



VI Congreso Iberoamericano de Acústica - FIA 2008
Buenos Aires, 5, 6 y 7 de noviembre de 2008

FIA2008-A034

Caracterización de ruido vehicular por supresión del efecto Doppler

Fernando A. Marengo Rodríguez^(a),
Federico S. Miyara^(b).

(a), (b) Laboratorio de Acústica y Electroacústica, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario. Riobamba 245 bis, Rosario, Argentina. E-mail: (a) fmarengorodriguez@yahoo.com.ar, (b) fmiyara@fceia.unr.edu.ar.

Abstract

Traffic noise at an urban location can be simulated aurally in such a way that its parameters can be carefully controlled. This will prove useful in experiments on noise effects and in traffic noise impact assessment. In order to accomplish this, noise samples of individual vehicles equivalent to what would be recorded at a receptor moving along with the vehicle should be recorded. This is, however, impractical, due to the turbulence noise that would be generated at the microphone, so they must be obtained indirectly from the noise recorded at a fixed position. The main difficulty is, then, that noise immission is distorted by Doppler effect and geometric divergence. In this paper, experimental and computational techniques are developed in order to suppress the Doppler and divergence effects. Finally, the performance of the method is assessed aurally by simulating vehicle noise within a virtual open profile urban street.

Resumen

El ruido de tránsito se puede simular auralmente en forma controlada, posibilitando evaluar el impacto acústico que produce y la realización de experimentos sobre efectos del ruido. Para ello se requiere contar con muestras de ruido de la emisión de vehículos individuales, es decir, equivalentes a lo que se obtendría con un micrófono que se desplazara solidariamente con el vehículo. La toma sonora en estas condiciones es imposible debido al ruido de turbulencia sobre el micrófono, obligando a la obtención indirecta con un micrófono fijo. El principal inconveniente es que la inmisión se encuentra contaminada por el efecto Doppler debido al movimiento relativo entre el emisor y el receptor y por la divergencia geométrica. En este trabajo se exploran técnicas computacionales para la supresión del efecto Doppler que permiten aproximarse a la situación de una toma a distancia constante del vehículo, y a la posterior parametrización del mismo por medio de la teoría de Fourier. Finalmente, se evalúa la performance del análisis propuesto mediante la simulación del sonido estudiado con los parámetros extraídos anteriormente y su contrastación auditiva con el sonido registrado en una vía urbana de perfil abierto.

1 Introducción

Existen numerosos modelos de predicción de niveles de ruido de tránsito que se aplican para realizar estudios de impacto acústico, ya sea de vías de circulación existentes como de nuevos proyectos. Estos modelos utilizan descripciones más o menos detalladas de los emisores y de la intensidad del tránsito (Barry y Regan, 1978; US Department of Transportation Research and Special Programs Administration, 1995; Hankard et al., 2006), así como de condiciones de contexto (barreras, edificios, terrenos absorbentes, etc.) y proporcionan predicciones de los niveles equivalentes esperables en la forma de mapas de ruido.

Estos modelos presentan varios inconvenientes. Primero, las predicciones se corresponden con valores medidos en exteriores, lo cual no permite la predicción en el interior de las edificaciones. Segundo, proporcionan una información comprensible sólo por especialistas. Tercero, no permite discriminar las fuentes del ruido medido, por ejemplo motos y automóviles.

El presente trabajo se enmarca en otro tipo de simulación: la simulación *aural* del ruido vehicular, esto es, la generación por computadora de un ruido audible correspondiente a una situación de tránsito dada (composición y volumen). Para ello se parte del ruido que produciría el vehículo sobre un sensor que viaja solidario con el mismo a una distancia de referencia y se aplican modelos que tienen en cuenta no sólo sus características espectrales (Pasch et al., 2002), sino también las reflexiones en fachadas (Miyara et al., 2003) y el efecto Doppler (Miyara et al., 2002).

Una dificultad para ello es que no se puede captar en forma directa dicho ruido debido a las turbulencias que se generarían por el viento en el micrófono. El objeto de este trabajo es la determinación indirecta de la emisión de referencia a partir de un registro digital calibrado en una estación fija por remoción del efecto Doppler y de la atenuación por divergencia, la modelización de la señal resultante mediante un ruido de banda ancha y componentes tonales y, finalmente, la aplicación del modelo de simulación aural para la reconstrucción del ruido causado por el vehículo en un punto de inmisión.

