ángulo entre la cuerda y el eje vertical, y  $T$  es el par aplicado al péndulo. Usando el par como entrada de control, queremos estabilizar al péndulo en un ángulo  $\theta = \delta$ . Tomando como variables de estado  $x_1 = \theta - \delta$  y  $x_2 = \dot{\theta}$  se obtiene el modelo de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \operatorname{sen}(x_1 + \delta) - b x_2 + c T \end{aligned} \quad (6.4)$$

Para que (6.4) tenga un PE en el origen, el par debe tener una componente estática  $T_f$  que satisfaga

$$a \operatorname{sen} \delta + c T_f = 0$$

es decir

$$T_f = \frac{a \operatorname{sen} \delta}{c} \quad (6.5)$$

Definimos la variable de control  $u = T - T_f$  y reescribimos (6.4) como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a [\operatorname{sen}(x_1 + \delta) - \operatorname{sen} \delta] - b x_2 + c u \end{aligned}$$

que está en la forma (6.1) con  $f(0, 0) = 0$ . Linealizando alrededor del origen obtenemos las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos \delta & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

El par  $(A, B)$  es controlable. Tomando  $K = [k_1 \ k_2]$ , obtenemos

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 c - a \cos \delta & k_2 c - b \end{bmatrix},$$

cuyo polinomio característico es  $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + (k_1 c - a \cos \delta)\lambda + (k_2 c - b)$ . No es difícil comprobar que  $A + BK$  es Hurwitz si

$$k_1 < \frac{a \cos \delta}{c}, \quad k_2 < \frac{b}{c}.$$

Usando (6.5), el par de control que consigue, localmente, estabilizar el ángulo en un valor  $\delta$  es

$$T = \frac{a \operatorname{sen} \delta}{c} + Kx = \frac{a \operatorname{sen} \delta}{c} + k_1(\theta - \delta) + k_2 \dot{\theta}.$$

◦

## Realimentación de salida

Consideramos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

donde  $f(0,0) = 0$ ,  $h(0) = 0$ ,  $f$  y  $h$  son continuamente diferenciables en un dominio que contiene al origen  $(x, u) = (0, 0)$ . Linealizando alrededor de  $(x, u) = (0, 0)$ , obtenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{6.7}$$

donde  $A$  y  $B$  están definidas en (6.3), y

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

De la teoría de sistemas lineales, recordemos ahora los conceptos y resultados relativos a observabilidad.

**Definición 6.2 (Observabilidad).** La ecuación de estado (6.7) es observable si para cualquier estado inicial  $x(0)$  (desconocido), existe un tiempo finito  $t_1$  tal que el conocimiento de la entrada  $u$  y la salida  $y$  sobre el intervalo  $[0, t_1]$  es suficiente para determinar en forma única el estado inicial  $x(0)$ . En caso contrario el sistema no observable. ◦

**Proposición 6.4 (Dualidad entre controlabilidad y observabilidad).** El par  $(A, C)$  es observable si y sólo si el par  $(A^T, C^T)$  es controlable. ◦

Si el sistema (6.7) es observable, entonces es posible estimar asintóticamente el vector de estados  $x(t)$  a partir del conocimiento de la entrada  $u(t)$  y la salida  $y(t)$  del sistema. La estima  $\hat{x}(t)$  puede calcularse construyendo el *observador*

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(C\hat{x} - y).$$

Si la matriz  $A + HC$  es Hurwitz, la estima  $\hat{x}(t)$  se aproximará asintóticamente a  $x(t)$  a medida que  $t$  crece, es decir,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$ . Si  $(A, C)$  es observable, es posible asignar arbitrariamente los autovalores de  $A + HC$ .

**Proposición 6.5 (Asignación de autovalores en observadores).** Dado el par  $(A, C)$ , todos los autovalores de  $(A + HC)$  pueden asignarse arbitrariamente seleccionando una matriz real  $H$  si y sólo si  $(A, C)$  es observable.  $\circ$

Volviendo a nuestro sistema (6.7), asumimos  $(A, B)$  controlable,  $(A, C)$  observable, y diseñamos el *control dinámico*

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Fz + Gy \\ u &= Lz + My \end{aligned} \quad (6.8)$$

tal que la matriz de lazo cerrado del sistema aumentado (6.7)–(6.8),

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} A + BMC & BL \\ GC & F \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

sea Hurwitz. Un ejemplo es el control basado en observador (la variable  $z$  corresponde entonces a la estima del estado  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + H(C\hat{x} - y) \\ u &= K\hat{x} \end{aligned}$$

donde  $K$  y  $H$  se calculan de forma tal que  $A + BK$  y  $A + HC$  sean Hurwitz, lo que resulta en

$$A_{LC} = \begin{bmatrix} A & BK \\ -HC & A + BK + HC \end{bmatrix}.$$

Aplicando el control (6.8) al sistema no lineal obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, Lz + Mh(x)) \\ \dot{z} &= Fz + Gh(x). \end{aligned}$$

Es claro que  $(x, z) = (0, 0)$  es un PE del sistema no lineal a lazo cerrado. Linealizando nos queda la matriz (6.9), por lo que el origen resulta un PE exponencialmente estable. Además, resolviendo una ecuación de Lyapunov para la matriz (6.9), disponemos de una función de Lyapunov, para estimar la RA.

**Ejemplo 6.3 (Control del péndulo por linealización y realimentación de salida).** Volvemos a considerar el péndulo del Ejemplo 6.2. Supongamos que el objetivo de control es el mismo, pero ahora medimos el ángulo  $\theta$  pero no medimos la velocidad angular  $\dot{\theta}$ . Tomamos como variable de salida  $y = x_1 = \theta - \delta$ , y construimos un control dinámico de salida usando el observador

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(\hat{x}_1 - y)$$

Tomando  $H = [h_1 \ h_2]$ , puede verificarse que  $A + HC$  es Hurwitz si

$$h_1 < b, \quad h_2 < a \cos \delta - b h_1$$

El par de control es ahora

$$T = \frac{a \operatorname{sen} \delta}{c} + K \hat{x}.$$

$\circ$

### 6.2.2 Regulación Vía Control Integral

En el Ejemplo 6.2 consideramos el problema de regular el ángulo  $\theta$  del péndulo a un valor constante  $\delta$ , para lo cual redujimos el problema a uno de estabilización mediante corrimiento del punto de equilibrio deseado al origen. Aunque este enfoque es adecuado cuando se conocen los parámetros del sistema con exactitud, puede no ser aceptable si existen perturbaciones de los valores nominales de los parámetros del modelo. En esta sección presentamos una mejora al esquema de realimentación de estados, el agregado de *acción integral*, que permitirá regulación robusta frente a perturbaciones paramétricas.

La ley de control de par a la que arribamos en el Ejemplo 6.2,

$$T = \frac{a \operatorname{sen} \delta}{c} + Kx,$$

está formada por

- (i) una componente estática de régimen estacionario  $T_f = (a/c) \operatorname{sen} \delta$  que da el valor de equilibrio de  $\theta$ , digamos  $\theta_f$ , en el valor deseado de ángulo  $\delta$ , y
- (ii) una componente de realimentación  $Kx$  que hace que  $A + BK$  sea Hurwitz.

Mientras el cálculo de ambas componentes depende de los parámetros del sistema, la parte de realimentación puede diseñarse para que sea robusta dentro de un rango de valores de los parámetros. Por otro lado, el cálculo de  $T_f$  puede ser sensible a variaciones en los parámetros del modelo respecto de sus valores nominales, lo cual cambiará el valor estacionario de  $\theta$  del valor deseado  $\delta$ . El esquema que presentamos a continuación permitirá que el valor de  $\theta$  regule al valor deseado también en forma robusta.

Consideramos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

donde  $x \in R^n$ ,  $u \in R^p$ ,  $f$  y  $h$  son funciones continuamente diferenciables en un dominio incluido en  $R^n \times R^p$ ,  $y \in R^p$  es la salida a regular. Sea  $y_R \in R^p$  una señal de referencia constante. Queremos diseñar un control en realimentación tal que

$$y(t) \rightarrow y_R \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty$$

Asumimos que medimos la salida  $y$ . Vamos a estabilizar el sistema a lazo cerrado en un PE tal que  $y = y_R$ . Es claro que, para que esto sea posible, deben existir valores  $x_f$  y  $u_f$  tales que

$$\begin{aligned}0 &= f(x_f, u_f) \\ 0 &= h(x_f) - y_R\end{aligned} \tag{6.10}$$

Asumimos que (6.10) tiene una solución única en el dominio de interés.

Integramos el error de seguimiento  $e \triangleq y - y_R$ :

$$\dot{\sigma} = e = y - y_R$$

y aumentamos el sistema con el integrador

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ \dot{\sigma} &= h(x) - y_R\end{aligned}$$



El control se va a diseñar como una realimentación de los estados  $x$  y  $\sigma$  y tal que el sistema a lazo cerrado tenga un PE en  $(\bar{x}, \bar{\sigma})$  con  $\bar{x} = x_f$ .

Si linealizamos alrededor de  $(x, \sigma, u) = (x_f, \bar{\sigma}, u_f)$ , obtenemos

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} v \triangleq \mathcal{A}\xi + \mathcal{B}v$$

con

$$\xi = \begin{bmatrix} x - x_f \\ \sigma - \bar{\sigma} \end{bmatrix} \quad v = u - u_f$$

y donde

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,u)=(x_f,u_f)} \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x,u)=(x_f,u_f)} \quad C = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=x_f}$$

Si  $(A, B)$  es controlable y el rango de  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$  es  $n+p$ , entonces  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es controlable. Supongamos que es así y calculemos  $K$  tal que  $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$  sea Hurwitz. Partimos  $K$  como  $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$ , donde  $K_2$  es  $p \times p$  y no singular (si fuera singular, puede mostrarse que  $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$  sería singular, lo que contradice el hecho de que es Hurwitz). El control es entonces

$$u = K_1(x - x_f) + K_2(\sigma - \bar{\sigma}) + u_f$$

El control integral introduce un grado de libertad que puede usarse para asignar el valor de  $\bar{\sigma}$ . Si elegimos

$$\bar{\sigma} = K_2^{-1}(u_f - K_1 x_f) \triangleq \sigma_f$$

el control dinámico obtenido queda

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= e = y - y_R \\ u &= K_1 x + K_2 \sigma \end{aligned}$$

con lo que ya no necesitamos incluir un término estático en el control para obtener el valor de régimen permanente deseado. La Figura 6.1 muestra un diagrama de bloques del sistema controlado con este esquema de realimentación de estados con acción integral.

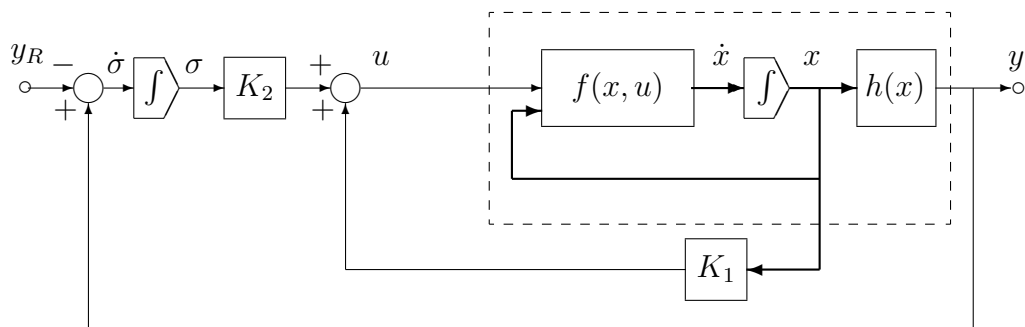


Figura 6.1: Esquema de realimentación de estados con acción integral.

El sistema no lineal a lazo cerrado es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, K_1 x + K_2 \sigma) \\ \dot{\sigma} &= h(x) - y_R\end{aligned}$$

que tiene un PE en  $(x_f, \sigma_f)$ . Si linealizamos sobre este PE queda

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} K_1 & \frac{\partial f}{\partial u} K_2 \\ \frac{\partial h}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}_{(x,\sigma)=(x_f,\sigma_f)} \xi \\ \xi &= (\mathcal{A} + \mathcal{B}K)\xi,\end{aligned}$$

que es exponencialmente estable. Por lo tanto  $y(t) \rightarrow y_R$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (para condiciones iniciales en la región de atracción).

**Ejemplo 6.4 (Control del péndulo por linealización y realimentación de estados con acción integral).** Volvemos a considerar el péndulo del Ejemplo 6.2, donde el objetivo de control es estabilizar al péndulo en un ángulo  $\theta = \delta$ . Tomando  $x_1 = \theta - \delta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $y = x_1$  y  $u = T$  obtenemos el modelo de estado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a \operatorname{sen}(x_1 + \delta) - b x_2 + c u \\ y &= x_1 = e\end{aligned}$$

Tomando la referencia  $y_R = 0$  puede verse que el equilibrio deseado es

$$x_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_f = \frac{a}{c} \operatorname{sen} \delta$$

Las matrices  $A$  y  $B$  están dadas por (6.6), y  $C = [1 \ 0]$ . Como  $(A, B)$  es controlable y el rango de  $\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$  es  $n + p = 3$ , entonces  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es controlable. Tomando  $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]$ , puede verificarse usando el criterio de Routh-Hurwitz que  $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$  es Hurwitz si

$$b - k_2 c > 0 \quad (b - k_2 c)(a \cos \delta - k_1 c) + k_3 c > 0 \quad -k_3 c > 0$$

Supongamos ahora que no conocemos los valores exactos de los parámetros  $a > 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c > 0$ , pero conocemos una cota superior  $\rho_1$  de  $a$  y una cota inferior  $\rho_2$  de  $c$ . Entonces, tomando

$$k_2 < 0, \quad k_3 < 0, \quad k_1 < -\frac{\rho_1}{\rho_2} \left( 1 + \frac{k_3}{k_2 \rho_1} \right)$$

nos aseguramos que  $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$  es Hurwitz para toda perturbación de los parámetros que satisfaga las cotas  $a \leq \rho_1$  y  $c \geq \rho_2$ . La ley de control del par es

$$\begin{aligned}T &= k_1(\theta - \delta) + k_2 \dot{\theta} + k_3 \sigma \\ \dot{\sigma} &= \theta - \delta\end{aligned}$$

que es un clásico control PID (proporcional-integral-derivativo). Comparando con el par de control obtenido en el Ejemplo 6.2, podemos ver que no es necesario usar el par estacionario para mantener el equilibrio deseado.  $\circ$

La robustez del control integral puede explicarse intuitivamente de la siguiente manera. El control en realimentación de estados crea un PE AE. Cuando el sistema está en este punto de equilibrio, todas las señales deben ser constantes. Para que el integrador  $\dot{\sigma} = e$  tenga una salida constante  $\sigma$ , su entrada  $e$  debe ser cero. Por lo tanto, el control integral fuerza que el error de seguimiento sea cero en equilibrio. Si hay variaciones paramétricas, el PE va a cambiar en general, pero la condición  $e = 0$  en el equilibrio se mantiene. Por supuesto, como el resultado de estabilización es local, esto va a valer para condiciones iniciales  $(x(0), \sigma(0))$  lo suficientemente cercanas al PE  $(x_f, \sigma_f)$ .

Si no disponemos de los estados  $x$  pero medimos  $y$ , el control integral puede implementarse mediante un observador de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u &= K_1 \hat{x} + K_2 \sigma \\ \dot{\sigma} &= e = y - y_R \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + H(C\hat{x} - y), \end{aligned}$$

representado en el esquema de la Figura 6.2. Notar que usamos el observador para estimar solamente  $x$ , ya que  $\sigma$  está siempre disponible para la realimentación.

