

# Simulación y Control de Sistemas Continuos por Eventos Discretos

Ernesto Kofman

Tesis presentada para el cumplimiento parcial  
de los requisitos para obtener el título de

Doctor en Ingeniería

Director: Sergio Junco

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Universidad Nacional de Rosario



# Resumen

En esta Tesis se presentan los fundamentos y la teoría de una nueva forma de aproximación de ecuaciones diferenciales ordinarias aplicada a la integración numérica y al control digital.

Reemplazando la discretización del tiempo de los métodos clásicos por la cuantificación de los estados –un enfoque de aproximación previamente disponible en la literatura– dos nuevos métodos numéricos de integración son obtenidos. Debido a esta técnica de discretización, los modelos de simulación resultantes son sistemas de eventos discretos en lugar de ser de tiempo discreto como en todos los métodos numéricos clásicos. Este hecho conlleva varias ventajas prácticas, entre las que se destacan una explotación eficiente de la ralidad y una reducción importante del costo computacional en la simulación de Sistemas Híbridos.

Desde el punto de vista teórico, los métodos desarrollados pueden ser analizados como sistemas continuos en presencia de perturbaciones acotadas. En base a esto se demuestran propiedades relacionadas a la estabilidad, convergencia y cotas de error de global, observándose también aquí algunas nuevas ventajas sobre los enfoques clásicos.

La aplicación del nuevo método de primer orden en la discretización de controladores continuos junto a un esquema de muestreo asincrónico permite definir una metodología novedosa de control digital donde se evita idealmente la discretización del tiempo. En consecuencia, esta nueva técnica mejora considerablemente la respuesta dinámica en sistemas de control digital reduciendo a la vez los costos computacionales y el tráfico de información entre la planta y el controlador.



# Agradecimientos

En toda Tesis se debe empezar agradeciendo al director. En este caso, mi agradecimiento va más allá del trabajo en estos últimos cuatro años. De no ser por Sergio dudo que me hubiera dedicado a la docencia e investigación en la facultad (de hecho probablemente estaría trabajando en la industria ganando un buen sueldo).

Siguiendo con lo académico, en gran parte de lo que aprendí en este tiempo (desde detalles técnicos y matemáticos hasta como usar  $\text{\LaTeX}$ ) tuvo mucho que ver Marimar Seron, quien además me dio el impulso que necesitaba para elegir finalmente el tema de trabajo.

También tengo que agradecerle a Julio Braslavsky por sus comentarios y por la revisión de varios puntos que luego formaron parte de este trabajo (principalmente los relacionados a control).

En ese sentido, también le debo mucho a Juan Carlos Gómez quien, entre otras cosas, me ayudó con una cuidadosa revisión de más de un artículo de los que ahora respaldan esta Tesis.

Hubo también un aporte muy grande de ideas por parte de François Cellier. Varios de los resultados aquí incluidos son consecuencia de algunas de las charlas que mantuvimos en estos últimos años. Además, el haberme invitado a participar como coautor de su libro *Continuous System Simulation* fue uno de los mayores impulsos que recibí para continuar con este trabajo.

No quiero tampoco olvidarme de mencionar la importantísima ayuda de Bernard Zeigler, quien además de revisar y colaborar con la corrección de varios de los artículos, me abrió las puertas de gran parte de la comunidad internacional de simulación para que mi trabajo sea conocido.

Si bien hasta acá me refería al aporte que recibí en lo académico, sería injusto omitir todo lo que quienes nombro me brindaron como personas a través una amistad invaluable.

Yendo aún más hacia el plano personal, nada de este trabajo hubiera sido posible sin el aguante de mis viejos, Julia y Hugo, quienes me dieron –y me siguen dando– todo lo que puede llegar a pretenderse de en cuanto a afecto, consejos, apoyo y –lo mas importante– la libertad de elegir y construir mi propio camino.

Y cuando nombro a mi familia no puedo dejar de agradacer a Queca, mi abuela, por sus knishes y masitas, por sus infinitas atenciones, y más que nada por su ejemplo.

Gracias también a mis hermanos, Diego y Marco, y necesitaría un capítulo

aparte para agradecerle a Mónica (y al Rami, por supuesto), por sus mates, vinos, charlas, y todo lo que me dio y me da con su amistad. No puedo tampoco olvidarme de los amigos que siempre están, más allá de algún ocasional alejamiento geográfico: Damián, Cabeza, Lottar, Dieguito, Martín, Diego, Gastón, Betty, Momia, Hernán...

Y por supuesto, mi mayor agradecimiento para Juliana, por darle sentido a todo, por compartir cada momento de nuestras vidas.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Organización de la Tesis . . . . .	2
1.2	Contribuciones Originales . . . . .	5
1.3	Trabajos Relacionados y Relevancia de los Resultados . . . . .	6
1.4	Publicaciones de Apoyo . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Cuantificación y DEVS</b>	<b>11</b>
2.1	Un Ejemplo Introductorio . . . . .	12
2.2	Sistemas de Eventos Discretos y DEVS . . . . .	14
2.3	Modelos DEVS Acoplados . . . . .	17
2.4	Simulación de modelos DEVS . . . . .	19
2.5	Sistemas Cuantificados y DEVS . . . . .	21
2.6	Ilegitimidad de los Sistemas Cuantificados . . . . .	24
2.7	DEVS y Simulación de Sistemas Continuos . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Sistemas de Estados Cuantificados</b>	<b>31</b>
3.1	Cuantificación con Histéresis . . . . .	32
3.2	Método de QSS . . . . .	33
3.3	Trayectorias en QSS . . . . .	34
3.4	Modelo DEVS de un QSS . . . . .	37
3.5	Señales de entrada en el método de QSS . . . . .	39
3.6	Arranque e Interpolación de Salidas . . . . .	42
3.7	Cuantificación, Histéresis y Errores . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Propiedades Teóricas de QSS</b>	<b>45</b>
4.1	QSS y Teoría de Perturbaciones . . . . .	46
4.2	Convergencia del Método de QSS . . . . .	48
4.3	Propiedades Generales de Estabilidad de QSS . . . . .	50
4.4	Sistemas LTI Perturbados: Enfoque de Lyapunov . . . . .	54
4.5	Sistemas LTI Perturbados: Enfoque No Conservador . . . . .	57
4.6	Método de QSS en Sistemas LTI . . . . .	63
4.7	Elección del Quantum y la Histéresis . . . . .	65
4.8	Limitaciones del método de QSS . . . . .	67

<b>5</b>	<b>QSS de Segundo Orden</b>	<b>69</b>
5.1	Método de QSS2 . . . . .	69
5.2	Trayectorias en QSS2 . . . . .	71
5.3	Representación DEVS de QSS2 . . . . .	74
5.4	Propiedades del Método de QSS2 . . . . .	77
5.5	QSS vs. QSS2 . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Extensiones de QSS y QSS2</b>	<b>87</b>
6.1	QSS y QSS2 en Sistemas DAE . . . . .	88
6.2	Simulación DEVS Bloqueorientada de DAEs . . . . .	94
6.3	QSS y QSS2 en la Simulación de Sistemas Híbridos . . . . .	98
6.4	Bond Graphs Cuantificados . . . . .	107
6.5	QBG y Singularidades Estructurales . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Control de Estados Cuantificados</b>	<b>119</b>
7.1	Muestreo Asíncrono . . . . .	120
7.2	El Esquema QSC . . . . .	121
7.3	QSC y Perturbaciones . . . . .	123
7.4	Estabilidad de Sistemas QSC Estacionarios . . . . .	124
7.5	Algoritmo de Diseño de QSC Estacionario . . . . .	128
7.6	Estabilidad de QSC Generales . . . . .	132
7.7	Algoritmo General para la Implementación de QSC . . . . .	134
7.8	Convergencia de QSC . . . . .	136
<b>8</b>	<b>Sistemas QSC Lineales</b>	<b>143</b>
8.1	QSC en Sistemas LTI . . . . .	144
8.2	Estabilidad y Error en LTI QSC . . . . .	144
8.3	Algoritmo para la Implementación de LTI QSC . . . . .	146
8.4	Ajuste de los Conversores . . . . .	152
8.5	Reducción de los Costos Computacionales en QSC . . . . .	153
<b>9</b>	<b>Epílogo</b>	<b>155</b>
9.1	Problemas no Resueltos . . . . .	155
9.2	Problemas Abiertos y Trabajo Futuro . . . . .	160
9.3	Conclusiones Generales . . . . .	162
<b>A</b>	<b>Lista de Abreviaciones</b>	<b>171</b>
<b>B</b>	<b>Pseudo-Códigos para la Simulación de DEVS</b>	<b>173</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El abordaje de la mayor parte de los problemas de ingeniería modernos es casi inconcebible sin la utilización de técnicas de simulación. Debido a cuestiones de riesgo y costo, la experimentación directa sobre sistemas reales está dejando su lugar a la experimentación sobre modelos de simulación (si bien hay excepciones). Hoy en día es muy difícil encontrar problemas de diseño que puedan llevarse a cabo sin la ayuda de una computadora.

La creciente complejidad de los sistemas hechos por el hombre y la necesidad de resultados cada vez más precisos y rápidos estimularon el desarrollo de cientos de nuevas técnicas de simulación en los últimos 40 años.

Simultáneamente, la aparición de las computadoras modernas y su sorprendente evolución brindó la herramienta necesaria que permite la implementación de los métodos de simulación más complejos de una manera simple y eficiente.

Debido a esto, la simulación por computadoras constituye una disciplina en sí misma. Como toda disciplina, está dividida en muchas subdisciplinas que tratan con diferentes problemas específicos.

Los problemas en ingeniería involucran siempre sistemas físicos. Debido a que la mayor parte de las leyes físicas son descritas por ecuaciones diferenciales, la simulación en ingeniería se relaciona con la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Este tema es también llamado *Simulación de Sistemas Continuos*.

Sin embargo, los sistemas modernos de ingeniería muchas veces incluyen dispositivos digitales –controladores digitales, por ejemplo– cuya descripción mediante ecuaciones diferenciales no es para nada apropiada. Este hecho agrega más complejidad al tema y conduce a la familia de los *Sistemas Híbridos*.

En muchas aplicaciones, las simulaciones deben realizarse en *tiempo real*. Ejemplos típicos son los sistemas llamados *man-in-the-loop systems* (simuladores de vuelo por ejemplo) y, más generalmente, simulaciones que interactúan con sistemas del mundo real.

Los sistemas de control digital pueden ser considerados parte de esta última categoría ya que deben interactuar con una planta real. Teniendo en cuenta que las plantas se describen generalmente mediante ecuaciones diferenciales y que consecuentemente la mayor parte de los controladores son diseñados para

satisfacer una ley continua, la implementación digital de controladores continuos puede verse como un problema de simulación en tiempo real. Como tal, debe llevarse a cabo a través de diferentes técnicas de discretización.

El objetivo de esta Tesis es el de desarrollar una familia completamente nueva de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias –que puedan ser también aplicados a sistemas híbridos y a sistemas de *Ecuaciones Diferenciales Algebraicas*– y utilizar las mismas ideas para la implementación de controladores digitales.

La principal innovación en los métodos numéricos es el hecho de evitar la discretización temporal. Todos los métodos existentes para ecuaciones diferenciales ordinarias se basan en el cálculo de una solución aproximada en ciertos instantes discretos de tiempo. Aquí en cambio, se reemplaza esta discretización por la cuantificación de las variables de estado.

En consecuencia, el modelo de simulación resulta de eventos discretos en lugar de ser de tiempo discreto por un lado. Este hecho produce, en algunos casos, una reducción importante de los costos computacionales (especialmente en sistemas híbridos).

Por otro lado, esta nueva aproximación conlleva propiedades teóricas bastante fuertes relacionadas con la estabilidad, convergencia y cotas de error.

Ambos tipos de ventajas –prácticas y teóricas– son también verificadas en la aplicación de control digital mencionada.

## 1.1 Organización de la Tesis

Esta Tesis está concebida como un trabajo autocontenido donde cada capítulo está basado en los anteriores aunque esto no siempre coincida con el orden cronológico en el que los temas fueron desarrollados.

Por un lado, se asume que todos los conceptos básicos –o sea los conceptos que se aprenden habitualmente a nivel de grado en Control y en Métodos Numéricos– son ya conocidos. Por otro lado, los temas, herramientas y conceptos nuevos son introducidos solamente para su utilización en el contexto de esta Tesis.

De esta forma, la Tesis no incluye ni una teoría completa ni una descripción del estado del arte sobre DEVS<sup>1</sup>, teoría de perturbaciones, integración numéricas y los otros conceptos involucrados.

Muchos resultados teóricos originales, incluyendo teoremas y demostraciones, están incluidos en la Tesis. Con el objeto de brindar al lector la posibilidad de saltarlos, la mayor parte de los mismos están concentrados en un capítulo.

En lo que se refiere a notación, las denominaciones clásicas de las teorías de control y de DEVS fueron utilizadas simultáneamente. Por esto, algunos símbolos son redefinidos frecuentemente para su utilización en los distintos contextos. De esta forma, el significado de cada símbolo debe verse de acuerdo a la última definición efectuada.

Teniendo en cuenta todos estos principios, la Tesis se organiza como sigue:

---

<sup>1</sup>El listado de las abreviaciones utilizadas en la Tesis se encuentra en el Apéndice A

Este primer capítulo introductorio brinda una descripción de la Tesis completa, no sólo enumerando los resultados sino también intentando relacionarlos con el estado del arte actual.

El segundo capítulo presenta la semilla de las ideas principales en las que se basa el resto del trabajo. Se introducen allí los conceptos originales sobre cuantificación y DEVS, comenzando con un ejemplo motivador en la Sección 2.1. Luego, las secciones 2.2 a 2.4 desarrollan una teoría *ad-hoc* sobre DEVS que es luego utilizada en el resto de la Tesis. Tras esto, la Sección 2.5 muestra la relación entre el primer ejemplo y DEVS presentando el concepto de *Sistemas Cuantificados* (QS, por *Quantized Systems*), que fue la primer idea para aproximar ecuaciones diferenciales con modelos DEVS.

En ese punto se termina prácticamente la descripción del estado del arte y luego, la Sección 2.6 describe el principal problema –llamado *ilegitimidad*– que exhiben los Sistemas Cuantificados. El descubrimiento de este problema y el haber encontrado la solución fueron probablemente la motivación más importante de este trabajo.

El tercer capítulo comienza describiendo la solución al problema de ilegitimidad, que consiste en agregar histéresis a la cuantificación. Basado en el uso de funciones de cuantificación con histéresis –definidas formalmente en la Sección 3.1– se presentan entonces en la Sección 3.2 los *Sistemas de Estados Cuantificados* (QSS, por *Quantized State Systems*) y el *método de QSS*. Este método es el primer método general de eventos discretos para la integración numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs, por *Ordinary Differential Equations*).

En base al estudio de la forma de las trayectorias (Sección 3.3), en la Sección 3.4 se deduce el modelo DEVS de un QSS. Este modelo muestra a su vez la manera práctica de implementar el método. Tras presentar la simulación de un ejemplo simple –donde se evidencian algunas cualidades tales como la explotación de ralitud– las Secciones 3.5 y 3.6 explican algunos aspectos prácticos sobre el uso del método de QSS. Por último, el capítulo termina concluyendo sobre la necesidad de un análisis teórico más profundo.

El Capítulo 4 está dedicado al estudio de las principales propiedades teóricas de la aproximación. Tras explicar la relación entre el método de QSS y la teoría de sistemas perturbados, la propiedad de convergencia es demostrada en el teorema incluido en la Sección 4.2. Luego, se estudian las propiedades generales de estabilidad mediante un enfoque de Lyapunov (Sección 4.3). El principal resultado en este punto (Teorema 4.2) concluye que –bajo ciertas condiciones– puede asegurarse que las soluciones del QSS aproximado están finalmente acotadas.

Pese a la importancia y la generalidad de este resultado de estabilidad, su utilización práctica es bastante complicada y conservadora (principalmente debido a la presencia de funciones de Lyapunov). Por esto, el análisis se lleva luego al área de los sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI por *Linear Time Invariant*), donde se estudian habitualmente las propiedades de los métodos numéricos clásicos. Aquí, para evitar resultados conservadores, se presenta una nueva forma de establecer una cota de los efectos de las perturbaciones. Este nuevo resultado es luego comparado con el enfoque clásico de Lyapunov pa-

ra sistemas LTI (introducido previamente en la Sección 4.4), mostrándose la conveniencia de utilizar el nuevo enfoque.

En base a este nuevo enfoque, en la Sección 4.6 se demuestran no sólo las propiedades de estabilidad sino también la cota de error global del método de QSS en sistemas LTI. Estos resultados teóricos son entonces aplicados para la elección de la cuantificación e histéresis apropiadas de acuerdo a la precisión deseada. A pesar de las bondades de las propiedades demostradas, el estudio teórico también concluye en que no puede alcanzarse una buena precisión sin aumentar significativamente el número de pasos. Por esto, se torna necesario formular una aproximación de orden superior.

El quinto capítulo presenta entonces los *Sistemas de Estados Cuantificados de Segundo Orden* (QSS2) y el método QSS2 siguiendo un procedimiento similar al utilizado en la presentación del método QSS. Tras estudiar la forma de las trayectorias en la Sección 5.2, se deduce el modelo DEVS correspondiente (Sección 5.3) y luego las propiedades teóricas estudiadas en el Capítulo 4 son extendidas al nuevo método. Por último, la simulación de algunos ejemplos – que muestra también varias ventajas prácticas– es seguida con una comparación teórica y empírica entre los dos métodos propuestos.

El Capítulo 6 está dedicado a la extensión de los métodos de QSS y QSS2 para ciertos casos especiales. Las Secciones 6.1 y 6.2 estudian el uso de dichos métodos en Sistemas de *Ecuaciones Diferenciales Algebraicas* (DAE, por Differential Algebraic Equation) , brindándose una metodología general para el caso de índice 1. Además, se presenta una solución alternativa bloqueorientada que permite la simulación directa en diagramas de bloque que contienen lazos algebraicos. Los ejemplos simulados mediante ambas soluciones muestran una ventaja: el método sólo debe iterar con la ecuación algebraica implícita en algunos pasos particulares.

La Sección 6.3 muestra el uso de los métodos nuevos en la simulación de *Sistemas Híbridos*. Aquí, el conocimiento de las trayectorias completas en QSS y QSS2 sumado al comportamiento asincrónico intrínseco de los métodos brindan varias ventajas que se evidencian en la simulación de dos ejemplos ilustrativos en los que se incluye un análisis comparativo con los métodos clásicos.

Este capítulo finaliza presentando la aplicación del método de QSS en la simulación de *Bond Graphs* (BG). El esquema resultante –llamado *Bond Graphs cuantificados* (QBG, por Quantized Bond Graphs)– brinda una forma muy simple de realizar una simulación directa del modelo Bond Graph de un sistema físico. En este caso, la Sección 6.5 esboza también una nueva forma de tratar los sistemas DAEs de índice superior resultantes de modelos BG, en la cual se obtiene un comportamiento conmutado y se evitan los algoritmos iterativos.

El séptimo capítulo presenta el uso del método de QSS en aplicaciones de control en tiempo real. La aproximación por QSS de un controlador continuo previamente diseñado implementada junto a un método de muestreo asincrónico definen un esquema nuevo de control digital en el cual teóricamente se evita la discretización temporal. Este método de control asincrónico se denomina *Control de Estados Cuantificados* (QSC, por Quantized State Control) y se define formalmente en la Sección 7.2.

Análogamente a los métodos de simulación, QSC puede ser analizado como una versión perturbada del sistema de control original con el objetivo de deducir sus propiedades teóricas. Utilizando este hecho, las Secciones 7.4 a 7.7 estudian la estabilidad y cota final de sistemas QSC no lineales, comenzando por el caso particular invariante en el tiempo (TI, por Time Invariant) y luego yendo a los casos generales inestacionarios. En estos casos, basados en los teoremas de estabilidad correspondientes, se desarrollan dos algoritmos prácticos de diseño cuyo uso es ilustrado mediante ejemplos de simulación. Por último, en la Sección 7.8 se demuestra la convergencia de las trayectorias del sistema QSC hacia las trayectorias del sistema de control continuo (CCS, por Continuous Control System) cuando la cuantificación tiende a cero.

En el Capítulo 8, se estudia el caso particular de QSC aplicado a sistemas LTI y se discuten algunos aspectos prácticos de la metodología. Tras presentar el modelo QSC de un Sistema LTI, la Sección 8.2 presenta los resultados de estabilidad y cota final basados en las herramientas de análisis no conservativas desarrolladas en el Capítulo 4. Estos resultados son luego traducidos en reglas de diseño prácticas que son aplicadas en dos nuevos ejemplos en los cuales también pueden observarse algunas ventajas con respecto a la utilización de control digital clásico de tiempo discreto. Luego, en las Secciones 8.4 y 8.5 se realizan los comentarios finales sobre problemas de implementación y sobre las ventajas prácticas del esquema.

Finalmente, el último capítulo de la Tesis está dedicado a la discusión de los problemas no resueltos, los temas abiertos, la investigación futura y las conclusiones generales.

## 1.2 Contribuciones Originales

Desde las últimas páginas del segundo capítulo hasta el final de la Tesis la mayor parte de los resultados son originales.

La principal contribución es el desarrollo de un camino formal novedoso para aproximar ecuaciones diferenciales ordinarias, que no sólo incluye métodos y aplicaciones sino también una amplia variedad de herramientas de análisis.

Los primeros resultados originales fueron el descubrimiento de la ilegitimidad de los Sistemas Cuantificados, el hallazgo de una solución basada en la utilización de histéresis y las definiciones de funciones de cuantificación con histéresis y Sistemas de Estados Cuantificados.

Todo el trabajo sobre QSS es también original. Allí, el estudio de la forma de las trayectorias, la deducción de los modelos DEVS, las cuestiones prácticas relacionadas con la incorporación de señales de entrada, arranque e interpolación fueron todas desarrolladas como parte de este trabajo.

Otra contribución fue el descubrimiento de la relación entre QSS y los sistemas perturbados. En base a esto fue posible entonces realizar todo el estudio teórico de estabilidad y convergencia, convirtiendo así al método de QSS en una técnica de integración bien establecida.

Una contribución colateral resultante de este estudio teórico es un nuevo y

menos conservador camino para analizar la cota final de sistemas LTI perturbados que puede utilizarse no sólo en el contexto de cuantificación sino también en problemas más generales relacionados con perturbaciones. La utilización de esta nueva herramienta de análisis en el método de QSS permitió establecer una cota práctica para el error global.

Otro resultado original es la definición del método de segundo orden QSS2 y todo el trabajo hecho alrededor del mismo: deducción de las formas de las trayectorias, construcción del modelo DEVS y estudio de sus propiedades teóricas.

La extensión de los métodos para su uso en DAEs, Sistemas Híbridos y Bond Graphs, así como todo el análisis teórico y práctico realizado en torno a los mismos es también original.

En lo que respecta a control, la definición de QSC es el primer esquema de control asincrónico que puede verse como la aproximación de un controlador continuo. A excepción de la técnica de muestreo asincrónica, es original todo el estudio sobre QSC (definiciones, propiedades teóricas y observaciones prácticas).

### 1.3 Trabajos Relacionados y Relevancia de los Resultados

Entre los trabajos que tienen cierta relación con esta Tesis, hay dos casos diferentes que deben distinguirse.

Por un lado, hay trabajos que utilizan una metodología similar intentando relacionar DEVS y ecuaciones diferenciales. Por otro lado, hay trabajos que, basados en métodos y herramientas diferentes, intentan brindar soluciones a problemas similares.

Con respecto al primer grupo, no hay aún una importante cantidad de trabajos en la literatura.

Las primeras ideas y definiciones se deben a Bernard Zeigler. Tras definir DEVS [68] en los setentas, el concepto de Sistemas Cuantificados tomó más de 20 años en ser definido formalmente [66]. En el contexto de esta línea pueden encontrarse algunas aplicaciones interesantes en [63].

Siguiendo una meta similar –i.e. relacionar DEVS y ODEs– Norbert Giambiasi trabajó sobre un enfoque propio de representación de trayectorias por eventos definiendo GDEVS [16], que también fue aplicado a Bond Graphs en [48]. A pesar que la representación de trayectorias seccionalmente lineales en QSS2 mediante eventos fue hecha utilizando algunos conceptos desarrollados allí, GDEVS se basa en el conocimiento previo de soluciones de la ODE y no puede verse como un método general de simulación.

Hay también cierto trabajo reciente de Jean-Sebastien Balduc [2], pero –aunque la propuesta es bastante interesante – la investigación no llegó aún a resultados que vayan mucho más allá que las ideas originales de Zeigler.

Esta Tesis puede ser vista en parte como una continuación del trabajo de Zeigler en el tema. Aquí, el problema principal (la ilegitimidad) es señalado y solucionado y el método QSS resulta entonces el primer algoritmo general

de integración de ecuaciones diferenciales por eventos discretos. Sin embargo, como ya fue mencionado, la resolución del problema de ilegitimidad fue sólo el comienzo. El trabajo fue luego extendido hacia una amplia variedad de campos teóricos y prácticos.

A pesar que el problema de simulación de DEVS en tiempo real ha venido siendo considerado desde hace 10 años [64], no hay precedentes de su uso en control continuo. De todas formas, había una idea previa sobre el uso de cuantificación para aproximar controladores continuos utilizando autómatas de estados finitos [44]. Sin embargo, debido a que los autómatas finitos no son tan generales como DEVS, los modelos resultantes son no deterministas al menos que se utilice una cuantificación muy sofisticada.

En lo que respecta al segundo grupo –los trabajos relacionados que apuntan a los mismos problemas con diferentes herramientas– encontramos aquí toda la literatura sobre integración numérica y el control digital. Sin embargo, los problemas para los cuales este trabajo intenta brindar mejoras están en realidad mucho más acotados.

Es imposible de todas formas conocer y mencionar todo lo que se está realizando para resolver todos esos problemas. Por esto, los trabajos mencionados aquí son sólo los que están más relacionados con los resultados más importantes de esta Tesis.

Una de las características más salientes de los métodos de QSS y QSS2 es la manera en la que estos explotan la rareza. En este campo se están haciendo muchos esfuerzos para sacar ventajas de este tipo de estructuras. Una de las herramientas más eficientes para la integración numérica de ODEs es Matlab, cuyos algoritmos cuentan con rutinas especiales que intentan aprovechar la estructura en cada multiplicación e inversión de matrices [58].

Sin embargo, en QSS y QSS2 la explotación de rareza es simplemente debido al comportamiento intrínseco de las metodologías. Por esto, no es necesario utilizar ninguna rutina especial. Más aún, cuando una parte del sistema no realiza cambios (aquí cada integrador actúa independientemente) esta no utiliza tiempo computacional alguno ni causa ningún tipo de cálculo en el resto del modelo de simulación.

Las cotas de error globales de los diferentes métodos son generalmente estudiadas para demostrar la convergencia cuando el paso de integración tiende a cero [17]. Además de estos casos, los métodos de paso variable están concebidos para mantener este error acotado de acuerdo a la precisión requerida. En los métodos aquí desarrollados –que no tienen ningún tipo de regla adaptativa– la cota de error global en sistemas LTI puede ser calculada por una fórmula cerrada que vale para cualquier instante de tiempo y para cualquier trayectoria de entrada.

Otra área en la que QSS y QSS2 demuestran un muy buen desempeño es en la simulación de Sistemas Híbridos. Estos casos han sido siempre un problema para los métodos clásicos de tiempo discreto. Aquí, uno de los aspectos más difíciles es la detección de los eventos. De hecho, hay un número importante de publicaciones recientes que intentan obtener soluciones eficientes para este problema [52, 61, 57, 13].