2 Método propuesto

El método propuesto en este trabajo comienza con la remoción de la distorsión por modulación de amplitud y de frecuencia (distorsión AM-FM) que afecta al sonido emitido por un vehículo en movimiento y registrado en una estación fija. Si p_0 es la presión sonora del sonido emitido en el instante t_e captada a una distancia de referencia R_0 , p es su homóloga en el punto de inmisión en el instante t , y $d(t)$ es la distancia entre fuente y receptor, la relación entre ambas presiones sonoras está dada por la siguiente expresión

$$p(t) = \frac{R_0}{d(t)} p_0(t_e), \quad (1)$$

donde $t_e = t - d(t)/c$ y c es la velocidad del sonido.¹ En el caso en que el sonido emitido consista solamente en un tono puro de frecuencia conocida, su versión afectada por el efecto Doppler posee su frecuencia instantánea dependiente de la velocidad relativa de la fuente. Dicha frecuencia se puede calcular como la derivada de la fase de la señal analítica asociada, cuya parte real es el tono afectado por Doppler y cuya parte imaginaria es la transformada de

¹ En realidad debería tenerse en cuenta la distancia que existía *en el momento de la emisión*, que es ligeramente diferente dado que en el interin el vehículo se ha desplazado. El error que se comete es, sin embargo, muy pequeño.

Hilbert del mismo (Hahn, 1996). Por medio del análisis del mencionado tono se puede conocer la velocidad de la fuente y, en consecuencia, la distancia fuente-receptor para determinar el sonido producido por el vehículo libre de distorsión AM-FM.

Dado que el ruido emitido normalmente no es un tono puro, el montaje experimental incluirá la emisión de un tono puro piloto de una frecuencia tal que interfiera lo menos posible con la información espectral relevante (generalmente 1 kHz o superior). La detección de este tono piloto permite reconstruir la velocidad del vehículo.

Luego de la obtención de la señal emitida, se la parametriza por medio del análisis de su espectro de amplitud de Fourier. En este paso, se detectan, por un lado, las componentes tonales que aportan mayor energía al espectro total. Por otro lado, se detecta y modeliza el ruido de banda ancha remanente mediante un modelo de predicción lineal (LPM), que permite su simulación a partir de un ruido blanco filtrado por el correspondiente filtro de coeficientes de predicción lineal ó LPC.

3 Implementación del algoritmo propuesto

El análisis propuesto en este documento se implementa con los datos registrados digitalmente en una estación fija según se indica en la figura 1. En la misma se muestra la trayectoria rectilínea $x(t)$ que describe la fuente F, el punto de recepción O de la señal estudiada y algunos parámetros geométricos relevantes. El lugar del ensayo debe ser abierto para evitar tener que contemplar reflexiones por fachadas (Miyara et al., 2007).

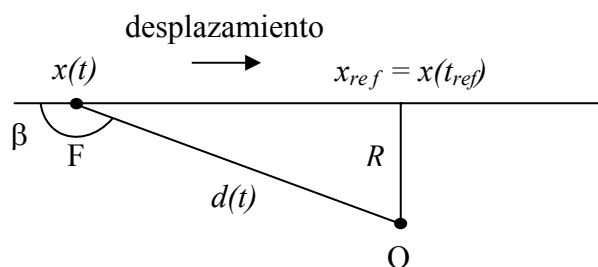


Figura 1. Esquema para la implementación del algoritmo propuesto en este trabajo.

3.1 Remoción de la modulación AM-FM

La eliminación de la distorsión AM-FM requiere el análisis del tono piloto. Para ello, se aplica al sonido registrado un filtro pasabanda (PBn) centrado en la frecuencia del tono puro f . Su banda de paso debe contemplar el máximo ensanchamiento espectral que puede sufrir el tono piloto afectado por Doppler, el cual depende de la velocidad máxima del automóvil. Suponiendo que éste posee movimiento rectilíneo uniforme a una velocidad máxima estimada $v_{max,est}$, se obtienen las frecuencias de corte mínima $f_{c,min}$ y máxima $f_{c,max}$ del PBn como

$$f_{c,min} = f \frac{c}{c + v_{m\acute{a}x,est}}, \quad (2)$$

$$f_{c,m\acute{a}x} = f \frac{c}{c - v_{m\acute{a}x,est}}. \quad (3)$$

Posteriormente, se extrae la frecuencia instantánea contenida en el tono recuperado. Para ello, se obtiene la señal analítica asociada por medio de la secuencia filtrada en el paso anterior y su transformada de Hilbert. La fase de esta señal compleja codifica la velocidad media de la fuente $v_{med,est}$, la cual se calcula por medio del algoritmo expuesto en el Anexo 1.