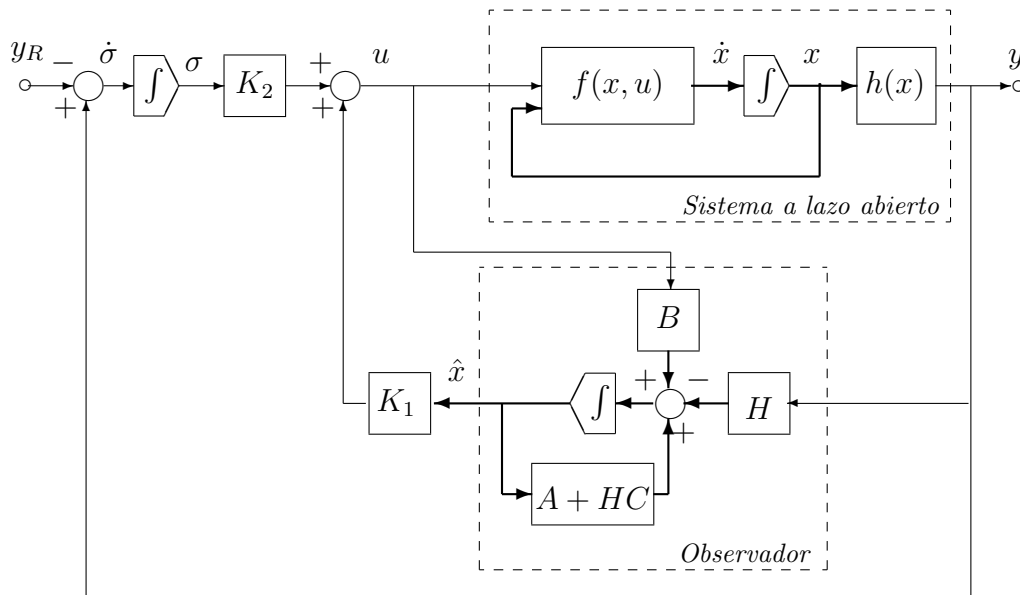


Figura 6.2: Esquema de realimentación de salida con acción integral.

## 6.3 Control por Ganancia Tabulada

La principal limitación del control por linealización es que sólo se puede garantizar que el control cumple su objetivo localmente alrededor de un único PE, o *punto de operación (PO)*. Una forma de extender la validez del control por linealización a un conjunto de POs es usar *control por ganancia tabulada* (“gain scheduling”). Este enfoque asume que se puede representar el sistema mediante un modelo parametrizado por ciertas variables, llamadas *variables de tabulación* (“scheduling variables”), de modo que cuando estas variables asumen un valor constante obtenemos un PO. En estos casos, se linealiza el sistema alrededor de distintos POs de interés, obteniéndose una familia de modelos lineales para la cual diseñamos una familia de

controladores lineales. Luego, se implementa el esquema de control en un único controlador cuyos parámetros son cambiados acorde a los valores que toman las variables de tabulación, que deberán monitorearse continuamente.

El concepto de control por ganancia tabulada se origina en sistemas de control de aeronaves. En estas aplicaciones, las ecuaciones no lineales de movimiento de la aeronave se linealizan alrededor de ciertos POs que capturan los modos principales de operación de la aeronave a lo largo del patrón de vuelo deseado. Se diseñan, entonces, controladores lineales para alcanzar la estabilidad y el desempeño deseados para cada una de las linealizaciones del sistema en cada PO. Luego se interpolan los valores de los parámetros de los controladores como funciones de las variables de tabulación; típicamente, presión, velocidad, altitud, etc. Finalmente, el controlador por ganancia tabulada se implementa como un sistema no lineal.

Vamos a presentar la idea de control por ganancia tabulada a través de un ejemplo simple de control de nivel. Ver Khalil [1996, pp.499–506] para una formulación general y más referencias.

**Ejemplo 6.5 (Control de nivel).** El sistema, representado en la Figura 6.3, puede modelarse por las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^h \beta(z) dz \right) = q - c\sqrt{2h},$$

donde  $h$  es el nivel del líquido en el tanque,  $q$  es el caudal de entrada y  $c$  es una constante positiva. Tomando  $x = h$  como variable de estado y  $u = q$  como entrada de control obtenemos el modelo de estado

$$\dot{x} = \frac{1}{\beta(x)}(u - c\sqrt{2x}) \triangleq f(x, u)$$

El objetivo de control es que el nivel  $y = x$  siga a una referencia  $y_R$ . Usamos  $y_R$  como variable de tabulación. Cuando  $y_R = \alpha$  constante,  $y$  debe mantenerse igual a  $\alpha$ , para lo cual necesitamos que  $u$  se mantenga en el valor  $\bar{u}(\alpha) = c\sqrt{2\alpha}$ .

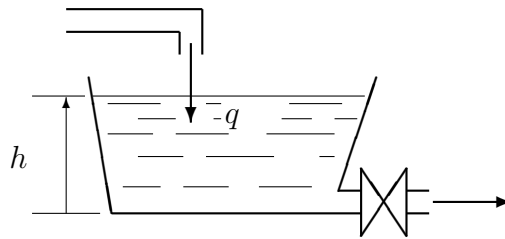


Figura 6.3: Control de nivel de un tanque.

Linealizando alrededor del PO inducido por  $y_R = \alpha$  constante, obtenemos el modelo lineal parametrizado por  $\alpha$

$$\dot{x}_\delta = a(\alpha)x_\delta + b(\alpha)u_\delta,$$

donde

$$x_\delta = x - \alpha, \quad a(\alpha) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=\alpha \\ u=\bar{u}}} = \frac{-c\sqrt{2\alpha}}{2\alpha\beta(\alpha)},$$

$$u_\delta = u - \bar{u}(\alpha), \quad b(\alpha) = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{x=\alpha \\ u=\bar{u}}} = \frac{1}{\beta(\alpha)}.$$

Consideremos el control PI (proporcional-integral)

$$u_\delta = K_1 e + K_2 \sigma$$

$$\dot{\sigma} = y - y_R = x - \alpha = x_\delta - r_\delta,$$

donde  $r_\delta = y_R - \alpha$ . El sistema lineal a lazo cerrado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\alpha) + b(\alpha)K_1 & b(\alpha)K_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\delta \\ \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b(\alpha)K_1 \\ -1 \end{bmatrix} r_\delta,$$

cuyo polinomio característico es

$$s^2 - (a + bK_1)s - bK_2.$$

Si, por ejemplo, proponemos tener un polinomio característico de la forma  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ , con determinados valores deseados de  $\omega$  y  $\xi$ , podemos lograrlo eligiendo las ganancias del control

$$K_1(\alpha) = -\frac{2\xi\omega_n + a(\alpha)}{b(\alpha)}, \quad K_2(\alpha) = -\frac{\omega_n^2}{b(\alpha)}.$$

El control por ganancia tabulada se obtiene cuando reemplazamos  $\alpha$  por  $y_R$ , con lo que las ganancias variarán directamente con la altura deseada. Antes de seguir, veamos primero una reparametrización del controlador PI que simplificará la tarea de tabulación.

**Parametrización simplificada del control PI.** A veces es posible simplificar la tarea de monitoreo y tabulación mediante una elección adecuada de los parámetros del controlador. Por ejemplo, si reparametrizamos el controlador PI como

$$u_\delta = K \left( e + \frac{1}{T} \sigma \right), \quad K = K_1, T = \frac{K_1}{K_2},$$

y suponiendo que  $|a(\alpha)| \ll 2\xi\omega_n$  (o sea que la parte real deseada para los polos a lazo cerrado es mucho mayor que el polo a lazo abierto), entonces obtenemos

$$K(\alpha) = -\frac{2\xi\omega_n + a(\alpha)}{b(\alpha)} \approx -\frac{2\xi\omega_n}{b(\alpha)}, \quad T(\alpha) = \frac{2\xi\omega_n + a(\alpha)}{\omega_n^2} \approx \frac{2\xi}{\omega_n}.$$

Tomando  $K(\alpha) = -2\xi\omega_n/b(\alpha) = -2\xi\omega_n\beta(\alpha)$  y  $T = 2\xi/\omega_n$ , vemos que sólo hace falta tabular una única variable:  $K(\alpha)$ . Con este control PI parametrizado en  $\alpha$ , la linealización del sistema a lazo cerrado alrededor de  $(x, \sigma) = (\alpha, \bar{\sigma}(\alpha))$ , e  $y = \alpha$ , resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = A_\ell(\alpha) \begin{bmatrix} x_\delta \\ \sigma \end{bmatrix} + B_\ell r_\delta$$

$$y_\delta = C_\ell \begin{bmatrix} x_\delta \\ \sigma \end{bmatrix},$$

donde

$$A_\ell(\alpha) = \begin{bmatrix} a(\alpha) - 2\xi\omega_n & -\omega_n^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_\ell = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_n \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_\ell = [1 \quad 0]. \quad (6.11)$$

La función de transferencia a lazo cerrado correspondiente, de  $r_\delta$  a  $y_\delta = x_\delta$ , resulta

$$\frac{2\xi\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + [2\xi\omega_n - a(\alpha)]s + \omega_n^2}.$$

**Control PI de ganancia tabulada por  $y_R$ .** Dejemos por ahora este análisis lineal y consideremos el controlador PI de ganancia tabulada

$$u = K(y_R) \left( e + \frac{1}{T} \sigma \right) = -2\xi\omega_n\beta(y_R) \left( e + \frac{\omega_n}{2\xi} \sigma \right) \quad (6.12)$$

$$\dot{\sigma} = e = y - y_R$$

donde la ganancia  $K$  se tabula como una función de la señal de referencia  $y_R$ , *no necesariamente constante*. Cuando se aplica este control a la ecuación de estado no lineal, el sistema no lineal a lazo cerrado resulta

$$\dot{x} = \frac{1}{\beta(x)} \left[ -2\xi\omega_n\beta(y_R) \left( x - y_R + \frac{\omega_n}{2\xi} \sigma \right) - c\sqrt{2x} \right]$$

$$\dot{\sigma} = x - y_R$$

$$y = x.$$

Cuando  $y_R$  es una constante positiva,  $y_R = \alpha$ , el sistema tiene un PE en

$$x = \alpha, \quad \bar{\sigma}(\alpha) \triangleq \frac{-c\sqrt{2\alpha}}{\omega_n^2\beta(\alpha)},$$

y el valor de equilibrio de  $u$  correspondiente es  $\bar{u} = c\sqrt{2\alpha}$ . Es decir, el control por ganancia tabulada logra el PO deseado. La linealización del sistema alrededor de este PO  $(x, \sigma) = (\alpha, \bar{\sigma}(\alpha))$ , e  $y_R = \alpha$ , resulta en la ecuación lineal de lazo cerrado

$$\dot{\rho}_\delta = A_n(\alpha) \rho_\delta + B_n(\alpha) r_\delta, \quad \text{donde } \rho_\delta = \begin{bmatrix} x - \alpha \\ \sigma - \bar{\sigma}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$y_\delta = C_n \rho_\delta$$

las matrices  $A_n(\alpha)$ ,  $B_n(\alpha)$  y  $C_n(\alpha)$  son

$$A_n(\alpha) = \begin{bmatrix} a(\alpha) - 2\xi\omega_n & -\omega_n^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} 2\xi\omega_n + \gamma(\alpha) \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C_n = [1 \ 0], \quad (6.13)$$

y la ganancia  $\gamma(\alpha) = K'(\alpha)\bar{\sigma}(\alpha)/(T\beta(\alpha))$  — donde  $K'(\alpha) = \partial K/\partial y_R|_{y_R=\alpha}$ . La función de transferencia a lazo cerrado de  $r_\delta$  a  $y_\delta = x_\delta$  resulta en este caso

$$\frac{[2\xi\omega_n + \gamma(\alpha)]s + \omega_n^2}{s^2 + [2\xi\omega_n - a(\alpha)]s + \omega_n^2}.$$

Comparando (6.11) con (6.13), vemos que los dos modelos lineales representados por  $(A_\ell, B_\ell, C_\ell)$  y  $(A_n, B_n, C_n)$  son distintos (en la matriz  $B$ ):

- $(A_\ell, B_\ell, C_\ell)$  representa el modelo a lazo cerrado de la familia de modelos lineales parametrizados usados para el diseño del control;
- $(A_n, B_n, C_n)$  representa la linealización alrededor del PO deseado del sistema no lineal a lazo cerrado con el control por ganancia tabulada.

Estos modelos linealizados difieren porque en  $(A_\ell, B_\ell, C_\ell)$  la ganancia está fija en  $K(\alpha)$ , y no hay que derivar  $K(y_R)$  con respecto a  $y_R$  y evaluarla en  $y_R = \alpha$ . Ambos modelos difieren en la posición del cero de la función transferencia de lazo cerrado, lo que puede dar respuestas transitorias muy diferentes. Idealmente quisiéramos que ambos modelos sean iguales a fin de que se dé el desempeño deseado en las vecindades de cada PO. Vamos a presentar dos trucos para que ambos modelos resulten iguales.

**Truco 1.** No imponer la condición

$$\bar{\sigma}(\alpha) = \frac{-c\sqrt{2\alpha}}{\omega_n^2\beta(\alpha)}$$

(que evita el uso de términos constantes en el control) y en cambio usar el grado de libertad de asignar  $\bar{\sigma}(\alpha)$  arbitrariamente. El control entonces es

$$u = K(y_R) \left[ e + \frac{1}{T}(\sigma - \bar{\sigma}(y_R)) \right] + \bar{u}(y_R), \quad \bar{u}(y_R) = c\sqrt{2y_R} \quad (6.14)$$

$$\dot{\sigma} = e = y - y_R$$

y  $\bar{\sigma}(y_R)$  arbitrario. El control (6.12) que usamos antes es un caso particular de (6.14) que surge de imponer la condición

$$\frac{K(y_R)}{T} \bar{\sigma}(y_R) = \bar{u}(y_R).$$

El sistema a lazo cerrado puede escribirse como

$$\dot{x} = f_c(x, y_R).$$

Linealizando alrededor de  $(x, y_R) = (\alpha, \alpha)$  obtenemos

$$\left. \frac{\partial f_c}{\partial x} \right|_{\substack{x=\alpha \\ y_R=\alpha}} = a(\alpha) - 2\xi\omega_n, \quad \left. \frac{\partial f_c}{\partial y_R} \right|_{\substack{x=\alpha \\ y_R=\alpha}} = 2\xi\omega_n + \phi(\alpha),$$

donde

$$\phi(\alpha) = -\frac{K(\alpha)}{T} \frac{\partial \bar{\sigma}(\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{1}{\beta(\alpha)} \frac{\partial \bar{u}(\alpha)}{\partial \alpha}.$$

Si elegimos  $\bar{\sigma}(\alpha)$  tal que  $\phi(\alpha) = 0$ , es decir tal que

$$\frac{K(\alpha)}{T} \frac{\partial \bar{\sigma}(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \bar{u}(\alpha)}{\partial \alpha}$$

conseguimos que  $B_n = B_\ell$ , y de esta forma los modelos (6.11) y (6.13) coinciden.

**Truco 2.** Reemplazar el controlador

$$u = K(y_R) \left( e + \frac{1}{T}\sigma \right)$$

$$\dot{\sigma} = e$$

por el controlador

$$u = K(y_R)e + \frac{1}{T}z$$

$$\dot{z} = K(y_R)e$$

que, para  $K$  constante, puede interpretarse como conmutar la ganancia  $K$  con el integrador.

◦

**Resumen.** En base al ejemplo, podemos resumir los pasos a seguir para diseñar un control por ganancia tabulada de la siguiente manera.

- (i) Linealizar el modelo no lineal alrededor de una familia de POs parametrizada por las variables de tabulación.
- (ii) Diseñar una familia parametrizada de controladores lineales que consigan el desempeño deseado para la familia de modelos lineales en cada PO.
- (iii) Construir un control por ganancia tabulada tal que, en cada PO,
  - el control genere un valor estático que dé error estático nulo,
  - la linealización del sistema no lineal a lazo cerrado en cada PO sea la misma que la de la conexión en realimentación del modelo lineal parametrizado y el correspondiente control lineal.
- (iv) Verificar por simulación el desempeño no local del control por ganancia tabulada para el modelo no lineal.

El paso (ii) puede conseguirse resolviendo el problema de diseño para una familia de modelos lineales parametrizados por variables de tabulación, como hicimos en el ejemplo, o bien, resolviendo el problema sólo en un número finito de POs usando la misma estructura de control para todos ellos pero permitiendo que los parámetros del controlador cambien de un PO a otro; luego los parámetros del controlador se interpolan para producir una familia de controladores lineales. Este proceso de interpolación se hace usualmente “ad hoc”, y se basa en conocimiento del sistema físico.

Como vimos, la elección del controlador por ganancia tabulada no es única. Poder satisfacer el requerimiento sobre los modelos linealizados enunciado en el paso (iii) depende de la estructura de control elegida. Además, la decisión de hasta qué punto debe insistirse en que las linealizaciones del modelo no lineal a lazo cerrado y del modelo lineal parametrizado a lazo cerrado coincidan dependerá de las especificaciones y objetivos de control.

Notar que el análisis de lazo cerrado del controlador por ganancia tabulada sólo considera el comportamiento *local* alrededor de un PO *constante*. ¿Qué puede decirse del comportamiento regional, o global? ¿Qué sucede cuando la variable de tabulación no es constante? En la práctica, la regla es que puede implementarse un controlador de este tipo siempre que las variables de tabulación varíen en forma suficientemente lenta. La estabilidad de sistemas inestacionarios *lentos* puede justificarse usando los resultados en Khalil [1996, Sección 5.7].