QSS y QSS2 muestran ventajas claras en estos casos. Por un lado, las trayectorias del sistema son exactamente conocidas durante todo el tiempo entre muestras. Más aún, estas son seccionalmente lineales o parabólicas, por lo que encontrar el tiempo exacto en el cual ocurren las discontinuidades es un problema trivial. Por otro lado, los métodos son asíncronos y aceptan eventos en cualquier instante de tiempo. En consecuencia la implementación es muy simple y no requiere modificar nada para tener en cuenta los eventos en el instante en que ocurren.

En lo que refiere a las aplicaciones en control, QSC se define como un esquema de control digital asíncrono basado en cuantificación y una de sus cualidades más importantes es que toma en cuenta los efectos de cuantificación de los conversores durante el diseño.

Los efectos de cuantificación en sistemas de control muestreado fueron estudiados durante muchos años por parte del grupo de Anthony Michel. Hay entonces resultados en sistemas LTI [47, 46, 14], concluyendo sobre cotas finales y errores. También hay algunos trabajos con plantas no lineales [19] y controladores *multirate* [20].

Algunos trabajos también intentan tratar con la cuantificación en la etapa de diseño siguiendo metas diversas. En [11] se estudia el problema de la estabilización de una planta lineal de tiempo discreto considerando la cuantificación en la medición de los estados. Esta idea es también extendida a sistemas continuos en [5].

Por último, hay algunos resultados que utilizan cuantificación para reducir el monto de información transmitida entre sensores, controladores y actuadores [12].

En todos estos problemas QSC también brinda nuevas soluciones. En lo que concierne a efectos de cuantificación, su estimación es acotada por una fórmula muy simple en sistemas LTI mientras que en los casos no lineales la cota puede establecerse mediante un análisis de Lyapunov. Todos estos conceptos pueden además tenerse en cuenta con objetivos de diseño.

En el caso de reducción de información, las ventajas son sorprendentes. QSC puede funcionar transmitiendo solamente un único bit en cada muestreo.

## 1.4 Publicaciones de Apoyo

La mayor parte de los resultados incluidos en esta Tesis ya fueron publicados en revistas y en memorias de conferencias, mientras que el resto están aún en prensa o bajo revisión.

Los primeros resultados fueron el descubrimiento de la ilegitimidad de los Sistemas Cuantificados, su resolución con el agregado de histéresis y la definición de QSS, la deducción de las formas de las trayectorias, la construcción del modelo DEVS y la demostración de las propiedades generales de estabilidad. Estos resultados fueron publicados en primer lugar en una conferencia local [26] y luego en una revista internacional [38], donde también fue incluida la propiedad de convergencia (Secciones 2.6 a 4.3 de la Tesis).

El segundo paso fue la extensión de QSS a modelos Bond Graphs y la definición de los Bond Graphs cuantificados, resultado presentado en una primera versión en [25] y luego extendido para su publicación en una conferencia internacional [39] (Secciones 6.4 y 6.5).

La comparación entre el enfoque de QS (Zeigler) y el método de QSS junto a las reglas para la elección de histéresis (Sección 4.7) fueron incluidos en un artículo presentado en un congreso internacional [40].

Luego, las propiedades de cota de error de QSS en sistemas LTI (Sección 4.6) fueron publicados en las memorias de una conferencia local [27].

Simultáneamente, los primeros resultados en QSC con plantas estacionarias incluyendo el estudio de estabilidad, algoritmo de diseño, convergencia y consideraciones prácticas fueron presentados con un artículo en dos partes [28, 29] en un congreso local (Secciones 7.1–7.5, 7.8, y 8.4–8.5). Estos resultados están también publicados en una revista internacional [36].

El siguiente paso fue la definición del método de segundo orden QSS2 y el estudio de sus propiedades (Capítulo 5). Estos resultados fueron publicados en un artículo en una revista internacional [30], en el cual se incluyó también el análisis de cotas de error en sistemas LTI (Sección 4.6).

La estimación no conservadora de cotas finales en sistemas LTI perturbados y su comparación con el análisis clásico de Lyapunov (Secciones 4.4–4.5) fue presentado en una conferencia local de control [32] y luego enviado a una revista (*Automatica*) como *Technical Note* (está aún en revisión). La aplicación de estos resultados a QSC en sistemas LTI (Secciones 8.1 y 8.3) fue también publicada en un congreso de control [34].

Un artículo sobre la aplicación de QSS y QSS2 en DAEs (Secciones 6.1–6.2) fue aceptado para publicación en una revista internacional [33]. La extensión de esos métodos a Sistemas Híbridos (Sección 6.3) fue enviada a una revista como artículo completo [31], estando aún en el proceso de revisión. En la misma situación se encuentra el artículo [35] que extiende QSC a plantas inestacionarias (Secciones 7.6–7.7) y estudia sus propiedades en sistemas LTI (Secciones 8.1 y 8.3).

Por último, todos los resultados concernientes con simulación (Capítulos 2 a 6) se encuentran incluidos en un libro de texto en coautoría [7] el cual se encuentra aún en preparación.



## Capítulo 2

# Cuantificación y DEVS

La literatura sobre métodos numéricos de integración de ecuaciones diferenciales –ver por ejemplo [54, 18, 17]– muestra una amplia variedad de técnicas.

Los métodos pueden ser explícitos, implícitos o linealmente implícitos (de acuerdo a la formula del siguiente paso), de paso fijo o variable, de orden fijo o variable, de uno o múltiples pasos, etc.

A pesar de las diferencias, estos métodos tienen algo en común: todos discretizan el tiempo. En otras palabras, el modelo de simulación resultante (o sea, el sistema implementado por el programa de computación) es siempre un Sistema de Tiempo Discreto. Aquí, la denominación *Tiempo Discreto* se refiere a sistemas que cambian de manera sincrónica solo en algunos determinados instantes de tiempo.

El problema que tiene este tipo de comportamiento en la simulación de sistemas continuos es la pérdida del *control* de la simulación en medio de instantes discretos sucesivos. Por esto, el error puede llegar a crecer a valores inadmisibles y, en algunos casos, puede incluso producir inestabilidad. Es también posible encontrar cambios en la entrada e incluso cambios estructurales en algunos instantes de tiempo que no coinciden con los mencionados instantes discretos.

Es sabido que el uso de métodos con control de paso y fórmulas implícitas permiten –en algunos casos– sobrellevar estos problemas. Sin embargo, todas estas soluciones implican utilizar algoritmos cuya implementación es relativamente complicada –salvo que se tengan herramientas tales como Dymola u otros paquetes de software comercial– y este tipo de soluciones además son totalmente inapropiadas en algunos contextos (Simulación en Tiempo Real por ejemplo).

Teniendo en cuenta esto hechos, es natural intentar buscar soluciones para evitar la discretización temporal.

Sin embargo, el modelo de simulación debe ser implementable en un dispositivo digital. Por esto resulta claro que la discretización es necesaria dado que solamente un número finito de cambios del modelo pueden ser computados en cada intervalo finito de tiempo. Entonces, a primera vista, evitar la discretización del tiempo parece una tarea imposible.

A pesar de esta observación, en este capítulo se mostrará que hay otras

variables que pueden ser discretizadas para evitar la discretización temporal.

## 2.1 Un Ejemplo Introductorio

Consideremos el siguiente sistema de primer orden<sup>1</sup>:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 10\mu(t - 1.76) \quad (2.1a)$$

con la condición inicial

$$x(t_0 = 0) = 10 \quad (2.1b)$$

Cualquier intento de simular este sistema mediante Euler o algún otro método clásico con un paso  $h = 0.1$  –que es apropiado para la velocidad del sistema– caerá en el caso en el que la entrada cambia en un instante que no coincide con ningún instante discreto.

Veamos entonces que pasa con el siguiente *Sistema de Tiempo Continuo*:

$$\dot{x}(t) = -\text{floor}(x(t)) + 10\mu(t - 1.76) \quad (2.2a)$$

o

$$\dot{x}(t) = -q(t) + 10\mu(t - 1.76) \quad (2.2b)$$

donde  $q(t) \triangleq \text{floor}(x(t))$ .

Si bien el sistema definido por la Ec.(2.2) es no lineal y no satisface las propiedades que se observan habitualmente en la integración de ODEs (condiciones de Lipschitz, continuidad, etc.), el mismo puede ser resuelto muy fácilmente.

Cuando  $0 < t < 1/9$  tenemos  $q(t) = 9$  y  $\dot{x}(t) = -9$ . Durante este intervalo  $x(t)$  va desde 10 hasta 9 con una pendiente constante (-9). Luego, durante el intervalo  $1/9 < t < 1/9 + 1/8$  tenemos  $q(t) = 8$  y  $\dot{x}(t) = -8$ . Ahora,  $x(t)$  va desde 9 hasta 8 (también con una pendiente constante).

Este análisis puede continuar de la misma forma y cuando  $t = 1.329$  resulta que  $x(t) = 3$ . Si la entrada no cambiase, en  $t = 1.829$  tendríamos  $x(t = 1.829) = 2$ . Sin embargo, en el instante  $t = 1.76$  (cuando  $x = 2.138$ ) la entrada cambia y entonces la nueva pendiente es  $\dot{x}(t) = 8$ . La derivada luego vuelve a cambiar cuando  $x(t) = 3$ , o sea en el instante  $t = 1.8678$  (este tiempo puede calcularse como  $1.76 + (3 - 2.138)/8$ ).

Los cálculos continúan igual hasta que  $x(t) = q(t) = 10$  y en ese momento la derivada  $\dot{x}(t)$  se hace cero y el sistema no cambia más. La Figura 2.1 muestra las trayectorias de  $x(t)$  y  $q(t)$ .

Esta *simulación* extraña fue completada en sólo 17 pasos y –sin considerar los problemas de redondeo– se obtuvo la solución exacta de (2.2).

Esta solución y la solución del sistema original (2.1) se comparan en la Figura 2.2.

Las soluciones del sistema original y del modificado son claramente similares. Aparentemente si se reemplaza la variable  $x$  en el lado derecho de una ecuación

---

<sup>1</sup> $\mu(t)$  representa el escalón unitario

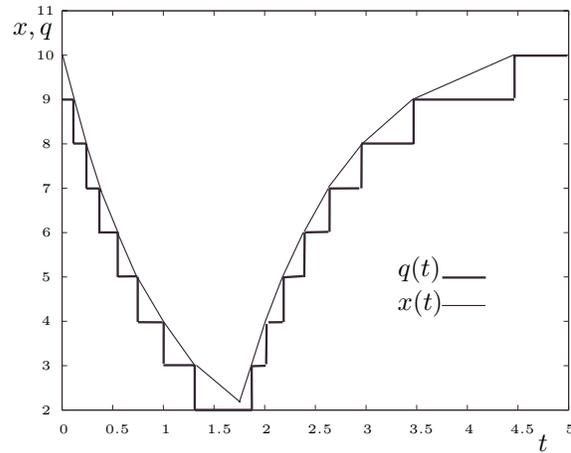


Figura 2.1: Trayectorias en el sistema (2.2)

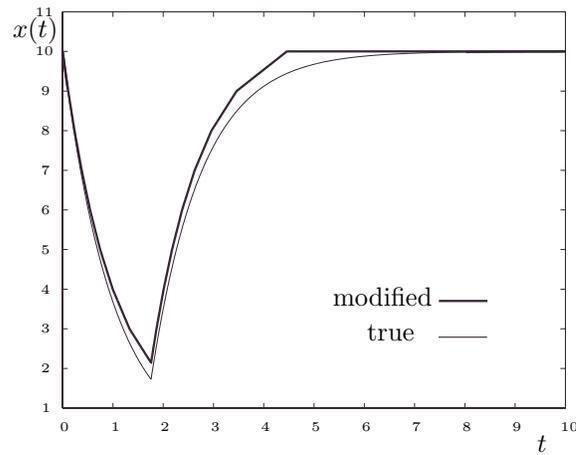


Figura 2.2: Trayectorias de estado en los sistemas (2.1) y (2.2)

diferencial de primer orden por  $\text{floor}(x)$ , se obtiene un método para integrar dicha ecuación.

Luego, esta idea podría generalizarse para ser utilizada en sistemas de orden  $n$  reemplazando todas las variables de estado por su parte entera en el lado derecho de la ecuación.

Sin embargo, es necesario indagar primero sobre la naturaleza discreta del Sistema (2.2) e introducir algunas herramientas para su representación y simulación.

## 2.2 Sistemas de Eventos Discretos y DEVS

La simulación de una ecuación diferencial utilizando cualquier método existente puede expresarse mediante una ecuación en diferencias de la forma:

$$x(t_{k+1}) = f(x(t_k), t_k) \quad (2.3)$$

donde la diferencia  $t_{k+1} - t_k$  puede ser constante o variable y la función  $f$  puede ser explícita o implícita. En consecuencia, el programa de simulación tendrá un código iterativo que avanza el tiempo de acuerdo al tamaño del siguiente paso. En virtud de esto se dice que tales métodos de simulación producen modelos de simulación de *tiempo discreto*.

El Sistema (2.2) puede ser visto directamente como un modelo de simulación ya que puede simularse exactamente con sólo 17 pasos. Sin embargo, el mismo no puede expresarse en la forma de la Ec. (2.3) debido a la manera asincrónica en que este sistema trata el cambio de entrada en  $t = 1.76$ .

Evidentemente, se está en frente a un sistema que es discreto en algún sentido pero pertenece a una categoría que no encaja en los sistemas de tiempo discreto. Como se verá más adelante, este sistema extraño puede ser representado por un *Sistema de Eventos Discretos*.

La frase *Eventos Discretos* está generalmente asociada con algunos formalismos muy populares como Autómatas de Estado, Redes de Petri, Grafos de Eventos (*Event Graphs*), *Statecharts*, etc. Desafortunadamente, ninguno de ellos puede representar esta clase de sistemas *extraños* en una situación general. Estos lenguajes gráficos se limitan a sistemas con un número finito de estados posibles mientras que en este caso se requiere una herramienta más general. De todas formas, tal formalismo general existe y se conoce como DEVS (Discrete Event System specification).

El formalismo DEVS [68, 65] fue desarrollado por Bernard Zeigler a mediados de los setentas. El uso de DEVS en relación con sistemas continuos no está aún muy difundido y es prácticamente desconocido en las comunidades de métodos numéricos y control. Sin embargo, DEVS es ampliamente utilizado en ciencias de la computación donde ha recibido un muy importante desarrollo en sus aspectos teóricos y prácticos.

DEVS permite representar todos los sistemas cuyo comportamiento entrada salida puede ser descrito por secuencias de eventos sujeto a que el estado tenga un número finito de cambios en cualquier intervalo finito de tiempo.

Un *evento* es la representación de un cambio instantáneo en alguna parte de un sistema. El mismo puede caracterizarse por un valor y un instante en el que ocurre. El valor puede ser un número, un vector, una palabra o, en general, un elemento cualquiera de un conjunto determinado.

La trayectoria definida por una secuencia de eventos adopta el valor  $\phi$  (o *No Evento*) para todo valor de tiempo, excepto en los instantes en los que hay eventos. En estos instantes, la trayectoria toma el valor correspondiente al del evento en cuestión. La Figura 2.3 muestra una trayectoria de eventos que toma valores  $x_1$  en el tiempo  $t_1$ ,  $x_2$  en el tiempo  $t_2$ , etc.

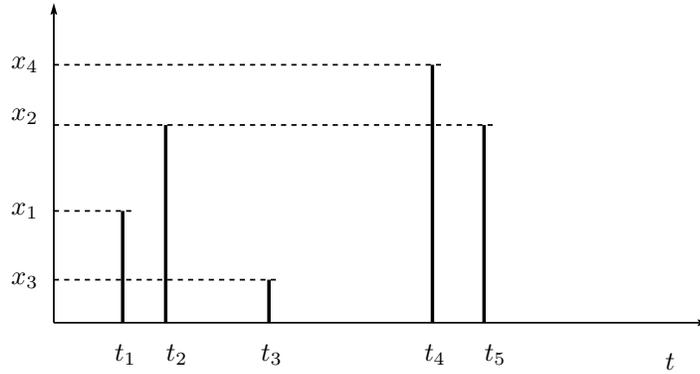


Figura 2.3: Trayectoria de eventos

Un modelo DEVS procesa una trayectoria de eventos de entrada  $y$ , según esta trayectoria y sus propias condiciones iniciales, produce una trayectoria de eventos de salida. Este comportamiento entrada/salida se representa en la Figura 2.4.



Figura 2.4: Comportamiento Entrada/Salida de un modelo DEVS

El comportamiento de un modelo DEVS se expresa luego mediante una forma que es muy común en la teoría de autómatas.

Un modelo DEVS *atómico* queda entonces definido por la siguiente estructura:

$$M = (X, Y, S, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta)$$

donde:

- $X$  es el conjunto de valores de eventos de entrada, es decir el conjunto de todos los valores que un evento de entrada puede adoptar.
- $Y$  es el conjunto de valores de eventos de salida.
- $S$  es el conjunto de valores de estado.
- $\delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda$  y  $ta$  son funciones que definen la dinámica del sistema.

Cada posible estado  $s$  ( $s \in S$ ) tiene asociado un *Avance de Tiempo* calculado por la *Función de Avance de Tiempo* (Time Advance Function)  $ta(s)$  ( $ta(s)$  :

$S \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ ). El *Avance de Tiempo* es un número real no negativo que indica cuanto tiempo el sistema permanecerá en un estado determinado en ausencia de eventos de entrada.

Luego, si el estado toma el valor  $s_1$  en el tiempo  $t_1$ , tras  $ta(s_1)$  unidades de tiempo (o sea, en tiempo  $ta(s_1) + t_1$ ) el sistema realiza una *transición interna* yendo a un nuevo estado  $s_2$ . El nuevo estado se calcula como  $s_2 = \delta_{\text{int}}(s_1)$ . La función  $\delta_{\text{int}}$  ( $\delta_{\text{int}} : S \rightarrow S$ ) se llama *Función de Transición Interna (Internal Transition Function)*.

Cuando el estado va de  $s_1$  a  $s_2$  se produce también un evento de salida con valor  $y_1 = \lambda(s_1)$ . La función  $\lambda$  ( $\lambda : S \rightarrow Y$ ) se llama *Función de Salida (Output Function)*. Así, las funciones  $ta$ ,  $\delta_{\text{int}}$  y  $\lambda$  definen el comportamiento autónomo de un modelo DEVS.

Cuando llega un evento de entrada el estado cambia instantáneamente. El nuevo valor del estado depende no sólo del valor del evento de entrada sino también del valor anterior de estado y del tiempo transcurrido desde la última transición. Si el sistema llega al estado  $s_3$  en el instante  $t_3$  y luego llega un evento de entrada en el instante  $t_3 + e$  con un valor  $x_1$ , el nuevo estado se calcula como  $s_4 = \delta_{\text{ext}}(s_3, e, x_1)$  (notar que  $ta(s_3) > e$ ). En este caso se dice que el sistema realiza una *transición externa*. La función  $\delta_{\text{ext}}$  ( $\delta_{\text{ext}} : S \times \mathbb{R}_0^+ \times X \rightarrow S$ ) se llama *Función de Transición Externa (External Transition Function)*. Durante una transición externa no se produce ningún evento de salida.

**Ejemplo 2.1.** *Modelo DEVS de una función escalar estática.*

Consideremos un sistema que recibe una trayectoria seccionalmente constante  $u(t)$  representada por una secuencia de eventos con sus valores consecutivos. La salida es otra secuencia de eventos que representa la función  $y(t) = f(u(t))$  donde  $f(u)$  es una función real conocida.

Un modelo DEVS que corresponde a este comportamiento es el dado por la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} M_1 &= (X, Y, S, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta), \text{ donde} \\ X &= Y = \mathbb{R} \\ S &= \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \\ \delta_{\text{int}}(s) &= \delta_{\text{int}}(u, \sigma) = (u, \infty) \\ \delta_{\text{ext}}(s, e, x) &= \delta_{\text{ext}}((u, \sigma), e, x) = (x, 0) \\ \lambda(s) &= \lambda(u, \sigma) = f(u) \\ ta(s) &= ta(u, \sigma) = \sigma \end{aligned}$$

Notar que el estado está compuesto por dos números reales. El primero ( $u$ ) contiene el último valor de entrada y el segundo ( $\sigma$ ) guarda el avance de tiempo. En la mayor parte de los modelos DEVS se utiliza esta variable  $\sigma$  igual al tiempo de avance como parte del estado para simplificar el modelado.

Este modelo DEVS tiene un comportamiento *estático* dado que solamente realiza algo cuando llega un evento. Se mencionó anteriormente que durante las transiciones externas no se producen eventos de salida. Sin embargo, en este

ejemplo se utilizó un truco para producir el evento en tal instante: cuando llega un evento de entrada el avance de tiempo se pone en cero. Luego, la transición interna ocurre inmediatamente produciendo el evento de salida.

## 2.3 Modelos DEVS Acoplados

Como ya fue mencionado, DEVS es un formalismo muy general y puede describir sistemas muy complejos. Sin embargo, la representación de un sistema complejo basado solamente en funciones de transición y de avance de tiempo es demasiado difícil. La razón es que todas las situaciones posibles en el sistema deben ser pensadas y descritas por dichas funciones.

Afortunadamente, los sistemas complejos pueden en general pensarse como el acoplamiento de sistemas más simples. Mediante el acoplamiento, los eventos de salida de algunos subsistemas se convierten en eventos de entrada de otros subsistemas. La teoría garantiza que el acoplamiento de modelos DEVS define un nuevo modelo DEVS (o sea, DEVS es cerrado frente al acoplamiento) y los sistemas complejos pueden ser representados por DEVS de una manera jerárquica [65].

Hay básicamente dos formas diferentes de acoplar modelos DEVS. La primera es la más general y utiliza *funciones de traducción* ente los subsistemas. La segunda en cambio se basa en la utilización de puertos de entrada y salida. Esta última es la que será utilizada en esta Tesis dado que es más simple y adecuada para la simulación de sistemas continuos.

El uso de puertos requiere agregar un nuevo número, palabra o símbolo a los eventos de entrada y salida que represente el puerto por el cual el evento entra o sale. El siguiente ejemplo –que es una modificación del Ejemplo 2.1– ilustra esta idea.

### Ejemplo 2.2. Modelo DEVS de una función estática

Consideremos el sistema del Ejemplo 2.1, pero supongamos ahora que el mismo recibe  $n$  entradas seccionalmente constantes,  $u_1(t), \dots, u_n(t)$  y que la salida  $y(t)$  se calcula entonces como  $y = f(u_1, \dots, u_n)$ .

Luego, un modelo DEVS atómico con puertos que representa este comportamiento es el dado por la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
 M_2 &= (X, Y, S, \delta_{int}, \delta_{ext}, \lambda, ta), \text{ donde} \\
 X &= Y = \mathbb{R} \times \mathbb{N} \\
 S &= \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \\
 \delta_{int}(s) &= \delta_{int}(u_1, \dots, u_n, \sigma) = (u_1, \dots, u_n, \infty) \\
 \delta_{ext}(s, e, x) &= \delta_{ext}((u_1, \dots, u_n, \sigma), e, (x_v, p)) = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n, 0) \\
 \lambda(s) &= \lambda(u_1, \dots, u_n, \sigma) = (f(u_1, \dots, u_n), 1) \\
 ta(s) &= ta(u_1, \dots, u_n, \sigma) = \sigma
 \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} x_v & \text{if } i = p \\ u_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

Como puede verse, los eventos de entrada y salida de este último ejemplo contienen un número natural que indica el puerto correspondiente.

Una vez introducidos los puertos, el acoplamiento entre distintos subsistemas puede indicarse enumerando directamente las conexiones que lo componen. Una *conexión interna* involucra un puerto de entrada y uno de salida correspondientes a diferentes modelos. En el contexto de acoplamiento jerárquico hay también conexiones desde los puertos de salida de los subsistemas hacia los puertos de salida del sistema acoplado –se llaman *conexiones externas de salida*– y conexiones desde los puertos de entrada del sistema acoplado hacia los puertos de entrada de los subsistemas (*conexiones externas de entrada*)

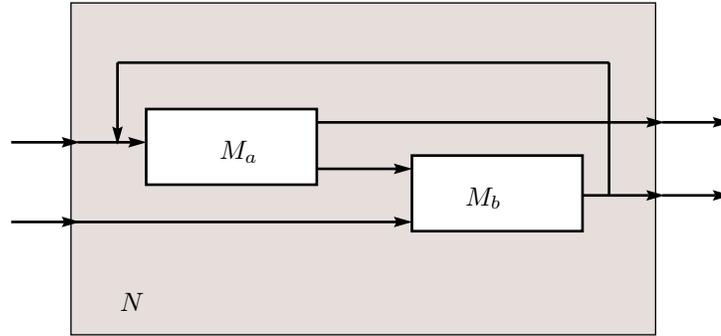


Figura 2.5: Modelo DEVS acoplado

La Figura 2.5 muestra un modelo DEVS acoplado  $N$  resultado del acoplamiento de los modelos  $M_a$  y  $M_b$ . Allí, el puerto de salida 2 de  $M_a$  se conecta al puerto de entrada 1 de  $M_b$ . Esta conexión puede representarse por el par ordenado  $[(M_a, 2), (M_b, 1)]$ . Otras conexiones son entonces  $[(M_b, 1), (M_a, 1)]$ ,  $[(N, 1), (M_a, 1)]$ ,  $[(M_b, 1), (N, 2)]$ , etc. De acuerdo a la propiedad de clausura, el modelo  $N$  puede ser utilizado también como si fuera un modelo atómico y acoplado con otros modelos atómicos o acoplados.

La teoría de DEVS utiliza una estructura formal para representar modelos DEVS acoplados mediante puertos. Esta estructura incluye los subsistemas, las conexiones, los conjuntos de entrada y salida del sistema acoplado y una función de *desempate* para tratar la presencia de eventos simultáneos. Las conexiones están divididas en tres conjuntos: uno compuesto por las conexiones entre subsistemas (conexiones internas), otro con las conexiones desde el sistema acoplado hacia los subsistemas (conexiones externas de entrada) y el último con las conexiones desde los subsistemas hacia el sistema acoplado (conexiones externas de salida).

El uso de la función de *desempate* puede evitarse con la utilización de *Parallel-DEVS*, que es una extensión del formalismo DEVS que permite tratar con eventos simultáneos.

Estos últimos conceptos –la estructura formal de DEVS acoplados y el for-

malismo Parallel-DEVS no serán desarrollados aquí ya que no son necesarios para utilizar DEVS como herramienta para la simulación de sistemas continuos. De todas formas, la teoría completa de DEVS puede encontrarse en la segunda edición del libro de Zeigler [65].

## 2.4 Simulación de modelos DEVS

Una de las características más salientes de DEVS es que modelos muy complejos pueden simularse de una manera muy simple y eficiente.

En los últimos años se han desarrollado muchas herramientas de software dedicadas a la simulación de modelos DEVS. Algunas de esas herramientas cuentan con librerías, interfaces gráficas y muchas otras facilidades para el usuario. Muchas son también gratuitas, y entre las más populares se encuentran DEVS-Java [67] y DEVSsim++ [24].

Cabe mencionar aquí también una herramienta surgida del contexto de este trabajo y que, además de ser un entorno de propósito general de simulación DEVS, implementa las principales ideas que se verán en esta Tesis. Esta herramienta se llama PowerDEVS [50] y fue desarrollada por Esteban Pagliero y Marcelo Lapadula como Proyecto Final de Ingeniería en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la UNR.

Más allá de estas herramientas, los modelos DEVS pueden también simularse mediante un programa ad-hoc muy sencillo escrito en cualquier lenguaje. De hecho, la simulación de un modelo DEVS no es mucho más complicada que la simulación de un modelo de Tiempo Discreto. El único problema es que hay modelos que están compuestos por muchos subsistemas y la programación ad-hoc puede transformarse en una tarea muy tediosa.