Luego, con la velocidad determinada en el punto anterior, se calcula la coordenada rectilínea del vehículo $\Delta x(t) = x(t) - x_{ref}$ como

$$\Delta x(t) = v_{med,est} \cdot \Delta t, \quad (4)$$

siendo $\Delta t = t - t_{ref}$. Esta expresión surge en vista de que t_{ref} es el instante en el cual la fuente pasa más cerca del receptor. En el Anexo 2 se demuestra que si la velocidad de la fuente es lentamente variable, la frecuencia instantánea del tono afectado por Doppler posee su derivada más negativa en el instante t_{ref} .

Luego se calcula la distancia fuente-receptor usando la coordenada calculada previamente y la mínima distancia fuente-receptor como

$$d(t) = \sqrt{R^2 + \Delta x(t)^2}. \quad (5)$$

Finalmente, se calcula el retardo entre el tiempo de emisión y el de inmisión, lo cual permite conocer el instante en el que fue emitida cada muestra de audio. Dado que la tasa de muestreo en el receptor es constante y que el retardo es variable, los instantes de emisión determinan un intervalo de muestreo no uniforme. Para determinar la señal emitida con muestreo uniforme se aplica un algoritmo de interpolación cúbica cuyas variables de entrada son los vectores de las muestras de audio y de los instantes en que éstas fueron emitidas. La salida es el vector remuestreado a tasa constante.

La atenuación por divergencia geométrica, por otra parte, se elimina multiplicando la señal obtenida en el paso anterior por un factor que en todo momento es directamente proporcional a la distancia fuente-receptor.²

3.2 Parametrización

Una vez que se dispone de una versión del ruido libre de modulación AM-FM, se procede a analizar su espectro de amplitud de Fourier. A fin de lograr una representación precisa, se debe tomar un intervalo temporal suficientemente largo para detectar correctamente las componentes tonales. Sin embargo, existe una relación de compromiso ya que dicho intervalo también debe ser suficientemente corto alrededor de t_{ref} como para minimizar la influencia del ruido ambiente. La cantidad de líneas espectrales debe ser lo suficientemente grande para representar adecuadamente la discriminación espectral del oído humano. Ello se logra típicamente con una FFT de 4096 puntos a una tasa de muestreo de 44,1 kHz.³

Bajo las premisas recién expuestas, se detectan las componentes tonales de mayor contenido energético en distintas bandas. En el caso en que se detecten componentes pseudotonales, se supone que los máximos detectados en el espectro son originados por la

² Esto es válido mientras la relación señal / ruido sea aceptablemente alta, ya que de lo contrario la ganancia aplicada a la señal también enfatiza el ruido de fondo, que no está afectado ni por el efecto Doppler ni por la divergencia geométrica.

³ En este caso la resolución del espectro obtenido es 10,76 Hz, que es superior a la resolución dada por las bandas críticas.

convolución de un espectro multitonal ideal con una ventana apropiada según el grado de ensanchamiento de los picos pseudotonales.

Finalmente, el ruido de banda ancha remanente se reconstruye mediante un filtro LPC cuya entrada consiste en ruido blanco. El orden del filtro se elige en forma empírica de acuerdo al tipo de ruido a representar y al grado de fidelidad requerido para la posterior simulación aural.

4 Resultados numéricos y discusión

Para el experimento propuesto se usó un automóvil Suzuki Fun modelo 2003 con motor de 1100 cm³ de cilindrada. El recorrido del mismo era rectilíneo en un espacio abierto, a una velocidad aproximadamente constante de 35 km/h. El tono piloto de $f = 1$ kHz se generó por software a una tasa de muestreo de 44100 Hz y se reprodujo con un dispositivo portátil MP3 y altavoces autoamplificados de PC de uso general alimentados a batería.⁴ Por otro lado, la estación fija se ubicó a una distancia $R = 2,4$ m de la huella del vehículo, y en la misma se grabó digitalmente, con tasa de muestreo 44100 Hz, la señal de audio proveniente de un sonómetro Rion NL-15. Para ello se lo conectó a una computadora portátil con placa de sonido incorporada y software Audacity para la gestión del proceso de grabación.