## 6.4 Ejercicios

### Ejercicio 6.1

La Figura 6.4 muestra un esquema de un sistema de suspensión magnética, en el que una bola de material metálico se suspende mediante un electroimán de corriente controlada por realimentación a través de una medición óptica de la posición de la bola.

Este sistema tiene los ingredientes básicos de sistemas para levitación de masas usados en giróscopos, acelerómetros y trenes de alta velocidad.

Básicamente, la ecuación de movimiento de la bola es

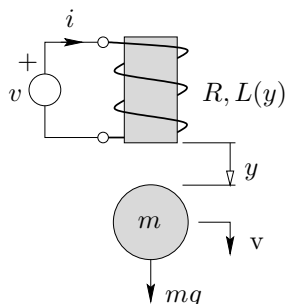
$$m\ddot{y} = -k\dot{y} + mg + F(y, i)$$



donde  $m$  es la masa de la bola,  $y \geq 0$  es la posición vertical (hacia abajo) de la bola medida desde un punto de referencia ( $y = 0$  cuando la bola está pegada al electroimán),  $k$  es el coeficiente de fricción viscosa,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $F(y, i)$  es la fuerza generada por el electroimán, e  $i$  es la corriente. La inductancia del electroimán depende de la posición de la bola, y puede modelarse como

$$L(y) = L_1 + \frac{L_0}{1 + y/a}$$

donde  $L_1, L_0$  y  $a$  son constantes positivas.



Este modelo representa el caso en el que la inductancia tiene su máximo valor cuando la bola está cerca del electroimán, y decrece a un valor constante a medida que la bola se aleja a  $y = \infty$ . Tomando  $E(y, i) = \frac{1}{2}L(y)i^2$  como la energía almacenada en la bobina, la fuerza  $F(y, i)$  está dada por

$$F(y, i) = \frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{L_0 i^2}{2a(1 + y/a)^2}$$

Figura 6.4: Sistema de suspensión magnética

Comandando el circuito de la bobina con una fuente de tensión  $v$ , la ley de tensiones de Kirchhoff da la relación

$$v = \dot{\phi} + Ri,$$

donde  $R$  es la resistencia del circuito y  $\phi = L(y)i$  es el flujo magnético.

- (i) Usando  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$  y  $x_3 = i$  como variables de estado, y  $u = v$  como entrada de control, mostrar que la ecuación de estado del sistema está dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{k}{m}x_2 - \frac{L_0 a x_3^2}{2m(a + x_1)^2} \\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{L(x_1)} \left[ -R x_3 + \frac{L_0 a x_2 x_3}{(a + x_1)^2} + u \right] \end{aligned}$$

- (ii) Suponer que se desea equilibrar la bola en una posición deseada  $y_R > 0$ . Encontrar los valores de régimen permanente  $\bar{i}$  y  $\bar{v}$ , de  $i$  y  $v$  respectivamente, necesarios para mantener el equilibrio.
- (iii) Mostrar que el punto de equilibrio obtenido tomando  $u = \bar{v}$  es inestable.
- (iv) Usando linealización diseñar un control por realimentación de estados para estabilizar la bola en la posición deseada; o sea, hacer el equilibrio asintóticamente estable.
- (v) *Ensayo de robustez:* considerando los datos numéricos nominales

$$\begin{array}{llll} m = 0.01\text{kg} & k = 0.001\text{N/m/s} & g = 9.81\text{m/s}^2 & a = 0.05\text{m} \\ L_0 = 0.01\text{H} & L_1 = 0.02\text{H} & R = 10\Omega & y_R = 0.05\text{m} \end{array}$$

estudiar el desempeño del sistema a lazo cerrado mediante simulación digital. En particular, estudiar el comportamiento transitorio y el efecto de una variación del 20% en todos los valores nominales de los parámetros del sistema.

- (vi) *Estima de la región de atracción:* con los mismos datos numéricos del punto anterior, realizar el siguiente experimento: comenzando con la bola en el equilibrio, desplazarla una distancia pequeña hacia arriba y luego soltarla. Repetir el experimento gradualmente incrementando la distancia de desplazamiento inicial. Determinar mediante simulación digital el máximo *rango de captura* para el cual la bola vuelve al equilibrio deseado. Repetir la experiencia para desplazamientos hacia abajo.
- (vii) Rediseñar el control por realimentación de estados del punto (iv) para incluir acción integral. Repetir los ensayos de los puntos (v) y (vi) y comparar el desempeño de este diseño con el del punto (iv).
- (viii) Asumiendo que sólo puede medirse la posición de la bola  $y$  y la corriente  $i$ , diseñar un control lineal por realimentación de salida, con acción integral, para estabilizar la bola en la posición deseada  $y_R$ . Repetir los ensayos de los puntos (v) y (vi) y comparar el desempeño de este diseño con los de los puntos (iv) y (vii).
- (ix) Asumiendo que sólo puede medirse la posición de la bola  $y$  y la corriente  $i$ , diseñar un control por ganancia tabulada con acción integral y por realimentación de salida para que la posición de la bola siga una posición de referencia  $y_R$ . Estudiar por simulación digital el desempeño del sistema a lazo cerrado y compararlo con el diseño via linealización del punto anterior.

### Ejercicio 6.2

La Figura 6.5 representa un sistema de péndulo invertido. El pivote del péndulo está montado sobre un carrito que puede moverse horizontalmente mediante la acción de una fuerza  $F$ . Manipulando  $F$  como variable de control, el objetivo es estabilizar el péndulo en posición vertical en una posición deseada del carrito.

Los parámetros del sistema, y sus valores nominales, son los siguientes,

$m = 0.1\text{kg}$	masa del péndulo,
$M = 1\text{kg}$	masa del carrito,
$L = 0.5\text{m}$	distancia pivote/centro de gravedad,
$I = 1/120\text{kg m}^2$	momento de inercia del péndulo,
$k = 0.1\text{N/m/s}$	coeficiente de fricción viscosa,
$g = 9.81\text{m/s}^2$	aceleración de la gravedad,
$y$	desplazamiento del pivote,
$\theta$	rotación angular del péndulo,

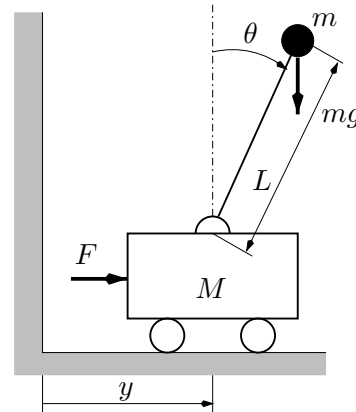


Figura 6.5: Péndulo invertido

y su comportamiento dinámico puede describirse por las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\theta)} \begin{bmatrix} m + M & -mL \cos \theta \\ -mL \cos \theta & I + mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} mgL \sin \theta \\ F + mL\dot{\theta}^2 \sin \theta - k\dot{y} \end{bmatrix}$$

donde

$$\Delta(\theta) = (I + mL^2)(m + M) - m^2L^2 \cos^2 \theta \geq (I + mL^2)M + m > 0.$$

- 
- (i) Usando  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $x_3 = y$  y  $x_4 = \dot{y}$  como variables de estado y  $u = F$  como entrada de control, escribir las ecuaciones de estado.
  - (ii) Mostrar que el sistema tiene un *conjunto* de equilibrio.
  - (iii) Se pretende estabilizar el péndulo en su posición vertical,  $\theta = 0$ . Determinar un punto de equilibrio a lazo abierto para el cual  $\theta = 0$  y mostrar que es inestable.
  - (iv) Linealizar la ecuación de estado alrededor del punto de equilibrio elegido y comprobar que la ecuación de estado linealizada es controlable.
  - (v) Usando linealización, diseñar un control por realimentación de estados para estabilizar el sistema alrededor del punto de equilibrio deseado.
  - (vi) *Ensayo de robustez*: estudiar el desempeño del sistema a lazo cerrado mediante simulación digital. Estudiar en particular el efecto de variaciones de  $\pm 10\%$  en los valores nominales de los parámetros del sistema sobre la respuesta transitoria.
  - (vii) *Estima de la región de atracción*: determinar, mediante simulación digital, el rango máximo de ángulo inicial que puede tener el péndulo, comenzando en reposo, para que el control diseñado pueda llevarlo al equilibrio  $\theta = 0$ .
  - (viii) Asumiendo que sólo puede medirse el ángulo  $\theta$  y la posición  $y$  del carrito, diseñar por linealización un control por realimentación de salidas para estabilizar el péndulo en  $\theta = 0$ . Repetir los ensayos (vi) y (vii) y comparar el desempeño de este diseño con el obtenido con el control por realimentación de estados del punto (v).



# Capítulo 7

## Linealización Exacta por Realimentación

En este capítulo introducimos elementos de la teoría moderna de control geométrico de sistemas no lineales de control. Esta teoría se inició alrededor de los años '70 con intentos de extender resultados de la teoría de sistemas lineales a sistemas no lineales; resultados tales como los que se refieren a controlabilidad y observabilidad del sistema. Más tarde, en 1981 se mostró [Isidori et al., 1981] que no sólo estas extensiones eran posibles, sino también gran parte de la teoría de control geométrico de sistemas lineales al estilo Wonham [1985]. El artículo de Isidori et al. fue seguido durante los años '80 por un gran número de resultados que generaron un fantástico “juego de herramientas” para sistemas no lineales [Isidori, 1995, 1999]. Una herramienta central en este “juego de herramientas” es la linealización exacta por realimentación, que presentamos en este capítulo.

Consideramos sistemas no lineales *afines en la entrada de control*, es decir, de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x),\end{aligned}$$

y planteamos qué condiciones se necesitan para que exista *una realimentación de estados*

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v$$

y *un cambio de variables*

$$z = T(x)$$

que transformen al sistema no lineal a una *forma lineal equivalente*. Esta linealización no se refiere a la linealización “Jacobiana” aproximada del sistema, vista en el Capítulo 6, sino que convierte *exactamente* al sistema en lineal.

Comenzaremos con *linealización entrada-estado*, en la que la ecuación de estado completa se linealiza exactamente. Luego introduciremos la *linealización entrada-salida*, en la que sólo la respuesta entrada-salida se linealiza, mientras que una parte del sistema permanece no lineal. Finalmente, presentamos la estabilización de sistemas por medio de linealización exacta por realimentación.

### 7.1 Linealización Entrada-Estado

Vamos a introducir la idea de linealización exacta por realimentación a través del Ejemplo 6.2 de estabilización del péndulo.

**Ejemplo 7.1 (Linealización exacta del péndulo).** La inspección del modelo de estado del péndulo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a [\text{sen}(x_1 + \delta) - \text{sen } \delta] - b x_2 + c u,\end{aligned}$$

muestra que podemos elegir

$$u = \frac{a}{c} [\text{sen}(x_1 + \delta) - \text{sen } \delta] + \frac{v}{c}$$

para cancelar el término no lineal de la segunda ecuación y obtener el sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -b x_2 + v.\end{aligned}$$

De esta manera, el problema de estabilización del sistema no lineal se transforma en el problema de estabilización de un sistema lineal controlable. Podemos elegir, por ejemplo

$$v = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

tal que los autovalores del sistema a lazo cerrado

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= k_1 x_1 + (k_2 - b) x_2\end{aligned}$$

tengan parte real negativa. Finalmente, el control completo — no lineal — que convierte al sistema en lineal y estabiliza su equilibrio es entonces

$$u = \frac{a}{c} [\text{sen}(x_1 + \delta) - \text{sen } \delta] + \frac{1}{c} k_1 x_1 + k_2 x_2.$$

◦

Vamos a ver ahora cuán general es este procedimiento. Es claro que no podemos esperar cancelar alinealidades en cualquier sistema no lineal; debe haber ciertas propiedades estructurales que permiten tal cancelación. Del ejemplo podemos ver que

- para cancelar un término no lineal  $\alpha(x)$  por substracción, el control  $u$  y el término  $\alpha(x)$  siempre deben aparecer juntos en forma de suma  $u + \alpha(x)$ ;
- para cancelar un término no lineal  $\gamma(x)$  por división, el control  $u$  y el término  $\gamma(x)$  siempre deben aparecer juntos en forma de producto  $\gamma(x)u$ ; si  $\gamma(x)$  es no singular en el dominio de interés, puede cancelarse con  $u = \beta(x)v$ , con  $\beta(x) = \gamma^{-1}(x)$ .

Es decir que la posibilidad de convertir una ecuación de estado no lineal en una lineal controlable cancelando alinealidades requiere que la ecuación no lineal tenga la estructura

$$\dot{x} = Ax + B\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)] \tag{7.1}$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , el par  $(A, B)$  es controlable, y las alinealidades  $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ , están definidas en un dominio  $D_x \in \mathbb{R}^n$  que contiene al origen. Asumimos

que la matriz  $\beta(x)$  es no singular  $\forall x \in D_x$ . Si el sistema tiene la estructura (7.1), entonces podemos usar el control

$$u = \alpha(x) + \beta(x) v$$

para obtener la ecuación lineal

$$\dot{x} = Ax + Bv.$$

Ahora para estabilizar el sistema podemos simplemente calcular  $v = Kx$  tal que  $A + BK$  sea Hurwitz. El control estabilizante completo es no lineal y tiene la forma

$$u = \alpha(x) + \beta(x)Kx.$$

Y si el sistema no tiene la estructura (7.1); ¿quiere decir que no es posible linealizarlo por realimentación? La respuesta es no. Recordemos que la representación en espacio de estados de un sistema no es única; depende de la elección de las variables de estado. Aún cuando el sistema no tenga inicialmente la estructura (7.1) es posible que un cambio de variables lo lleve a la forma (7.1) en otras coordenadas, como vemos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 7.2 (Sistema exactamente linealizable después de cambio de coordenadas).** Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a \operatorname{sen} x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 + u. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Si elegimos  $u = x_1^2 + v$  para cancelar el término no lineal, la primera ecuación sigue siendo no lineal. Sin embargo, si hacemos el cambio de variables

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= a \operatorname{sen} x_2 = \dot{x}_1 \end{aligned} \tag{7.3}$$

obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= a \cos x_2 (-x_1^2 + u) \end{aligned}$$

que tiene la forma (7.1), válida en la región  $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$ . Usando

$$u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v$$

el sistema queda linealizado en las nuevas variables. La ecuación de estados en las nuevas variables se obtiene invirtiendo la transformación (7.3), es decir,

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= \operatorname{arcsen} \frac{z_2}{a} \end{aligned}$$

que está bien definida para  $-a < z_2 < a$ . La ecuación de estado transformada es

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= a \cos \left( \operatorname{arcsen} \frac{z_2}{a} \right) (-z_1^2 + u). \end{aligned}$$

**Definición 7.1 (Difeomorfismo).** Un difeomorfismo es un cambio de variables  $T$  tal que  $z = T(x)$  está definido en un dominio  $D_x$ , su transformación inversa  $x = T^{-1}(z)$  está definida en  $D_z = T(D_x)$ , y ambos  $T$  y  $T^{-1}$  son continuamente diferenciables en  $D_x$  y  $D_z$ , respectivamente.  $\circ$

Tenemos ya todos los elementos para hacer la siguiente definición.

**Definición 7.2 (Sistema Linealizable Entrada-Estado).** Un sistema no lineal

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (7.4)$$

con  $f, g$  definidas en un dominio  $D_x \subset \mathbb{R}^n$  y suficientemente suaves (con derivadas continuas hasta el orden que sea necesario), es *linealizable entrada-estado* si existe un difeomorfismo  $T : D_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $D_z = T(D_x)$  contiene al origen y el cambio de variables  $z = T(x)$  transforma a (7.4) en

$$\dot{z} = Az + B\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)] \quad (7.5)$$

con  $(A, B)$  controlable y  $\beta(x)$  no singular en  $D_x$ .  $\circ$

Tomando  $\alpha_0(z) = \alpha(T^{-1}(z))$ ,  $\beta_0(z) = \beta(T^{-1}(z))$  nos queda el sistema expresado en las nuevas coordenadas:

$$\dot{z} = Az + B\beta_0(z)^{-1}[u - \alpha_0(z)]$$

¿Y cuándo será posible encontrar un difeomorfismo que pueda llevar un sistema dado a la forma (7.5)? Derivando la ecuación  $z = T(x)$ , es decir

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial T}{\partial x} [f(x) + g(x)u]$$

e igualándola a (7.5), concluimos que *el difeomorfismo  $T$  debe satisfacer las condiciones*

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} f(x) &= AT(x) - B\beta(x)^{-1}\alpha(x) \\ \frac{\partial T}{\partial x} g(x) &= B\beta(x)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

En resumen:

La existencia de  $T, \alpha, \beta, A$  y  $B$  que satisfagan las ecuaciones en derivadas parciales (7.6) es una condición necesaria y suficiente para que  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  sea linealizable entrada-estado.