La idea básica para la simulación de un modelo DEVS acoplado puede describirse por los siguientes pasos:

1. Buscar el modelo atómico  $d^*$  que, de acuerdo a su tiempo de avance y tiempo transcurrido, sea el próximo en realizar una transición interna.
2. Sea  $tn$  el tiempo de la transición mencionada. Avanzar entonces el tiempo de la simulación  $t$  hasta  $t = tn$  y ejecutar la función de transición interna de  $d^*$
3. Propagar el evento de salida producido por  $d^*$  hacia todos los modelos atómicos conectados a él ejecutando las transiciones externas correspondientes. Luego, volver al paso 1

Una de las formas más simples de implementar estos pasos es escribiendo un programa con una estructura jerárquica equivalente a la estructura jerárquica del modelo a simular. De hecho, este es el método desarrollado en [65] donde una rutina llamada *DEVS-simulator* se asocia a cada modelo DEVS atómico y otra rutina llamada *DEVS-coordinator* se relaciona a cada modelo DEVS acoplado.

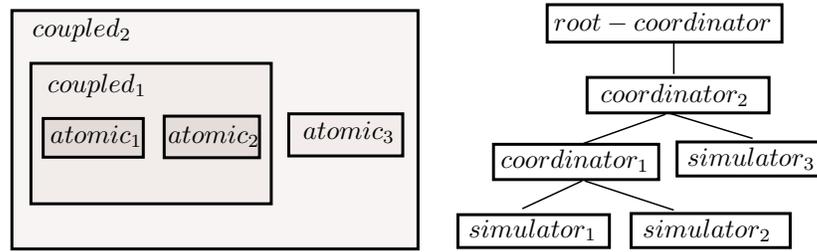


Figura 2.6: Modelo jerárquico y esquema de simulación

En la cima de la estructura jerárquica se coloca una rutina, llamada *DEVS-root-coordinator* que se encarga de avanzar el tiempo global de la simulación. La Figura 2.6 ilustra esta idea sobre un modelo DEVS acoplado.

Los simuladores y coordinadores de capas consecutivas se comunican a través de mensajes. Los coordinadores envían mensajes a sus *hijos* para que ejecuten las funciones de transición. Cuando un simulador ejecuta una transición, calcula su próximo estado y –cuando la transición es interna– envía el valor de salida a su coordinador *padre*. En todos los casos, el estado del simulador coincidirá con el estado de su modelo DEVS atómico asociado.

Cuando un coordinador ejecuta una transición, envía mensajes a algunos de sus hijos para que ejecuten sus funciones de transición correspondientes. Cuando un evento de salida producido por uno de sus hijos debe ser propagado fuera del modelo acoplado, el coordinador envía un mensaje a su propio coordinador padre con el valor de salida correspondiente.

Cada simulador o coordinador tiene una variable local  $tn$  que indica el tiempo en el que ocurrirá su próxima transición interna. En los simuladores, esa variable se calcula utilizando la función de avance de tiempo del modelo atómico correspondiente. En los coordinadores, la misma se calcula como el mínimo  $tn$  de sus hijos. Luego, el  $tn$  del coordinador que está por encima de todos es el tiempo en el cual ocurrirá el próximo evento considerando el sistema completo. Así, el *root-coordinator* sólo debe tener en cuenta este tiempo, avanzar el tiempo global  $t$  hasta este valor y luego enviar un mensaje a su hijo para que realice la siguiente transición (y luego el *root-coordinator* repite este ciclo hasta el fin de la simulación).

Los detalles y los pseudo-códigos asociados a los simuladores, coordinadores y coordinadores raíz están incluidos en el Apéndice B.

Una de las propiedades más interesantes mostradas por este tipo de simulación es la independencia entre los simuladores asociados a modelos atómicos diferentes. De esta forma, cuando un modelo atómico tiene su avance de tiempo muy grande (o infinito), éste no afecta para nada al resto de los modelos y la simulación no gasta ningún cálculo con el mismo. Se verá más adelante que este hecho resultará en una ventaja importantísima para la simulación de sistemas

*ralos.*

Hay además muchas otras posibilidades para implementar la simulación de modelos DEVS. El principal problema con la metodología descrita es que, debido a la estructura jerárquica, puede haber un importante tráfico de mensajes entre las capas más altas y las más bajas. Todos estos mensajes y su tiempo computacional correspondiente pueden evitarse con el uso de una estructura de simulación plana. La forma de transformar una simulación jerárquica en una plana es muy simple en el contexto de DEVS y agrega mucha eficiencia [23]. De hecho, la mayor parte de las herramientas de software mencionadas implementan la simulación en base a un código plano.

## 2.5 Sistemas Cuantificados y DEVS

En los Ejemplos 2.1 y 2.2 se mostró que las trayectorias seccionalmente constante pueden ser representadas mediante secuencias de eventos. Esta idea simple constituye la base del uso de DEVS en la simulación de sistemas continuos.

En esos ejemplos, también se mostró que un modelo DEVS puede representar el comportamiento de una función estática con trayectoria de entrada seccionalmente constante. El único problema es que en la mayor parte de los sistemas continuos las trayectorias no son así. Sin embargo, se podrían modificar los sistemas para obtener tal clase de trayectorias. De hecho, esto es lo que se hizo con el Sistema (2.1) utilizando la función “floor” para convertirlo en el Sistema (2.2).

Volviendo a ese primer ejemplo, el Sistema (2.2) puede dividirse de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) = d_x(t) \quad (2.4a)$$

$$q(t) = \text{floor}(x(t)) \quad (2.4b)$$

y

$$d_x(t) = -q(t) + u(t) \quad (2.5)$$

donde  $u(t) = 10\mu(t - 1.76)$ .

El sistema puede entonces representarse mediante el Diagrama de Bloques de la Figura 2.7.

Como se mencionó antes, el Subsistema (2.5) –que es simplemente una función estática– puede representarse mediante el modelo DEVS  $M_2$  del Ejemplo 2.2 (página 17).

El Subsistema (2.4) es una ecuación dinámica que tiene una trayectoria de entrada seccionalmente constante  $d_x(t)$  y una trayectoria de salida también seccionalmente constante  $q(t)$ . El mismo puede representarse exactamente utilizando el modelo DEVS que sigue:

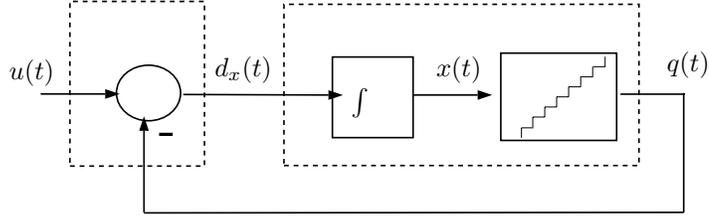


Figura 2.7: Diagrama de Bloques de (2.4)-(2.5)

$M_3 = (X, Y, S, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta)$ , donde

$$X = Y = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$$

$$S = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$$

$$\delta_{\text{int}}(s) = \delta_{\text{int}}(x, d_x, q, \sigma) = (x + \sigma \cdot d_x, d_x, q + \text{sgn}(d_x), \frac{1}{|d_x|})$$

$$\delta_{\text{ext}}(s, e, x) = \delta_{\text{ext}}(x, d_x, q, \sigma, e, x_v, p) = (x + e \cdot d_x, x_v, q, \tilde{\sigma})$$

$$\lambda(s) = \lambda(x, d_x, q, \sigma) = (q + \text{sgn}(d_x), 1)$$

$$ta(s) = ta(x, d_x, q, \sigma) = \sigma$$

donde

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} \frac{q + 1 - (x + e \cdot d_x)}{x_v} & \text{if } x_v > 0 \\ \frac{q - (x + e \cdot d_x)}{x_v} & \text{if } x_v < 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

El Subsistema (2.4) –que corresponde al integrador con el bloque escalera en el Diagrama de Bloques de la Figura 2.7– es lo que Zeigler llamó *Integrador Cuantificado* (*Quantized Integrator* [66, 65]. Aquí, la función “floor” cumple el rol de una *función de cuantificación*. Una *función de cuantificación* mapea todos los números reales en un conjunto discreto de valores.

Un cuantificador es un sistema que vincula su entrada y su salida mediante una función de cuantificación. Luego, el bloque escalera viene a ser un caso particular de un cuantificador. Aunque el modelo DEVS  $M_3$  representa un Integrador Cuantificado en particular, el modelo DEVS correspondiente a uno general –o sea, con un cuantificador cualquiera– no es muy distinto.

El sistema completo (2.2) es llamado *Sistema Cuantificado* (*Quantized System*) y puede ser representado exactamente por el modelo DEVS resultante del acoplamiento de los modelos atómicos  $M_2$  y  $M_3$ .

Esta fue, en términos generales, la idea esbozada por Zeigler para aproximar y simular sistemas continuos utilizando DEVS.

Como puede verse, una representación en modelo DEVS de un *Integrador Cuantificado* general puede obtenerse fácilmente. Esta idea funcionará siempre

y cuando las trayectorias que reciba el mismo sean seccionalmente constantes. Por otro lado, está también claro que el modelo DEVS de cualquier función estática puede ser obtenido (con la misma restricción sobre las trayectorias de entrada).

Teniendo también en cuenta que DEVS es cerrado frente al acoplamiento, es natural pensar que un modelo DEVS acoplado representando un Sistema Cuantificado general puede ser obtenido fácilmente.

En este caso, un sistema general (estacionario) debe ser considerado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Esta última ecuación puede ser transformada en:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(q_1, q_2, \dots, q_n, u_1, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 &= f_2(q_1, q_2, \dots, q_n, u_1, \dots, u_m) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(q_1, q_2, \dots, q_n, u_1, \dots, u_m) \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde cada  $q_i(t)$  está relacionada con  $x_i(t)$  mediante alguna función de cuantificación.

Si se considera que las funciones de entrada  $u_j(t)$  son seccionalmente constantes, cada término en el lado derecho de (2.7) puede adoptar valores sólo en un conjunto finito.

Las variables  $q_i$  serán llamadas entonces *variables cuantificadas*. Este sistema puede representarse mediante el Diagrama de Bloques de la Figure 2.8, donde fueron definidos  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{u}$  como los vectores formados con las variables cuantificadas y de entrada respectivamente.

Cada subsistema en la Figura 2.8 puede ser representado exactamente por un modelo DEVS ya que estos están compuestos por una función estática y un integrador cuantificado. Estos modelos pueden ser entonces acoplados (como muestra dicho Diagrama de Bloques) y, de acuerdo a la propiedad de clausura frente a acoplamiento, el sistema completo definirá un modelo DEVS.

Por esto, cuando un sistema se modifica con el agregado de cuantificadores a la salida de los integradores, el modelo resultante puede ser exactamente representado y simulado por un modelo DEVS.

Esta idea es la formalización de la primera aproximación a un método de integración por eventos discretos. Con este método, ignorando los errores de redondeo, el Sistema (2.7) puede ser simulado de manera exacta. Teniendo en cuenta que este nuevo sistema parece ser una aproximación del sistema original (2.6), podría pensarse que finalmente se obtuvo un método numérico que evita la discretización del tiempo.

Sin embargo, como se verá en la siguiente sección, esta idea no funciona en casos generales.

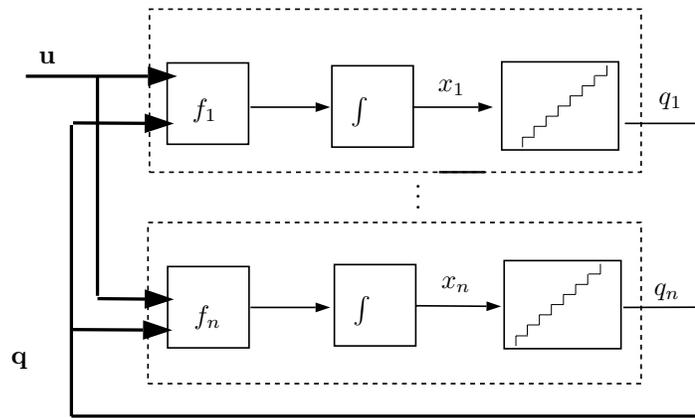


Figura 2.8: Representación en Diagrama de Bloques de (2.7)

## 2.6 Ilegitimidad de los Sistemas Cuantificados

Un modelo DEVS se dice legítimo cuando no puede realizar un número infinito de transiciones en un intervalo finito de tiempo [65].

La legitimidad es la propiedad que asegura que un modelo DEVS pueda ser simulado. De otra forma –cuando un número infinito de transiciones pueden ocurrir en un intervalo de tiempo finito– el sistema puede ser sólo simulado hasta que tal intervalo es alcanzado. En tal caso se dice que el modelo DEVS es ilegítimo.

La teoría de DEVS distingue dos casos de ilegitimidad. El primero ocurre cuando hay un número infinito de transiciones en el mismo instante de tiempo (o sea, un bucle entre diferentes estados con avance de tiempo igual a cero). Esta clase de ilegitimidad es también común en otros formalismos de eventos discretos (Grafos de Eventos Temporizados, por ejemplo).

El segundo caso ocurre cuando el sistema pasa a través de una secuencia infinita de estados en los cuales el avance de tiempo va decreciendo. En tal caso, si la sumatoria de la serie definida por los avances de tiempo sucesivos converge a un número finito se tendrá también un número infinito de eventos en un intervalo de tiempo finito. Estos casos son también llamado sistemas de Zenón en referencia a la paradoja de Zenón sobre Aquiles y la Tortuga.

Puede verificarse fácilmente que los modelos atómicos DEVS  $M_2$  y  $M_3$  son legítimos pero, desafortunadamente, la legitimidad es una propiedad que no es cerrada frente al acoplamiento. En consecuencia, el acoplamiento de modelos legítimos puede resultar en un modelo acoplado ilegítimo.

Este hecho abre la posibilidad de que un modelo DEVS como el mostrado en la Fig.2.8 resulte ilegítimo. De hecho, esto es lo que ocurre en la mayor parte de los casos con los sistemas cuantificados.

Sin embargo, la ilegitimidad de los Sistemas Cuantificados no es un problema de DEVS sino que está relacionado a las soluciones de (2.7). De hecho, las trayectorias  $q_i(t)$  no son necesariamente seccionalmente constantes pese a que pueden adoptar valores sólo en un conjunto finito de números. A veces estas pueden experimentar un número infinito de cambios en un intervalo finito de tiempo, lo que produce un número infinito de eventos en el modelo DEVS correspondiente.

Este problema puede observarse tomando  $u(t) = 10.5\mu(t - 1.76)$  en el Sistema (2.5)–(2.4). Las trayectorias hasta  $t = 1.76$  son exactamente las mismas mostradas en la Figura 2.1. Cuando se aplica el escalón, la trayectoria comienza a crecer algo más rápido que antes y cuando finalmente  $x(t) = q(t) = 10$  la trayectoria continúa creciendo con una pendiente  $\dot{x}(t) = 0.5$ . Luego, tras 2 unidades de tiempo se tiene que  $x(t) = q(t) = 11$  e inmediatamente la pendiente se torna negativa ( $\dot{x}(t) = -0.5$ ). Luego,  $x(t)$  comienza a decrecer,  $q(t)$  vuelve a valer 10 y la derivada se torna nuevamente positiva obteniéndose un comportamiento cíclico. El problema es que el ciclo tiene período igual a cero y hay un número infinito de cambios en  $q(t)$  en el mismo instante de tiempo.

Este comportamiento anómalo puede también ser observado en el modelo DEVS resultante. Cuando el modelo DEVS correspondiente al integrador realiza una transición interna también produce un evento de salida que representa el cambio en  $q(t)$ . Este evento es propagado por la realimentación interna –ver Figura 2.7– y produce una nueva transición externa en el integrador que cambia el avance de tiempo a cero. Luego, el integrador realiza otra transición interna y el ciclo continúa por siempre.

Este caso pertenece al primer tipo de ilegitimidad mencionada. Aquí, el sistema puede ser solamente simulado hasta que se alcance la condición  $x(t) = 10$ .

Podría conjeturarse que la condición de ilegitimidad sólo se alcanza cuando el sistema se aproxima al punto de equilibrio. Si ese fuera el caso, la condición de ilegitimidad podría ser detectada finalizando la simulación en ese instante. Sin embargo, tal conjetura es válida sólo en sistemas de primer orden.

En sistemas de orden superior este tipo de comportamiento puede observarse también lejos de los puntos de equilibrio. Más aún, en tales sistemas pueden encontrarse también ilegitimidades del tipo de Zenón, como se muestra en el siguiente contraejemplo:

**Ejemplo 2.3.** *Aquiles y la Tortuga.*

*Sea el sistema de segundo orden:*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0.5 \cdot x_1 + 1.5 \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

*Si aplicamos la función de cuantificación (Figura 2.9):*

$$q_i = 2 \cdot \text{floor}\left(\frac{x_i - 1}{2}\right) + 1 \quad (2.9)$$

*en ambas variables, el espacio de estados queda dividido como se muestra en la Fig. 2.10.*

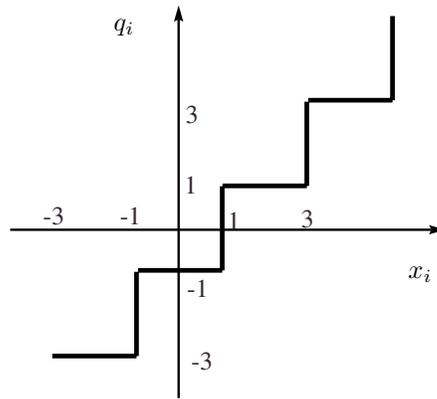
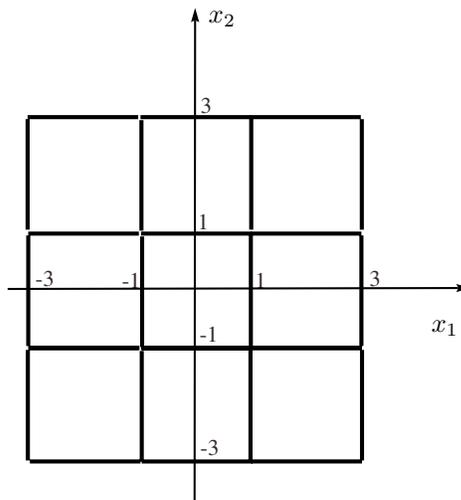
Figura 2.9: Función de cuantificación *impar*

Figura 2.10: División del espacio de estados

Luego, el Sistema Cuantificado resultante es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0.5 \cdot q_1 + 1.5 \cdot q_2 \\ \dot{x}_2 &= -q_1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Analizamos entonces la solución de (2.10) desde la condición inicial  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ .

La derivada del vector de estados de (2.10) en un punto queda definida por el lado derecho de dicha ecuación, utilizando (2.9). Esta es igual a la derivada del

sistema continuo (2.8) evaluado en la esquina inferior izquierda del cuadrado que contiene el punto en cuestión. Por ejemplo, en el punto  $(0, 2)$  la derivada está dada por el lado derecho de (2.8) en el punto  $(-1, 1)$ , o sea, es igual a  $(2, 1)$ .

Luego, si la condición inicial es  $(0, 2)$  la trayectoria seguirá la dirección  $(2, 1)$  hasta que alcance el próximo cuadrado (aquí habrá una transición ya que hay un cambio en la variable cuantificada  $q_1$  correspondiente a  $x_1$ ). La transición ocurrirá en el instante  $t = 0.5$  (la velocidad en  $x_1$  es 2 y la distancia al cuadrado es 1). El punto en el cual la trayectoria alcanza el nuevo cuadrado es  $(1, 2.5)$ .

Tras esta transición, la derivada se calcula en el punto  $(1, 1)$ . La dirección es ahora  $(1, -1)$ . Tras 1.5 unidades de tiempo el sistema alcanzará el punto  $(2.5, 1)$  llegando a un nuevo cuadrado. La nueva dirección es  $(-2, -1)$  (calculada en el punto  $(1, -1)$ ) y tras 0.75 unidades de tiempo el sistema alcanzará el punto  $(1, 0.25)$  en la frontera de un nuevo cuadrado. Luego, la dirección es  $(-1, 1)$  y tras 0.75 unidades de tiempo el sistema alcanza nuevamente el cuadrado inicial en el punto  $(0.25, 1)$ . Luego, tras 0.375 unidades de tiempo el sistema vuelve al segundo cuadrado, llegando al punto  $(1, 1.375)$ .

El tiempo transcurrido desde la primera vez que el sistema alcanza el segundo cuadrado hasta la segunda vez que llega al mismo es 3.375. Luego, puede verse fácilmente que el sistema seguirá un ciclo similar pero comenzando desde la nueva condición inicial  $(1, 1.375)$  tomando en total  $3.375/4 = 0.84375$  unidades de tiempo. Cada ciclo posterior será hecho cuatro veces más rápido que la anterior. Luego, la suma de los tiempos de todos los ciclos convergerá a 4.5 unidades de tiempo. Dado que la primer transición ocurre en tiempo 0.5, antes de llegar a las 5 unidades de tiempo el sistema habrá realizado un número infinito de transiciones.

La Figura 2.11 muestra esta trayectoria en el espacio de estados mientras que la Fig.2.12 muestra la evolución temporal de la variable cuantificada  $q_1$ .

Como resultado de este comportamiento, la simulación quedará trabada antes de llegar a las 5 unidades de tiempo.

Este último ejemplo no sólo exhibe ilegitimidad sino también muestra que a veces la condición de ilegitimidad no puede ser fácilmente detectada. Es difícil –cuando no imposible– escribir una rutina que distinga este caso de ilegitimidad ya que las transiciones no ocurren todas en el mismo instante.

Desafortunadamente, los Sistemas Cuantificados ilegítimos son muy comunes. Como ya se mencionó, en la mayor parte de los sistemas continuos el uso de este tipo de cuantificación produce modelos DEVS ilegítimos. Consecuentemente, el enfoque presentado no puede constituir un método de simulación ya que el mismo no funciona en la mayoría de los casos.

## 2.7 DEVS y Simulación de Sistemas Continuos

A pesar de los problemas de ilegitimidad, la idea de Zeigler de discretizar las variables de estado es muy original y conlleva propiedades y cualidades muy significativas.

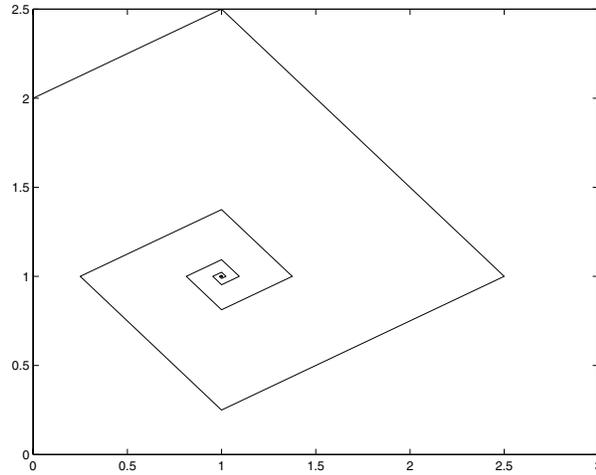


Figura 2.11: Trayectoria de estados con infinitas transiciones

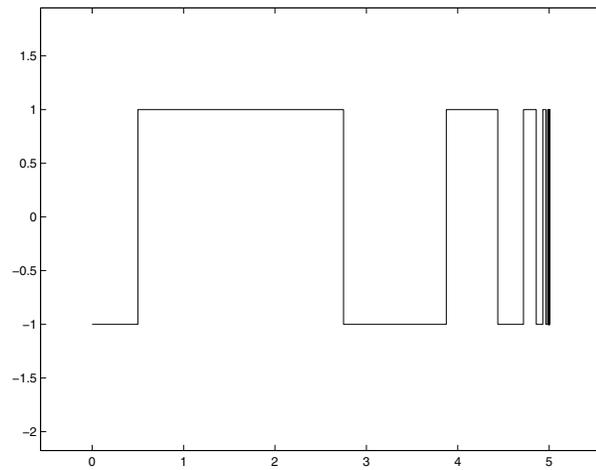


Figura 2.12: Trayectoria de una variable cuantificada con infinitas transiciones

De hecho, la misma fue el primer intento de desarrollar una transformación formal de un sistema continuo para obtener uno de eventos discretos.

Como ya se mencionó, hubo también otra idea posterior. Siguiendo una meta similar, Norbert Giambiasi propuso su propio enfoque basado en la representación por eventos de trayectorias seccionalmente polinomiales y la definición de GDEVs [16]. Sin embargo, esta aproximación *basada en soluciones* requiere conocer la respuesta del sistema continuo a algunas trayectorias de entrada en particular, que en general no se encuentra disponible. Debido a esto y también a la imposibilidad de formalizar tal enfoque, estas ideas no serán discutidas aquí.

Volviendo al enfoque de Zeigler, la primer motivación de esta Tesis fue el descubrimiento de la ilegitimidad de los Sistemas Cuantificados y la meta original fue el intento de resolver dicho problema.

Por esto, el siguiente capítulo estará completamente dedicado a describir la solución hallada y a desarrollar el algoritmo numérico resultante, que es el primer método general de integración de ODEs por eventos discretos.

Tras esto, las propiedades teóricas, extensiones y aplicaciones serán introducidas en los capítulos subsiguientes.



## Capítulo 3

# Sistemas de Estados Cuantificados

El capítulo previo introdujo una especie de descripción sobre la relación entre sistemas de eventos discretos y métodos numéricos para ODEs.

Allí, se incluyeron dos contraejemplos que mostraban la imposibilidad de simular sistemas continuos generales mediante simple cuantificación debido a la ilegitimidad.

A pesar de este problema, la idea de aproximar una ecuación diferencial mediante un sistema de eventos discretos es muy atractiva ya que esto puede brindar muchas ventajas con respecto a los enfoques de tiempo discreto. Por ejemplo, debido al comportamiento asincrónico, los modelos DEVS pueden implementarse en paralelo de una manera muy simple y eficiente.

Muchos sistemas técnicos modernos están descritos por modelos que combinan partes continuas y discretas. La simulación de estos *Sistemas Híbridos* requiere del uso de técnicas especiales y una aproximación de la parte continua mediante eventos discretos resultaría en un único modelo de simulación de eventos discretos. De hecho, esta idea –combinar simulación discreta y continua en un único método– fue la motivación de la Tesis doctoral de Herbert Praehofer [53]. Sin embargo, en los comienzos de los 90s no existían métodos de aproximación por eventos discretos y el trabajo de Praehofer se limitó a expresar en términos de DEVS algunos métodos de integración de tiempo discreto existentes.

Como se verá más adelante, el uso de aproximaciones de eventos discreto conlleva una reducción importante de los costos computacionales en la simulación de sistemas híbridos. Pero las ventajas de un método de integración por eventos discretos no terminan aquí. Además de otras ventajas prácticas se demostrará que algunas propiedades teóricas resultantes de este tipo de aproximación son completamente originales en el campo de la teoría de integración numérica.

Este capítulo presenta la mayor parte de las ideas que permitieron la formulación del primer método general de integración de ODEs por eventos discretos.

### 3.1 Cuantificación con Histéresis

Si se analizan las oscilaciones infinitamente rápidas del Sistema (2.4)–(2.5), puede verse que las mismas se deben a los cambios en  $q(t)$ . Una variación infinitesimal en  $x(t)$  puede producir, debido a la cuantificación, una oscilación importante con una frecuencia infinitamente rápida en  $q(t)$ .

Una solución posible consistiría en agregar algún retardo tras cada cambio de  $q(t)$  para evitar que las oscilaciones sean tan rápidas. Sin embargo el agregado de tales retardos es equivalente, en cierto sentido, a introducir discretización temporal. Durante los retardos se pierde el *control* sobre la simulación y se vuelve así a los problemas de los algoritmos de tiempo discreto.