Posteriormente, se empleó una PC con software matemático matricial para estudiar los datos obtenidos en un intervalo de 1 s alrededor del instante de referencia. El espectro resultante se muestra en la figura 2, donde se puede apreciar que la información del tono piloto no enmascara información vital a caracterizar.

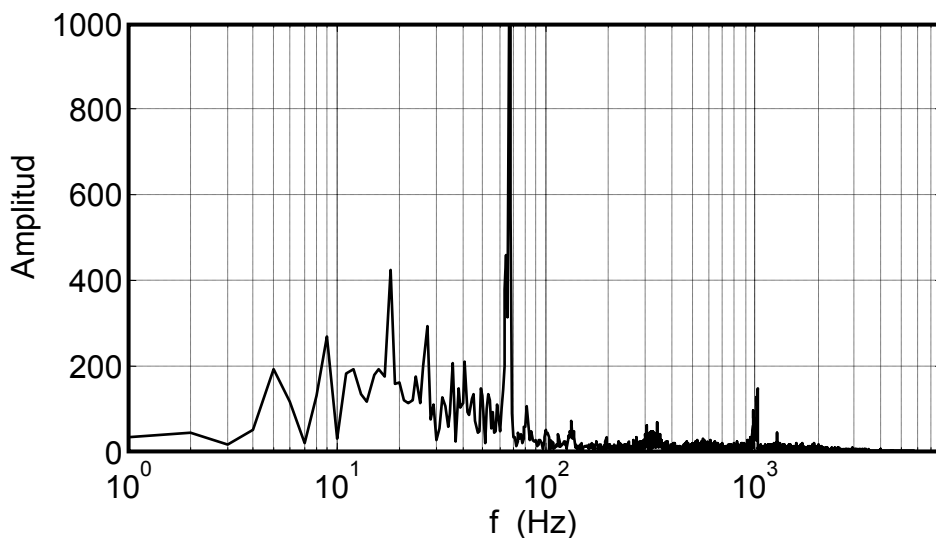


Figura 2. Espectro de amplitud de la presión sonora captada por el sonómetro en el ensayo propuesto. El pico en 1 kHz corresponde al tono piloto.

Luego, se extrajo el tono piloto aplicando el filtro PBn descrito en la sección 3.1 con una velocidad máxima estimada de $v_{max,est} = 40$ km/h. A la señal obtenida se le asoció su representación analítica y por medio de su fase se recuperó la frecuencia instantánea ilustrada en línea de trazo lleno en la figura 3. Debido al alto nivel de ruido presente en dicha

⁴ La distorsión que sufre el tono al ser reproducido con estos equipos no es significativa para este propósito

frecuencia, se aplicó un filtro pasabajos (PB) FIR de primer orden con compensación por el retardo de grupo que éste introduce, logrando la curva en línea de puntos en la figura 3.