Así, la determinación de si un sistema no lineal dado es linealizable exactamente por realimentación se reduce a la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales (7.6). La resolución de estas ecuaciones puede simplificarse, como explicamos a continuación.



### 7.1.1 Condiciones simplificadas para la linealización exacta por re-alimentación

Cuando un sistema es linealizable entrada-estado, la transformación  $z = T(x)$  no es única. La forma más simple de ver esto es aplicando la transformación lineal  $\zeta = Mz$ , con  $M$  no singular; así obtenemos

$$\dot{\zeta} = MAM^{-1}\zeta + MB\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)]$$

que tiene la misma estructura (7.5) pero con matrices  $A$  y  $B$  diferentes. Vamos a ver ahora que podemos aprovechar la no unicidad de  $T$  para simplificar las ecuaciones en derivadas parciales (7.6). Consideremos el caso  $p = 1$  (una entrada). Dado cualquier par  $(A, B)$  controlable, existe  $M$  no singular que lo transforma a la forma canónica controlable, es decir,  $MAM^{-1} = A_c + B_c\lambda^T$ ,  $MB = B_c$ , con

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= (A_c + B_c\lambda^T)\zeta + B_c\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)] \\ &= A_c\zeta + B_c\beta(x)^{-1}[u - \tilde{\alpha}(x)] \end{aligned}$$

donde  $\tilde{\alpha}(x) = \alpha(x) - \beta(x)\lambda^T MT(x)$ . Vemos que podemos, sin pérdida de generalidad, considerar que  $A$  y  $B$  están en la forma canónica controlable  $A_c$  y  $B_c$ . Ahora escribamos

$$T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar que

$$A_c T(x) - B_c \beta(x)^{-1} \alpha(x) = \begin{bmatrix} T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \\ -\alpha(x)/\beta(x) \end{bmatrix}, \quad \text{y que} \quad B_c \beta(x)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\beta(x) \end{bmatrix}.$$

Usando estas expresiones en las ecuaciones en derivadas parciales (7.6) se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) &= T_2(x), & \frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) &= 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x) &= T_3(x), & \frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) &= 0, \\ & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} f(x) &= T_n(x), & \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} g(x) &= 0, \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} f(x) &= -\alpha(x)/\beta(x), & \frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) &= 1/\beta(x). \end{aligned}$$

Las primeras  $n - 1$  ecuaciones de la izquierda muestran que las componentes  $T_2$  a  $T_n$  de  $T$  son funciones de la primera componente  $T_1$ . Combinando todas las ecuaciones, la búsqueda se reduce a una función  $T_1(x)$  que satisfaga

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial x} g(x) &= 0, & i = 1, 2, \dots, n - 1; \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) &\neq 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

donde

$$T_{i+1}(x) = \frac{\partial T_i}{\partial x} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Las funciones  $\alpha$  y  $\beta$  están dadas por

$$\beta(x) = \frac{1}{(\partial T_n / \partial x) g(x)}, \quad \alpha(x) = -\frac{(\partial T_n / \partial x) f(x)}{(\partial T_n / \partial x) g(x)}. \quad (7.8)$$

Finalmente, para simplificar los cálculos en las nuevas variables, vamos a imponerle a  $T_1(x)$  la condición adicional de que  $T_1(x^*) = 0$ , donde  $x^*$  es un PE del sistema a lazo abierto en las coordenadas originales ( $f(x^*) = 0$ ) con respecto al cual queremos estabilizar al sistema.

**Ejemplo 7.3 (Cálculo del difeomorfismo  $z = T(x)$ ).** Consideremos nuevamente el sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} a \operatorname{sen} x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \triangleq f(x) + g u$$

que tiene un PE en  $x = 0$ . Buscamos  $T_1(x)$  tal que  $T_1(0) = 0$  y

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0, \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} g = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_2}{\partial x_1} & \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial T_2}{\partial x_2} \neq 0, \quad (7.10)$$

donde

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1} & \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \operatorname{sen} x_2 \\ -x_1^2 \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Vemos de (7.9) que  $T_1(x)$  no depende de  $x_2$ . Usando este dato en (7.11) obtenemos

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} a \operatorname{sen} x_2. \quad (7.12)$$

Derivando (7.12) con respecto a  $x_2$ , y reemplazando el resultado en (7.10) tenemos que

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_2} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} a \cos x_2 \neq 0,$$

que se satisface para  $\cos x_2 \neq 0$  si tomamos, por ejemplo,  $T_1(x) = x_1$ . Reemplazando  $\partial T_1 / \partial x_1 = 1$  en (7.12) obtenemos  $T_2(x) = a \operatorname{sen} x_2$ , que junto con  $T_1(x) = x_1$  da el mismo cambio de variables propuesto en (7.3). Otras elecciones de  $T_1$  son posibles; por ejemplo,  $T_1(x_1) = x_1 + x_1^3$  daría otro cambio de variables que lleva al sistema a la forma (7.6).  $\circ$

**Ejemplo 7.4 (Generador sincrónico).** Un generador sincrónico conectado a un bus infinito puede representarse con el modelo

$$\dot{x} = f(x) + g u$$

con

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin\delta] - bx_2 \\ -cx_3 + d[\cos(x_1+\delta) - \cos\delta] \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $\delta$  son constantes positivas. El sistema tiene un PE en  $x = 0$ . Buscamos  $T_1(x)$  tal que  $T_1(0) = 0$  y

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g = \frac{\partial T_1}{\partial x_3} = 0 \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} g = \frac{\partial T_2}{\partial x_3} = 0 \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial x} g = \frac{\partial T_3}{\partial x_3} \neq 0, \quad (7.15)$$

donde

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) \quad (7.16)$$

$$T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x). \quad (7.17)$$

Usando (7.13) en (7.16) tenemos

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_2} \{-a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin\delta] - bx_2\}. \quad (7.18)$$

Derivando (7.18) con respecto a  $x_3$ , y reemplazando el resultado en (7.14) tenemos que

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_3} = -a \sin(x_1 + \delta) \frac{\partial T_1}{\partial x_2} = 0.$$

Elegimos  $T_1$  independiente de  $x_2$ , y reemplazando  $\partial T_1 / \partial x_2 = 0$  en (7.18) obtenemos

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2. \quad (7.19)$$

Usamos (7.19) (recordando que  $T_1$  es independiente de  $x_2$  y  $x_3$ ) en (7.17),

$$T_3(x) = \frac{\partial T_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \{-a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin\delta] - bx_2\}. \quad (7.20)$$

Derivando (7.20) con respecto a  $x_3$ , y reemplazando el resultado en (7.15) tenemos que

$$\frac{\partial T_3}{\partial x_3} = -a \sin(x_1 + \delta) \frac{\partial T_1}{\partial x_1} \neq 0,$$

que se satisface en el dominio  $0 < x_1 + \delta < \pi$  eligiendo, por ejemplo,  $T_1(x) = x_1$ . Usando  $T_1(x) = x_1$  en (7.19) y (7.20), completamos el cálculo del difeomorfismo  $z = T(x)$ , dado por

$$\begin{aligned} z_1 &= T_1(x) = x_1 \\ z_2 &= T_2(x) = x_2 \\ z_3 &= T_3(x) = -a[(1 + x_3) \operatorname{sen}(x_1 + \delta) - \operatorname{sen} \delta] - bx_2, \end{aligned}$$

cuya transformación inversa

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 \\ x_2 &= z_2 \\ x_3 &= -1 - \frac{z_3 + bz_2 - a \operatorname{sen} \delta}{a \operatorname{sen}(z_1 + \delta)} \end{aligned}$$

está definida en  $0 < z_1 + \delta < \pi$ . Las funciones  $\alpha$  y  $\beta$  están dadas por (7.8) (con  $n = 3$ ), es decir

$$\begin{aligned} \beta(x) &= -\frac{1}{a \operatorname{sen}(x_1 + \delta)} \\ \alpha(x) &= \frac{(\partial T_3 / \partial x) f(x)}{a \operatorname{sen}(x_1 + \delta)} \end{aligned}$$

El modelo de estado en las coordenadas  $z$  es entonces

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= -a \operatorname{sen}(x_1 + \delta)[u - \alpha(x)]. \end{aligned}$$

◦

## 7.2 Linealización Entrada-Salida

La linealización exacta de la ecuación de estado que describimos en la sección anterior no necesariamente linealiza la ecuación de salida. Consideremos otra vez el ejemplo (7.2). Si tomamos como salida  $y = x_2$ , el cambio de variables y el control

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = a \operatorname{sen} x_2, \quad u = x_1^2 + \frac{1}{a \cos x_2} v$$

resultan en

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v \\ y &= \operatorname{arcsen} \frac{z_2}{a} \end{aligned}$$

que tiene un modelo de estado lineal con salida no lineal. Si, en cambio, tomamos  $u = x_1^2 + v$ , obtenemos el modelo

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a \operatorname{sen} x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

que tiene una transformación lineal entrada-salida (de  $u$  a  $y$ ) y una dinámica (la de  $x_1$ ) que es *inobservable* a la salida, ya que  $y$  no depende de  $x_1$ . Si sólo nos interesara la variable  $y$ , el control  $v$  podría diseñarse usando técnicas lineales para que  $y$  tenga el desempeño deseado. Sin embargo, no hay que descuidar la dinámica inobservable; por ejemplo, si  $y$  fuera estabilizada en un valor constante  $y_R \neq 0$ , la variable  $x_1$  tendría una evolución  $x_1(t) = x_1(0) + t a \operatorname{sen} y_R$ , que crece con  $t$ !

Veamos esta idea más formalmente. Sea el sistema mono-entrada mono-salida

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x).\end{aligned}$$

El caso más simple de sistema linealizable entrada-salida se da cuando es linealizable entrada-estado y la salida de interés es  $h(x) = T_1(x)$ . En ese caso, el cambio de variables  $z = T(x)$  y el control  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  lo transforman en

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_c z + B_c v \\ y &= C_c z = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] z\end{aligned}$$

donde  $(A_c, B_c, C_c)$  son la forma canónica de una cadena de integradores.

Para una dada salida  $y = h(x) = \psi_1(x)$  — no necesariamente igual a  $T_1(x)$  — podemos verificar si satisface la condición en derivadas parciales (7.7) directamente por substitución, es decir

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial x} g(x) \neq 0,$$

donde  $\psi_{i+1}(x) = (\partial \psi_i / \partial x) f(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Esta condición es una restricción en la forma en que las derivadas de  $y$  dependen de  $u$ . Esto es fácil de ver si calculamos las derivadas temporales de la salida,

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} f(x) = \psi_2(x) \\ \ddot{y} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = \frac{\partial \psi_2}{\partial x} f(x) = \psi_3(x)\end{aligned}$$

Si seguimos, vemos que  $u$  no aparece en las primeras  $n-1$  derivadas de  $y$ , pero aparece en la derivada de orden  $n$  con un coeficiente no nulo,

$$y^{(n)} = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \psi_n}{\partial x} g(x)u.$$

Es obvio que el control

$$u = \frac{1}{(\partial \psi_n / \partial x) g(x)} \left[ -\frac{\partial \psi_n}{\partial x} f(x) + v \right]$$

da la transformación entrada salida igual a una cadena de  $n$  integradores

$$y^{(n)} = v.$$

¿Qué pasaría si  $u$  apareciera en una derivada de orden *menor a  $n$*  con coeficiente no nulo? En este caso todavía podríamos linealizar la transformación entrada-salida, pero nos quedaría una cadena de menos integradores, y la ecuación de estado tendría una parte no linealizada. Como en los sistemas lineales, el número de veces que hay que derivar la salida hasta que aparezca la entrada con un coeficiente no nulo define el *grado relativo* del sistema.

**Definición 7.3 (Grado Relativo).** El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{7.21}$$

donde  $f$ ,  $g$  y  $h$ , definidas en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ , son suficientemente suaves, tiene *grado relativo*  $r$ , con  $1 \leq r \leq n$ , en una región  $D_0 \subset D$  si

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r-1; \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial x} g(x) \neq 0$$

para todo  $x \in D_0$ , donde  $\psi_1(x) = h(x)$  y  $\psi_{i+1}(x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} f(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r-1$ . ◦

Si el sistema tiene grado relativo (GR)  $r$ , entonces es linealizable entrada-salida; si tiene GR  $n$ , entonces es linealizable tanto entrada-salida como entrada-estado.

**Ejemplo 7.5 (Ecuación de Van der Pol).** Consideremos la ecuación de Van der Pol controlada

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u, \quad \epsilon > 0 \end{aligned}$$

con salida  $y = x_1$ . Calculemos las derivadas de la salida:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x}_1 = x_2 \\ \ddot{y} &= \dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u \end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema tiene GR 2 en  $\mathbb{R}^2$ .

Si la salida es  $y = x_2$ , entonces

$$\dot{y} = -x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u$$

y el sistema tiene GR 1 en  $\mathbb{R}^2$ .

Si la salida es  $y = x_1 + x_2^2$ , entonces

$$\dot{y} = x_2 + x_2[-x_1 + \epsilon(1 - x_1^2)x_2 + u]$$

y el sistema tiene GR 1 en  $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$ . ◦

**Ejemplo 7.6 (Sistema sin grado relativo bien definido).** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Las derivadas de la salida son

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_1 = y \implies y^{(n)} = y = x_1, \forall n \geq 1$$

Vemos que en ninguna derivada de la salida aparece la entrada  $u$ . En este caso el sistema no tiene un GR bien definido porque la salida  $y(t) = x_1(t) = e^t x_1(0)$  es independiente de la entrada. ◦

**Ejemplo 7.7 (Motor de corriente continua controlado por campo).** Un motor de corriente continua controlado por corriente de campo puede describirse por las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ax_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -bx_2 + \rho - cx_1x_3 \\ \dot{x}_3 &= \theta x_1x_2\end{aligned}$$

donde  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  son respectivamente la corriente de campo, de armadura, y velocidad angular. Para problemas de control de velocidad elegimos como salida  $y = x_3$ . Las derivadas de la salida son

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{x}_3 = \theta x_1x_2 \\ \ddot{y} &= \theta x_1\dot{x}_2 + \theta\dot{x}_1x_2 = (\cdot) + \theta x_2u,\end{aligned}$$

donde  $(\cdot)$  contiene términos que son funciones de  $x$ . El sistema tiene GR 2 en la región  $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 \neq 0\}$ .  $\circ$

**Ejemplo 7.8 (Sistema lineal).** Consideremos el sistema lineal representado por la función transferencia

$$H(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0},$$

donde  $m < n$  y  $b_m \neq 0$ . Un modelo de estado para este sistema es

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0].\end{aligned}$$

Este sistema es un caso particular de (7.21) con  $f(x) = Ax$ ,  $g(x) = B$  y  $h(x) = Cx$ . Veamos el GR del sistema calculando las derivadas de la salida. La primera derivada es

$$\dot{y} = CAx + CBu.$$

Si  $m = n - 1$ , entonces  $CB = b_{n-1} \neq 0$  y el sistema tiene GR 1. En caso contrario,  $CB = 0$  y seguimos derivando. Notemos que  $CA$  es un vector fila que se obtiene moviendo los elementos de  $C$  una posición a la derecha,  $CA^2$  se obtiene moviendo los elementos de  $C$  dos posiciones a la derecha, y así sucesivamente. Entonces vemos que

$$\begin{aligned}CA^{i-1}B &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - m - 1 \\ CA^{n-m-1}B &= b_m \neq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $u$  aparece por primera vez en la ecuación de  $y^{(n-m)}$ , que está dada por

$$y^{(n-m)} = CA^{n-m}x + CA^{n-m-1}Bu,$$

y el GR del sistema es  $n - m$ , o sea la diferencia entre el grado de los polinomios denominador y numerador de  $H(s)$ .  $\circ$

### 7.2.1 Linealización Entrada-Salida y Estabilidad Interna. Forma Normal

Vamos a introducir una forma canónica para sistemas no lineales en la que el grado relativo del sistema es explícito. Esta forma canónica se conoce como la *forma normal*, y permite extender a sistemas no lineales el concepto de sistema de mínima fase (en un sistema lineal: sin ceros con parte real no negativa). Primero veamos cómo llevar un sistema lineal a una realización en la que los ceros del sistema queden explícitos.