Una solución diferente consiste en el uso de histéresis en la cuantificación. Si se agrega una característica histerética a la relación entre  $x(t)$  y  $q(t)$ , las oscilaciones en  $q(t)$  podrán ser producidas sólo por oscilaciones *grandes* en  $x(t)$ , las que necesitarán de un mínimo intervalo de tiempo para ocurrir debido a la continuidad en las trayectorias de estado.

La existencia de un intervalo de tiempo mínimo entre eventos es una condición suficiente para la legitimidad [65]. Luego, esta idea simple –agregar histéresis a la cuantificación– es una buena solución para el problema de ilegitimidad.

La formalización de esta idea está dada por la definición de las *funciones de cuantificación con histéresis*

**Definición 3.1.** *Función de Cuantificación con Histéresis.*

Sea  $Q = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_r\}$  un conjunto de números reales donde  $Q_{k-1} < Q_k$  con  $1 \leq k \leq r$ . Sea  $\Omega$  el conjunto de las trayectorias reales seccionalmente continuas y sea  $x \in \Omega$  una trayectoria continua. Sea  $b : \Omega \rightarrow \Omega$  un mapeo y supóngase que  $q = b(x)$  donde la trayectoria  $q$  satisface:

$$q(t) = \begin{cases} Q_m & \text{si } t = t_0 \\ Q_{j+1} & \text{si } x(t) = Q_{j+1} \wedge q(t^-) = Q_j \wedge j < r \\ Q_{j-1} & \text{si } x(t) = Q_j - \varepsilon \wedge q(t^-) = Q_j \wedge j > 0 \\ q(t^-) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.1)$$

y

$$m = \begin{cases} 0 & \text{si } x(t_0) < Q_0 \\ r & \text{si } x(t_0) \geq Q_r \\ k & \text{si } Q_k \leq x(t_0) < Q_{k+1} \end{cases}$$

Luego, el mapeo  $b$  es una función de cuantificación con histéresis.

Los valores discretos  $Q_j$  se llaman *niveles de cuantificación* y la distancia  $\Delta Q \triangleq Q_{j+1} - Q_j$  se define como el *quantum*, que será usualmente constante. El ancho de la ventana de histéresis es  $\varepsilon$ . Los valores  $Q_0$  y  $Q_r$  son los niveles inferior y superior de saturación. La Figura 3.1 muestra una función de cuantificación típica con intervalos de cuantificación uniformes.

El uso de cuantificación con histéresis en lugar de la cuantificación simple *sin memoria* permite la definición del método de los Sistemas de Estados Cuantificados (método de QSS) para la integración de ODEs.

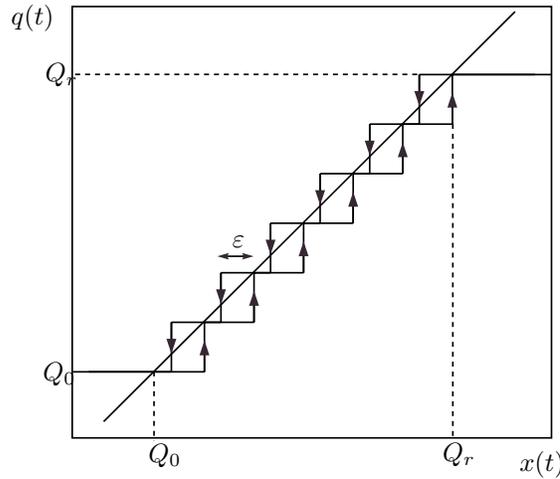


Figura 3.1: Función de Cuantificación con Histéresis

### 3.2 Método de QSS

El método de QSS sigue la idea de la generalización de los Sistemas Cuantificados (Sección 2.5). La única diferencia aquí es el uso de histéresis en la cuantificación.

Luego, el método de QSS puede definirse como sigue:

**Definición 3.2.** *Método de QSS.*

Dado un sistema de ecuaciones de estados invariante en el tiempo:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (3.2)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , el método de QSS lo aproxima por el sistema:

$$\dot{x}(t) = f(q(t), u(t)) \quad (3.3)$$

donde  $q(t)$  y  $x(t)$  están relacionados componente a componente mediante funciones de cuantificación con histéresis (o sea, cada variable cuantificada  $q_i(t)$  se relaciona con la variable de estado correspondiente  $x_i(t)$  mediante una función de cuantificación con histéresis).

El sistema resultante (3.3) se llama *Sistema de Estados Cuantificados* (QSS).

La Figura 3.2 muestra una representación en Diagrama de Bloques de un QSS genérico.

El método de QSS requiere la elección de funciones de cuantificación como la mostrada en la Figura 3.1. Tras elegir una función de estas para cada variable de estados se obtiene un QSS.

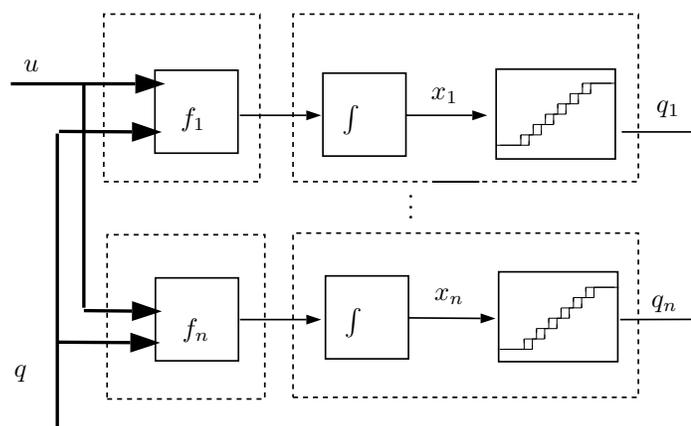


Figura 3.2: Representación en Diagrama de Bloques de un QSS

En las secciones siguientes se demostrará que el QSS resultante es *equivalente* a un modelo DEVS legítimo (es decir, que el QSS puede ser simulado exactamente por un DEVS legítimo).

Sólo tras demostrar esto será posible aclamar que *el método QSS aproxima un Sistema de Ecuaciones Diferenciales por un modelo DEVS legítimo*.

### 3.3 Trayectorias en QSS

Dado que QSS intenta ser una aproximación por eventos discretos de un sistema continuo, sus trayectorias deben tener algunas propiedades en particular. Dado que DEVS sólo procesa eventos, cada trayectoria de QSS debe tener una trayectoria de eventos equivalente.

Luego, QSS deberá contar con trayectorias seccionalmente constantes, seccionalmente lineales o seccionalmente algo. De otra forma, sus segmentos nunca podrían ser representados por una secuencia finita de valores.

El enfoque sin histéresis de los Sistemas Cuantificados falló en esta meta. Las trayectorias allí no eran siempre seccionalmente constantes o lineales como se pudo ver en el contraejemplo de la Sección 2.6.

Sin embargo, el uso de histéresis en QSS resuelve este problema. Cuando las trayectorias de entrada son seccionalmente constantes y acotadas y la función  $f$  es continua y acotada en cualquier dominio acotado las siguientes propiedades son satisfechas:

- Las variables cuantificadas tienen trayectorias seccionalmente constantes
- Las derivadas de las variables de estado también tienen trayectorias seccionalmente constantes

- Las variables de estado tienen trayectorias seccionalmente lineales

Los siguientes teoremas brindan las condiciones necesarias y demuestran las propiedades mencionadas.

**Teorema 3.1.** *Trayectorias cuantificadas en QSS*

Dado el QSS definido en (3.3) con  $f$  continua y acotada en cualquier dominio cerrado y con  $u(t)$  acotada y seccionalmente constante, las trayectorias de  $q(t)$  resultan seccionalmente constantes.

*Demostración.* Sea  $q_i(t)$  una componente arbitraria de  $q$ . Asumamos que la misma está relacionada con  $x_i(t)$  por la función de cuantificación con histéresis dada por (3.1). De aquella definición, sigue que:

$$Q_0 \leq q_i(t) \leq Q_r \quad (3.4)$$

Dado que todas las variables cuantificadas se relacionan con las respectivas variables de estado mediante funciones de cuantificación con histéresis similares, la desigualdad (3.4) también implica que  $\|q(t)\|$  está acotada. Teniendo en cuenta la hipótesis formulada sobre  $f$ , existe un número positivo  $R$  tal que

$$-R \leq \dot{x}_i \leq R \quad (3.5)$$

Integrado la desigualdad anterior tenemos

$$x_i(0) - R(t - t_0) \leq x_i(t) \leq x_i(t_0) + R(t - t_0) \quad (3.6)$$

La desigualdad (3.6) demuestra que las variables de estado tienen trayectorias acotadas en cualquier intervalo finito de tiempo. Más aún, de (3.5) se puede ver que dichas trayectorias son además continuas.

Supongamos que en un cierto tiempo  $t$  hay un cambio en  $q_i$ . Si tal cambio se produjo porque  $x_i$  estaba creciendo, resulta que:

$$x_i(t) = q_i(t^+) = Q_j \quad (0 < j \leq r)$$

Luego, de (3.5) y (3.1) sigue que:

$$q_i(t + \Delta t) \neq q_i(t^+) \Rightarrow \Delta t \geq \frac{\min(Q_{j+1} - Q_j, \varepsilon)}{R} \triangleq \Delta t_{min} \quad (3.7)$$

Si asumimos en cambio que  $x_i$  estaba decreciendo, tenemos

$$x_i(t) = Q_{j+1} - \varepsilon = q_i(t^+) - \varepsilon$$

de donde se llega nuevamente a (3.7).

Esto implica que la variable  $q_i$  necesita un intervalo de tiempo mayor que  $\Delta t_{min}$  para cambiar su valor dos veces. Dado que esta cota inferior es constante (no depende del estado) resulta que  $q_i$  tiene una trayectoria seccionalmente constante.

Teniendo en cuenta que el análisis se hizo para una componente genérica, se puede concluir que  $q$  es también seccionalmente constante.  $\square$

**Teorema 3.2.** *Trayectorias de las Derivadas en QSS.*

En un QSS que verifica las hipótesis del Teorema 3.1 las trayectorias de las derivadas de las variables de estado son seccionalmente constantes.

*Demostración.* Es trivial teniendo en cuenta el Teorema 3.1 dado que  $q(t)$  y  $u(t)$  son seccionalmente constantes y  $f$  es una función estática.  $\square$

**Teorema 3.3.** *Trayectorias de Estado en QSS.*

En un QSS que satisface las hipótesis del Teorema 3.1 las trayectorias de las variables de estado son continuas y seccionalmente lineales.

*Demostración.* Es trivial nuevamente teniendo en cuenta el Teorema 3.2.  $\square$

La definición de  $\Delta t_{min}$  en (3.7) muestra el efecto de la histéresis sobre las trayectorias del QSS. Cuando  $\varepsilon$  es cero no se puede asegurar la existencia de un tiempo mínimo entre los cambios de  $q_i$ .

La Figura 3.3 muestra las trayectorias típicas de un QSS.

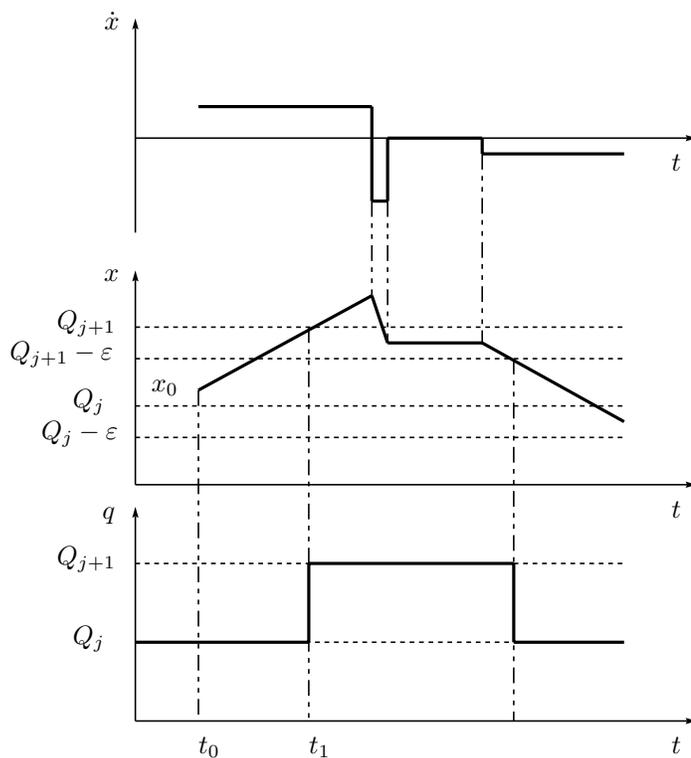


Figura 3.3: Trayectorias típicas en QSS

### 3.4 Modelo DEVS de un QSS

Teniendo en cuenta que los componentes de  $q(t)$  y  $\dot{x}(t)$  son seccionalmente constantes, estos pueden ser representados por secuencias de eventos. Luego, siguiendo el procedimiento de la Sección 2.5, el QSS de la Figura 3.2 puede dividirse en funciones estáticas e integradores cuantificados (ahora *integradores cuantificados con histéresis*).

Las funciones estáticas pueden ser aún representadas por el modelo DEVS  $M_2$  del Ejemplo 2.2 (página 17) pero el modelo DEVS  $M_3$  correspondiente a los integradores cuantificados (página 22) debe ser modificado tomando en consideración la presencia de histéresis.

Con esta modificación, un integrador cuantificado –que puede pensarse como el sistema constituido por las Ecuaciones (2.4a) y (3.1)– puede representarse por el modelo DEVS:

$$\begin{aligned}
 M_4 &= (X, Y, S, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta), \text{ donde} \\
 X &= Y = \mathbb{R} \times \mathbb{N} \\
 S &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+ \\
 \delta_{\text{int}}(s) &= \delta_{\text{int}}(x, d_x, j, \sigma) = (x + \sigma \cdot d_x, d_x, j + \text{sgn}(d_x), \sigma_1) \\
 \delta_{\text{ext}}(s, e, x_u) &= \delta_{\text{ext}}(x, d_x, j, \sigma, e, x_v, p) = (x + e \cdot d_x, x_v, j, \sigma_2) \\
 \lambda(s) &= \lambda(x, d_x, j, \sigma) = (Q_{j+\text{sgn}(d_x)}, 1) \\
 ta(s) &= ta(x, d_x, j, \sigma) = \sigma
 \end{aligned}$$

con

$$\sigma_1 = \begin{cases} \frac{Q_{j+2} - (x + \sigma \cdot d_x)}{d_x} & \text{si } d_x > 0 \\ \frac{(x + \sigma \cdot d_x) - (Q_{j-1} - \varepsilon)}{|d_x|} & \text{si } d_x < 0 \\ \infty & \text{si } d_x = 0 \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} \frac{Q_{j+1} - (x + e \cdot d_x)}{x_v} & \text{si } x_v > 0 \\ \frac{(x + e \cdot d_x) - (Q_j - \varepsilon)}{|x_v|} & \text{si } x_v < 0 \\ \infty & \text{si } x_v = 0 \end{cases}$$

Luego, un QSS completo puede representarse mediante un DEVS acoplado constituido por modelos atómicos  $M_2$  y  $M_4$  de acuerdo a la Figura 3.2. Si los errores de redondeo son ignorados, ese modelo DEVS acoplado puede simular exactamente el comportamiento de un QSS.

**Ejemplo 3.1.** *Simulación con QSS de un sistema de segundo orden.*

*Consideremos el sistema de segundo orden:*

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= 1 - x_1(t) - x_2(t)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

con la condición inicial

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0 \quad (3.9)$$

Utilizando un quantum uniforme  $Q_{k+1} - Q_k = \Delta Q = 0.05$  y un ancho de histéresis  $\epsilon = 0.05$  en ambas variables de estado, el QSS resultante:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 1 - q_1(t) - q_2(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

puede simularse por un modelo DEVS acoplado compuesto por dos modelos atómicos como  $M_4$  –correspondientes a los integradores cuantificados– y dos modelos atómicos como  $M_2$ , que calculan las funciones estáticas  $f_1(q_1, q_2) = q_2$  y  $f_2(q_1, q_2) = 1 - q_1 - q_2$ . Llamemos a dichos subsistemas  $QI_1$ ,  $QI_2$ ,  $F_1$  y  $F_2$  respectivamente.

El acoplamiento puede expresarse entonces mediante las conexiones  $[(QI_1, 1), (F_1, 1)]$ ,  $[(QI_1, 1), (F_2, 1)]$ ,  $[(QI_2, 1), (F_1, 2)]$ ,  $[(QI_2, 1), (F_2, 2)]$ ,  $[(F_2, 1), (QI_2, 1)]$  y  $[(F_1, 1), (QI_1, 1)]$ .

La Figura 3.4 representa el sistema acoplado.

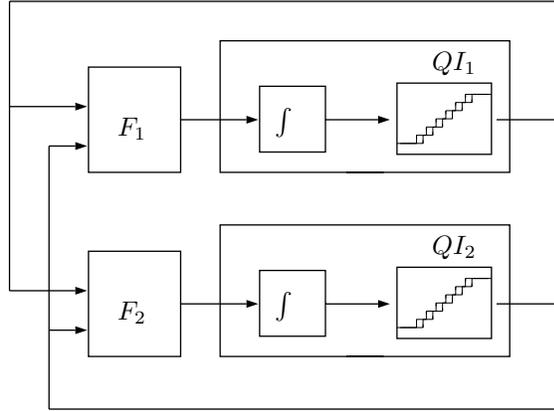


Figura 3.4: Representación en Diagrama de Bloques de (3.10)

Notar que, debido al hecho que la función  $f_1$  no depende de la variable  $q_1$ , la conexión  $[(QI_1, 1), (F_1, 1)]$  no es necesaria. Más aún, teniendo en cuenta que  $f_1(q_1, q_2) = q_2$  el subsistema  $F_1$  y las conexiones que involucra puede ser reemplazado por una conexión directa desde  $QI_2$  hasta  $QI_1$ . Estas simplificaciones pueden reducir considerablemente el costo computacional de la implementación.

Los resultados de simulación se muestran en la Figura 3.5. Esta primer simulación fue completada con 30 transiciones internas en cada integrador cuantificado, lo que da un total de 60 pasos. En la figura pueden apreciarse las trayectorias seccionalmente lineales de  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ , así como las trayectorias seccionalmente constantes de  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$ .

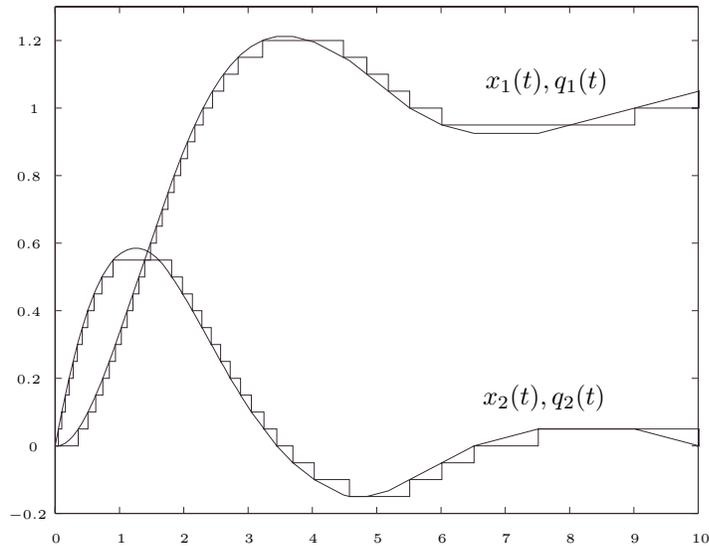


Figura 3.5: Trayectorias en el Sistema (3.10)

*La presencia de la histéresis puede verse fácilmente cuando las pendientes de las variables de estado cambian de signo. Cerca de esos puntos, hay valores distintos de  $q$  para el mismo  $x$ .*

Las simplificaciones en las conexiones que fueron mencionadas pueden ser aplicadas a sistemas generales en los que algunas funciones estáticas no dependen de todas las variables de estado. De esa forma, el método de QSS puede explotar las propiedades estructurales del sistema para reducir los costos computacionales. Cuando el sistema es *ralo* la simulación por QSS resulta particularmente eficiente ya que cada paso involucra cálculos en muy pocos integradores.

Los algoritmos de tiempo discreto pueden también aprovechar las propiedades de ralitud. Sin embargo, estos requieren de la utilización de técnicas específicas para la manipulación de matrices. En el método de QSS esto es simplemente una propiedad intrínseca.

### 3.5 Señales de entrada en el método de QSS

Cuando se introdujo el método de QSS, se mencionó que el mismo permitía la simulación de sistemas estacionarios con señales de entrada seccionalmente constantes. Sin embargo, no se dijo cómo estas señales pueden incorporarse al modelo de simulación

En el modelo de simulación DEVS, cada evento representa un cambio en una trayectoria seccionalmente constante. Luego, las trayectorias de entrada

deben ser incorporadas como secuencias de eventos. En el Diagrama de Bloques de la Figura 3.2, las señales de entrada  $u(t)$  parecen venir del mundo exterior y no queda claro donde las correspondientes secuencias de eventos deben ser generadas.

En el contexto de la simulación DEVS, todos los eventos deben provenir de un modelo DEVS atómico. Por esto, es evidente que se debe construir algún nuevo modelo DEVS que pueda generar tales secuencias de eventos y que pueda acoplarse con el resto del sistema para su simulación.

Supongamos entonces que hay una trayectoria de entrada seccionalmente constante  $u(t)$  que toma valores  $v_1, v_2, \dots, v_j, \dots$  en los instantes  $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots$  respectivamente. Luego, un modelo DEVS que produce los eventos correspondientes a esta señal –o sea, un DEVS generador de eventos– puede construirse como sigue:

$$\begin{aligned} M_5 &= (X, Y, S, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta), \text{ donde} \\ X &= \phi \\ Y &= \mathbb{R} \times \mathbb{N} \\ S &= \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+ \\ \delta_{\text{int}}(s) &= \delta_{\text{int}}(j, \sigma) = (j + 1, t_{j+1} - t_j) \\ \lambda(s) &= \lambda(j, \sigma) = (v_j, 1) \\ ta(s) &= ta(j, \sigma) = \sigma \end{aligned}$$

Notar que en este modelo la función de transición externa  $\delta_{\text{ext}}$  no está definida dado que la misma no puede ser invocada nunca porque el sistema no recibe eventos de entrada.

Una ventaja interesante del método de QSS es que el mismo trata los cambios en las trayectorias de entrada de una manera asincrónica. El evento que indica un cambio en la señal es procesado siempre en el instante de tiempo correcto, produciendo cambios instantáneos en las pendientes de las trayectorias de las variables de estado que resultan afectadas directamente.

Este es el comportamiento intrínseco del método y es obtenido sin tener que modificar los modelos DEVS correspondientes a los integradores cuantificados ni a las funciones estáticas. Los métodos de tiempo discreto, en cambio, requieren un tratamiento especial para poder realizar un paso en el instante de tiempo exacto en el que ocurre un cambio en la entrada. Este tema será tratado más adelante en profundidad para mostrar las ventajas del método de QSS en sistemas discontinuos.

Hasta aquí se consideraron sólo trayectorias de entrada seccionalmente constantes. Sin embargo, en muchas aplicaciones las trayectorias de entrada tienen formas más generales. En estos casos, las mismas pueden aproximarse por trayectorias seccionalmente constantes mediante el agregado de funciones de cuantificación y así pueden ser representadas por modelos DEVS. Por ejemplo, el siguiente modelo DEVS general una trayectoria de eventos que sigue la forma

de una función senoidal con frecuencia angular  $\omega$  y amplitud  $A$  utilizando un quantum  $A\Delta u$ .

$$M_6 = (X, Y, S, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta), \text{ donde}$$

$$X = \phi$$

$$Y = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$$

$$S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

$$\delta_{\text{int}}(s) = \delta_{\text{int}}(\tau, \sigma) = (\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})$$

$$\lambda(s) = \lambda(\tau, \sigma) = (A \sin(\omega\tau), 1)$$

$$ta(s) = ta(\tau, \sigma) = \sigma$$

con

$$\tilde{\sigma} = \begin{cases} \frac{\arcsin[\sin(\omega\tau) + \Delta u]}{\omega} - \tau & \text{si } (\sin(\omega\tau) + \Delta u \leq 1 \wedge \cos(\omega\tau) > 0) \\ & \vee \sin(\omega\tau) - \Delta u < -1 \\ \frac{\text{sgn}(\tau)\pi - \arcsin[\sin(\omega\tau) - \Delta u]}{\omega} - \tau & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\tilde{\tau} = \begin{cases} \tau + \tilde{\sigma} & \text{si } \omega(\tau + \tilde{\sigma}) < \pi \\ \tau + \tilde{\sigma} - \frac{2\pi}{\omega} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La trayectoria generada por este modelo con parámetros  $A = 2$ ,  $\omega = 3$  y  $A\Delta u = 0.2$  se muestra en la Figura 3.6.

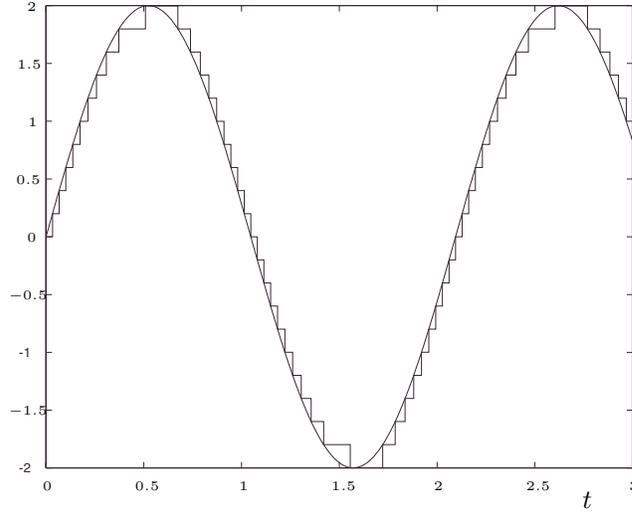


Figura 3.6: Trayectoria senoidal seccionalmente constante.

Una trayectoria seccionalmente constante puede también obtenerse utilizando un paso temporal constante. Sin embargo, la aproximación anterior es mejor en el método de QSS ya que la cuantificación en los valores asegura que la diferencia entre la señal continua y la señal seccionalmente constante sea siempre menor que el quantum. Este hecho se nota claramente en la Figura 3.6, donde si se hubiera utilizado una aproximación de paso constante el máximo error dependería de la relación entre dicho paso temporal y la frecuencia de la señal.

### 3.6 Arranque e Interpolación de Salidas

El arranque en el método de QSS consiste en brindar condiciones iniciales apropiadas a los modelos DEVS atómicos que realizan la simulación.

El estado del integrador cuantificado puede escribirse como  $s = (x, d_x, k, \sigma)$  (ver el modelo  $M_4$  en la página 37) donde  $x$  es la variable de estado,  $d_x$  es su derivada,  $k$  es el índice correspondiente a la variables cuantificada  $q_k$  y  $\sigma$  es el avance de tiempo.

Es claro que la variable que representa el estado debe ser inicialmente elegida como  $x = x_i(t_0)$  y  $j$  debe ser tomada tal que  $Q_j \leq x_i(t_0) \leq Q_{j+1}$ . Con respecto a  $d_x$  y  $\sigma$ , estos podrían calcularse de acuerdo a  $f_i(q, u)$ . Sin embargo hay una solución mucho más simple.

Si se toma  $\sigma = 0$ , todos los integradores cuantificados realizarán transiciones internas al comienzo de la simulación y luego, los modelos asociados a las funciones estáticas  $f_i$  calcularán las derivadas produciendo –instantáneamente– eventos de salida. Luego, los integradores cuantificados recibirán los valores correctos de  $d_x$  y podrán calcular el  $\sigma$  correspondiente durante la transición externa.