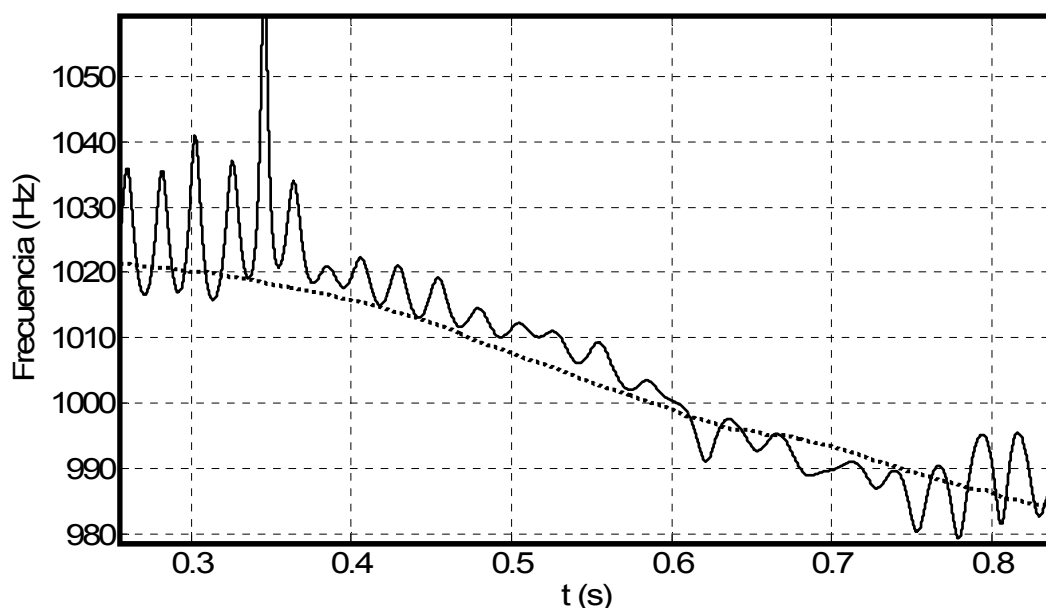


Figura 3. Frecuencia instantánea del tono piloto obtenida por medio de la señal analítica asociada (porción central). La curva en línea de puntos es la versión filtrada de la curva de trazo lleno.

Con la frecuencia filtrada anteriormente se calculó la velocidad media del automóvil $v_{med,est} = 28,86$ km/h, así como el instante de referencia $t_{ref} = 522,2$ ms. Finalmente, se determinó la distancia fuente-receptor y con ella se procedió a calcular el tiempo de emisión y la señal en el punto de emisión vía interpolación cúbica de la secuencia captada en el tiempo de inmisión. El espectro de la señal resultante se muestra en la figura 4 (a).

En lo que respecta a la caracterización del sonido, se extrajeron los máximos locales más relevantes, contemplando los que aportan más del 0,1% de la potencia total de todos los máximos. Debido al grado de ensanchamiento espectral que poseen, estas componentes son pseudotonales y según pruebas empíricas equivalen a la convolución del espectro multitonal con una ventana de Blackman de 7 muestras de ancho. Por último, se asoció al ruido de banda ancha remanente un filtro LPC de orden 20. El sonido simulado con los parámetros extraídos posee el espectro ilustrado en la figura 4 (b). En la misma se puede apreciar que la información espectral es similar a la obtenida experimentalmente, hecho que valida el análisis propuesto en este documento.

Finalmente, la parametrización del sonido experimental de la forma recién expuesta permite simular el ruido que produce el auto a distintas velocidades independientemente de la posición del peatón. Si el planteo aquí propuesto se extiende a muchos tipos de vehículos, se puede obtener un modelo matemático compacto que describe el ruido que cada uno produce, y en consecuencia se podría simular el ruido de tránsito en una calle abierta aleatorizando los emisores. Por otra parte, al contemplar las reflexiones en fachadas sería posible simular el ruido de tránsito en calles cerradas, situación más frecuente en una ciudad (Miyara et al., 2003).