#### Caso lineal

Empecemos escribiendo el sistema lineal de grado relativo  $r = n - m$  como

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{Q(s)} \frac{R(s)}{N(s)}}, \quad D(s) = Q(s)N(s) + R(s),$$

donde los grados de  $D$ ,  $N$  y  $Q$  son  $n$ ,  $m < n$ , y  $r$ , respectivamente. Entonces  $H$  puede representarse como una interconexión en realimentación negativa con  $1/Q(s)$  en la cadena directa y  $R(s)/N(s)$  en el camino de realimentación (ver Figura 7.1).

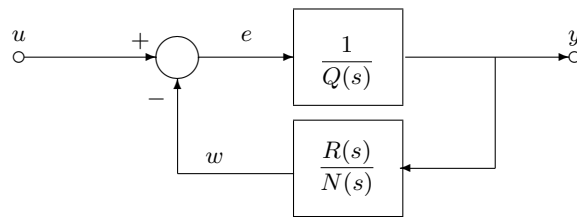


Figura 7.1: Representación en realimentación de  $H(s)$

La función transferencia  $1/Q(s)$  no tiene ceros, y puede realizarse tomando el vector de estados

$$\xi = [y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)}]^T.$$

Esto nos da el modelo de estados

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (A_c + B_c \lambda^T) \xi + B_c b_m e \\ y &= C_c \xi \end{aligned}$$

donde  $(A_c, B_c, C_c)$  son la forma canónica de una cadena de  $r$  integradores,  $\lambda \in \mathbb{R}^r$  y  $e$  es la señal de salida del sumador ( $e = u - [R(s)/N(s)]y$ ). Sea  $(A_0, B_0, C_0)$  una realización mínima de la función transferencia  $R(s)/N(s)$ , con estado  $\eta$ .

Notar que los autovalores de  $A_0$  son los ceros de  $N(s)$ , o sea, de  $H(s)$ . Entonces  $H(s)$  puede realizarse como

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_0 \eta + B_0 C_c \xi \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c (\lambda^T \xi - b_m C_0 \eta + b_m u) \\ y &= C_c \xi \end{aligned} \tag{7.22}$$



Usando la estructura de  $(A_c, B_c, C_c)$  es fácil verificar que

$$y^{(r)} = \lambda^T \xi - b_m C_0 \eta + b_m u$$

El control (“linealizante” entrada-salida)

$$u = \frac{1}{b_m} [-\lambda^T \xi + b_m C_0 \eta + v]$$

resulta en el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= A_0 \eta + B_0 C_c \xi \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c v \\ y &= C_c \xi \end{aligned}$$

cuya función transferencia de  $v$  a  $y$  es una cadena de  $r$  integradores, y cuyo subvector de estado  $\eta$  es inobservable desde  $y$ .

Supongamos que queremos estabilizar al sistema con una realimentación  $v = K\xi$  tal que  $A_c + B_c K$  sea Hurwitz. El correspondiente sistema a lazo cerrado es

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 C_c \\ 0 & A_c + B_c K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

Sabemos que para cualquier condición inicial  $\xi(0)$  tenemos que  $\xi(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Notemos que los estados  $\eta$  tienen como entrada la salida  $y = C_c \xi$ .

Para asegurar que  $\eta(t)$  se mantenga acotada para toda evolución acotada de  $y(t)$  es necesario que  $A_0$  sea Hurwitz, es decir, los ceros de  $H(s)$  deben tener parte real negativa.

Vemos que la matriz de evolución en (7.23) tiene una forma triangular en bloques, y por lo tanto los autovalores de todo el sistema son la unión de los autovalores de los bloques diagonales  $A_0$  y  $A_c + B_c K$ . Es decir, este control diseñado siguiendo el procedimiento de linealización entrada-salida ubica  $r$  autovalores del sistema a lazo cerrado como los autovalores de  $A_c + B_c K$ , y los restantes  $n - r$  autovalores iguales a los ceros del sistema a lazo abierto.

### Caso no lineal

Busquemos una versión no lineal del modelo (7.22). Las variables  $\xi$  se toman igual que en el caso lineal, ya que la transformación de entrada-salida va a seguir siendo una cadena de  $r$  integradores. Para elegir las variables  $\eta$ , va a ser importante respetar la característica fundamental del modelo (7.22), que es que *la entrada  $u$  no aparece en la ecuación de  $\eta$* . Tomamos entonces

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-r}(x) \\ \psi_1(x) \\ \vdots \\ \psi_r(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

donde  $\psi_1(x) = h(x)$  y  $\psi_{i+1}(x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} f(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r-1$ , y las  $\phi_i$  se eligen tales que  $T(x)$  sea un difeomorfismo en un dominio  $D_x \in D_0$  y

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq n-r, \forall x \in D_x. \quad (7.25)$$

Esto siempre es posible para sistemas mono-entrada con grado relativo  $r$ . La condición (7.25) asegura que  $\dot{\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x)$  no depende de  $u$ .

En las nuevas variables el sistema queda en la *forma normal*

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c \beta(x)^{-1} [u - \alpha(x)] \\ y &= C_c \xi \end{aligned} \quad (7.26)$$

donde  $\xi \in \mathbb{R}^r$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$ ,  $(A_c, B_c, C_c)$  son la forma canónica de una cadena de  $r$  integradores y

$$\begin{aligned} f_0(\eta, \xi) &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} f(x) \right|_{x=T^{-1}(z)} \\ \beta(x) &= \frac{1}{(\partial \psi_r / \partial x) g(x)} & \alpha(x) &= -\frac{(\partial \psi_r / \partial x) f(x)}{(\partial \psi_r / \partial x) g(x)} \end{aligned} \quad (7.27)$$

Notar que  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  no dependen de la elección de  $\phi$ . La estructura del sistema en forma normal se representa (en coordenadas  $z$ ) en el diagrama de bloques de la Figura 7.2.

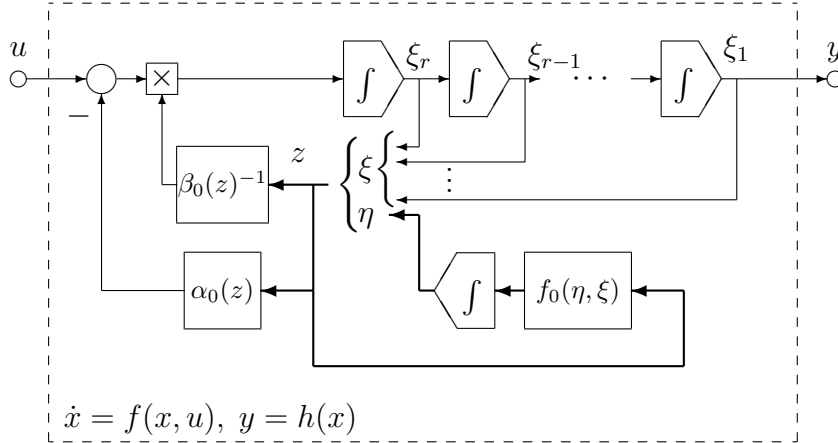


Figura 7.2: Sistema en forma normal

## 7.2.2 Dinámica de los Ceros

La forma normal (7.26) tiene una parte “externa”, representada por las variables  $\xi$ , y una parte “interna”, representada por las variables  $\eta$ . El control  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  linealiza la parte externa y hace inobservable la parte interna. Haciendo  $\xi = 0$  en la primera ecuación tenemos la *dinámica de los ceros*

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0) \quad (7.28)$$

que es la contraparte no lineal de  $\dot{\eta} = A_0\eta$ , donde los autovalores de  $A_0$  son los ceros de  $H(s)$ . El sistema se dice de *mínima fase* si la dinámica de los ceros tiene un PE AE en el dominio de interés.

La ecuación (7.28) representa la dinámica de los ceros en las nuevas variables. Podemos también caracterizarla en las coordenadas originales. Notar que

$$y(t) \equiv 0 \implies \xi(t) \equiv 0 \implies u(t) \equiv \alpha(x(t)).$$

Entonces, mantener la salida idénticamente cero implica que la solución de la ecuación de estados debe quedar confinada al conjunto

$$Z^* = \{x \in D_0 \mid \psi_1(x) = \psi_2(x) = \dots = \psi_r(x) = 0\},$$

y la entrada debe ser

$$u = u^*(x) \triangleq \alpha(x)|_{x \in Z^*}.$$

La dinámica de los ceros es entonces la dinámica restringida

$$\dot{x} = f^*(x) = [f(x) + g(x)\alpha(x)]|_{x \in Z^*}.$$

**Ejemplo 7.9 (Sistema de mínima fase).** Consideremos el sistema

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2}u$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_3 + u$$

$$y = x_2$$

que tiene un PE en el origen. Las derivadas de la salida son

$$\dot{y} = \dot{x}_2 = x_3$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_3 = x_1 x_3 + u$$

Por lo tanto el sistema tiene GR 2 en  $\mathbb{R}^3$ . Las variables  $\psi$  de la transformación (7.24) son  $\psi_1(x) = x_2$  y  $\psi_2(x) = x_3$ . Usando (7.27) obtenemos

$$\beta = 1, \quad \alpha = -x_1 x_3$$

Para caracterizar la dinámica de los ceros en las coordenadas originales, restringimos el estado al conjunto

$$Z^* = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3 = 0\}$$

y tomamos  $u = u^*(x) = 0$ . Esto da como resultado

$$\dot{x}_1 = -x_1$$

lo que muestra que el sistema es de mínima fase. Para llevar al sistema a la forma normal tenemos que elegir la función  $\phi(x)$  de la transformación (7.24) tal que

$$\phi(0) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} g(x) = 0$$

y tal que  $T(x)$  sea un difeomorfismo en algún dominio que contenga al origen. La ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0$$

puede resolverse por el método de separación de variables; esto da

$$\phi(x) = -x_1 + x_3 + \arctan x_3$$

que satisface la condición  $\phi(0) = 0$ . La transformación  $T(x)$  es un difeomorfismo global, ya que para cualquier  $z \in \mathbb{R}^3$ , la ecuación  $T(x) = z$  tiene una solución única. Por lo tanto, la forma normal

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= (-\eta - \xi_2 + \arctan \xi_2) \left( 1 + \frac{2 + \xi_2^2}{1 + \xi_2^2} \xi_2 \right) \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= (-\eta - \xi_2 + \arctan \xi_2) \xi_2 + u \\ y &= \xi_1 \end{aligned}$$

está definida en forma global. ◦

## 7.3 Control por Realimentación de Estados

### 7.3.1 Estabilización

Consideremos el sistema linealizable entrada-estado

$$\dot{z} = Az + B\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)], \quad z = T(x)$$

donde  $T(x)$  es un difeomorfismo en un dominio  $D_x \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D_z = T(D_x)$  contiene al origen,  $(A, B)$  es controlable,  $\beta(x)$  es no singular para todo  $x \in D_x$ , y  $\alpha$  y  $\beta$  son continuamente diferenciables. Diseñamos  $K$  tal que  $A + BK$  es Hurwitz. El control

$$u = \alpha(x) + \beta(x)KT(x)$$

da el sistema lineal a lazo cerrado

$$\dot{z} = (A + BK)z \tag{7.29}$$

Este resultado, sin embargo, está basado en la cancelación exacta de términos no lineales. En general, debido a incertidumbre paramétrica y errores computacionales, el control va a implementar en la realidad funciones  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  y  $\hat{T}$ , que son aproximaciones de las ideales  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $T$ . Es decir, el control real va a tener la forma

$$u = \hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)K\hat{T}(x)$$

El sistema a lazo cerrado con este control es entonces

$$\dot{z} = Az + B\beta(x)^{-1}[\hat{\alpha}(x) + \hat{\beta}(x)K\hat{T}(x) - \alpha(x)]$$

Sumando y restando el término  $BKz$ , podemos re-escribir la ecuación anterior como

$$\dot{z} = (A + BK)z + B\delta(z)$$

donde

$$\delta(z) = \beta(x)^{-1} \left\{ \hat{\alpha}(x) - \alpha(x) + [\hat{\beta}(x) - \beta(x)]KT(x) + \hat{\beta}(x)K[\hat{T}(x) - T(x)] \right\} \Big|_{x=T^{-1}(z)}$$

Vemos que el sistema a lazo cerrado es una perturbación del sistema nominal (7.29). Sea  $P = P^T$  la solución de la ecuación de Lyapunov

$$P(A + BK) + (A + BK)P^T = -I$$

y supongamos que en un entorno del origen el término de error satisface

$$\|\delta(z)\|_2 \leq \gamma_1 \|z\|_2 + \gamma_2, \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0$$

Usando  $V(z) = z^T P z$  como candidata a función de Lyapunov para el sistema a lazo cerrado tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &= -\|z\|_2^2 + 2z^T P B \delta(z) \\ &\leq -\|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2 \gamma_1 \|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2 \gamma_2 \|z\|_2 \\ &= -(1 - 2\|PB\|_2 \gamma_1) \|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2 \gamma_2 \|z\|_2 \end{aligned}$$

Si

$$\gamma_1 < \frac{1}{4\|PB\|_2}$$

tenemos que

$$\dot{V}(z) \leq -\frac{1}{2}\|z\|_2^2 + 2\|PB\|_2 \gamma_2 \|z\|_2 < 0, \quad \forall \|z\|_2 \geq 4\|PB\|_2 \gamma_2$$

lo que demuestra que las trayectorias del sistema perturbado son finalmente acotadas con cota final proporcional a  $\gamma_2$ .

### 7.3.2 Sistema Parcialmente Linealizable

Consideremos ahora el caso en que el sistema es linealizable sólo parcialmente, es decir, la ecuación de estado tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= A\xi + B\beta(x)^{-1}[u - \alpha(x)] \end{aligned} \tag{7.30}$$

donde

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix}$$

$T(x)$  es un difeomorfismo en un dominio  $D_x \subset \mathbb{R}^n$ ,  $D_z = T(D_x)$  contiene al origen,  $(A, B)$  es controlable,  $\beta(x)$  es no singular para todo  $x \in D_x$ ,  $f_0(0, 0) = 0$ , y  $f_0(\eta, \xi)$ ,  $\alpha(x)$  y  $\beta(x)$  son continuamente diferenciables. La forma (7.30) está basada en la forma normal (7.26),

pero en este caso no consideramos la salida porque no juega ningún papel en el problema de estabilización.

El control

$$u = \alpha(x) + \beta(x)K\xi = \alpha(x) + \beta(x)KT_2(x) \quad (7.31)$$

con  $K$  tal que  $A + BK$  es Hurwitz, lleva el sistema a la forma triangular

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} &= (A + BK)\xi \end{aligned} \quad (7.32)$$

donde el subsistema  $\xi$  es tiene un PE GAE en  $\xi = 0$ . Para analizar la estabilidad de todo el sistema (7.32) vamos a usar los resultados de la Sección §5.4 del Capítulo 5. El sistema (7.32) va a tener un PE AE en el origen si el subsistema  $\eta$  es (localmente) ISS cuando  $\xi$  se considera su entrada. El Lema 5.8 garantiza que el subsistema  $\eta$  de (7.32) es localmente ISS si el sistema no forzado

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$$

tiene un PE AE en  $\eta = 0$ . Por lo tanto,

un sistema linealizable entrada-salida que sea mínima fase es localmente estabilizado asintóticamente por el control (7.31).

Para probar estabilización asintótica global debemos garantizar que el subsistema  $\eta$  de (7.32) sea ISS (globalmente). Usando el Lema 5.9 vemos que esto es así, por ejemplo, si el origen de  $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$  es globalmente exponencialmente estable y  $f_0(\eta, \xi)$  es globalmente Lipschitz en  $(\eta, \xi)$ , aunque estas condiciones son bastante exigentes.

Si el origen de  $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$  es GAE, se podría pensar que el sistema triangular (7.32) se estabilizaría globalmente si los estados  $\xi$  decaen a cero arbitrariamente rápido. Esto indicaría que la solución de  $\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$  se aproxima rápidamente a la de  $\dot{\eta} = f_0(\eta, 0)$ , que tiende a cero. Vamos a ver en el ejemplo siguiente que esta no es necesariamente una buena estrategia debido al fenómeno de *peaking*.

**Ejemplo 7.10 (Peaking).** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -\frac{1}{2}(1 + \xi_2)\eta^3 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= v. \end{aligned}$$

El control lineal

$$v = -\gamma^2\xi_1 - 2\gamma\xi_2 \triangleq K\xi$$

asigna los autovalores de  $A + BK$  en  $(-\gamma, -\gamma)$ .