Sin embargo, este comportamiento se observará sólo si los integradores cuantificados reciben los eventos de entrada provenientes de las funciones estáticas después de haber realizado la transición interna. El problema es que después que el primer integrador cuantificado realiza una transición, no sólo los otros integradores cuantificados sino también algunos modelos estáticos tendrán su  $\sigma$  igual a 0 (ya que habrán recibido el evento proveniente del primer integrador cuantificado).

Por esto, es necesario establecer prioridades entre los componentes para asegurar que cuando algunos modelos planean hacer su próxima transición en el mismo instante sean los integradores cuantificados los primeros en realizarla. Esto puede lograrse fácilmente utilizando la función de *desempate* mencionada en la Sección 2.3.

Estas consideraciones también solucionan el problema de la elección de condiciones iniciales de los modelos estáticos. Estas pueden ser elegidas arbitrariamente ya que los modelos recibirán eventos de entrada provenientes de los integradores cuantificados al comienzo de la simulación y así las funciones de transición externa calcularán los estados adecuados.

Por último, los modelos generadores de señales de entrada deberán comenzar con su  $\sigma$  igual a cero y el resto del estado debe elegirse de manera tal que el

primer evento de salida corresponda al valor inicial de la señal.

Una propiedad muy importante del método de QSS tiene que ver con el hecho que las trayectorias de estado tienen una forma muy particular. Ya fue mencionado en la Sección 3.3 que las trayectorias de estado en un QSS son seccionalmente lineales y continuas.

Luego, si se conocen los valores que adopta la variable  $x_i$  en los instantes en que hay eventos, los mismos pueden ser interpolados con segmentos para obtener la evolución exacta de (3.3) en cualquier instante de tiempo. Más aún, para hacer eso sólo hace falta conocer los valores que adopta dicha variable tras cada transición externa porque en las transiciones internas las pendientes no cambian.

Teniendo en cuenta esto, el problema de la *interpolación de salida* tiene una solución trivial en el método de QSS.

### 3.7 Cuantificación, Histéresis y Errores

Tras la definición del método de QSS en la Sección 3.2 las observaciones subsiguientes estuvieron enfocadas en la implementación de los Sistemas de Estados Cuantificados mediante DEVS. Teniendo en cuenta las consideraciones de las Secciones 3.4 a 3.6, queda claro como debe construirse y simular el modelo DEVS correspondiente a un QSS cualquiera.

Luego, dado un sistema continuo como (3.2) y sabiendo cual es el quantum y la histéresis que debe utilizarse en cada variable, la simulación DEVS puede realizarse fácilmente.

Sin embargo, no se dijo nada sobre el problema clave del método: la elección de la cuantificación y la histéresis a aplicar en cada variable de estado.

En los métodos clásicos de tiempo discreto, los parámetros de simulación (paso de integración, tolerancia de error, etc.) se eligen de acuerdo a consideraciones de estabilidad y precisión requerida.

Hasta aquí no se dijo nada sobre estos temas –estabilidad, error, etc.– en relación al método de QSS.

Dado que la meta es simular el Sistema (3.2), la precisión de la simulación estará conectada con la similitud entre este sistema y (3.3).

Teniendo en cuenta que la única diferencia entre ambos sistemas es la presencia de funciones de cuantificación, es natural esperar que el error dependa del tamaño de los intervalos de cuantificación. Sin embargo, esta aseveración requiere un estudio más profundo sobre los efectos de la cuantificación.

Todos estos asuntos teóricos serán dejados para el próximo capítulo. De todas formas, anticipamos aquí que –bajo ciertas condiciones– habrá una relación lineal entre el quantum y el error y este hecho brindará la regla básica para la elección de la cuantificación y la histéresis.



## Capítulo 4

# Propiedades Teóricas de QSS

En el capítulo previo se afirmó que el método de QSS era un método general para la simulación de ODEs estacionarias. Aunque se demostró que el mismo puede aplicarse a ODEs invariantes en el tiempo generales, no se presentó ninguna propiedad que diga que las soluciones de un QSS son *similares* a las exactas en algún sentido.

Las propiedades que se estudian típicamente en análisis numérico son consistencia, convergencia, estabilidad y cotas de error. Estas permiten estimar bajo que condiciones las soluciones *aproximadas* son en realidad una *buena* aproximación a las trayectorias continuas. Las mismas también brindan ayuda en la elección de los parámetros de simulación (paso de integración, tolerancia, etc.) de acuerdo a la precisión buscada.

El error local –error en un paso– se obtiene usualmente a partir de una expansión en serie de Taylor mientras que el error global –error tras muchos pasos– es sólo estimado de forma teórica a partir de condiciones de Lipschitz (ver [17] por ejemplo). La propiedad de convergencia (o sea, la propiedad por la cual el error tiende a cero cuando el paso de integración tiende a cero) es entonces obtenida como el caso límite de la cota de error global.

Dado que todos los métodos existentes son de *tiempo discreto*, sus propiedades de estabilidad se estudian generalmente en base a la teoría de ecuaciones en diferencias. La clave de este estudio es encontrar la relación entre los autovalores de la ODE original y las raíces de la ecuación en diferencias (desde luego este procedimiento está limitado al análisis de sistemas lineales<sup>1</sup>).

En el caso del método de QSS esta última idea es completamente inútil. Ya se mencionó que los Sistemas de Estados Cuantificados no encajan en la forma de una ecuación en diferencias. Similarmente, el uso de expansiones de Taylor no produce ningún resultado interesante.

---

<sup>1</sup>Existen otras formas de estudiar las propiedades que se aplican también a sistemas no lineales. Nos referimos aquí sólo a las herramientas habituales del análisis numérico.

Sin embargo, hay una herramienta mucho más poderosa que puede ser utilizada aquí: la teoría de perturbaciones. En base a esta, será posible no sólo obtener resultados similares a los clásicos sino también calcular cotas de error prácticas y establecer condiciones de estabilidad que incluyan los casos no lineales.

Haciendo uso de esas condiciones de estabilidad y cota de error, y tras ciertas consideraciones adicionales, se podrá resolver finalmente el problema que se abrió al final del capítulo anterior, esto es, la elección de la cuantificación y el ancho de histéresis apropiados.

## 4.1 QSS y Teoría de Perturbaciones

Como se mencionó, las herramientas usuales para el análisis de estabilidad numérica se basan en la teoría de sistemas de tiempo discreto. La idea básica es obtener la ecuación en diferencias correspondiente a un método dado aplicado a una ecuación diferencial y relacionar los autovalores de ambos sistemas.

Esta idea, que es muy útil en los métodos de tiempo discreto, no puede aplicarse a QSS porque el modelo de simulación resultante es un sistema de eventos discretos que no puede representarse mediante ecuaciones en diferencias.

Un primer intento por resolver este problema consistiría en buscar una teoría de sistemas de eventos discretos que permita tal tipo de análisis de estabilidad. De hecho, existe una teoría matemática muy elegante basada en el uso de *álgebra max-plus* que permite expresar sistemas de eventos discretos mediante ecuaciones en diferencias en el contexto de dicha álgebra [1].

Esta teoría llega también a resultados de estabilidad basados en el estudio de los autovalores y es completamente análoga a la teoría de sistemas de tiempo discreto. Sin embargo, la misma puede ser sólo aplicada a sistemas representables por Redes de Petri y, desafortunadamente, el método de QSS produce modelos DEVS que no tienen equivalentes en ese formalismo gráfico.

Un modo diferente de estudiar la dinámica de QSS es utilizando la representación (3.2) para la ecuación diferencial original y (3.3) para su aproximación QSS.

Definiendo  $\Delta x(t) \triangleq q(t) - x(t)$ , esta última ecuación puede reescribirse como

$$\dot{x}(t) = f(x(t) + \Delta x(t), u(t)) \quad (4.1)$$

y ahora, el modelo de simulación (3.3) puede verse como una versión perturbada del sistema original (3.2).

Las funciones de cuantificación con histéresis tienen una propiedad fundamental. Si dos variables  $q_i(t)$  y  $x_i(t)$  están relacionadas por una función de cuantificación como (3.1), entonces:

$$Q_0 < x_i(t) < Q_r \Rightarrow |q_i(t) - x_i(t)| \leq \max(\Delta Q, \varepsilon) \quad (4.2)$$

donde  $\Delta Q \triangleq \max(Q_{j+1} - Q_j)$ ,  $0 \leq j \leq r$ , es el quantum máximo (ya se mencionó que de todas formas este es en general constante)

La propiedad dada por (4.2) implica que cada componente de la perturbación  $\Delta x$  está acotada por los correspondientes ancho de histéresis y quantum. Luego, el análisis de precisión y estabilidad se puede basar en el estudio de los efectos de perturbaciones acotadas.

Como se dijo, el estudio de la estabilidad numérica se restringe usualmente a los sistemas lineales ya que su estudio en sistemas no lineales es bastante difícil. Se verá que este problema desaparece en el método de QSS ya que el análisis de perturbaciones puede aplicarse fácilmente a sistemas no lineales. Más aún, cuando el método se utiliza con un sistema lineal será también posible establecer una cota de error global y el problema de la precisión de la aproximación podrá ser tratado no sólo localmente.

Más allá de estas ventajas, un problema nuevo aparece en el método de QSS. Veamos el mismo en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 4.1.** *Oscilaciones en el método de QSS.*

*Consideremos el sistema de primer orden:*

$$\dot{x}(t) = -x(t) + 9.5 \quad (4.3)$$

con la condición inicial  $x(0) = 0$ .

La simulación utilizando el método de QSS con quantum  $\Delta Q = 1$  y ancho de histéresis  $\varepsilon = 1$  se muestra en la Figura 4.1

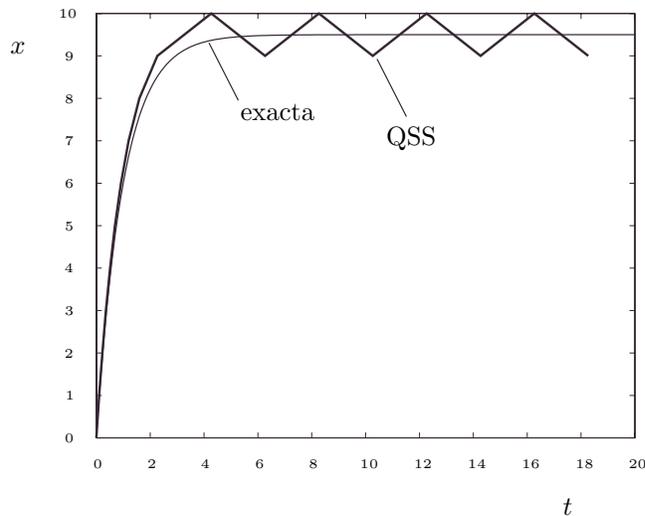


Figura 4.1: Simulación por QSS de (4.3)

Aunque el sistema (4.3) es asintóticamente estable, la simulación por QSS termina en un ciclo límite. El punto de equilibrio  $\bar{x} = 9.5$  no es más un punto de equilibrio en el QSS resultante y no puede decirse entonces que el método conserva la estabilidad.

Sin embargo, la solución del QSS nunca se aleja de la solución exacta y de hecho termina con una oscilación cercana al punto de equilibrio. Teniendo en cuenta que el objetivo era simplemente simular el sistema, este resultado no es malo.

La trayectoria dada por el método de QSS en este caso se denomina *finalmente acotada* (ultimately bounded) [22]. En general, el método de QSS no puede asegurar estabilidad según la definición clásica. Por eso, en el contexto de este método, la palabra *estabilidad* se referirá en realidad a la garantía de soluciones finalmente acotadas.

## 4.2 Convergencia del Método de QSS

La propiedad de convergencia dice que las soluciones de (4.1) tienden a las soluciones de (3.2) cuando el quantum máximo  $\Delta Q$  y el ancho de histéresis  $\varepsilon$  de todas las variables tienden conjuntamente a cero.

La importancia de esta propiedad radica en el hecho que puede alcanzarse un error de simulación arbitrariamente pequeño mediante el uso de una cuantificación suficientemente pequeña.

El siguiente teorema brinda las condiciones suficientes para la convergencia del método de QSS.

**Teorema 4.1.** *Convergencia del Método de QSS.*

Sea el Sistema (3.2) y su QSS asociado (3.3). Sea  $D$  la región de no-saturación definida por

$$D = \{x = (x_1, \dots, x_n) / Q_{0_i} < x_i < Q_{r_i}\} \quad (4.4)$$

Asumamos que la entrada  $u(t) \in D_u$  siendo  $D_u$  una región acotada y supongamos que la función  $f(x, u)$  es Lipschitz local sobre  $D \times D_u$ . Sea  $\phi(t)$  la solución de (3.2) desde la condición inicial  $x(0) = x_0$  y sea  $\phi_1(t)$  una solución del QSS asociado (3.3) comenzando desde la misma condición inicial  $x_0$ . Supongamos que  $\phi(t) \in D_1$  donde  $D_1 \subset D$  (la solución del sistema continuo está en la región de no saturación). Luego,  $\phi_1(t) \rightarrow \phi(t)$  cuando los intervalos de cuantificación tienden a 0.<sup>2</sup>

*Demostración.* Sea  $S$  el conjunto  $\mathbb{R}^n - D$  y  $F$  una constante definida según

$$F \triangleq \sup_{u \in D_u} (\sup_{x \in D} \|f(x, u)\|)$$

Sea  $d$  el número positivo definido como

$$d \triangleq \inf_{x \in S} (\inf_{t \in [0, \infty]} \|\phi(t) - x\|) \quad (4.5)$$

---

<sup>2</sup>Sin modificar los límites de saturación (o sea, el número de niveles de cuantificación tiende a  $\infty$ ).

Teniendo en cuenta las hipótesis sobre  $f$  y  $\phi(t)$ , una constante positiva  $t_1$  puede encontrarse tal que satisfaga

$$t_1 < \frac{d}{F} \quad (4.6)$$

Puede verse fácilmente que durante el intervalo  $[0, t_1]$  la trayectoria de  $\phi_1(t)$  permanecerá en el conjunto  $D$ .

Utilizando la notación perturbada (4.1) en lugar de (3.3) y teniendo en cuenta que cuando  $0 \leq t \leq t_1$  las trayectorias están en la región de no-saturación, la propiedad fundamental (4.2) es válida para todos los componentes y luego  $\Delta x(t)$  satisface

$$\|\Delta x(t)\| \leq \Delta_x \quad (0 \leq t \leq t_1) \quad (4.7)$$

siendo  $\Delta_x$  una constante determinada por los intervalos de cuantificación.

Sea  $t \in [0, t_1]$ . De (4.1), (3.2) y del hecho que  $\phi_1(0) = \phi(0)$  sigue que

$$\phi_1(t) - \phi(t) = \int_0^t (f(\phi_1(\tau) + \Delta x(\tau), u(\tau)) - f(\phi(\tau), u(\tau))) d\tau$$

Luego, aplicando la norma euclídea se obtiene

$$\|\phi_1(t) - \phi(t)\| = \left\| \int_0^t (f(\phi_1(\tau) + \Delta x(\tau), u(\tau)) - f(\phi(\tau), u(\tau))) d\tau \right\|$$

y luego,

$$\|\phi_1(t) - \phi(t)\| \leq \int_0^t \|f(\phi_1(\tau) + \Delta x(\tau), u(\tau)) - f(\phi(\tau), u(\tau))\| d\tau \quad (4.8)$$

Sea  $M$  la constante de Lipschitz de la función  $f$  en  $D \times D_u$ . Dado que el argumento de la función  $f$  en (4.8) está dentro de dicha región, se tiene que:

$$\begin{aligned} \|\phi_1(t) - \phi(t)\| &\leq \int_0^t M \|\phi_1(\tau) + \Delta x(\tau) - \phi(\tau)\| d\tau \\ \Rightarrow \|\phi_1(t) - \phi(t)\| &\leq \int_0^t M (\|\phi_1(\tau) - \phi(\tau)\| + \|\Delta x(\tau)\|) d\tau \\ \Rightarrow \|\phi_1(t) - \phi(t)\| &\leq \int_0^t M (\|\phi_1(\tau) - \phi(\tau)\| + \Delta_x) d\tau \\ \Rightarrow \|\phi_1(t) - \phi(t)\| &\leq \int_0^t M \|\phi_1(\tau) - \phi(\tau)\| d\tau + Mt\Delta_x \end{aligned}$$

Las funciones  $\phi$  y  $\phi_1$  son continuas al igual que el término  $Mt\Delta_x$ . Dado que  $M$  es positiva, se puede aplicar la *Desigualdad de Gronwall-Bellman* [22], lo que resulta en

$$\begin{aligned} \|\phi_1(t) - \phi(t)\| &\leq Mt\Delta_x + \int_0^t M^2 s \Delta_x e^{\int_s^t M d\tau} ds \\ \Rightarrow \|\phi_1(t) - \phi(t)\| &\leq (e^{Mt} - 1)\Delta_x \end{aligned}$$

Luego, dado que  $M$  y  $t_1$  no dependen de  $\Delta_x$ , para  $0 \leq t \leq t_1$  tenemos que

$$\lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \|\phi_1(t) - \phi(t)\| = 0 \quad (4.9)$$

De (4.5) sabemos que

$$d \leq \inf_{x \in S} (\|\phi(t_1) - x\|) \quad (4.10)$$

Teniendo en cuenta (4.6), (4.9) y (4.10), es posible encontrar una cuantificación suficientemente pequeña tal que

$$t_1 < \frac{\inf_{x \in S} (\|\phi_1(t_1) - x\|)}{F}$$

Esta desigualdad implica que la solución  $\phi_1(t)$  no abandona la región  $D$  durante el intervalo  $[t_1, 2t_1]$ . Luego, la validez de las Ecuaciones (4.7) a (4.9) se mantiene para el intervalo  $[0, 2t_1]$ . Repitiendo este argumento resulta que (4.9) vale para todo  $t$ .  $\square$

### 4.3 Propiedades Generales de Estabilidad de QSS

Si bien la convergencia constituye una propiedad teórica importante, esta no brinda ninguna información cuantitativa sobre la relación entre el quantum y el error y no establece ninguna condición para el dominio de estabilidad.

El principal resultado de esta sección –Teorema 4.2– sigue esta última meta brindando condiciones suficientes para encontrar la cuantificación que *conserva*<sup>3</sup> las propiedades de estabilidad del sistema continuo original.

Para el análisis de estabilidad será considerado un sistema autónomo (que eventualmente podrá representar un sistema no autónomo con una trayectoria de entrada constante tras desplazar los ejes apropiadamente):

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (4.11)$$

El QSS correspondiente está dado por

$$\dot{x}(t) = f(q(t)) \quad (4.12)$$

donde  $q(t)$  y  $x(t)$  están relacionados componente a componente por funciones de cuantificación con histéresis.

Una primer propiedad de esta aproximación está dada por el siguiente lema:

**Lema 4.1.** *Puntos de Equilibrio en QSS.*

*Sean el sistema continuo autónomo (4.11) y su Sistema de Estados Cuantificados asociado (4.12).*

*Luego, el punto  $x = \bar{x}$  es un punto de equilibrio de (4.11) si y sólo si el punto  $q = \bar{x}$  es un punto de equilibrio de (4.12).*

<sup>3</sup>Como se mencionó antes, el término estabilidad se refiere en realidad a la garantía de cota final de las soluciones

La demostración de este lema es trivial y, como ya fue mencionado, el mismo vale también para sistemas con entradas constantes.

El lema 4.1 implica que las variables cuantificadas del QSS tienen los mismos valores posibles en el equilibrio que las variables de estado del sistema original. Sin embargo, esto no implica que las variables de estado del sistema cuantificado tendrán tales valores o que las variables cuantificadas puedan alcanzar los mismos.

De todas formas, teniendo en cuenta que la diferencia entre  $q(t)$  y  $x(t)$  está acotada el valor de las variables de estado en una situación eventual de equilibrio será cercano al correcto.

La Ecuación (4.12) puede reescribirse utilizando la notación perturbada:

$$\dot{x}(t) = f(x(t) + \Delta x(t)) \quad (4.13)$$

con  $\Delta x(t) \triangleq q(t) - x(t)$ .

Ahora, el teorema que relaciona la estabilidad de los Sistemas (4.11) y (4.12) puede introducirse.

Como antes, este teorema asume que el sistema es autónomo y estudia las trayectorias alrededor de un punto de equilibrio en el origen pero puede ser fácilmente extendido a sistemas con entradas constantes y con otros puntos de equilibrio.

**Teorema 4.2.** *Estabilidad de QSS.*

*Sea un sistema como el definido en (4.11) que tiene un punto de equilibrio en el origen y donde la función  $f$  es continuamente diferenciable.*

*Asumamos que existe una función de Lyapunov  $V(x)$  continua en una región abierta  $D$  que incluye al origen y que tiene una derivada temporal definida negativa a lo largo de las trayectorias de (4.11). Sea  $D_1 \subset D$  una región limitada por una superficie de nivel de  $V$ . Luego, dada una región abierta arbitraria  $D_2 \subset D_1$  también limitada por una superficie de nivel de  $V$  será siempre posible encontrar una cuantificación tal que cualquier trayectoria del QSS resultante que comience en  $D_1$  finalice en el interior de  $D_2$ .*

*Demostración.* Sea  $D_3$  la región definida por  $D_3 \triangleq D_1 - D_2$ . Dado que  $\dot{V}(x)$  es definida negativa, existe un número positivo  $s$  tal que:

$$\dot{V}(x) < -s, \forall x \in D_3 \quad (4.14)$$

Sea entonces

$$\alpha(x, \Delta x) \triangleq \nabla V(x)^T \cdot f(x + \Delta x) \quad (4.15)$$

Esta es una función continua en  $\Delta x$  dado que es el producto escalar de un vector constante y una función continua. También se cumple que:

$$\alpha(x, 0) = \dot{V}(x) \quad (4.16)$$

Definamos entonces la siguiente función:

$$\alpha_M(\Delta x) \triangleq \sup_{x \in D_3} (\alpha(x, \Delta x)) \quad (4.17)$$

Puede verse fácilmente que esta nueva función es continua y verifica

$$\alpha_M(0) < -s \quad (4.18)$$

Luego, dada una constante  $s_1$  ( $0 < s_1 < s$ ), puede encontrarse un número positivo  $\rho$  tal que

$$\alpha_M(\Delta x) < -s_1 < 0 \quad (4.19)$$

si

$$\|\Delta x\| < \rho \quad (4.20)$$

La condición dada por (4.20) puede ser satisfecha con la elección de una cuantificación adecuada teniendo en cuenta (4.2).

Sea  $\phi(t)$  una solución de (4.13) comenzando de la condición inicial  $\phi(t=0) = x_0 \in D_3$ . Supongamos además que la cuantificación fue elegida para satisfacer la condición dada por (4.20). De (4.13) y (4.15) resulta que:

$$\alpha(\phi, \Delta x) = \nabla V(\phi)^T \cdot \dot{\phi}$$

Usando (4.17) y (4.19) en la ecuación anterior puede verse que

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\phi) \cdot \dot{\phi} < -s_1 \quad (4.21)$$

Esta condición será satisfecha al menos durante un cierto tiempo mientras  $\phi(t)$  permanezca en  $D_3$  (la existencia de este tiempo queda garantizada por la continuidad de  $\phi(t)$ ).

Tras integrar ambos lados de la Desigualdad (4.21), se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial V}{\partial x}(\phi) \cdot \dot{\phi} \cdot dt &< \int_0^t -s_1 \cdot dt \\ V(\phi(t)) - V(\phi(0)) &< -s_1 \cdot t \\ V(\phi(t)) &< V(x_0) - s_1 \cdot t \end{aligned}$$

Esto implica que  $V$  evaluada sobre las soluciones del QSS está acotada por una función estrictamente decreciente mientras esta solución se mantiene dentro de  $D_3$ . Dado que el valor  $V(x_0)$  es menor que el valor que toma  $V$  en el borde de  $D_1$ , es claro que la trayectoria nunca podrá abandonar la región  $D_1$ .

Sea  $V_1$  el valor que  $V$  toma en el borde de la región  $D_2$ . Luego, puede verse fácilmente que la trayectoria alcanzará la región  $D_2$  en un tiempo finito  $t_1$  con:

$$t_1 < \frac{V(x_0) - V_1}{s_1}$$

completándose así la demostración.  $\square$

Una primera observación es que la demostración requiere de la elección de los intervalos de cuantificación satisfaciendo (4.20). Para conseguir esto, es necesario dejar la región de saturación fuera de la región  $D_3$ .

Luego, considerando el mismo quantum constante  $\Delta Q$  y ancho de histéresis  $\varepsilon$  para todas las variables cuantificadas, cada componente de  $\Delta x$  será menor que  $\max(\Delta Q, \varepsilon)$ . Luego,  $\|\Delta x\|$  será menor que  $\sqrt{n}$  veces tal valor, siendo  $n$  la dimensión del espacio de estados. Por esto, la condición dada por (4.20) puede conseguirse tomando:

$$\max(\Delta Q, \varepsilon) < \frac{\rho}{\sqrt{n}}$$

En lugar de asegurar estabilidad, el Teorema 4.2 muestra que el método de QSS puede implementarse alcanzando una cota de error final dada. Como se mencionó antes, el método sólo garantiza la cota final de las soluciones. Este hecho puede ser entendido muy fácilmente teniendo en cuenta que el término de perturbación  $\Delta x(t)$  no desaparece cuando el tiempo tiende a  $\infty$ . Estas perturbaciones son conocidas como *perturbaciones no evanescentes* (*non-vanishing perturbations*) [22].

Cuando la función de Lyapunov  $V$  es conocida, la función  $\alpha$  puede ser evaluada para obtener  $\rho$ . De esta forma, este resultado también muestra el modo de efectuar la cuantificación para obtener un error final acotado a algún valor arbitrario (dado por la elección de la región  $D_2$ ).

A pesar de la importancia teórica de este resultado, la relación entre cuantificación, estabilidad y cota de error no puede deducirse fácilmente del Teorema 4.2.

Por un lado, la elección de la cuantificación requiere del conocimiento de una función de Lyapunov para el sistema continuo. Hay teoremas conversos que aseguran la existencia de tales funciones en sistemas asintóticamente estables [22]. Sin embargo, el modo de obtener tales funciones es generalmente muy difícil cuando no imposible. Por esto, el resultado no es tan útil desde el punto de vista práctico.

Por otro lado, se obtuvo sólo una cota para la cota de error final. Hasta aquí, no hay información sobre la relación entre el quantum y el error en un instante de tiempo arbitrario.

La principal razón de estos problemas radica en el hecho que se está trabajando con sistemas no lineales generales. Para obtener resultados más prácticos y con mayores implicancias es necesario tratar con casos más particulares.

Como en todos los métodos numéricos existentes, las propiedades más interesantes de QSS resultan del estudio de los sistemas LTI.

Teniendo en cuenta lo que ya se hizo hasta aquí, un primer intento de estudiar las propiedades de QSS en sistemas LTI consistiría en tomar el teorema basado en Lyapunov y modificarlo utilizando las propiedades particulares de los sistemas lineales.

Sin embargo, esa clase de estudio es un problema de estimación de cota final y el uso de enfoques basados en Lyapunov generalmente conlleva resultados muy conservadores. Esto se debe principalmente al hecho que las estructuras del sistema y de la perturbación se pierden durante la realización del análisis de Lyapunov.

Por esto, antes de estudiar las propiedades del método de QSS en sistemas LTI sería deseable desarrollar algunas herramientas nuevas que permitan anali-

zar de manera no conservadora el comportamiento de tales sistemas en presencia de *perturbaciones no evanescentes*.