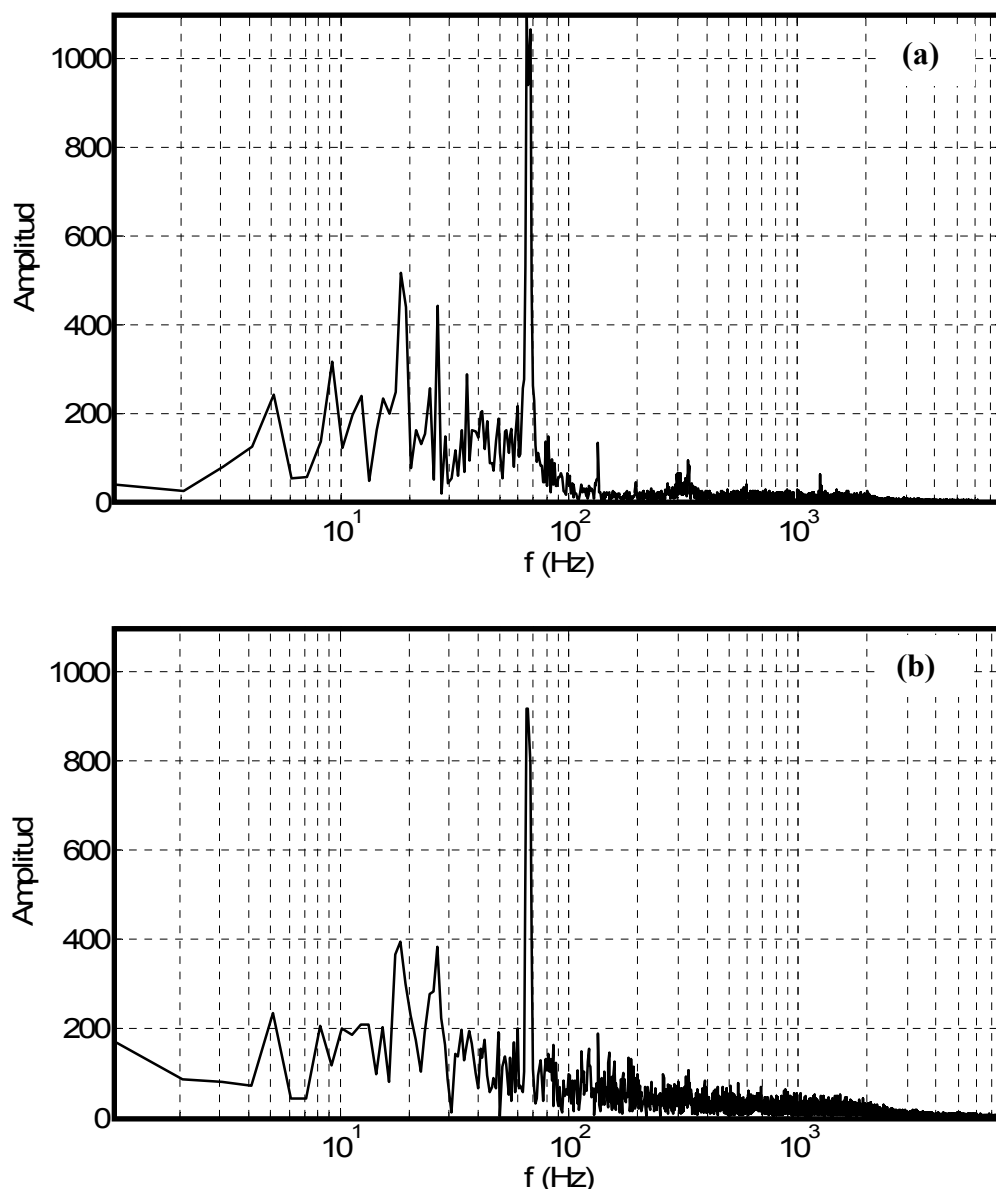


Figura 4. (a) Espectro de amplitud de la secuencia grabada con modulación AM-FM compensada. (b) Espectro simulado con los pseudotones detectados y el filtro LPC estimado.

5 Conclusiones

En el presente trabajo se demostró que el efecto Doppler puede ser removido eficientemente con el algoritmo aquí desarrollado, lo que permite aproximarse a la situación de una toma a distancia constante del vehículo sin los problemas de turbulencia presentes en el caso de toma directa de los datos. Por otro lado, los resultados de dicha remoción permitieron corroborar que el sonido analizado tiene componentes pseudotonales y de banda ancha. Posteriormente, el sonido estudiado pudo ser representado de forma eficiente por un conjunto pequeño de parámetros, constituido por la información asociada a dichos

pseudotonos y por un modelo LPC que describe la componente de banda ancha. Finalmente, se expuso que la parametrización del ruido vehicular permite llevar a cabo la simulación aural del mismo de manera totalmente controlada, eficiente, económica e incluso con pequeña carga computacional. Más aún, se puso de relieve que dicha simulación se puede llevar a cabo para cualquier cantidad y variedad de vehículos a distintas velocidades, tanto en espacios abiertos como cerrados. Dicha simulación posibilita evaluar el impacto acústico producido por el ruido de tránsito en cualquier arteria de una ciudad y en consecuencia las medidas de control de ruido a aplicar oportunamente. Queda pendiente para futuros trabajos el estudio de la simulación aural con velocidad variable.

6 Agradecimientos

Los autores del presente trabajo agradecen la colaboración del Grupo Ruido de la Facultad de Arquitectura, Planeamiento y Diseño de la Universidad Nacional de Rosario por poner a nuestra disposición el equipamiento necesario para realizar el ensayo expuesto en este trabajo.