Para la condición inicial  $\eta(0) = \eta_0$ ,  $\xi_1(0) = 1$ ,  $\xi_2(0) = 0$ , el estado  $\xi_2$  tiene la evolución

$$\xi_2(t) = -\gamma^2 t e^{-\gamma t}$$

cuyo valor absoluto alcanza un *pico* proporcional a  $\gamma$  antes de decaer a cero. Vamos a ver que este pico puede interferir con la estabilidad del sistema  $\eta$  aunque  $\xi$  tienda a cero rápidamente. El estado  $\eta$  satisface

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}(1 - \gamma^2 t e^{-\gamma t})\eta^3$$

Durante el período de peaking, el coeficiente de  $\eta^3$  es positivo, lo que hace que  $|\eta(t)|$  crezca. En algún momento el coeficiente de  $\eta^3$  se hará negativo, pero esto puede que no suceda lo suficientemente rápido para evitar que el sistema tenga *escape en tiempo finito*. Para ver esto, consideremos la variable  $\nu = 1/\eta^2$ , que satisface la ecuación

$$\dot{\nu} = \frac{1}{\eta^3}[(1 + \xi_2)\eta^3] = 1 + \xi_2$$

de la cual, integrando, obtenemos

$$\nu(t) = \nu(0) + m(t) \triangleq \nu(0) + t + (1 + \gamma t)e^{-\gamma t} - 1$$

Por lo tanto, la variable  $\eta^2$  satisface

$$\eta^2(t) = \frac{1}{\nu(t)} = \frac{1}{\frac{1}{\eta^2(0)} + m(t)} \quad (7.33)$$

La función  $m(t)$  se hace negativa para algún  $t$  finito si  $\gamma$  es suficientemente grande. Esto quiere decir que, si  $\gamma$  es elegido suficientemente grande, siempre van a existir condiciones iniciales  $\eta(0)$  tal que el denominador de (7.33) pase por cero, con lo cual la variable  $\eta$  escapa a infinito en tiempo finito.  $\circ$

Vamos a volver al sistema triangular (7.30) en el Capítulo 8, y vamos a ver cómo diseñar  $v$  como función no lineal de  $\xi$  y  $\eta$  para alcanzar estabilidad asintótica global, aún cuando la dinámica de los ceros no sea ISS.

Concluimos esta sección discutiendo una limitación de la linealización exacta por realimentación. Básicamente, esta técnica de linealización se basa en la cancelación de los términos no lineales del sistema. Sin embargo, no siempre es buena idea cancelar alinealidades, dado que puede haber alinealidades “convenientes” desde el punto de vista de desempeño del sistema. Ilustramos la idea con un ejemplo.

**Ejemplo 7.11 (No siempre es bueno cancelar alinealidades).** Consideremos el sistema escalar

$$\dot{x} = ax - bx^3 + u,$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes positivas. Podemos tomar el control linealizante y estabilizante

$$u = -(\gamma + a)x + bx^3, \quad \gamma > 0,$$

que resulta en el sistema a lazo cerrado  $\dot{x} = -\gamma x$ . Este control cancela el término  $-bx^3$ , que provee “amortiguamiento no lineal” al sistema. De hecho, este término garantiza que las soluciones del sistema sean acotadas, *sin ningún control*, y a pesar de que el origen sea inestable. ¿Por qué cancelarlo entonces? Alternativamente, usando el control lineal

$$u = -(\gamma + a)x, \quad \gamma > 0,$$

obtendríamos el sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = -\gamma x - bx^3,$$

cuyo origen es globalmente asintóticamente estable y sus trayectorias se aproximan al origen más rápido que las de  $\dot{x} = -\gamma x$ . Más aún, el control lineal es más simple de implementar y usa menos esfuerzo de control.  $\circ$

La idea del ejemplo anterior es ilustrar que la teoría de linealización por realimentación da una herramienta muy valiosa para representar al sistema en una forma en la que todos los términos alineales entran a la ecuación de estado en el mismo punto en que entra el control. En el próximo capítulo vamos a ver técnicas que explotan esta estructura. La misma estructura permite que se puedan cancelar las alinealidades por realimentación, pero, no hay que perder de vista, dado el ejemplo anterior, que ésta no siempre es la alternativa más adecuada.

### 7.3.3 Regulación con Acción Integral

Usando el esquema de la sección anterior — linealización exacta por realimentación más diseño de una ganancia de realimentación de estados lineal — podemos diseñar un sistema para regular la salida  $y$  a un valor constante de referencia  $y_R$ , como se muestra en la Figura 7.3. La ganancia estática  $N = -[C(A + BK)^{-1}B]^{-1}$  sirve, como en el caso lineal, para compensar el error estático de seguimiento.

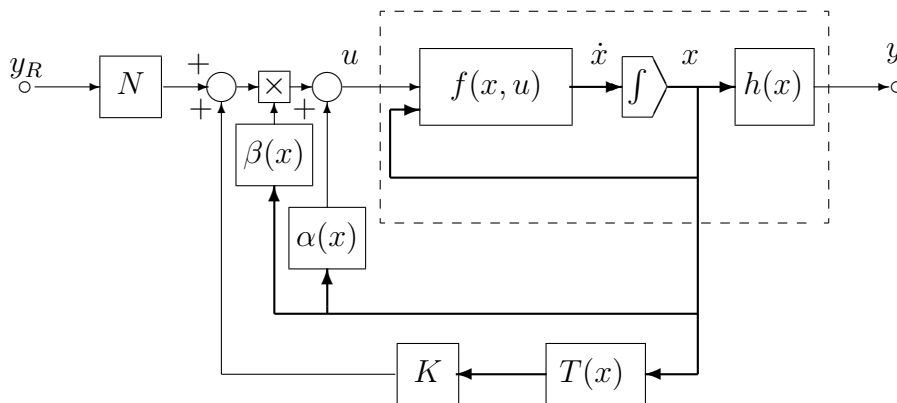


Figura 7.3: Esquema de regulación vía linealización exacta

Como en el caso lineal, también podemos agregar acción integral al esquema de la Figura 7.3 para lograr regulación de la salida en forma robusta. Consideramos el sistema mono-entrada mono-salida, linealizable entrada-salida, y representado en la forma normal (7.26)

$$\dot{\eta} = f_0(\eta, \xi)$$

$$\dot{\xi} = A_c \xi + B_c \frac{1}{\beta(x)} [u - \alpha(x)]$$

$$y = C_c \xi.$$

Sin pérdida de generalidad, asumimos que  $f_0(0, 0) = 0$ . Pretendemos diseñar un control de forma que la salida  $y$  siga en forma asintótica una referencia constante  $y_R$  usando acción integral para preservar regulación aún en presencia de incertidumbres paramétricas.



Además de asumir que el vector de estados es medible, suponemos que la salida es también físicamente medible — no es suficiente calcular  $y$  de  $x$  usando  $y = h(x)$ , ya que si hubiera incertidumbres en  $h$  podríamos perder la regulación.

Integramos entonces el error de seguimiento  $e = y - y_R$  aumentando el sistema con el integrador  $\dot{\sigma} = e$ , obteniendo

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{Y}_R) \\ \dot{\xi}_a &= \mathcal{A}\xi_a + \mathcal{B}\frac{1}{\beta(x)}[u - \alpha(x)], \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_c & 0 \\ C_c & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{Y}_R = \begin{bmatrix} y_R \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{r \times 1}, \quad e = \xi - \mathcal{Y}_R, \quad y \quad \xi_a = \begin{bmatrix} e \\ \sigma \end{bmatrix}.$$

Notar que el agregado de la ecuación de  $\dot{\sigma}$  no modifica la estructura de la forma normal. El par de matrices aumentadas  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es controlable, como puede verificarse, y por lo tanto podemos calcular una matriz  $K$  tal que  $\mathcal{A} + \mathcal{B}K$  sea Hurwitz, procediendo en forma idéntica a como hicimos en la sección anterior. Particionando  $K = [K_1 \ K_2]$ , donde  $K_1 \in \mathbb{R}^{1 \times r}$  y  $K_2 \in \mathbb{R}$ , armamos el control

$$u = \alpha(x) + \beta(x)\{K_1[T_2(x) - \mathcal{Y}_R] + K_2\sigma\},$$

que da el lazo cerrado

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_0(\eta, e + \mathcal{Y}_R) \\ \dot{\xi}_a &= (\mathcal{A} + \mathcal{B}K)\xi_a. \end{aligned}$$

El esquema de regulación con acción integral se representa en la Figura 7.4.

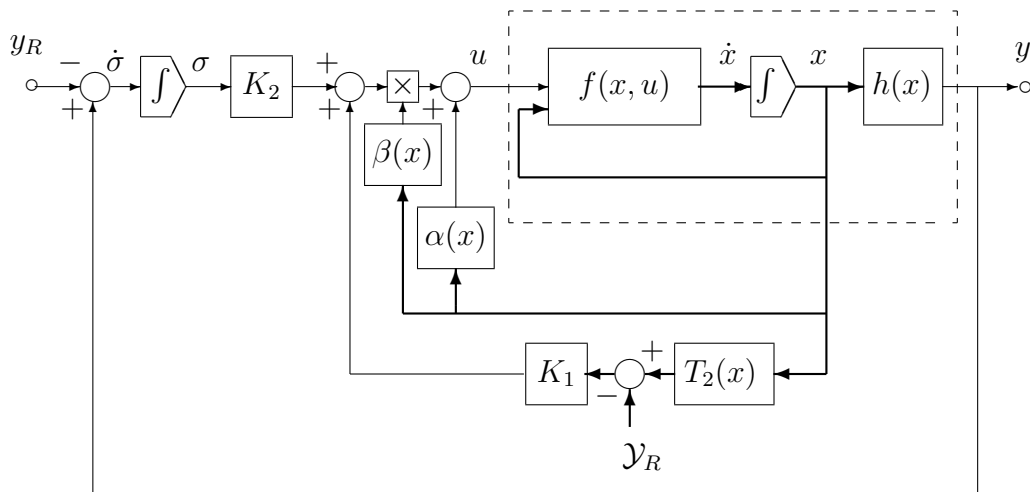


Figura 7.4: Regulador con acción integral vía linealización por realimentación

Para sistemas de mínima fase, la ecuación  $\dot{\eta} = f_0(\eta, e + \mathcal{Y}_R)$  es localmente ISS y el control calculado resuelve el problema de regulación local. Una condición suficiente para obtener seguimiento global es pedir que el sistema  $\dot{\eta} = f_0(\eta, e + \mathcal{Y}_R)$  sea ISS.

## 7.4 Ejercicios

### Ejercicio 7.1

El mecanismo de control de una articulación simple de robot puede modelarse mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{MgL}{I} \sin x_1 - \frac{k}{I}(x_1 - x_3) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{k}{J}(x_1 - x_3) + u,\end{aligned}$$

donde  $M, g, L, I$  y  $J$  son constantes positivas. Mostrar que el sistema es linealizable entrada-estado.

### Ejercicio 7.2

Para cada uno de los siguientes sistemas mostrar que el sistema es linealizable entrada-estado. Dar la transformación que lleva al sistema a la forma  $\dot{z} = Az + B\beta^{-1}(x)[u - \alpha(x)]$  y especificar el dominio sobre el cual es válida.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= e^{x_2}u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^2 + e^{x_2}u \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2\end{aligned}\tag{7.34}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3(1 + x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (1 + x_2)u \\ \dot{x}_3 &= x_2(1 + x_1) - x_3u\end{aligned}\tag{7.35}$$

**Ayuda:** Para (7.34) usar  $T_1 = T_1(x_3)$  y para (7.35)  $T_1 = T_1(x_1)$ .

### Ejercicio 7.3

Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_3 - x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + u.\end{aligned}$$

- (i) ¿Es el sistema linealizable entrada-estado?
- (ii) Si sí, encontrar un control en realimentación y un cambio de coordenadas que linealice la ecuación de estados.

**Ejercicio 7.4**

Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_3 - x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + u \\ y &= x_3.\end{aligned}$$

- (i) ¿Es el sistema linealizable entrada-salida?
- (ii) Si sí, transformarlo a la forma normal y especificar la región sobre la cual la transformación es válida.
- (iii) ¿Es el sistema de mínima fase?

**Ejercicio 7.5**

Un generador sincrónico conectado a una línea infinita puede representarse por el modelo

$$\dot{x} = f(x) + gu$$

donde

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a[(1+x_3)\sin(x_1+\delta) - \sin\delta] - bx_2 \\ -cx_3 + d[\cos(x_1+\delta) - \cos\delta] \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde  $a, b, c$  y  $d$  son constantes positivas. Considerar las siguientes dos posibles salidas,

$$\begin{aligned}y_1 &= h_1(x) = x_1; \\ y_2 &= h_2(x) = x_1 + \gamma x_2, \quad \gamma \neq 0.\end{aligned}$$

En cada caso, estudiar el grado relativo del sistema y transformarlo a la forma normal. Especificar la región sobre la cual la transformación es válida. Si existe dinámica de ceros no trivial, determinar si el sistema es de mínima fase o no.

**Ejercicio 7.6**

Considerar el sistema de péndulo invertido del Ejercicio 6.2. Suponiendo que la salida es  $y = \theta$ , ¿es el sistema linealizable entrada-salida? ¿Es de mínima fase?

**Ejercicio 7.7**

Considerar el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \tan x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u \\ y &= x_2.\end{aligned}$$

¿Es el sistema linealizable entrada-salida? ¿Es de mínima fase?

**Ejercicio 7.8**

Sea el sistema del péndulo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -a[\text{sen}(x_1 + \delta) - \text{sen } \delta] - bx_2 + cu,\end{aligned}$$

donde  $x_1 = \theta - \delta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  y  $u = T - \frac{a}{c} \text{sen } \delta$ . Para los valores  $a = 1 = c$ ,  $b = 0$  y  $\delta = \pi/4$ , diseñar un control estabilizante vía linealización exacta por realimentación de estados, ubicando los autovalores del sistema a lazo cerrado en  $-1 \pm j\sqrt{3}/2$ . Comparar el desempeño obtenido con el del control vía linealización aproximada.

**Ejercicio 7.9**

Mostrar que el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1), & a > 0, \\ \dot{x}_2 &= bx_1 - x_2 - x_1x_3 + u, & b > 0, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_1x_2 - 2ax_3,\end{aligned}$$

es linealizable entrada-estado y diseñar un control por realimentación de estados para estabilizar globalmente el origen.

**Ejercicio 7.10**

Considerar el sistema de suspensión magnética del Ejercicio 6.1.

- (i) Mostrar que el sistema es linealizable entrada-estado. **Ayuda:** Probar con  $T_1(x) = T_1(x_1)$ .
- (ii) Usando linealización exacta por realimentación, diseñar un control por realimentación de estados para estabilizar la bola en una posición deseada  $y_R > 0$ .
- (iii) Repetir los puntos (e) y (f) del Ejercicio 6.1. Comparar el desempeño obtenido con el del controlador diseñado en el punto (d) de ese ejercicio.
- (iv) Usando linealización exacta por realimentación, diseñar un control integral por realimentación de estados para estabilizar la bola en una posición deseada  $y_R > 0$ .
- (v) Repetir el punto (iii) anterior para el control diseñado en (iv). Comparar el desempeño del control integral con el diseñado en el punto (ii).

# Capítulo 8

## Diseños Basados en Lyapunov

El método de Lyapunov, originalmente utilizado como herramienta de análisis de sistemas, es además una herramienta útil en el diseño de control por realimentación. Existen muchos métodos basados en la idea de diseñar el control de forma que la derivada de una función de Lyapunov tenga ciertas propiedades que garanticen estabilidad de las trayectorias del sistema a lazo cerrado con respecto a un punto o un conjunto de equilibrios. En este capítulo presentamos dos métodos de este tipo. El primero (§8.1) es el método de *rediseño Lyapunov por amortiguamiento no lineal* (“nonlinear damping”), que permite robustificar un diseño dado para que tolere cierto tipo de incertidumbres y errores de modelado que satisfacen la *condición de apareamiento* (“matching condition”) — es decir, incertidumbre y errores que ocurren en el mismo punto del lazo donde se aplica el control. El segundo método (§8.2) es *backstepping*, un poderoso método recursivo que permite obtener diseños robustos frente a incertidumbres y errores que no necesariamente satisfagan la condición de apareamiento. Referimos a Khalil [1996, Capítulo 13] para ver otras técnicas basadas en Lyapunov, como *rediseños Lyapunov*, que generalizan la idea de amortiguamiento no lineal, y el *control adaptable*, que muestra una aplicación práctica de los teoremas de invariancia vistos en §4.14.