La próxima sección se dedica al análisis particular de Lyapunov para comparar luego este enfoque con el de una nueva metodología que se introducirá en la Sección 4.5. Tras esto, se volverá a la aplicación de dichos resultados al estudio de las propiedades de QSS.

## 4.4 Sistemas LTI Perturbados: Enfoque de Lyapunov

Consideraremos un sistema LTI nominal:

$$\dot{x}(t) = f(t, x) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.22)$$

donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz Hurwitz,  $u \in \mathbb{R}^m$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Como se vio en las secciones previas, el método de QSS introduce perturbaciones acotadas en las variables de estado. Similarmente, cuando las señales de entrada son aproximadas por sus versiones cuantificadas el efecto puede representarse por la presencia de perturbaciones en las variables de entrada.

De esta forma, la meta de esta sección es estudiar los efectos de perturbaciones acotadas en los estados y entradas del Sistema (4.22).

Ya se mencionó que una de las consecuencias más importantes de la presencia de perturbaciones no evanescentes es la desaparición de la estabilidad asintótica dejando lugar a la acotación final (*ultimately boundedness*) de las soluciones.

El problema principal es entonces estimar una relación cuantitativa entre la cota de las perturbaciones y la cota final resultante. En este problema particular –el método QSS– dichas cotas son respectivamente el quantum y el error final.

Teniendo en cuenta el problema estudiado –encontrar la cota final de un sistema perturbado– debe asumirse que el sistema no perturbado (4.22) es asintóticamente estable y tiene una entrada constante.

Debido a la linealidad y sin pérdida de generalidad puede suponerse que  $u(t) = 0$ . Luego, en presencia de perturbaciones generales de entrada y de estado, el Sistema (4.22) puede escribirse como

$$\dot{x}(t) = A(x(t) + \Delta x(t)) + B\Delta u(t) \quad (4.23)$$

Se asumirá que las componentes de la perturbación satisfacen:

$$|\Delta x_i(t)| \leq \Delta x_{max_i} \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.24)$$

y

$$|\Delta u_j(t)| \leq \Delta u_{max_j} \quad 1 \leq j \leq m \quad (4.25)$$

donde  $\Delta x_{max_i}$  y  $\Delta u_{max_j}$  son constantes no negativas (que en el método de QSS representan el quantum).

Para simplificar las ecuaciones que siguen, se introducirá una nueva notación:

El símbolo  $|\cdot|$  indicará el módulo por componentes de una matriz o vector. Si  $T$  es una matriz con componentes  $T_{1,1}, \dots, T_{n,m}$ , luego  $|T|$  será una nueva matriz de la misma dimensión que  $T$  con componentes  $|T_{1,1}|, \dots, |T_{n,m}|$ .

Para vectores de la misma dimensión, la desigualdad vectorial  $x \leq y$  implica que  $x_i \leq y_i$  para cada componente de  $x$  e  $y$ .

De acuerdo a estas definiciones, la siguiente propiedad será satisfecha:

$$|T \cdot x| \leq |T| \cdot |x|$$

Utilizando entonces la notación recién definida, las inecuaciones (4.24) y (4.25) pueden reescribirse como

$$|\Delta x(t)| \leq \Delta x_{max} \quad (4.26)$$

y

$$|\Delta u(t)| \leq \Delta u_{max} \quad (4.27)$$

De acuerdo a esto, el problema es encontrar una cota final para el sistema (4.23) donde las perturbaciones satisfacen (4.26) y (4.27).

En la Sección 4.3 se realizó un estudio general no lineal utilizando una técnica basada en Lyapunov.

De hecho, la forma clásica de estudiar este problema en sistemas LTI es simplemente siguiendo esa técnica y mejorándola con las propiedades particulares resultantes de la linealidad del sistema.

Para justificar el uso de un enfoque nuevo, se obtendrá primero la cota final del Sistema (4.23) siguiendo el mencionado análisis de Lyapunov y luego se comparará el mismo con el nuevo en la siguiente sección.

El estudio será hecho para las normas 2 e  $\infty$ . A pesar que la cota en norma  $\infty$  puede obtenerse de la norma 2 –utilizando el hecho que la primera es siempre menor o igual que la segunda– esta cota podría resultar incluso más conservadora.

Sea entonces  $U(x) = x^T P x$  donde  $P = P^T > 0$  satisface

$$A^T P + P A = -Q \quad (4.28)$$

con  $Q = Q^T > 0$ . Luego

$$\begin{aligned} \dot{U}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= [A(x + \Delta x) + B \Delta u]^T P x + x^T P [A(x + \Delta x) + B \Delta u] \end{aligned}$$

y

$$\dot{U}(x) = -x^T Q x + 2x^T P A \Delta x + 2x^T P B \Delta u \quad (4.29)$$

Es sabido que

$$\begin{aligned} 2x^T P A \Delta x &\leq 2\|x\| \cdot \|P A\| \cdot \|\Delta x\| \\ &\leq 2\|x\| \cdot \|P A\| \cdot \|\Delta x_{max}\| \end{aligned} \quad (4.30)$$

y similarmente

$$\begin{aligned} 2x^T P B \Delta u &\leq 2\|x\| \cdot \|P B\| \cdot \|\Delta u\| \\ &\leq 2\|x\| \cdot \|P B\| \cdot \|\Delta u_{max}\| \end{aligned} \quad (4.31)$$

Hasta aquí el análisis es el mismo para ambas normas. Ahora el estudio continuará utilizando las propiedades particulares de cada una de las normas.

En norma 2 sabemos que

$$x^T Q x \geq \|x\|_2^2 \lambda_{\min}(Q) \quad (4.32)$$

Luego, si

$$\|x\|_2 \geq \rho \triangleq \frac{2}{\lambda_{\min}(Q)} (\|PA\|_2 \cdot \|\Delta x_{\max}\|_2 + \|PB\|_2 \cdot \|\Delta u_{\max}\|_2) \quad (4.33)$$

resulta de (4.30) y (4.31) que

$$x^T Q x \geq \|x\|_2^2 \lambda_{\min}(Q) \geq 2x^T P A \Delta x + 2x^T P B \Delta u$$

y de (4.29) se tiene

$$\dot{U}(x) < 0$$

Sea

$$c \triangleq \max_{\|x\|_2=\rho} U(x) = \rho^2 \lambda_{\max}(P) \quad (4.34)$$

Luego, puede asegurarse que las trayectorias finalizarán dentro de la superficie de nivel dada por

$$U(x) = c = \rho^2 \lambda_{\max}(P)$$

y la cota final será  $\mu_2$  tal que

$$\min_{\|x\|_2=\mu_2} U(x) = \mu_2^2 \lambda_{\min}(P) = c$$

esto es

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{c}{\lambda_{\min}(P)}}$$

Utilizando (4.34) y (4.33) en la última ecuación se llega a la cota final

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \cdot \frac{2}{\lambda_{\min}(Q)} \cdot (\|PA\|_2 \cdot \|\Delta x_{\max}\|_2 + \|PB\|_2 \cdot \|\Delta u_{\max}\|_2) \quad (4.35)$$

El análisis en norma  $\infty$  es casi idéntico al de la norma 2. La única diferencia es que la cota inferior dada por (4.32) no vale en norma  $\infty$ . Para obtener una desigualdad similar, se utilizará el siguiente resultado:

**Lema 4.2.** *Cuadrática Restringida (Constrained Quadratic) [43].*

Sea  $U(x) = x^t Q x$ , donde  $Q = Q^T > 0$ , y sea  $C$  un vector fila en  $\mathbb{R}^n$  y  $r$  un escalar no nulo. Luego, el mínimo de  $U(\cdot)$  sobre el hiperplano  $\{x | Cx = r\}$  está dado por:  $r^2 / C Q^{-1} C^T$ .

Utilizando este lema, el mínimo de una función cuadrática cuando la componente  $x_i = r$  es  $r^2/e_i Q^{-1} e_i^T = r^2/(Q^{-1})_{i,i}$ . Luego, resulta que

$$\min_{\|x\|_\infty=r} x^T Q x = \frac{r^2}{\max_i (Q^{-1})_{i,i}}$$

y la Ecuación (4.32) puede ser reemplazada por

$$x^T Q x \geq \frac{\|x\|_\infty^2}{\max_i (Q^{-1})_{i,i}} \quad (4.36)$$

Entonces, siguiendo una idea similar a la del análisis en norma 2, la cota obtenida es:

$$\mu_\infty = 2b_q \sqrt{b_p \|P\|_\infty} \cdot (\|PA\|_\infty \|\Delta x_{max}\|_\infty + \|PB\|_\infty \|\Delta u_{max}\|_\infty) \quad (4.37)$$

donde

$$b_q \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} (Q^{-1})_{i,i}$$

y

$$b_p \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} (P^{-1})_{i,i}$$

## 4.5 Sistemas LTI Perturbados: Enfoque No Conservador

Para obtener un resultado menos conservador es necesario explotar la estructura del sistema. Por esto, deberá seguirse una idea completamente diferente a la del análisis de Lyapunov.

Para aprovechar la estructura, se estudiará primero el sistema desacoplado (Lema 4.3 y Corolario 4.1). Luego, los resultados serán llevados de vuelta al sistema original en el Teorema 4.3.

Esta forma de trabajar permitirá utilizar las propiedades geométricas del sistema y de las perturbaciones. Como se verá más adelante, esto resultará en una estimación menos conservadora de la cota final.

**Lema 4.3.** *Sistema Escalar Perturbado.*

*Sea la siguiente ecuación de primer orden con coeficiente complejo:*

$$\dot{x} = a(x + \Delta x) + B \Delta u \quad (4.38)$$

donde  $a, x, \Delta x \in \mathbb{C}$ ,  $\Delta u \in \mathbb{C}^k$  y  $B \in \mathbb{C}^{1 \times k}$ .

*Asumamos también que  $\Re(a) < 0$ ,  $|\Delta x| \leq \Delta x_{max}$  y  $|\Delta u| \leq \Delta u_{max}$ .*

*Sea  $x(t)$  una solución de (4.38) desde la condición inicial  $x(t_0) = 0$ . Luego, para todo  $t \geq t_0$  resulta que*

$$|x(t)| \leq \left| \frac{a}{\Re(a)} \right| \Delta x_{max} + \left| \frac{B}{\Re(a)} \right| \Delta u_{max}$$

*Demostración.* Sea  $x = \rho \cdot e^{j\theta}$  con  $\rho, \theta \in \mathbb{R}$ . Con esto la Ecuación (4.38) queda

$$\dot{\rho} \cdot e^{j\theta} + j\rho \cdot e^{j\theta} \cdot \dot{\theta} = a(\rho \cdot e^{j\theta} + \Delta x) + B\Delta u$$

Luego,

$$\dot{\rho} + j\rho \cdot \dot{\theta} = a(\rho + \Delta x \cdot e^{-j\theta}) + B\Delta u \cdot e^{-j\theta}$$

Tomando la parte real de la última ecuación, resulta que

$$\dot{\rho} = \Re(a)\rho + \Re(a\Delta x \cdot e^{-j\theta}) + \Re(B\Delta u \cdot e^{-j\theta})$$

y

$$\dot{\rho} \leq \Re(a)\rho + |a|\Delta x_{max} + |B|\Delta u_{max}$$

Entonces, cuando

$$\rho = |x(t)| = \frac{|a|\Delta x_{max} + |B|\Delta u_{max}}{|\Re(a)|}$$

resulta que  $\dot{\rho} \leq 0$  y  $|x(t)|$  no puede superar la cota dada.  $\square$

Aplicando el Lema 4.3 a cada componente de un sistema desacoplado se obtiene el siguiente corolario:

**Corolario 4.1.** *Sistema Perturbado Desacoplado.*

Sea el Sistema (4.23) donde  $x, \Delta x \in \mathbb{C}^n$ ,  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\Delta u \in \mathbb{C}^k$  y  $B \in \mathbb{C}^{n \times k}$ . Supóngase también que  $A$  es una matriz diagonal con  $\Re(A_{i,i}) < 0$  y considérense las desigualdades (4.26) y (4.27). Sea  $x(t)$  una solución de (4.23) desde  $x(t_0) = 0$ . Luego, para todo  $t \geq t_0$  resulta

$$|x(t)| \leq |\Re(A)^{-1}A|\Delta x_{max} + |\Re(A)^{-1}B|\Delta u_{max}$$

En base a este corolario, el siguiente teorema puede derivarse:

**Teorema 4.3.** *Cota de las Trayectorias Iniciadas en el Origen.*

Sea el Sistema (4.23) donde  $x, \Delta x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta u \in \mathbb{R}^k$  and  $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ . Supóngase que  $A$  es una matriz Hurwitz diagonalizable y que los términos de perturbación satisfacen (4.26) y (4.27). Sea  $x(t)$  una solución del sistema comenzando desde  $x(t_0) = 0$ . Luego, para todo  $t \geq t_0$  resulta

$$|x(t)| \leq |V| \cdot (|\Re(\Lambda)^{-1}\Lambda||V^{-1}|\Delta x_{max} + |\Re(\Lambda)^{-1}V^{-1}B|\Delta u_{max}) \quad (4.39)$$

donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal de autovalores de  $A$  y  $V$  es una matriz asociada de autovectores, o sea

$$V^{-1}AV = \Lambda \quad (4.40)$$

*Demostración.* Sea  $x = Vz$ . De (4.23) sigue que

$$V\dot{z} = A(Vz + \Delta x) + B\Delta u$$

Luego,

$$\dot{z} = \Lambda(z + V^{-1}\Delta x) + V^{-1}B\Delta u \quad (4.41)$$

Teniendo en cuenta las restricciones en  $|\Delta x|$  y  $|\Delta u|$ , se tiene que

$$|V^{-1}\Delta x| \leq |V^{-1}|\Delta x_{max}$$

y

$$|V^{-1}B\Delta u| \leq |V^{-1}B|\Delta u_{max}$$

Dado que  $\Lambda$  es una matriz diagonal con  $\Re(\Lambda_{i,i}) < 0$  (ya que  $A$  es Hurwitz) y teniendo en cuenta las últimas desigualdades, el Sistema (4.41) satisface las hipótesis del Corolario 4.1.

Luego, para todo  $t \geq t_0$  se puede asegurar que

$$|z(t)| \leq |\Re(\Lambda)^{-1}\Lambda| |V^{-1}|\Delta x_{max} + |\Re(\Lambda)^{-1}V^{-1}B|\Delta u_{max}$$

y finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |Vz(t)| \leq |V||z(t)| \leq \\ &\leq |V|(|\Re(\Lambda)^{-1}\Lambda| |V^{-1}|\Delta x_{max} + |\Re(\Lambda)^{-1}V^{-1}B|\Delta u_{max}) \end{aligned}$$

lo que completa la demostración.  $\square$

El Teorema 4.3 calcula una cota para las trayectorias de un sistema LTI perturbado asumiendo que las trayectorias comienzan en el origen.

Ahora, basado en este último resultado, el Teorema 4.4 brinda una estimación de la cota final por componentes y en términos de la norma  $p$  para sistemas LTI perturbados con condiciones iniciales arbitrarias.

**Teorema 4.4.** *Cota Final de Sistemas LTI Perturbados.*

*El Sistema (4.23), bajo las hipótesis del Teorema 4.3 es global y finalmente acotado con cota final*

$$\mu = \left\| |V| \cdot (|\Re(\Lambda)^{-1}\Lambda| \cdot |V^{-1}|\Delta x_{max} + |\Re(\Lambda)^{-1}V^{-1}B|\Delta u_{max}) \right\| \quad (4.42)$$

*Mas aún, existe un tiempo finito  $t_1 = t_1(c, x_0)$  tal que para cada constante positiva  $c$  las soluciones satisfacen*

$$|x(t)| \leq (1 + c)|V| \cdot (|\Re(\Lambda)^{-1}\Lambda| \cdot |V^{-1}|\Delta x_{max} + |\Re(\Lambda)^{-1}V^{-1}B|\Delta u_{max}) \quad (4.43)$$

*para todo  $t \geq t_1$  y para cualquier condición inicial  $x_0$ .*

*Demostración.* Sea  $x(t)$  una solución de (4.23) comenzando desde una condición inicial arbitraria  $x(0) = x_0$ , y sea  $\tilde{x}(t)$  una solución del sistema nominal

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} \quad (4.44)$$

comenzando desde la misma condición inicial.

Sea  $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ . Luego, resulta que  $e(0) = 0$  y  $e(t)$  satisface la Ecuación (4.23), lo que implica que también satisface las hipótesis del Teorema 4.3. Luego,

$$|e(t)| \leq |V| \cdot (|\Re(\Lambda)^{-1}\Lambda| \cdot |V^{-1}|\Delta x_{max} + |\Re(\Lambda)^{-1}V^{-1}B|\Delta u_{max}) \quad (4.45)$$

Dado que  $A$  es Hurwitz, el sistema nominal (4.44) es exponencialmente estable. Luego, para cada constante positiva  $c$  existe un tiempo finito  $t_1$  tal que para todo  $t > t_1$  se tiene

$$|\tilde{x}(t)| \leq c|V| \cdot (|\Re(\Lambda)^{-1}\Lambda| \cdot |V^{-1}|\Delta x_{max} + |\Re(\Lambda)^{-1}V^{-1}B|\Delta u_{max}) \quad (4.46)$$

Luego, para  $t > t_1$ ,

$$\begin{aligned} x(t) &= e(t) + \tilde{x}(t) \\ |x(t)| &\leq |e(t)| + |\tilde{x}(t)| \end{aligned}$$

y reemplazando con (4.45) y (4.46) se llega a (4.43), lo que completa la demostración,  $\square$

Los resultados, el Teorema 4.4 y la Eq.(4.42), brindan una alternativa a las cotas dadas por (4.35) y (4.37).

Los ejemplos siguientes ilustran las ventajas de este nuevo enfoque.

**Ejemplo 4.2.** *Cota Final de un Sistema Stiff Perturbado*

*Sea el sistema perturbado*

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ -100 & -10001 \end{bmatrix} \cdot [x(t) + \Delta x(t)]$$

donde los componentes de la perturbación están acotados por

$$|\Delta x_1(t)| \leq 0.01; \quad |\Delta x_2(t)| \leq 0.0001$$

La fórmula basada en Lyapunov (4.35) se minimiza tomando<sup>4</sup>

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1.4631 \\ -1.4631 & 197.568 \end{bmatrix}$$

obteniéndose la cota final  $\mu_2 = 20.1861$ . Similarmente, el mínimo de (4.37) se obtiene para

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1.448 \\ -1.448 & 196.124 \end{bmatrix}$$

lo que da  $\mu_\infty = 14.45$ .

Para el mismo ejemplo, el enfoque nuevo –el Teorema 4.4 y la Ecuación (4.42)– dan  $\tilde{\mu}_2 = 0.0100085$  (cota en norma 2) y  $\tilde{\mu}_\infty = 0.01$ . La estima es aproximadamente 2000 veces menos conservadora en norma 2 y 1400 veces en norma  $\infty$ .

Más aún, el Teorema 4.4 concluye que, de acuerdo a (4.43), tras un cierto tiempo  $t_1$  se tendrá que

$$|x_1(t)| < (1 + c)0.01; \quad |x_2(t)| < (1 + c)0.0003$$

---

<sup>4</sup>El mínimo fue obtenido con el *Nelder–Mead simplex method* (función 'fminsearch' de Matlab).

para cualquier constante positiva  $c$ . Si el objetivo fuera conocer sobre la cota de la segunda componente, este resultado es aún mucho mejor que el obtenido con (4.42).

Los cálculos fueron hechos utilizando las matrices de autovalores y autovectores obtenidos con la función 'eig' de Matlab.

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -0.01 \\ -0.01 & 1 \end{bmatrix}; \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -10000 \end{bmatrix}$$

La razón del pobre desempeño del análisis de Lyapunov es, en parte, debido a la gran diferencia entre los autovalores del sistema (el sistema es *rígido* o *stiff*). En virtud de esto, los autovalores de la matriz  $P$  son también muy diferentes lo que implica que las superficies de nivel de  $U(x)$  sean elipses muy achatadas. En consecuencia, el radio  $\rho$  que define la bola donde la derivada de la función de Lyapunov es negativa difiere significativamente del radio  $\mu_2$ , que define la bola que contiene todas las superficies de nivel que pasan por la bola de radio  $\rho$  (ver Figura 4.2).

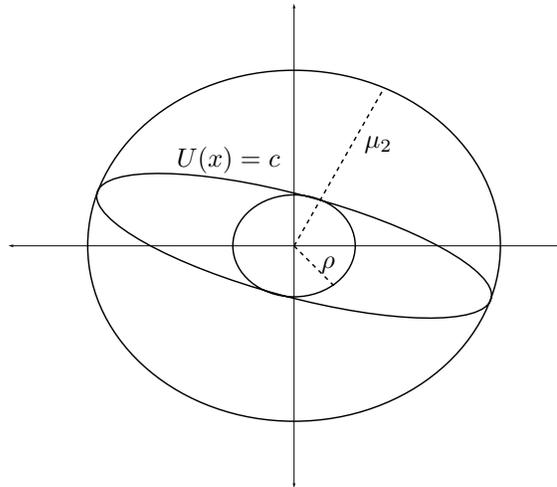


Figura 4.2: Cota de Lyapunov en Norma 2

Sin embargo, el mal desempeño también se debe a la pérdida de la estructura del problema al utilizar la función de Lyapunov. De esta forma, el análisis no puede obtener ningún beneficio del hecho que el término de perturbación actúa con diferente amplitud en cada dirección.

**Ejemplo 4.3.** *Un Sistema Stiff con Perturbaciones de Entrada.*

Consideremos ahora el mismo sistema que antes con una perturbación de entrada.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ -100 & -10001 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot d(t)$$

donde  $|d(t)| \leq 1$ .

El mínimo de la cota de Lyapunov dado por (4.35) se obtiene con:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -2.2822 \\ -2.2822 & 266.581 \end{bmatrix}$$

resultando en una estimación de  $\mu_2 = 26.7327$ .

Similarmemente, (4.37) tiene un mínimo para

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1.7681 \\ -1.7681 & 195.484 \end{bmatrix}$$

brindando  $\mu_\infty = 21.593$ .

Ahora, el uso de (4.42) da  $\tilde{\mu}_2 = 1.00015$  y  $\tilde{\mu}_\infty = 1.0001$ . Con esto, los resultados del nuevo enfoque son más de 20 veces mejores.

El Teorema 4.4 también asegura que, de acuerdo a (4.43), tras algún tiempo se tendrá que

$$|x_1(t)| < 1.0001; \quad |x_2(t)| < (1 + c)0.01$$

y la estima de la cota en la segunda componente se torna 2000 veces mejor que la brindada por el análisis de Lyapunov.

Las ventajas del nuevo enfoque en sistemas stiff es bastante clara teniendo en cuenta lo que se ilustra en la Figura 4.2.

El último ejemplo de esta sección ilustrará el uso de la nueva metodología en un ejemplo muy simple (no stiff) de segundo orden con autovalores complejos en presencia de perturbaciones de entrada. Este no es el caso de la Figura 4.2 y entonces la ventaja del método aquí es sólo debido a la conservación de la estructura del problema.

#### **Ejemplo 4.4.** *Un Sistema No Stiff Perturbado*

Sea el sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot d(t)$$

donde  $|d(t)| \leq 1$ .

Las cotas obtenidas con el análisis de Lyapunov son  $\mu_2 = 5.1098$  y  $\mu_\infty = 3.7535$  obtenidas con las matrices óptimas

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & -0.0421 \\ -0.0421 & 1.1177 \end{bmatrix}$$

y

$$Q_\infty = \begin{bmatrix} 1 & -0.475 \\ -0.475 & 1.0703 \end{bmatrix}$$

respectivamente.

Por otro lado, las cotas obtenidas con el enfoque nuevo son  $\tilde{\mu}_2 = 3.266$  y  $\tilde{\mu}_\infty = 2.3094$ , que siguen siendo menos conservadoras.

Las matrices de autovectores y autovalores utilizadas fueron nuevamente las obtenidas con Matlab:

$$V = \begin{bmatrix} 0.612 - j0.354 & 0.612 + j0.354 \\ j0.707 & j0.707 \end{bmatrix}$$

y

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0.5 + j0.866 & 0 \\ 0 & -0.5 - j0.866 \end{bmatrix}$$

Aunque este nuevo enfoque fue desarrollado para estudiar las propiedades del método de QSS, el mismo puede ser aplicado en un contexto mucho más general.

De hecho, estos resultados serán reutilizados en la aproximación de segundo orden y en la metodología de control asincrónico. Pero los mismos pueden utilizarse también en muchos otros problemas que requieren la estimación de cotas finales en presencia de perturbaciones acotadas no evanescentes.

Estas perturbaciones pueden también representar los efectos de señales de ruido desconocidas (ver [41] por ejemplo), dinámicas no modeladas [42] y errores en sistemas de control distribuido en red [62]. Por esto, la metodología desarrollada puede brindar también una herramienta útil en aplicaciones correspondientes a todos estos casos.

## 4.6 Método de QSS en Sistemas LTI

La estabilidad de los métodos numéricos se estudia siempre en sistemas lineales. Como ya se explicó, la idea es relacionar los autovalores del sistema continuo original con los de la ecuación en diferencias resultante. De esa forma, el análisis llega a establecer condiciones –generalmente sobre el paso de integración– tales que los autovalores estables del sistema continuo (en el semiplano izquierdo) sean mapeados en autovalores estables (en el círculo unitario) de la ecuación en diferencias.

Como ya fue dicho, esta idea no puede aplicarse al método de QSS porque no hay aquí ninguna ecuación en diferencias para estudiar.

En la Sección 4.3 fueron establecidas algunas condiciones generales para asegurar la existencia de una cota final para las soluciones de un QSS. Allí, una función de Lyapunov era requerida para el análisis por lo que el resultado no era realmente muy práctico. Si bien las consecuencias teóricas de ese resultado son muy importantes, es necesario estudiar el caso particular de los sistemas LTI para llegar a condiciones más prácticas.

Consideremos entonces el siguiente sistema LTI:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad (4.47)$$

con las mismas definiciones hechas en (4.22).

El uso del método de QSS transforma este sistema en:

$$\dot{x}(t) = A \cdot q(t) + B \cdot u_q(t) \quad (4.48)$$

donde  $q(t)$  y  $x(t)$  están relacionados componente a componente por funciones de cuantificación con histéresis. Aquí, se considera que  $u_q(t)$  es la versión cuantificada de  $u(t)$  (en caso que esta no sea seccionalmente constante).

Luego, definiendo  $\Delta x(t) \triangleq q(t) - x(t)$  y  $\Delta u(t) \triangleq u_q(t) - u(t)$  la Ec.(4.48) puede reescribirse como

$$\dot{x}(t) = A(x(t) + \Delta x(t)) + B(u(t) + \Delta u(t)) \quad (4.49)$$

donde cada componente de los términos de perturbación  $\Delta x$  y  $\Delta u$  está acotado por el quantum correspondiente (de acuerdo a Ec.(4.2)). Luego, siempre y cuando las trayectorias no alcancen los límites de saturación, se tiene que  $\Delta x(t)$  y  $\Delta u(t)$  satisfacen (4.26) y (4.27) respectivamente.

En base a esta última observación y haciendo uso de los resultados de la sección anterior, el siguiente teorema brinda la propiedad fundamental de la cota de error global del método de QSS en sistemas LTI.

**Teorema 4.5.** *Cota de Error Global del Método de QSS*

Sea el sistema LTI (4.47) donde la matriz  $A$  es Hurwitz y diagonalizable. Sea  $\phi(t)$  una solución de ese sistema y sea  $\phi_1(t)$  una solución calculada con el método QSS desde la misma condición inicial utilizando una cuantificación tal que (4.26) y (4.27) sean satisfechas.