NOTA: El presente trabajo es parte de un proyecto de investigación financiado por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT - PICT N° 38109)

Referencias

- Barry, T. M.; Regan, J. A. (1978). "FHWA Highway Traffic Noise Prediction Model". Report No. FHWA-RD-77-108. Federal Highway Administration, Washington, DC.
- US Department of Transportation Research and Special Programs Administration (1995). "Development of National Referente Energy Mean Emission Levels for the FHWA Traffic Noise Model (FHWA TNM®), Version 1.0". Final report, Federal Highway Administration, U.S. Department of transportation.
- Hankard, M.; Cerjan, J.; Leasure, J. (2006). "Evaluation of the FHWA traffic noise model (TNM) for highway traffic noise prediction in the state of Colorado". Report No. CDOT-2005-21, Colorado Department of Transportation Research Branch, Colorado.
- Miyara, F.; Cabanellas, S.; Mosconi, P.; Pasch, V.; Yanitelli, M.; Vazquez, J. (2003). "Aural simulation of the effect of façades on vehicle noise". SePaViAm 2003. Fac. Ing. UBA, Buenos Aires.
- Miyara, F.; Cabanellas, S.; Mosconi, P.; Pasch, V.; Yanitelli, M.; Rall, J. C.; Vazquez, J. (2002). "Ruido de aeropuertos: Caracterización acústica de una aeronave a partir del ruido del sobrevuelo" 4ta Jornada Regional sobre Ruido Urbano Montevideo, Uruguay, 14/07/01. Actas en CD, también disponible en <http://www.fing.edu.uy/imfia/ambiental/pdfs/FArqRosario2.pdf>
- Pasch, V.; Mosconi, P.; Yanitelli, M.; Cabanellas, S.; Miyara, F.; Vazquez J., (2002). "Spectral information in noise mapping: An exploratory study". JASA 112, No. 5 Pt. 2, 2213-2213.
- Hahn, S. (1996). "Hilbert Transforms in Signal Processing". Artech House, London, UK.
- Miyara, Federico; Pasch, Vivian; Cabanellas, Susana; Yanitelli, Marta; Miechi, Pablo (2007). "Traffic noise measurement: frequency response as a function of microphone position from computer simulations". 19th International Congress on Acoustics, Madrid. Actas en CD.

Anexo 1: Cálculo de la velocidad media de la fuente

A partir del tono piloto proveniente de la fuente, se calcula la velocidad media de la misma $v_{med,est}$ con el siguiente algoritmo recursivo. En primer lugar, se supone que la fuente describe un movimiento rectilíneo uniforme, por lo que su velocidad v se puede calcular en función de la frecuencia del tono piloto en los instantes extremos $f_{-\infty}$ y f_{∞} como

$$v = c \frac{f_{-\infty} - f_{\infty}}{f_{-\infty} + f_{\infty}}. \quad (6)$$

Las frecuencias que aparecen en la ecuación (6) se aproximan por los valores medidos en dos instantes, $f(t_1)$ y $f(t_2)$, por lo que se calcula una primera estimación de la velocidad media de la fuente v_1 como

$$v_1 \cong c \frac{f(t_1) - f(t_2)}{f(t_1) + f(t_2)}. \quad (7)$$

Posteriormente, se calcula la coordenada rectilínea $\Delta x = v_1 \cdot \Delta t$, siendo Δt la coordenada temporal referida al instante de mínima distancia entre fuente y receptor (ver figura 1). El coseno del ángulo β en los instantes t_1 y t_2 queda determinado por estas expresiones

$$\cos[\beta(t_1)] = \frac{\Delta x(t_1)}{d(t_1)} = \frac{v_1 \cdot \Delta t(t_1)}{\sqrt{R^2 + [v_1 \cdot \Delta t(t_1)]^2}}, \quad (8)$$

$$\cos[\beta(t_2)] = \frac{\Delta x(t_2)}{d(t_2)} = \frac{v_1 \cdot \Delta t(t_2)}{\sqrt{R^2 + [v_1 \cdot \Delta t(t_2)]^2}}. \quad (9)$$

Luego, se calcula una segunda estimación de la velocidad media v_2 contemplando la influencia del coseno como

$$v_2 \cong c \frac{f(t_1) - f(t_2)}{f(t_2) \cos[\beta(t_2)] - f(t_1) \cos[\beta(t_1)]}. \quad (10)$$

Seguidamente, se recalculan las ecuaciones (8) y (9) reemplazando v_1 por v_2 , y se obtiene otra estimación de la velocidad media v_3 vía la ecuación (10). Finalmente, se elige la mejor estimación entre v_2 y v_3 para adoptarla como $v_{med,est}$.