### 8.1 Rediseño Lyapunov para “Robustificar” por Amortiguamiento No Lineal

Consideremos el sistema afín en el control

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)[u + \Gamma(t, x)\delta(t, x, u)], \quad (8.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el estado y  $u \in \mathbb{R}^p$  la entrada de control. Las funciones  $f$ ,  $g$ ,  $\Gamma$  y  $\delta$  están definidas para  $(t, x, u) \in [0, \infty) \times D \times \mathbb{R}^p$ , donde  $D \in \mathbb{R}^n$  es un dominio que contiene el origen. Asumimos que  $f$ ,  $g$ ,  $\Gamma$  y  $\delta$  son seccionalmente continuas en  $t$  y localmente Lipschitz en  $x$  y  $u$  para todo  $(t, x, u)$  en el dominio de interés.

Asumimos que las funciones  $f$ ,  $g$  y  $\Gamma$  son conocidas, mientras que  $\delta$  representa incertidumbres de modelado, y de la cual sólo se sabe que es uniformemente acotada para todo  $(t, x, u)$ . Las incertidumbres representadas en  $\delta$  tienen una estructura especial: satisfacen la *condición de apareamiento* — vale decir que afectan a la ecuación de estado en los mismos puntos que lo hace la entrada de control.

Suponiendo que se conoce un control por realimentación de estados  $u = \psi(t, x)$  que alcanza estabilidad asintótica global del origen del sistema *nominal*

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u \quad (8.2)$$

pretendemos *rediseñar*  $u$  de forma de *robustificar* el diseño nominal y hacer que el sistema a lazo cerrado preserve sus propiedades de estabilidad frente a las incertidumbres  $\delta$ .

Sea entonces  $\psi(t, x)$  tal que el origen de

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)\psi(t, x) \quad (8.3)$$

es globalmente asintóticamente estable, y sea  $V(t, x)$  una función de Lyapunov conocida que satisface

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}[f(t, x) + g(t, x)\psi(t, x)] \leq -\alpha_3(\|x\|) \quad (8.5)$$

para todo  $[t, x] \in [0, \infty) \times D$ , donde  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  son funciones clase  $\mathcal{K}_\infty$ .

Consideremos el sistema (8.1) y apliquemos el control  $u = \psi(t, x) + v$ . El sistema a lazo cerrado obtenido,

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)\psi(t, x) + g(t, x)[v + \Gamma(t, x)\delta(t, x, \psi(t, x) + v)], \quad (8.6)$$

es una perturbación del sistema a lazo cerrado nominal (8.3). Calculemos la derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (8.6),<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}[f + g\psi] + \frac{\partial V}{\partial x}g[v + \Gamma\delta] \\ &\leq -\alpha_3 + \frac{\partial V}{\partial x}g[v + \Gamma\delta]. \end{aligned}$$

Introduzcamos la notación  $w^T \triangleq \frac{\partial V}{\partial x}g$ , con la que la desigualdad anterior queda

$$\dot{V} \leq -\alpha_3 + w^T v + w^T \Gamma \delta.$$

Tomando

$$v = -\gamma w \|\Gamma\|_2^2, \quad \gamma > 0, \quad (8.7)$$

obtenemos

$$\dot{V} \leq -\alpha_3 - \gamma \|w\|_2^2 \|\Gamma\|_2^2 + \|w\|_2 \|\Gamma\|_2 k,$$

donde  $k$  es una cota (desconocida pero finita) de  $\|\delta\|$ . El término

$$-\gamma \|w\|_2^2 \|\Gamma\|_2^2 + \|w\|_2 \|\Gamma\|_2 k$$

alcanza un máximo  $\frac{k^2}{4\gamma}$  en  $\|w\|_2 \|\Gamma\|_2 = \frac{k}{2\gamma}$ . Por lo tanto,

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \frac{k^2}{4\gamma}.$$

Como  $\alpha_3$  es clase  $\mathcal{K}_\infty$ ,  $\dot{V}$  siempre será negativa fuera de alguna bola, con lo que las soluciones del sistema a lazo cerrado serán uniformemente acotadas. El rediseño de Lyapunov (8.7) se llama *amortiguamiento no lineal*. Resumimos nuestras conclusiones en el siguiente lema.

<sup>1</sup>Para simplificar la notación omitimos la dependencia de las variables  $t$  y  $x$ .

**Lema 8.1 (Amortiguamiento no lineal).** Sea el sistema (8.1) y sea  $\psi(t, x)$  un control por realimentación estabilizante para el sistema nominal (8.2) con función de Lyapunov  $V(t, x)$  que satisface (8.4)–(8.5) para todo  $t \geq 0$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , con ciertas funciones  $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot)$  y  $\alpha_3(\cdot)$  clase  $\mathcal{K}_\infty$ . Supongamos que el término de incertidumbres  $\delta$  es uniformemente acotado para  $(t, x, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ . Sea  $v$  dada por (8.7) y  $u = \psi(t, x) + v$ . Entonces, para cualquier  $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$  la solución del sistema a lazo cerrado es uniformemente acotada.  $\circ$

**Ejemplo 8.1 (Robustificación por amortiguamiento no lineal).** Sea el sistema escalar

$$\dot{x} = x^3 + u + x\delta(t)$$

donde  $\delta(t)$  es una función acotada de  $t$ . Con el control estabilizante  $\psi(x) = -x^3 - x$ , la función de Lyapunov  $V(x) = x^2$  satisface (8.4)–(8.5) globalmente con  $\alpha_1(r) = \alpha_2(r) = \alpha_3(r) = r^2$ . La componente de amortiguamiento no lineal (8.7), con  $\gamma = 1$ , es  $v = -2x^3$ . El sistema a lazo cerrado

$$\dot{x} = -x - 2x^3 + x\delta(t)$$

tiene soluciones acotadas independientemente de cuan grandes sean las perturbaciones  $\delta$ , gracias al término de amortiguamiento no lineal  $-2x^3$ .  $\circ$

## 8.2 Backstepping

Backstepping es un procedimiento recursivo que combina la elección de una función de Lyapunov con el diseño de un control en realimentación. Descompone el problema original en una secuencia de problemas de diseño para sistemas de orden reducido (que hasta pueden llegar a ser escalares). Explotando la flexibilidad adicional que existe con sistemas de bajo orden y escalares, backstepping a menudo puede resolver problemas de estabilización, seguimiento y control robusto bajo condiciones menos restrictivas que las encontradas en otros métodos.

### 8.2.1 Backstepping de un integrador

Introducimos la técnica de backstepping en el caso especial de *backstepping de un integrador*. Consideremos el sistema

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\xi \tag{8.8}$$

$$\dot{\xi} = u \tag{8.9}$$

donde  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  son los estados y  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control. Las funciones  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  son suaves en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene a  $\eta = 0$ , y  $f(0) = 0$ . Queremos diseñar un control por realimentación de estados que estabilice el origen  $\eta = 0$ ,  $\xi = 0$ .

El sistema (8.8)–(8.9) puede pensarse como la conexión en cascada de dos componentes, como se ve en la Figura 8.1. La primera componente es (8.8), con  $\xi$  como entrada, y la segunda es el integrador (8.9).

Supongamos que sabemos que la componente (8.8) puede estabilizarse con un control suave  $\xi = \phi(\eta)$ , con  $\phi(0) = 0$ , vale decir, el origen de

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)$$

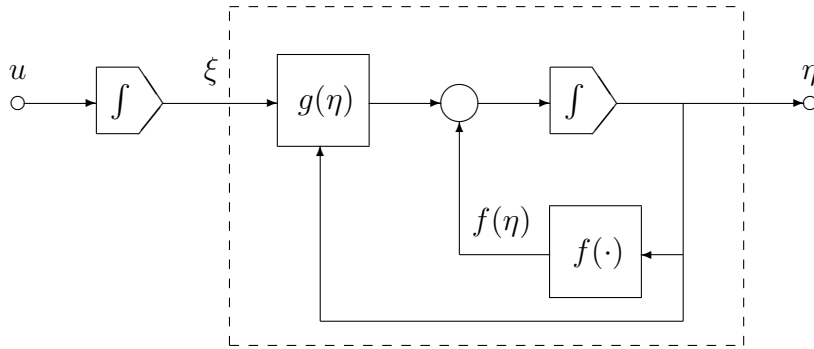


Figura 8.1: Diagrama de bloques del sistema (8.8)–(8.9)

es asintóticamente estable. Más aún, supongamos que se conoce una función de Lyapunov  $V(\eta)$  (suave, definida positiva) que satisface

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta), \quad \forall \eta \in D, \tag{8.10}$$

donde  $W(\eta)$  es definida positiva. Sumando y restando  $g(\eta)\phi(\eta)$  al lado derecho de (8.8), obtenemos la representación equivalente

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta) [\xi - \phi(\eta)] \\ \dot{\xi} &= u, \end{aligned}$$

que se muestra en la Figura 8.2.

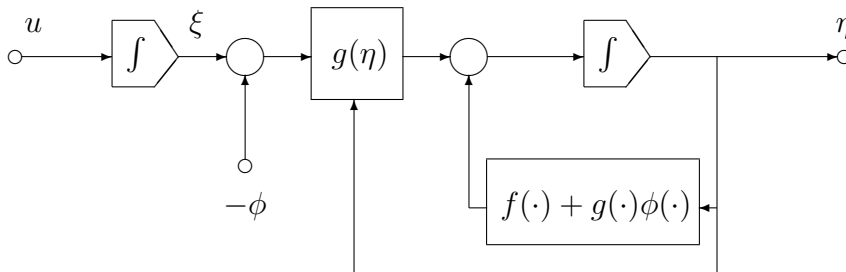


Figura 8.2: Introducción de  $\phi(\eta)$

Con el cambio de variables

$$z = \xi - \phi(\eta), \quad v = u - \dot{\phi},$$

obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta) z \\ \dot{z} &= v, \end{aligned} \tag{8.11}$$

que se muestra en la Figura 8.3. Notar que, como  $f$ ,  $g$  y  $\phi$  son conocidas, podemos calcular la derivada  $\dot{\phi}$  usando la expresión

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi].$$



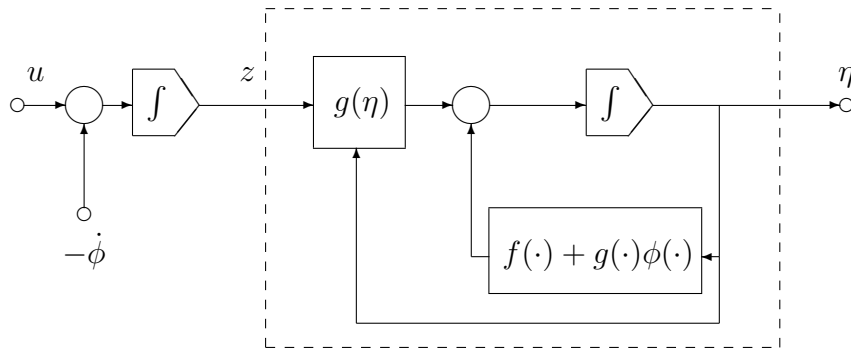


Figura 8.3: “Backstepping” de  $-\dot{\phi}(\eta)$  a través del integrador

El sistema (8.11) tiene la misma estructura que el sistema original, pero ahora la primera componente  $\dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + g(\eta)z$  tiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en el origen cuando su entrada  $z$  es cero. Esta característica va a ser explotada en el diseño de un control  $v$  que estabilice todo el sistema.

Consideremos como candidata a función de Lyapunov para (8.11) la función

$$V_a(\eta, z) = V(\eta) + \frac{1}{2}z^2 \quad (8.12)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (8.11) satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_a &= \frac{\partial V}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\phi(\eta)] + \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta)z + z v \\ &\leq -W(\eta) + \left[ \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) + v \right] z. \end{aligned}$$

Eligiendo

$$v = -\frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k z, \quad k > 0$$

obtenemos

$$\dot{V}_a \leq -W(\eta) - k z^2,$$

que muestra que el origen  $\eta = 0, z = 0$  es asintóticamente estable. Como  $\phi(0) = 0$ , concluimos que el origen  $\eta = 0, \xi = 0$  es asintóticamente estable. Substituyendo las expresiones de  $v, z$  y  $\phi$ , obtenemos el control en realimentación de estados

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} [f(\eta) + g(\eta)\xi] - \frac{\partial V}{\partial \eta} g(\eta) - k[\xi - \phi(\eta)] \quad (8.13)$$

Si las hipótesis valen globalmente y  $V(\eta)$  es radialmente no acotada, concluimos que el origen es globalmente asintóticamente estable. Esta técnica se denomina *integrator backstepping*<sup>2</sup> ya que el control virtual  $\xi = \phi(\eta)$  se “corre” un integrador para atrás para obtener el control real  $u$  (ver la secuencia en las Figuras 8.1, 8.2 y 8.3). Resumimos el resultado en el siguiente lema.

<sup>2</sup>De “step back an integrator”: retroceder un integrador.

**Lema 8.2 (Backstepping de un integrador).** Sea el sistema (8.8)–(8.9). Sea  $\phi(\eta)$  un control por realimentación de estados estabilizante para (8.8) con  $\phi(0) = 0$  y sea  $V(\eta)$  una función de Lyapunov que satisface (8.10) con alguna función definida positiva  $W(\eta)$ . Entonces, el control por realimentación de estados (8.13) estabiliza el origen de (8.8)–(8.9) con  $V(\eta) + \frac{1}{2}[\xi - \phi(\eta)]^2$  como función de Lyapunov. Además, si todas las hipótesis valen globalmente y  $V(\eta)$  es radialmente no acotada, el origen será globalmente asintóticamente estable.  $\circ$

**Ejemplo 8.2.** Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= u,\end{aligned}$$

que tiene la forma (8.8) con  $\eta = x_1$  y  $\xi = x_2$ . Empezamos con el sistema escalar

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2,$$

tomando a  $x_2$  como entrada, y diseñamos un control  $x_2 = \phi(x_1)$  que estabilice el origen  $x_1 = 0$ . Tomamos, por ejemplo

$$x_2 = \phi(x_1) = -x_1^2 - x_1$$

y  $V(x_1) = x_1^2/2$ , que satisfacen

$$\dot{V} = -x_1^2 - x_1^4 \leq -x_1^2, \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}$$

El control por backstepping (8.13) para este ejemplo es

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - \frac{\partial V}{\partial x_1} - [x_2 - \phi(x_1)] \\ &= -(2x_1 + 1)(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - x_1 - (x_2 + x_1^2 + x_1)\end{aligned}\tag{8.14}$$

y la función de Lyapunov total (8.12) es

$$V_a(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1^2 + x_1)^2\tag{8.15}$$

$\circ$

Para sistemas de mayor orden, se puede aplicar backstepping en forma recursiva, como ilustramos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 8.3.** El sistema de tercer orden

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= u\end{aligned}$$

está formado por el sistema de segundo orden del ejemplo anterior con un integrador adicional a la entrada. Por el ejemplo anterior sabemos que el subsistema formado por las dos primeras ecuaciones puede estabilizarse con el control virtual (8.14), o sea

$$x_3 = -(2x_1 + 1)(x_1^2 - x_1^3 + x_2) - x_1 - (x_2 + x_1^2 + x_1) \triangleq \phi_1(x_1, x_2)$$

y (8.15) es la función de Lyapunov correspondiente. Ahora podemos considerar al sistema de tercer orden como un caso especial del sistema (8.8)–(8.9) con

$$\eta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \xi = x_3 \quad f = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_1^3 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y aplicar nuevamente backstepping. El control  $u$  de la forma (8.13) es entonces

$$u = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x_1^2 - x_1^3 + x_2) + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}x_3 - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - [x_3 - \phi_1(x_1, x_2)]$$

donde  $V_1$  está dada por (8.15), y la función de Lyapunov total es

$$V_2(x_1, x_2, x_3) = V_1(x_1, x_2) + \frac{1}{2}[x_3 - \phi_1(x_1, x_2)]$$

◊

### 8.2.2 Backstepping de sistemas en realimentación estricta

Más generalmente, backstepping de un integrador puede aplicarse al sistema

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f(\eta) + g(\eta)\xi \\ \dot{\xi} &= f_a(\eta, \xi) + g_a(\eta, \xi)u \end{aligned} \tag{8.16}$$

donde  $f_a, g_a$  son suaves y  $g_a(\eta, \xi) \neq 0$  en el dominio de interés. Notar que el segundo subsistema de (8.16) no es un integrador “puro” sino un integrador “perturbado” por la presencia de las alinealidades  $f_a$  y  $g_a$ . Esta “perturbación” es fácilmente manejable, sin embargo, mediante la transformación de entrada

$$u = \frac{1}{g_a(\eta, \xi)}[u_a - f_a(\eta, \xi)], \tag{8.17}$$

que reduce al segundo subsistema de (8.16) al integrador puro  $\dot{\xi} = u_a$ . Si conocemos, como antes, el par de funciones  $\phi(\eta)$  y  $V(\eta)$  correspondientes a la estabilización del primer subsistema de (8.16), podemos tomar  $u_a$  igual al control (8.13), y combinándolo con (8.17) obtener el control por backstepping para (8.16)

$$u = \phi_a(\eta, \xi) \triangleq \frac{1}{g_a(\eta, \xi)} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \eta}[f(\eta) + g(\eta)\xi] - \frac{\partial V}{\partial \eta}g(\eta) - k[\xi - \phi(\eta)] - f_a(\eta, \xi) \right\}, \tag{8.18}$$

con  $k > 0$ . La correspondiente función de Lyapunov total es

$$V_a(\eta, \xi) = V(\eta) + \frac{1}{2}[\xi - \phi(\eta)]^2. \tag{8.19}$$

Aplicando recursivamente el control por backstepping de un integrador, pueden estabilizarse sistemas en forma de *realimentación estricta* (“strict feedback”)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x)\xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1)\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(x, \xi_1, \xi_2) + g_2(x, \xi_1, \xi_2)\xi_3 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} &= f_{n-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) + g_{n-1}(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})\xi_n \\ \dot{\xi}_n &= f_n(x, \xi_1, \dots, \xi_n) + g_n(x, \xi_1, \dots, \xi_n)u \end{aligned} \tag{8.20}$$

donde  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $u, \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$ , y las funciones  $f_0, \dots, f_n$  se anulan en el origen. Asumimos que  $g_i(x, \xi_1, \dots, \xi_i) \neq 0$  en el dominio de interés, para  $i = 1, \dots, n$ . La razón por la cual llamamos a sistemas de este tipo en realimentación estricta es que las funciones  $f_i$  y  $g_i$  en las  $n$  ecuaciones de  $\dot{\xi}_i$  dependen sólo de  $x, \xi_1, \dots, \xi_i$ , es decir, sólo de variables que son realimentadas.