Luego, el error  $e(t) \triangleq \phi_1(t) - \phi(t)$  está siempre acotado por:

$$|e(t)| \leq |V| \cdot (|\Re e(\Lambda)^{-1} \Lambda| |V^{-1}| \Delta x_{max} + |\Re e(\Lambda)^{-1} V^{-1} B| \Delta u_{max}) \quad (4.50)$$

donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal de autovalores de  $A$  y  $V$  es una matriz de autovectores asociada (se verifica Ec.(4.40)).

*Demostración.* De la definición de  $e(t)$ , usando (4.47) y (4.49) resulta que

$$\dot{e}(t) = A \cdot e(t) + B \cdot \Delta u(t) \quad (4.51)$$

Dado que ambas soluciones comienzan desde la misma condición inicial, resulta  $e(t_0) = 0$  y luego, el Sistema (4.51) verifica todas las hipótesis del Teorema 4.3. Luego, la Desigualdad (4.39) toma la forma de (4.50) completando la demostración.  $\square$

El Teorema 4.5 brinda una relación entre la cuantificación y el error. La Desigualdad (4.50) puede verse también como una fórmula cerrada para elegir la cuantificación de acuerdo al error deseado.

Un hecho remarcable es que la fórmula no depende ni de la trayectoria de entrada ni de la condición inicial. Esto, además de ser una propiedad teórica sorprendente, brinda al método ventajas prácticas muy importantes.

Puede verse fácilmente que la cota de error es proporcional al quantum y, para cualquier cuantificación adoptada, el error estará siempre acotado. Luego, el método es siempre *estable*. De esta forma, el método de QSS utilizando sólo fórmulas explícitas comparte algunas propiedades con los métodos implícitos de tiempo discreto.

Es importante también notar que la Desigualdad (4.50) es una expresión analítica del máximo error global. Como ya se mencionó los métodos de tiempo discreto carecen de fórmulas similares.

Por último, un hecho interesante es que en los algoritmos explícitos de tiempo discreto la estabilidad depende de la relación entre la ubicación de los autovalores –la *velocidad* del sistema– y el paso de integración.

Aquí, si se considera una entrada seccionalmente constante, resulta que  $\Delta u_{max} = 0$  y luego el error depende sólo de las propiedades geométricas del sistema: los autovectores y los ángulos de los autovalores (notar que el producto  $|\Re(\Lambda)^{-1}\Lambda|$  es una matriz diagonal donde cada elemento en la diagonal es la inversa del coseno del ángulo de un autovalor). Esto es coherente con el hecho que el método discretiza las variables de estado.

## 4.7 Elección del Quantum y la Histéresis

El método de QSS requiere de la elección apropiada del quantum y el ancho de histéresis en cada variable de estado. Aunque se mencionó que el error está siempre acotado –al menos en sistemas LTI estables– debe elegirse una cuantificación apropiada para obtener un resultado de simulación decente.

Ya se mencionó que la Desigualdad (4.50) puede utilizarse para diseñar la cuantificación. Dado una cota de error deseada, no es difícil encontrar los valores apropiados de  $\Delta x_{max}$  y  $\Delta u_{max}$  tal que dicha desigualdad se satisfaga. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

### Ejemplo 4.5. Elección del Quantum.

Sea el sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + u(t) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Un conjunto de matrices de autovalores y autovectores (calculadas con Matlab) es

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0.5 + 0.866i & 0 \\ 0 & -0.5 - 0.866i \end{bmatrix}$$

y

$$V = \begin{bmatrix} 0.6124 - 0.3536i & 0.6124 + 0.3536i \\ 0.7071i & -0.7071i \end{bmatrix}$$

Luego

$$T \triangleq |V| |\Re(\Lambda)^{-1}\Lambda| |V^{-1}| = \begin{bmatrix} 2.3094 & 2.3094 \\ 2.3094 & 2.3094 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Supongamos que la meta es simular (4.52) para una condición inicial arbitraria y para cualquier trayectoria de entrada seccionalmente constante con un error menor o igual que 0.1 en cada variable. Luego, un quantum

$$\Delta Q = \begin{bmatrix} 0.05/2.3094 \\ 0.05/2.3094 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0217 \\ 0.0217 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

es suficientemente pequeño para asegurar que el error no puede resultar mayor que la cota propuesta.

Aunque la Desigualdad (4.50) brinda una idea sobre la relación entre el quantum, la histéresis y la cota de error, ésta puede resultar a veces algo conservadora (aunque es menos conservadora que las fórmulas basadas en Lyapunov).

De hecho, utilizando un quantum e histéresis igual a 0.05 en cada variable del Sistema (4.52) y tomando  $u(t) = 1$ , se obtiene la simulación mostrada en la Figura 3.5 (página 39). La cota de error predicha en cada variable es 0.23094. Sin embargo, el error máximo resulta bastante menor en la simulación.

Hasta aquí, el ancho de histéresis fue elegido siempre igual al quantum. Sin embargo, no se dio ninguna razón para esta elección.

Por un lado, la Desigualdad (4.2) dice que la perturbación en cada variable está acotada por el máximo entre el quantum y el ancho de histéresis. Luego, no debería utilizarse un ancho de histéresis mayor que el quantum ya que esto incrementaría el error.

Por otro lado, el mínimo tiempo entre transiciones internas sucesivas en un integrador cuantificador –dado por la Ec.(3.7) en la página 35– depende del mínimo entre el quantum y el ancho de histéresis. Por esto, el uso de un ancho de histéresis menor que el quantum incrementaría el número de cálculos.

El ejemplo siguiente ilustra estas ideas.

**Ejemplo 4.6.** *Elección de la Histéresis.*

Sea el Sistema de primer orden (4.3).

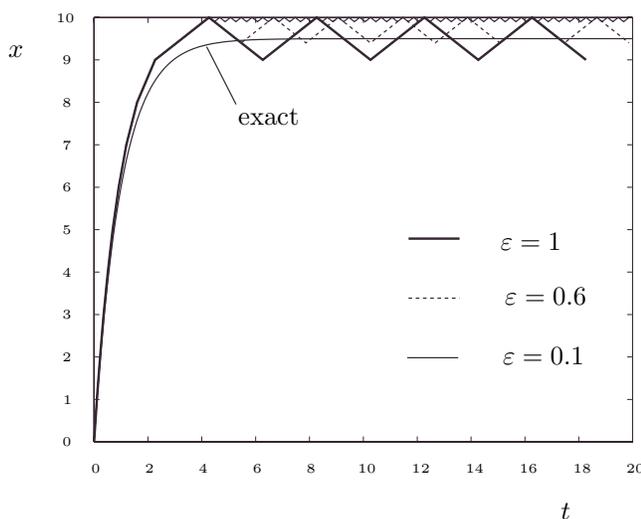


Figura 4.3: Simulación de (4.3) con diferentes valores de histéresis

La Figura 4.3 muestra los resultados de simulación con un quantum  $\Delta q = 1$  y anchos de histéresis  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = 0.6$  y  $\varepsilon = 0.1$ . En todos los casos el error

máximo está acotado por el mismo valor. En teoría esta cota es igual a 1 pero en las simulaciones se puede observar que el error máximo es siempre 0.5.

Sin embargo, la frecuencia de las oscilaciones finales se incrementa a medida que la histéresis se reduce. De hecho, esta frecuencia puede calcularse como

$$f = \frac{1}{2\varepsilon}$$

Luego, es claro que si se elige la histéresis igual al quantum la frecuencia se reduce sin incrementar el error. El resultado de la reducción de la frecuencia de oscilación es una reducción del número de pasos realizados por el algoritmo y una consecuente reducción de los costos computacionales.

## 4.8 Limitaciones del método de QSS

A lo largo de este capítulo fueron estudiadas muchas propiedades teóricas que concluyen sobre las buenas cualidades de la aproximación por QSS. Particularmente, los resultados de la Sección 4.6 muestran que el método tiene propiedades muy fuertes que están a la altura de los métodos de tiempo discreto implícitos y de paso variable.

Sin embargo hay un problema que no fue mencionado aún. Por un lado, la Desigualdad (4.50) dice que la cota de error es proporcional al quantum. Por otro lado, el modelo  $M_4$  en la página 37 muestra que el avance de tiempo  $\sigma$  es inversamente proporcional al quantum. Luego, el número de pasos resultará aproximadamente proporcional a la precisión requerida.

Esto significa que cualquier intento por incrementar la precisión en 10 veces resultará en un incremento de alrededor de 10 veces en el número de cálculos.

Este hecho puede comprenderse fácilmente teniendo en cuenta que QSS realiza sólo una aproximación de primer orden y en consecuencia no debe esperarse obtener una buena precisión sin un incremento significativo del costo computacional.

Esta limitación será resuelta, parcialmente, en el próximo capítulo con el desarrollo de una aproximación de segundo orden.

Hay, por supuesto, más limitaciones. La más importante es probablemente la relacionada a los sistemas rígidos (stiff). Estos casos serán estudiados al final de la Tesis (anticipamos ahora que, aunque hay algunos resultados alentadores, el problema está aún abierto).

El último problema está relacionado, nuevamente, con la elección de la cuantificación. Si bien la Desigualdad (4.50) puede resultar útil, nadie querrá calcular matrices de autovalores y autovectores antes de simular. La única solución buena a esto sería el uso de cuantificación adaptiva, que aún no ha sido desarrollada.



## Capítulo 5

# QSS de Segundo Orden

El capítulo previo finalizó con un pequeño análisis de las limitaciones del método de QSS. El primer problema mencionado allí estaba relacionado al hecho que el método realiza sólo una aproximación de primer orden.

Como resultado, había una relación aproximadamente lineal entre la inversa de la cota del error global y el número de pasos. Por esto, cualquier intento de reducir el error resulta en un incremento proporcional del costo computacional tornándose muy costosa la obtención de resultados precisos.

En este capítulo se desarrollará una aproximación de segundo orden que permite obtener resultados más precisos sin incrementar tanto el número de cálculos.

En QSS, los cuantificadores aproximan las trayectorias continuas mediante trayectorias seccionalmente constantes. Debido a esto se pierde la información de las derivadas de orden superior de las variables de estado. Ahora, la idea principal es utilizar trayectorias seccionalmente lineales en lugar de seccionalmente constantes para aprovechar las derivadas segundas.

Esta nueva aproximación numérica será planteada también de una forma que permita asegurar que se cumplan la mayor parte de las propiedades prácticas y teóricas del método de QSS.

Por un lado, el esquema de acoplamiento del modelo DEVS resultante será el mismo que antes, explotando así la ralidad y aprovechando las características asincrónicas. Por otro lado, el modelo de simulación podrá ser visto también como una versión perturbada del sistema original y de esta forma se obtendrán propiedades teóricas similares a las mostradas por el método de QSS.

### 5.1 Método de QSS2

La idea básica del método de segundo orden es el uso de *cuantificadores de primer orden* reemplazando los cuantificadores con histéresis básicos utilizados para definir QSS.

Un cuantificador con histéresis cuyos quantum y ancho de histéresis son

iguales entre sí –ya se mencionó que esta es la mejor elección– puede ser visto como un sistema que produce una trayectoria de salida seccionalmente constante que sólo cambia cuando la diferencia entre dicha salida y la entrada alcanza un umbral (el quantum).

Siguiendo esta idea, un cuantificador de primer orden se define como un sistema que produce una trayectoria de salida seccionalmente lineal que tiene discontinuidades sólo cuando su diferencia con la entrada se torna igual al quantum. Este comportamiento se muestra en la Figura 5.1.

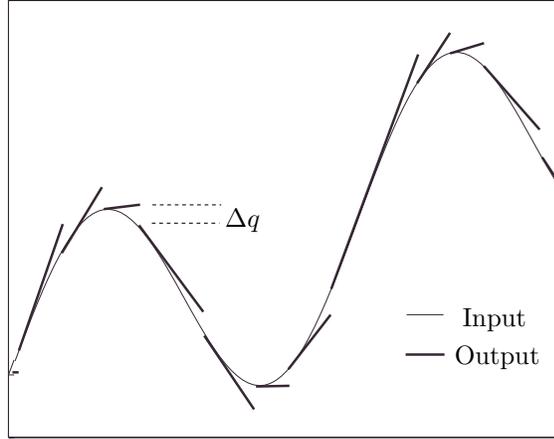


Figura 5.1: Trayectorias Entrada/Salida en un *cuantificador de primer orden*

Esta idea puede formalizarse como sigue:

**Definición 5.1.** *Función de Cuantificación de Primer Orden.*

Las trayectorias  $x_i(t)$  y  $q_i(t)$  están relacionadas por una función de cuantificación de primer orden si las mismas satisfacen:

$$q_i(t) = \begin{cases} x_i(t) & \text{si } t = t_0 \vee |q_i(t^-) - x_i(t^-)| = \Delta q \\ q_i(t_j) + m_j(t - t_j) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.1)$$

con la secuencia  $t_0, \dots, t_j, \dots$  definida como

$$t_{j+1} = \min(t | t > t_j \wedge |x_i(t_j) + m_j(t - t_j) - x_i(t)| = \Delta Q)$$

y donde las pendientes son

$$m_0 = 0, \quad m_j = \dot{x}_i(t_j^-) \quad j = 1, \dots, k, \dots \quad (5.2)$$

La constante  $\Delta Q$  será llamada nuevamente *quantum* y las variables  $x_i(t)$  y  $q_i(t)$  satisfacen además

$$|q_i(t) - x_i(t)| \leq \Delta Q_i \quad \forall t \quad (5.3)$$

Notar que esta desigualdad es un caso particular de (4.2) con quantum constante e igual al ancho de histéresis.

Teniendo en cuenta que la diferencia entre la nueva aproximación y el método de QSS es el uso de cuantificadores de primer orden en lugar de funciones de cuantificación con histéresis, el método de QSS2 puede definirse como sigue:

**Definición 5.2.** *Método de QSS2.*

Dado un sistema de ecuaciones de estados estacionario (3.2), el método de QSS2 lo aproxima por un sistema como (3.3) donde los componentes de  $q(t)$  y  $x(t)$  están relacionados componente a componente por funciones de cuantificación de primer orden.

El sistema resultante (3.3) se denominará *Sistema de Estados Cuantificados de Segundo Orden* (QSS2). La Figura 5.2 muestra el Diagrama de Bloques correspondiente.

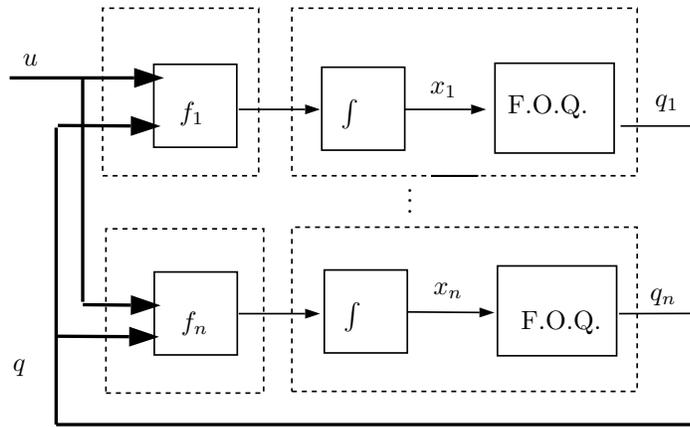


Figura 5.2: Diagrama de Bloques de un QSS2

Como antes, los componentes de  $q(t)$  se llamarán *variables cuantificadas*.

En QSS fue necesario agregar histéresis para asegurar que las trayectorias de las variables cuantificadas sean seccionalmente constantes y evitar la ilegitimidad. En la definición de QSS2 la histéresis parece no existir. Sin embargo, está presente de manera implícita en la definición de la función de cuantificación de primer orden. Allí, el símbolo de valor absoluto en la Ecuación (5.1) expresa el comportamiento histerético.

## 5.2 Trayectorias en QSS2

Resulta casi obvio que las salidas de una función de cuantificación de primer orden tengan trayectorias seccionalmente lineales. De hecho, esta fue definida para obtener tales trayectorias y entonces es lógico esperar que las variables

cuantificadas de un QSS2 sean seccionalmente lineales (más adelante se demostrará esto formalmente).

En QSS no sólo las variables cuantificadas sino también las derivadas de las variables de estado eran seccionalmente constantes. Por eso, se podía afirmar que las variables de estado tenían trayectorias seccionalmente lineales y, utilizando estas características, se pudo construir el modelo DEVS.

Sin embargo, en QSS2 no encontramos toda esta suerte de trayectorias particulares. Aunque las variables cuantificadas y las entradas sean seccionalmente lineales esto no implicará necesariamente que las derivadas de las variables de estado tengan tal forma. El motivo de esto es que una función no lineal aplicada a una trayectoria seccionalmente lineal no da como resultado otra trayectoria seccionalmente lineal.

El único caso en el que puede decirse que las derivadas de las variables de estado son seccionalmente lineales es en los sistemas LTI y luego, en ese caso, las variables de estado tendrán trayectorias seccionalmente parabólicas.

Los siguientes teoremas demuestran estos hechos.

**Teorema 5.1.** *Trayectorias Cuantificadas en QSS2*

*Dado el QSS2 definido en (3.3) con  $f$  continua y acotada en cualquier dominio acotado y siendo  $u(t)$  acotada, las trayectorias de  $q(t)$  son seccionalmente lineales mientras permanecen en una región acotada.*

*Demostración.* Supóngase que  $q_i(t)$  y  $x_i(t)$  denotan la trayectoria de la  $i$ -ésima componente de  $q(t)$  y  $x(t)$  respectivamente. Dado que  $x_i(t)$  y  $q_i(t)$  están relacionadas por una función de cuantificación de primer orden, la última trayectoria puede escribirse como

$$q_i(t) = \begin{cases} x_i(t) & \text{si } t = t_0 \vee |q(t^-) - x(t^-)| = \Delta q \\ q_i(t_j) + m_j(t - t_j) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.4)$$

con la secuencia  $t_0, \dots, t_j, \dots$  definida de acuerdo a

$$t_{j+1} = \min(t | t > t_j \wedge |x_i(t_j) + m_j(t - t_j) - x_i(t)| = \Delta q_i) \quad (5.5)$$

y donde, de acuerdo a (5.2), se tiene que

$$m_0 = 0, \quad m_j = \dot{x}_i(t_j^-) \quad j = 1, \dots, k, \dots \quad (5.6)$$

Aunque la Ecuación (5.4) implica que  $q_i(t)$  está formada por secciones de rectas, para asegurar que es seccionalmente lineal debe asegurarse antes que la secuencia  $t_0, \dots, t_j, \dots$ , no contiene un número infinito de componentes en un intervalo finito de tiempo.

Dado que se asumió que  $q(t)$  está acotada en un cierto intervalo de tiempo  $[t_0, t_f]$ , y teniendo en cuenta las hipótesis formulada sobre  $f$  y el hecho que  $u(t)$ , resulta

$$|f_i(q(t), u(t))| \leq F_i \quad t_0 \leq t \leq t_f \quad (5.7)$$

De (5.6) tenemos que

$$|m_j| \leq |f_i(q(t), u(t))| \leq F_i \quad (5.8)$$

Luego, la pendiente resulta siempre acotada por una constante  $F_i$ . De (5.5) sigue que

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= |x_i(t_j) + m_j(t_{j+1} - t_j) - x_i(t_{j+1})| \\ &\leq \frac{|x_i(t_{j+1}) - x_i(t_j)|}{t_{j+1} - t_j} (t_{j+1} - t_j) + |m_j|(t_{j+1} - t_j) \\ &\leq |m_{j+1}|(t_{j+1} - t_j) + |m_j|(t_{j+1} - t_j) \\ &\leq 2F_i(t_{j+1} - t_j) \end{aligned}$$

Y finalmente,

$$t_{j+1} - t_j \geq \frac{\Delta q_i}{2F_i}$$

Esta última desigualdad implica que la secuencia  $t_0, \dots, t_j, \dots$ , tiene un mínimo tiempo entre componentes sucesivos y luego es imposible tener un número infinito de componentes en un intervalo finito de tiempo. En consecuencia, las trayectorias de  $q(t)$  son seccionalmente lineales.  $\square$

**Teorema 5.2.** *Trayectoria de las Derivadas de Estado en QSS2.*

*En un QSS2 asociado a un sistema LTI con trayectorias de entrada seccionalmente lineales y acotadas las derivadas de las variables de estado son seccionalmente lineales mientras las variables cuantificadas permanecen una región acotada.*

*Demostración.* En sistemas LTI se tiene que  $f = Ax + Bu$  y luego, las hipótesis sobre continuidad y acotación de  $f$  formuladas en el Teorema 5.1 se satisfacen. Teniendo en cuenta también que lo asumido allí sobre las trayectorias cuantificadas y de entrada se cumple también resulta que el teorema mencionado vale y luego, las variables cuantificadas tienen trayectorias seccionalmente lineales.

Un sistema LTI puede expresarse por la Eq.(4.47) (página 63) y su QSS2 asociado toma la forma de (4.48).

Dado que  $q(t)$  y  $u(t)$  son seccionalmente lineales, queda claro que las trayectorias de  $\dot{x}(t)$  serán también seccionalmente lineales  $\square$

Un corolario de este teorema es que en el caso de un QSS2 asociado a un sistema LTI las trayectorias de las variables de estado son seccionalmente parabólicas como ya fue mencionado.

Las trayectorias seccionalmente lineales y constantes de QSS permitieron encontrar la representación DEVS. De manera similar, las trayectorias seccionalmente lineales y parabólicas permitirán construir un modelo DEVS que represente exactamente el comportamiento de un QSS2 asociado a un sistema LTI.

Sin embargo, teniendo en cuenta que las formas de las trayectorias no se conservan en sistemas no lineales, sólo será posible simular exactamente las aproximaciones QSS2 de sistemas LTI.

De todas formas, como se verá en la próxima sección, el método de QSS2 puede también aplicarse en sistemas no lineales generales pero en ese caso los resultados de simulación no coincidirán exactamente con las soluciones de (3.3).

### 5.3 Representación DEVS de QSS2

El modelo DEVS de QSS construido en la Sección 3.4 se basaba en el uso de eventos para representar los cambios en los valores de las variables seccionalmente constantes.

Aquí, de una forma similar, los cambios en las pendientes y valores de trayectorias seccionalmente lineales se representarán mediante eventos que lleven los nuevos valores y pendientes de las variables correspondientes.

En este punto, el trabajo de Giambiasi debe ser mencionado nuevamente, ya que su definición de GDEVS [16] brinda una forma de representar trayectorias seccionalmente polinomiales mediante segmentos de eventos.

Comenzaremos considerando los sistemas LTI donde, siempre y cuando las entradas sean seccionalmente lineales, las derivadas de las variables de estado resultan seccionalmente lineales y las variables de estado tienen trayectorias seccionalmente parabólicas.

Utilizando estos hechos, se seguirá el mismo procedimiento utilizado en la Sección 3.4 para construir el modelo DEVS de un QSS. Allí, la idea principal era dividir el modelo en integradores cuantificados y funciones estáticas.

A pesar de la similitud entre QSS y QSS2, los modelos atómicos en la última aproximación resultarán bastante distintos ya que estos deben calcular y tener en cuenta no sólo los valores sino también las pendientes de las trayectorias. Más aún, los eventos llevarán tanto el valor como la pendiente.

Como antes, los integradores cuantificados en QSS2 estarán formados por un integrador y un cuantificador de primer orden. Estos serán llamados ahora *integradores cuantificados de segundo orden*. La razón para este nombre es que los mismos calculan las trayectorias de estado utilizando la primera y la segunda derivada.

La siguiente estructura define un modelo DEVS que representa el comportamiento de un integrador cuantificado de segundo orden.

$$M_7 = (X, S, Y, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta), \text{ donde:}$$

$$X = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$$

$$S = \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^+$$

$$Y = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$$

$$\delta_{\text{int}}(u, m_u, x, q, m_q, \sigma) = (u + m_u \cdot \sigma, m_u, \tilde{q}, \tilde{q}, u + m_u \cdot \sigma, \sigma_1)$$

$$\delta_{\text{ext}}(u, m_u, x, q, m_q, \sigma, e, v, m_v, p) = (v, m_v, \tilde{x}, q + m_q \cdot e, m_q, \sigma_2)$$

$$\lambda(u, m_u, x, q, m_q, \sigma) = (x + u \cdot \sigma + \frac{m_u}{2} \sigma^2, u + m_u \cdot \sigma, 1)$$

$$ta(u, m_u, x, q, m_q, \sigma) = \sigma$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= x + u \cdot \sigma + \frac{m_u}{2} \sigma^2; \quad \tilde{x} = x + u \cdot e + \frac{m_u}{2} e^2 \\ \sigma_1 &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2\Delta q}{m_u}} & \text{si } m_u \neq 0 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.9)$$

y  $\sigma_2$  se calcula como la menor solución positiva de

$$\left| x + u \cdot e + \frac{m_u}{2} e^2 + v \cdot \sigma_2 + \frac{m_v}{2} \sigma_2^2 - (q + m_q \cdot e + m_q \sigma_2) \right| = \Delta q \quad (5.10)$$

Puede verse fácilmente que el modelo  $M_7$  brinda una representación exacta de un integrador cuantificado de segundo orden con trayectorias de entrada seccionalmente lineales.

Las Ecuaciones (5.9) y (5.10) calculan el avance de tiempo, esto es, el tiempo en el cual la diferencia entre la trayectoria seccionalmente parabólica de estado ( $x(t)$ ) y la trayectoria cuantificada seccionalmente lineal ( $q(t)$ ) se hace igual al quantum ( $\Delta q$ ).

Es claro que en una simulación por QSS2 los integradores deben representarse con modelos como  $M_7$  en lugar de  $M_4$ . Para representar las funciones estáticas en el método de QSS se utilizaba el modelo  $M_2$ . Sin embargo este no tiene en cuenta las pendientes. Luego, la representación de las funciones estáticas en QSS2 requiere utilizar un modelo DEVS diferente.

Antes de construir este nuevo modelo DEVS es necesario tener en cuenta la posible presencia de relaciones no lineales.

Cada componente  $f_j$  de una función estática  $f(q, u)$  recibirá las trayectorias seccionalmente lineales de las variables de entrada y de estado cuantificadas.

Definamos  $z \triangleq [q^T, u^T]^T$ . Luego, cada componente de  $z$  tiene una trayectoria seccionalmente lineal:

$$z_i(t) = z_i(t_k) + m_{z_i}(t_k) \cdot (t - t_k)$$

Entonces, la salida de la función estática puede escribirse como

$$\dot{x}_j(t) = f_j(z(t)) = f_j(z_1(t_k) + m_{z_1}(t_k) \cdot (t - t_k), \dots, z_l(t_k) + m_{z_l}(t_k) \cdot (t - t_k))$$

donde  $l \triangleq n + m$  es el número de componentes de  $z(t)$ .

Definiendo  $m_z \triangleq [m_{z_1}, \dots, m_{z_l}]^T$  la última ecuación puede reescribirse como

$$\dot{x}_j(t) = f_j(z(t)) = f_j(z(t_k) + m_z(t_k) \cdot (t - t_k))$$

que puede expandirse en serie de Taylor como sigue

$$\dot{x}_j(t) = f_j(z(t)) = f_j(z(t_k)) + \left[ \frac{\partial f_j}{\partial z}(z(t_k)) \right]^T \cdot m_z(t_k) \cdot (t - t_k) + \dots \quad (5.11)$$

Luego, puede obtenerse una aproximación seccionalmente lineal de la salida tomando los dos primeros términos de (5.11).