El error de cálculo de la velocidad media se monitorea por medio de la frecuencia del tono puro libre de Doppler $f_{tono,verd}$ y su contrastación con su homóloga recuperada $f_{tono,est}$ a partir de datos experimentales. Esta última está dada por

$$f_{tono,est} = \frac{f(t_1) \cdot f(t_2) \cdot [\cos[\beta(t_2)] - \cos[\beta(t_1)]]}{f(t_2) \cos[\beta(t_2)] - f(t_1) \cos[\beta(t_1)]}. \quad (11)$$

Un menor error de cálculo en la frecuencia del tono implica un mejor ajuste del coseno en ambos instantes extremos, y también de la velocidad media. Por dicha razón, se optimiza el cálculo de esta velocidad en términos del error relativo de la frecuencia del tono

$$\left| \frac{f_{\text{tono,est}} - f_{\text{tono,verd}}}{f_{\text{tono,verd}}} \right|.$$

Anexo 2: Determinación del instante de menor derivada en la frecuencia del tono piloto afectado por Doppler

Sean f y f_D las frecuencias del tono piloto sin y con efecto Doppler respectivamente, c la velocidad del sonido, v la velocidad de la fuente y β el ángulo indicado en la figura 1. Entonces la frecuencia del tono afectado por Doppler está dada por la siguiente expresión

$$f_D(t) = f \frac{c}{c + v(t) \cos[\beta(t)]}. \quad (12)$$

Si la velocidad de la fuente es aproximadamente constante, la derivada f'_D de la frecuencia f_D es

$$f'_D = f \frac{c \cdot v \cdot \text{sen}(\beta)}{[c + v \cdot \cos(\beta)]^2} \beta'. \quad (13)$$

Por otro lado, el ángulo β se relaciona con la coordenada rectilínea $\Delta x(t) = x(t) - x_{ref}$ según

$$\beta = \text{arctg}\left(\frac{R}{\Delta x}\right) = \text{arctg}\left(\frac{R}{v \cdot \Delta t}\right), \quad (14)$$

donde $\Delta t = t - t_{ref}$. La derivada de dicho ángulo es

$$\beta' = \frac{-v/R}{\left(\frac{v \cdot \Delta t}{R}\right)^2 + 1}. \quad (15)$$

En el instante $\Delta t = 0$, las frecuencias f_D y f coinciden de valor y $\beta = \pi/2$. En las vecindades de dicho instante, $\text{sen}(\beta)$ varía más lentamente que $\cos(\beta)$ y que β' , por lo que se aproxima la ecuación (13) por la siguiente

$$f'_D = -f \cdot c \cdot \frac{v^2}{R} \frac{1}{\left[c + \frac{v}{\sqrt{\left(\frac{R}{v \cdot \Delta t}\right)^2 + 1}} \right]^2} \frac{1}{\left(\frac{v \cdot \Delta t}{R}\right)^2 + 1}. \quad (16)$$

Asimismo, la distancia recorrida por el vehículo en un intervalo temporal muy pequeño alrededor de $\Delta t = 0$ es bastante pequeña en comparación con R , quedando la siguiente aproximación

$$f'_D \approx -f \cdot c \cdot \frac{v^2}{R} \frac{1}{\left[c + \frac{v}{\sqrt{\left(\frac{R}{v \cdot \Delta t}\right)^2 + 1}} \right]^2} = -f \cdot c \cdot \frac{v^2}{R} \frac{1}{\left[c + \frac{v^2 \Delta t}{\sqrt{R^2 + (v \Delta t)^2}} \right]^2} \quad (17)$$

En conclusión, la variable f'_D es negativa (hecho que concuerda con la teoría), y en el instante $\Delta t = 0$ se produce su mínimo valor que vale $-\frac{v^2 \cdot f}{R \cdot c}$.