El procedimiento recursivo de backstepping comienza, como antes, con el sistema

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x) \xi_1$$

donde  $\xi_1$  se considera la entrada de control virtual. Asumimos que es posible encontrar un control  $\xi_1 = \phi_0(x)$ , con  $\phi_0(0) = 0$ , y una función de Lyapunov  $V_0(x)$  tal que

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} [f_0(x) + g_0(x) \phi_0(x)] \leq -W_0(x)$$

en el dominio de interés para alguna función  $W_0(x)$  definida positiva.

El siguiente paso es considerar el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x) \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1) \xi_2 \end{aligned}$$

que está en la forma (8.16) con  $\eta = x$ ,  $\xi = \xi_1$ ,  $u = \xi_2$ ,  $f = f_0$ ,  $g = g_0$ ,  $f_a = f_1$  y  $g_a = g_1$ . Usando (8.18) y (8.19), tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_1(x, \xi_1) &= \frac{1}{g_1} \left[ \frac{\partial \phi_0}{\partial x} (f_0 + g_0 \xi_1) - \frac{\partial V_0}{\partial x} g_0 - k_1 (\xi_1 - \phi_0) - f_1 \right], \quad k_1 > 0 \\ V_1(x, \xi_1) &= V_0(x) + \frac{1}{2} [\xi_1 - \phi_0(x)]^2 \end{aligned}$$

son el control estabilizante y la correspondiente función de Lyapunov para este sistema.

Luego consideramos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x) \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 &= f_1(x, \xi_1) + g_1(x, \xi_1) \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= f_2(x, \xi_1, \xi_2) + g_2(x, \xi_1, \xi_2) \xi_3 \end{aligned}$$

como un caso particular de (8.16) para

$$\eta = \begin{bmatrix} x \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \quad \xi = \xi_2, \quad f = \begin{bmatrix} f_0 + g_0 \xi_1 \\ f_1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \end{bmatrix}, \quad f_a = f_2, \quad g_a = g_2.$$

Usando (8.18) y (8.19), obtenemos el control estabilizante y la correspondiente función de Lyapunov para este sistema

$$\begin{aligned} \phi_2(x, \xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{g_2} \left[ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} (f_0 + g_0 \xi_1) + \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} (f_1 + g_1 \xi_2) - \frac{\partial V_1}{\partial \xi_1} g_1 - k_2 (\xi_2 - \phi_1) - f_2 \right], \quad k_2 > 0 \\ V_2(x, \xi_1, \xi_2) &= V_1(x, \xi_1) + \frac{1}{2} [\xi_2 - \phi_1(x, \xi_1)]^2 \end{aligned}$$

y así el procedimiento se repite  $n$  veces hasta obtener un control estabilizante  $u = \phi_n(x, \xi_1, \dots, \xi_n)$  y la función de Lyapunov correspondiente  $V_n(x, \xi_1, \dots, \xi_n)$  para el sistema completo.

**Ejemplo 8.4.** El sistema mono-entrada mono-salida en la forma normal especial

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f_0(x) + g_0(x) \xi_1 \\
 \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\
 &\vdots \\
 \dot{\xi}_{r-1} &= \xi_r \\
 \dot{\xi}_r &= [u - \alpha(x, \xi_1, \dots, \xi_r)] / \beta(x, \xi_1, \dots, \xi_r) \\
 y &= \xi_1
 \end{aligned} \tag{8.21}$$

es un caso particular de la forma (8.20). Si el sistema es mínima fase, el origen de la dinámica de los ceros  $\dot{x} = f_0(x)$  es asintóticamente estable, y en el primer paso de backstepping podemos tomar simplemente  $\phi_0(x) = 0$ , y  $V_0(x)$  cualquier función de Lyapunov para la dinámica de los ceros. Si el sistema es no-mínima fase, lo que vimos en este capítulo muestra que backstepping puede estabilizar al sistema si podemos resolver el problema de estabilización de la dinámica de los ceros.

Por ejemplo, si la primera ecuación de (8.21) es

$$\dot{x} = -x + x^2 \xi_1$$

el sistema es mínima fase ya que la dinámica de los ceros  $\dot{x} = -x$  es globalmente exponencialmente estable. Entonces podemos iniciar el procedimiento de backstepping a través de los  $r$  integradores con  $\phi_0(x) = 0$  y  $V_0(x) = x^2/2$ , por ejemplo.

Por otro lado, si la primera ecuación de (8.21) es

$$\dot{x} = x^2 - x \xi_1 \tag{8.22}$$

el sistema es de no mínima fase ya que la dinámica de los ceros  $\dot{x} = x^2$  es inestable. En este caso tenemos que resolver primero el problema de estabilización del sistema (8.22) con entrada  $\xi_1$ . Un posible par  $\phi_0, V_0$  para este sistema es  $\phi_0(x) = x + x^2$  y  $V_0(x) = x^2/2$ ; luego se continua con el procedimiento de backstepping.  $\circ$

## 8.3 Ejercicios

### Ejercicio 8.1

Para cada uno de los siguientes sistemas escalares, usar amortiguamiento no lineal para diseñar un control por realimentación de estados que garantice que el estado  $x(t)$  esté siempre acotado y uniformemente finalmente acotado con cota final  $\mu$ . La función  $\delta(t)$  es acotada para todo  $t \geq 0$  aunque la cota es desconocida.

(i)  $\dot{x} = -x + x^2[u + \delta(t)]$

(ii)  $\dot{x} = x^2[1 + \delta(t)] - xu$

### Ejercicio 8.2

Usando backstepping, diseñar un control por realimentación de estados que estabilice globalmente el origen del sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_1 x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_1 + u
 \end{aligned}$$

¿Puede el origen estabilizarse globalmente mediante linealización exacta?

### Ejercicio 8.3

Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 - 3x_1^2/2 - x_1^3/2 \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

- (i) Usando backstepping, diseñar un control por realimentación de estados *lineal* que estabilice globalmente el origen del sistema. **Ayuda:** No cancelar los términos no lineales.
- (ii) Diseñar control por realimentación de estados que estabilice globalmente el origen del sistema usando realimentación exacta.
- (iii) Comparar ambos diseños.

### Ejercicio 8.4

Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_1^2[x_2 + \delta(t)] \\ \dot{x}_2 &= u\end{aligned}$$

donde  $\delta(t)$  es acotada para todo  $t \geq 0$  aunque la cota es desconocida. Combinando backstepping y amortiguamiento no lineal diseñar un control por realimentación de estados que garantice que el estado  $x(t)$  esté globalmente acotado para todo  $x(0) \in \mathbb{R}^2$ .

### Ejercicio 8.5

Considerar el sistema de suspensión magnética del Ejercicio 6.1. Usando backstepping, diseñar un control por realimentación de estados para la entrada de tensión  $u$  que estabilice la bola en la posición deseada  $y = y_R$ .

### Ejercicio 8.6

Considerar el sistema del Ejercicio 7.9.

- (i) Comenzando con las dos primeras ecuaciones, usar backstepping para diseñar un control por realimentación de estados  $u = \psi(x)$  tal que el origen  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  sea globalmente exponencialmente estable.
- (ii) Mostrar que con el control del apartado anterior, el origen  $x = 0$  del sistema completo es globalmente asintóticamente estable.
- (iii) Comparar este control con el que se diseñó en el Ejercicio 7.9.

**Ejercicio 8.7**

Considerar el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \eta + x^2 \zeta \\ \dot{\zeta} &= -\zeta^3 + x \\ \dot{\eta} &= u\end{aligned}$$

Sea  $x_r(t)$  una señal de referencia suave (con derivadas continuas de todo orden). Se pide diseñar el control  $u$  tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - x_r(t)] = 0$$

manteniendo todos los estados acotados para todo  $t$ . Justificar la respuesta.

**Ayuda:**

- Considerar primero el subsistema  $(\zeta, x)$  con  $\eta$  como la entrada de control, tomar una nueva variable  $z = x - x_r$  y calcular un control  $\eta = \phi(\zeta, z, x_r, \dot{x}_r)$  que consiga que  $z \rightarrow 0$ .
- Usar  $V_1(z) = \frac{1}{2} z^2$  y la ley de control  $\phi$  hallada en el punto anterior para calcular  $u$  usando backstepping.

**Ejercicio 8.8**

Considerar el modelo rotacional de una nave espacial rígida:

$$\dot{\rho} = H(\rho) \omega \tag{8.23}$$

$$\dot{\omega} = J^{-1} S(\omega) J \omega + J^{-1} u \tag{8.24}$$

donde  $\omega \in R^3$  es la velocidad angular,  $\rho \in R^3$  es la orientación o posición angular (en coordenadas especiales, llamadas parámetros de Cayley–Rodrigues),  $u \in R^3$  es el torque de entrada o control,  $J > 0$  es la matriz de inercia. La matriz  $S(x)$ , para  $x = [x_1, x_2, x_3]'$  es antisimétrica y dada por

$$S(x) = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

y la matriz  $H(\rho)$  está definida como

$$H(\rho) = \frac{1}{2} [I - S(\rho) + \rho \rho']$$

- Considerar  $\omega$  como la entrada de control para la primera ecuación (8.23) y calcular un control  $\omega = \phi(\rho)$  que consiga estabilidad exponencial global del PE  $\rho = 0$  con respecto a la función de Lyapunov  $V_1(\rho) = \frac{1}{2} \rho' \rho = \frac{1}{2} \|\rho\|^2$ .
- Diseñar el control  $u$  usando backstepping para que el PE  $(\rho, \omega) = (0, 0)$  del sistema (8.23)–(8.24) sea GAE.





# Bibliografía

- John S. Bay. *Fundamentals of Linear State Space Systems*. WCB/McGraw-Hill, 1999.
- Chi-Tsong Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd edition, 1999.
- G.H. Golub and C.F. van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press, 3rd edition, 1996.
- J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer, 1983.
- A. Isidori, A.J. Krener, C. Gori-Giorgi, and S. Monaco. Nonlinear decoupling via feedback: A differential geometric approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 26:331–345, 1981.
- Alberto Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer-Verlag, 3rd edition, 1995.
- Alberto Isidori. *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag, 1999.
- H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, 2nd edition, 1996.
- M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P. V. Kokotović. *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, 1995.
- Shankar Sastry. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, 1999.
- R. Sepulchre, M. Janković, and P. V. Kokotović. *Constructive Nonlinear Control*. CCES Series. Springer-Verlag, 1997.
- E. D. Sontag. Smooth stabilization implies coprime factorization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34:435–443, 1989.
- E.D. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters*, 24:351–359, 1995.
- A. J. van der Schaft.  *$L_2$ -gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer-Verlag, 2000.
- W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. Third Edition*. Springer-Verlag, 1985.



# Índice de Materias

- amortiguamiento no lineal, 161
- backstepping, 163
  - de sistemas en realimentación estricta, 167
  - de un integrador, 163
- Banach, *véase* espacio de Banach
- Barbalat, *véase* lema de Barbalat
- Barbashin-Krasovskii, *véase* teorema de Barbashin-Krasovskii
- Cauchy, *véase* secuencia de Cauchy
- centro, 13
- Chetaev, *véase* teorema de Chetaev
- ciclo límite, 20
- clausura, 31
- condición de apareamiento, 161
- condición de Lipschitz, 33
- conjunto cerrado, 31
- control adaptable, 10, 161
- convergencia de secuencias, 31
- Coulomb, *véase* fricción de Coulomb
- desigualdad de Gronwall-Bellman, 30
- umlaut older, 29
- difeomorfismo, 140
- dinámica de los cerros, 150
- diodo túnel, 6, 17
- ecuación de Lienard, 9
- ecuación de sensibilidad, 43
- ecuación de Van der Pol, 9, 21
- ensilladura, 11
- equilibrios
  - definición, 4
  - hiperbólicos, 16
  - múltiples, 17
  - perturbación, 14
- espacio de Banach, 31
- espacio lineal normado, 31
- estabilidad, 50
- estabilidad asintótica global, 57
- estabilidad de sistemas perturbados, 97
- estabilidad entrada-estado, 105
- estabilidad estructural, 16
- estabilidad exponencial, 80
  - robusta, 98
- estabilidad uniforme, 79
- foco, 13
- forma de Jordan, 17
- forma normal, 150
- fricción de Coulomb, 8
- fricción estática, 8
- función de Lyapunov, 52
- función de sensibilidad, 43
- función definida positiva, 52
- funciones de clase  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{KL}$ , 79
- grado relativo, 145
- Gronwall-Bellman, *véase* desigualdad de Gronwall-Bellman
- inestabilidad, 50, 58
- ISS, *véase* estabilidad entrada-estado
- Jacobiana, 19
- Jordan, *véase* forma de Jordan
- LaSalle, *véase* teorema de LaSalle
- lema de Barbalat, 90
- Lienard, *véase* ecuación de Lienard
- linealización
  - análisis de puntos de equilibrio, 17
  - y estabilidad, 67
- Lipschitz, *véase* condición de Lipschitz
- Lyapunov
  - función, 52
  - método directo, 51
  - método indirecto, 70
  - superficie, 52
  - teorema de estabilidad, 51, 77
  - teoremas conversos, 86
- método del gradiente variable, 55
- método indirecto de Lyapunov, 70
- mínima fase, 151
- mapeo contractivo, 31
- matriz Jacobiana, 19

nodo, 11

norma, 31

oscilador

armónico, 20

de relajación, 21

de resistencia negativa, 9

de Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol

péndulo, 5, 17

perturbación de equilibrios, 14

principio de comparación, 43

principio de invariancia, 60

sistemas inestacionarios, 90

punto fijo, 31

puntos de equilibrio, 4

tilde no Lyapunov, 161

región de atracción, 57, 64

retrato de fase, 11

construcción numérica, 22

secuencia convergente, 31

secuencia de Cauchy, 31

sensibilidad, 43

separatriz, 17

sistema en realimentación estricta, 167

sistema linealizable entrada-estado, 140

sistema masa-resorte, 7

superficie de Lyapunov, 52

teorema de Barbashin-Krasovskii, 58

teorema de Chetaev, 58

teorema de estabilidad de Lyapunov, 51

teorema de LaSalle, 61

teoremas conversos, *véase* Lyapunov

Van der Pol, *véase* ecuación de Van der Pol