Esta idea requiere una estimación de las derivadas parciales de la función  $f_j$ , que deberán recalcularse en todos los cambios de las trayectorias de entrada de dicha función.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, un modelo DEVS que puede asociarse a una función estática genérica  $f_j(z) = f_j(z_1, \dots, z_l)$  teniendo en cuenta los valores y pendientes de entrada y salida puede escribirse como sigue:

$$\begin{aligned} M_8 &= (X, S, Y, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta), \text{ donde:} \\ X &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N} \\ S &= \mathbb{R}^{3l} \times \mathbb{R}^+ \\ Y &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N} \\ \delta_{\text{int}}(z, m_z, c, \sigma) &= (z, m_z, c, \infty) \\ \delta_{\text{ext}}(z, m_z, c, \sigma, e, v, m_v, p) &= (\tilde{z}, \tilde{m}_z, \tilde{c}, 0) \\ \lambda(z, m_z, c, \sigma) &= (f_j(z), m_f, 1) \\ ta(z, m_z, c, \sigma) &= \sigma \end{aligned}$$

Aquí  $z = (z_1, \dots, z_l)$  y  $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_l)$  son los valores de entrada.

Similarmente,  $m_z = (m_{z_1}, \dots, m_{z_l})$  y  $\tilde{m}_z = (\tilde{m}_{z_1}, \dots, \tilde{m}_{z_l})$  representan las pendientes de entrada.

Los coeficientes  $c = (c_1, \dots, c_l)$  y  $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_l)$  estiman las derivadas parciales  $\frac{\partial f_j}{\partial z_i}$  que se utilizan para calcular la pendiente de salida como

$$m_f = \sum_{i=1}^n c_i m_{z_i}$$

Tras la transición externa, las componentes de  $\tilde{z}$ ,  $\tilde{m}_z$  y  $\tilde{c}$  se calculan como

$$\begin{aligned} \tilde{z}_i &= \begin{cases} v & \text{si } p = i \\ z_i + m_{z_i}e & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \tilde{m}_{z_i} &= \begin{cases} m_v & \text{si } p = i \\ m_{z_i} & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \tilde{c}_i &= \begin{cases} \frac{f_j(z + m_z e) - f_j(\tilde{z})}{z_i + m_{z_i}e - \tilde{z}_i} & \text{si } p = i \wedge z_i + m_{z_i}e - \tilde{z}_i \neq 0 \\ c_i & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Si la función  $f(z)$  es lineal, este modelo DEVS representa exactamente su comportamiento si las componentes de  $z(t)$  son seccionalmente lineales.

En el caso no lineal, el modelo DEVS aproxima la expansión de Taylor (5.11).

Luego, a través del acoplamiento de modelos DEVS como  $M_7$  y  $M_8$  como se muestra en la Figura 5.2, el método de QSS2 puede usarse para simular cualquier ODE estacionaria.

## 5.4 Propiedades del Método de QSS2

Ya se anticipó que el método de QSS2 comparte varias propiedades con el método de QSS. El motivo de esto puede ser entendido fácilmente ya que si dos variables,  $x_i(t)$  y  $q_i(t)$  están relacionadas mediante una función de cuantificación de primer orden las mismas satisfacen (5.3).

Esta desigualdad es simplemente un caso particular de (4.2) con un quantum constante igual al ancho de histéresis. Las propiedades de QSS se dedujeron en base a esta desigualdad –que implica que el método sólo introduce perturbaciones acotadas– y a la representación dada por (4.1). Teniendo en cuenta que esta representación es también correcta en QSS2, la conclusión es que el método de QSS2 satisface las mismas propiedades de convergencia, estabilidad y cota de error que el método de QSS.

Sin embargo, en sistemas no lineales, la definición de QSS2 y lo que el modelo DEVS simula no coincide. Luego, el análisis sólo asegura que estas propiedades valen en la simulación de sistemas LTI. Aunque hay muchas razones que permiten conjeturar que la convergencia y la estabilidad se satisfacen también en la simulación de sistemas no lineales, no hay aún una demostración formal de este hecho.

En lo que respecta a la cota de error, la Desigualdad (4.50) se verifica en el método de QSS2 ya que la misma se dedujo para sistemas LTI.

Además de las propiedades teóricas deducidas en base al análisis de perturbaciones, el método de QSS también exhibe algunas ventajas prácticas relacionadas a la incorporación de señales de entrada y a la explotación de la ralitud. Como es simple de ver, estas ventajas prácticas son también inherentes al método de QSS2.

La explotación de ralitud es trivial. La estructura de la simulación es idéntica a la de QSS y luego, cada transición sólo involucra cálculos en los integradores y funciones estáticas directamente conectados al integrador que realizó la transición mencionada.

En lo que respecta a las señales de entrada, la situación es mejor que antes. No sólo puede asegurarse que las entradas son procesadas apenas cambian sino que también es posible representar exactamente trayectorias de entrada seccionalmente lineales en lugar de seccionalmente constantes.

El ejemplo que sigue ilustra las ventajas mencionadas:

### **Ejemplo 5.1.** *Simulación de una Línea de Transmisión.*

*El circuito de la Figura 5.3 representa una línea de transmisión RLC. Este modelo puede utilizarse para estudiar el desempeño de circuitos integrados transmitiendo datos a una frecuencia muy rápida. Aunque la longitud de los cables es de unos pocos centímetros, la alta frecuencia de la señal provoca que los retardos introducidos por dichos cables no puedan ser ignorados y en consecuencia deba aplicarse la teoría de líneas de transmisión.*

*Los modelos de líneas de transmisión se describen mediante sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. Sin embargo, estos pueden ser aproximados por modelos concentrados donde los efectos distribuidos de capacidad, inductancia y*

resistencia se representan por una cascada de capacitores, inductores y resistores como se muestra en la Figura 5.3. Para realizar una buena aproximación,

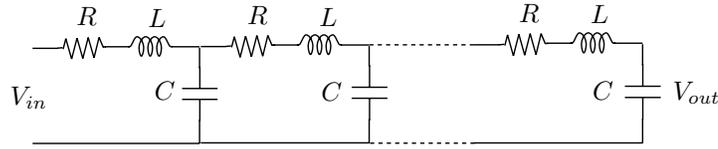


Figura 5.3: Línea de Transmisión RLC

el modelo RLC debe estar formado por muchas secciones. En consecuencia, el esquema resulta en una ecuación diferencial ordinaria rara de orden grande.

En [21] se presenta un ejemplo compuesto por cinco secciones de circuito RLC. Los valores de resistencia, inductancia y capacitancia utilizados allí corresponden a parámetros reales. El modelo obtenido es un sistema lineal de orden 10, cuya matriz de evolución puede escribirse como sigue:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/C & 0 & -1/C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & -R/L & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/C & 0 & -1/C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C & 0 \end{bmatrix}$$

Una forma típica de trayectoria en estos sistemas digitales es una onda trapezoidal representando los niveles "0" y "1" así como los tiempos de subida y de bajada. Dado que una onda trapezoidal es seccionalmente lineal, la misma puede ser generada exactamente por un modelo DEVS como el que sigue:

$$M_9 = (X, S, Y, \delta_{int}, \delta_{ext}, \lambda, ta), \text{ donde:}$$

$$X = \phi$$

$$S = \mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$$

$$Y = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}$$

$$\delta_{int}(k, \sigma) = (\tilde{k}, t_{\tilde{k}})$$

$$\lambda(k, \sigma) = (u_{\tilde{k}}, mu_{\tilde{k}}, 1)$$

$$ta(k, \sigma) = \sigma$$

Aquí  $\tilde{k} = (k + 1 \bmod 4)$  es el índice siguiente del ciclo, que tiene 4 fases: La del nivel bajo (índice 0), la fase creciente (1), la del nivel alto (2) y la fase decreciente (3). La duración de cada fase está dada por  $t_k$ .

Durante el nivel bajo, la salida es  $u_0$  y durante el nivel alto esta vale  $u_2$ . Luego, las pendientes  $mu_0$  y  $mu_2$  son cero. Durante el período de crecimiento se tiene  $u_1 = u_0$  y la pendiente es  $mu_1 = (u_2 - u_0)/t_1$ . Similarmente, durante la fase decreciente tenemos  $u_3 = u_2$  y  $mu_3 = (u_0 - u_2)/t_3$ .

Luego, el modelo generador DEVS que representa la trayectoria de entrada produce sólo 4 eventos en cada ciclo. Esta es una ventaja importante ya que la presencia de la onda de entrada sólo agrega unos pocos cálculos adicionales. Más aún, dado que la representación es exacta, la entrada no introduce ningún error, o sea, se puede estimar la cota de error mediante la Desigualdad (4.50) con  $\Delta u_{max} = 0$ .

La simulación fue entonces realizada con parámetros  $R = 80\Omega$ ,  $C = 0.2pF$  y  $L = 20nH$ . (Estos parámetros corresponden a una línea de transmisión de un centímetro dividida en cinco secciones, donde la resistencia, capacitancia e inductancia son  $400\Omega/cm$ ,  $1pF/cm$  y  $100nH/cm$  respectivamente)

La entrada trapezoidal tiene tiempos de subida y decrecimiento iguales  $t_1 = t_3 = 10ps$ , mientras que los tiempos en el nivel alto y bajo son  $t_0 = t_2 = 1ns$ . Los niveles bajo y alto son  $0V$  y  $2.5V$  respectivamente.

La cuantificación adoptada fue de  $\Delta v = 4mV$  en las variables de estado que representan voltajes y  $\Delta i = 10\mu A$  en las variables de estado que representan corrientes. Esta cuantificación, de acuerdo a (4.50), asegura que el error máximo es menor que  $250mV$  en la variable  $V_{out}$ .

Las trayectorias de entrada y salida se muestran en la Figura 5.4. La simu-

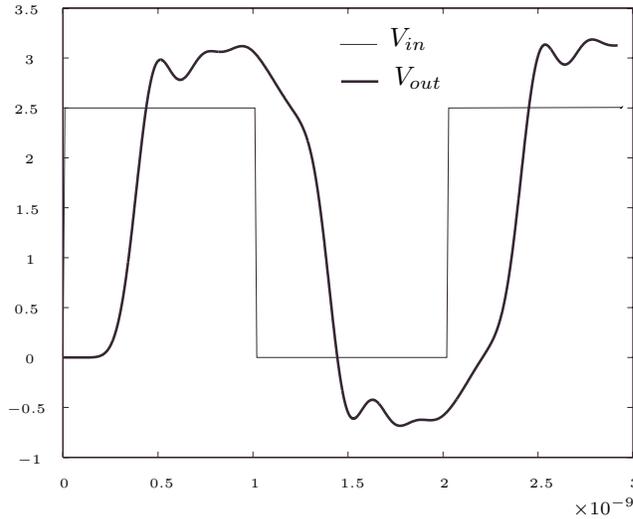


Figura 5.4: Simulación con QSS2 de una línea de transmisión RLC

lación tomó un total de 2536 pasos (entre 198 y 319 transiciones internas en cada integrador) para obtener los primeros  $3.2ns$  de la trayectoria del sistema.

El experimento se repitió utilizando una cuantificación 100 veces menor, que asegura tener un error máximo en  $V_{out}$  de  $2.5mV$ . Esta nueva simulación tomó un total de 26883 transiciones internas.

La comparación de los resultados de ambos experimentos (Figura 5.5) muestra que la diferencia entre las trayectorias nunca sobrepasa los  $14.5mV$  lo que

implica que el error en la primera no era mayor que  $17\text{mV}$ . En este caso, la predicción teórica del error (la cota era  $250\text{mV}$ ) fue bastante conservadora (esto puede comprenderse simplemente teniendo en cuenta que la cota teórica vale para cualquier trayectoria de entrada y para cualquier condición inicial).

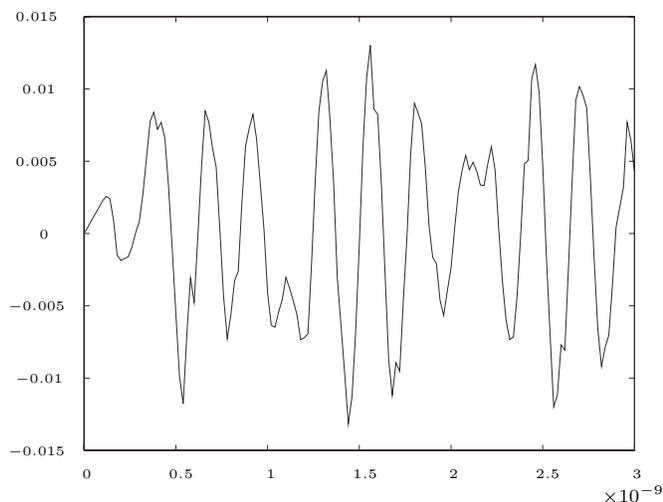


Figura 5.5: Diferencia en  $V_{out}$  para dos cuantificaciones distintas

Aunque el número de pasos (2536) parece bastante grande, es importante tener en cuenta que cada paso sólo involucra cálculos en tres integradores (el que realiza la transición interna y los dos que están directamente conectados a su salida). Esto se debe a la rareza de la matriz  $A$ .

Es importante mencionar que cualquier método de paso fijo deberá utilizar un paso de alrededor de  $1\text{ps}$  para obtener una buena representación de la señal de entrada ya que su tiempo de crecimiento es muy corto (sobre todo si interesa el comportamiento del sistema durante tal período). En consecuencia, el número de pasos será 3200 o más con cada paso involucrando cálculos en todas las variables de estado. Aunque se utilicen herramientas para tratar con matrices raras, todas las variables de estado cambiarán en cada paso.

Ya se mencionó que las propiedades del método de QSS2 sólo valen en sistemas LTI aunque se conjeturó que en los sistemas no lineales estas deberían ser similares. La razón de esta conjetura tiene que ver con la validez de los modelos linealizados, que puede ser justificada en los problemas de simulación generales teniendo en cuenta que las variables sólo experimentan pequeños cambios entre pasos sucesivos. Por esto, tras cada paso, las trayectorias se mantienen dentro de la región donde el modelo linealizado constituye una buena aproximación.

El siguiente ejemplo ilustra estas ideas a través del uso del método de QSS2 en un sistema no lineal.

**Ejemplo 5.2.** *Modelo de Lotka–Volterra.*

El famoso modelo de segundo orden de Lotka–Volterra es un sistema no lineal que intenta representar la evolución de las poblaciones de dos especies, presa y depredador, en un hábitat común.

El siguiente conjunto de ecuaciones de estado constituye una representación posible del sistema mencionado.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \epsilon x_1 + \alpha x_1 x_2 - \sigma x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= -m x_2 + \beta x_1 x_2 \end{cases}$$

donde las variables  $x_1$  y  $x_2$  representan la población de presas y depredadores respectivamente.

El sistema se simuló mediante QSS2 con una cuantificación  $\Delta q_1 = \Delta q_2 = 0.001$ . Los parámetros tomados fueron  $\epsilon = 0.1$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\sigma = 0.01$ ,  $m = 0.4$ ,  $\beta = 0.5$  y se adoptó la condición inicial  $x_1(0) = x_2(0) = 10$ . Los resultados se muestran en las Figuras 5.6 y 5.7.

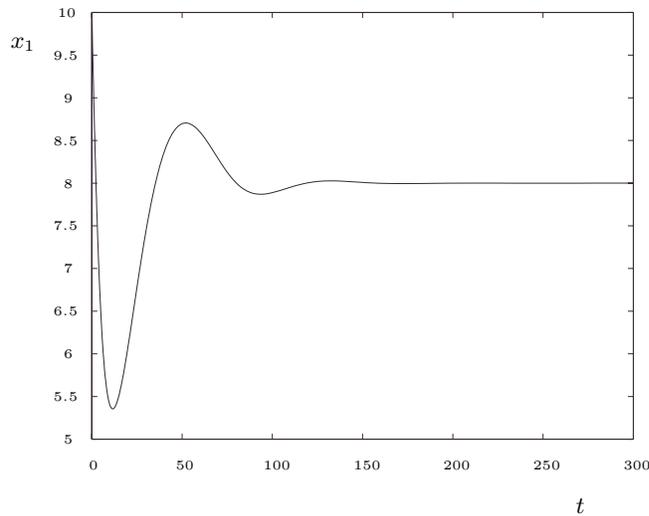


Figura 5.6: Número de presas en el modelo de Lotka–Volterra.

La simulación tomó 211 transiciones internas en el primer integrador y 264 en el segundo, lo que da un total de 475 pasos. Estos resultados se compararon luego con las trayectorias obtenidas con el método de Heun (el método clásico de segundo orden con paso fijo). En este método se utilizó un paso de 0.63 tal que el mismo realice el mismo número de pasos que QSS2. La Figura 5.8 muestra una parte de las trayectorias junto a la trayectoria “exacta”. La trayectoria “exacta” se obtuvo en realidad mediante el método de Dormand–Prince de quinto orden con un paso de 0.1.

El error absoluto de los métodos de QSS2 y Heun en esta simulación se comparan en la Figura 5.9. Como puede verse, el uso de QSS2 permite reducir considerablemente el error máximo. Sin embargo, el error no converge a cero como en el método de Heun.

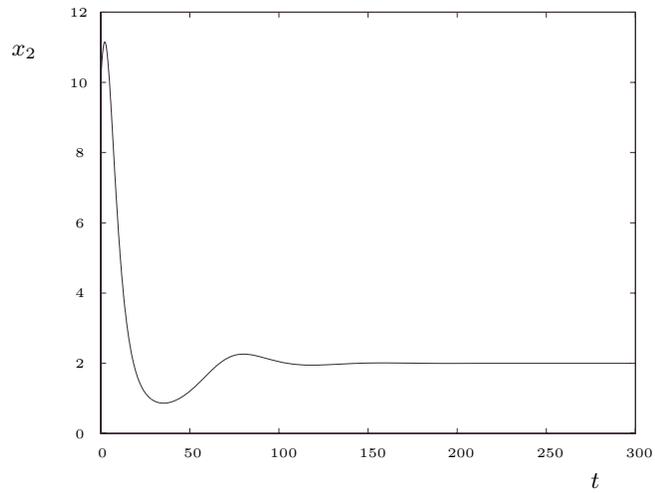


Figura 5.7: Número de depredadores en el modelo de Lotka–Volterra.

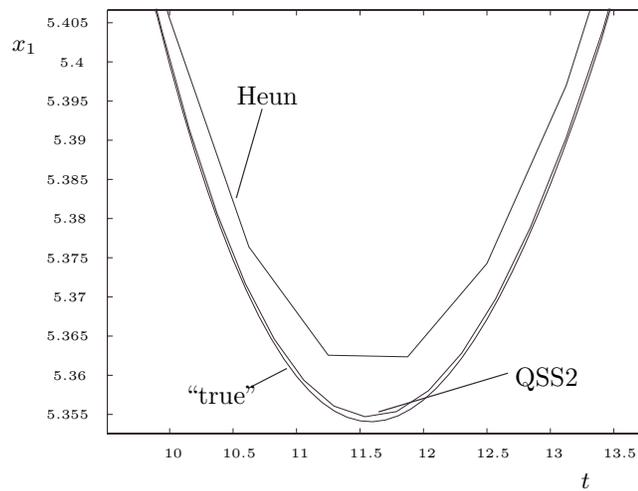


Figura 5.8: Número de presas según el método de Heun y el de QSS2.

*A pesar de la falta de convergencia, el resultado obtenido con QSS2 es mucho más confiable ya que el error está acotado durante toda la simulación. Aquí puede apreciarse que esta propiedad deducida para los sistemas LTI en la Sección 4.6 se sigue verificando en este ejemplo no lineal*

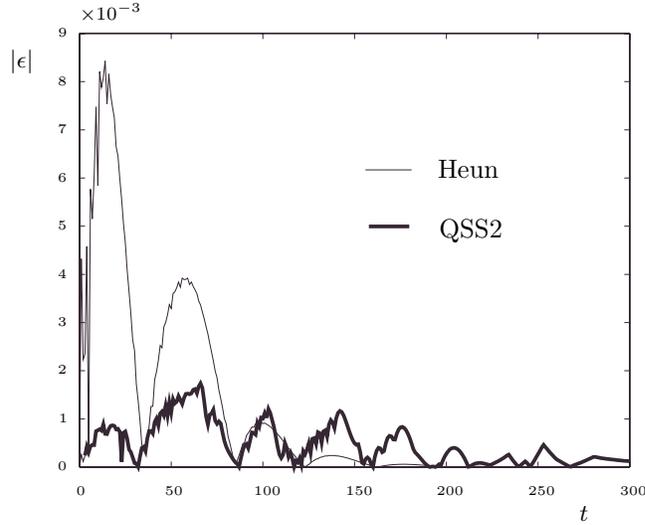


Figura 5.9: Error en Heun y en QSS2 en la simulación del modelo de Lotka–Volterra.

## 5.5 QSS vs. QSS2

Como se mencionó anteriormente, la cota de error (4.50) vale tanto para QSS como para QSS2. Luego, si se utiliza el mismo quantum en ambos métodos debería esperarse obtener el mismo error.

Esta última observación abre una pregunta sobre cual es la ventaja de utilizar el método de QSS2 si este comete el mismo error que QSS.

La respuesta es que la simulación utilizando QSS2 requiere mucho menos pasos que la simulación con QSS para la misma cuantificación (o sea, para la misma cota de error)

La causa de la reducción del número de pasos puede encontrarse en la comparación de las Figuras 5.1 y 5.10. El número de pasos utilizado por un QSS para representar la misma trayectoria con el mismo quantum ( $\Delta q$ ) es mucho mayor que el utilizado por QSS2. La explicación de esto es que al utilizarse la información de la pendiente en QSS2, el tiempo que se requiere para obtener una diferencia igual a  $\Delta q$  entre la entrada y la salida de un cuantificador se torna mucho mayor.

En el ejemplo de Lotka–Volterra la simulación con QSS y el mismo quantum hubiera tomado más de 10000 transiciones internas en cada integrador<sup>1</sup>. Este valor, comparado con los 264 y los 211 pasos del método de QSS2 muestra claramente las ventajas del nuevo método.

La diferencia entre el desempeño de QSS y QSS2 se torna mayor a medida

<sup>1</sup>Este número puede obtenerse dividiendo la amplitud de las trayectorias y el quantum de 0.001

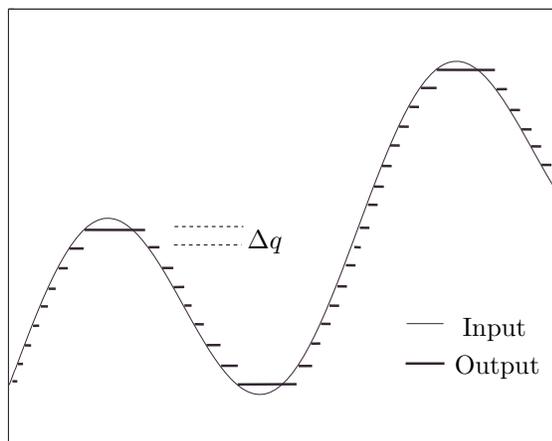


Figura 5.10: Entrada y Salida de un cuantificador de *Orden Cero*

que la cuantificación es menor. De hecho, el número de transiciones internas en QSS es aproximadamente proporcional a la inversa del quantum mientras que en QSS2 es aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada del mismo (ver Ecuación (5.9)). Esta relación puede verificarse en el ejemplo de la línea de transmisión donde el uso de una cuantificación 100 veces más chica resultó en un incremento de alrededor de 10 veces en el número de pasos.

Sin embargo, por otro lado cada transición en el método de QSS2 involucra más cálculos que en el de QSS. Por esto, si no se necesita obtener una precisión muy buena, el método de QSS podría resultar más eficiente.

El ejemplo siguiente ilustra estos hechos.

### Ejemplo 5.3. QSS vs. QSS2

Consideremos el sistema LTI de segundo orden:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 1 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

Este sistema se simuló utilizando ambos métodos variando el quantum. En todos los casos se tomó  $\Delta q_1 = \Delta q_2$ .

La Figura 5.11 compara el tiempo total de procesamiento tomado por ambos métodos. QSS muestra un mejor desempeño cuando el quantum es grande, pero a medida que este se reduce el método de QSS2 mejora significativamente en relación al anterior. De hecho, cuando  $\Delta q = 0.0001$  el método de segundo orden es 40 veces más rápido que QSS.

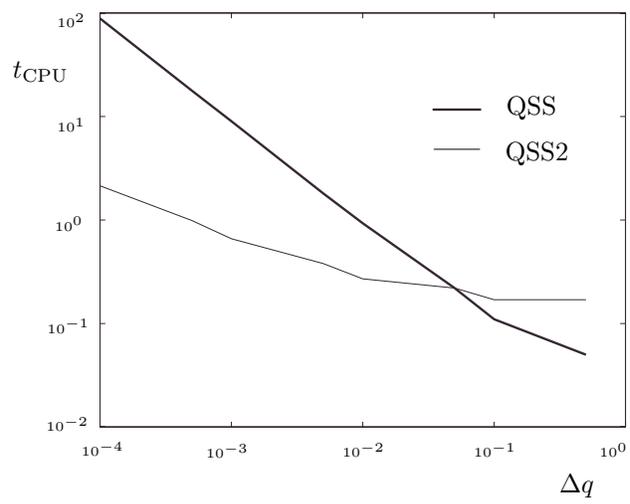


Figura 5.11: Tiempo de CPU vs. quantum en QSS y QSS2



## Capítulo 6

# Extensiones de QSS y QSS2

Hasta aquí, la Tesis intentó desarrollar una suerte de teoría sobre la aproximación por eventos discretos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Sin embargo, las ODEs constituyen sólo una fracción dentro de los sistemas continuos. Dejando a un lado los problemas de derivadas parciales, hay aún muchos sistemas continuos que no pueden representarse mediante ODEs.

Muchos sistemas físicos y de ingeniería producen modelos que, a pesar de tener la naturaleza de las ecuaciones diferenciales, poseen funciones involucradas en la ODE correspondiente que no están definidas explícitamente. Estos problemas se denominan de Ecuaciones Diferenciales Algebraicas (DAEs) y constituyen una clase más general que las ODEs.

En otros casos –muy comunes en los sistemas técnicos modernos– un simple conjunto de ODEs o DAEs no es suficiente para representar el comportamiento completo. Estos problemas generalmente tienen algunos componentes que deben describirse mediante Ecuaciones en Diferencias o mediante Sistemas de Eventos Discretos (dispositivos digitales por ejemplo). Dado que estos componentes discretos interactúan con la parte continua del sistema –que está típicamente descrita por ODEs o DAEs– estas ODEs o DAEs muestran características *discontinuas*.

Estos últimos casos se denominan *Sistemas Híbridos* y, como en el caso de las DAEs, su integración numérica agrega nuevos problemas y dificultades.

Este capítulo se enfoca en la aplicación de los métodos de QSS y QSS2 para simular Ecuaciones Diferenciales Algebraicas y Sistemas Híbridos, teniendo también en cuenta el caso particular de los sistemas físicos modelados por Bond Graphs.

En todos los casos se encontrarán algunas ventajas interesantes sobre las aproximaciones clásicas.

Como se anticipó, estas ventajas resultarán particularmente significativas en el caso particular de los Sistemas Híbridos debido a la naturaleza de eventos discretos del enfoque. Allí se observará una reducción importante de los costos computacionales con un incremento notable de precisión y simplicidad.

## 6.1 QSS y QSS2 en Sistemas DAE

Hay muchos sistemas continuos en los cuales una formulación de ODE explícita no puede obtenerse fácilmente [10]. Más aún, hay casos en que tal representación no existe. Estos sistemas, en los cuales sólo pueden escribirse ecuaciones de estado definidas implícitamente, se denominan Ecuaciones Diferenciales Algebraicas.

La dificultad que conlleva la simulación de DAEs es que requiere utilizar algunas técnicas especiales –que incluyen iteraciones o manipulación simbólica– para resolver las ecuaciones implícitas involucradas.

Una DAE estacionaria puede escribirse como

$$\tilde{f}(\dot{x}(t), x(t), u(t)) = 0 \quad (6.1)$$

El problema aquí con QSS y QSS2 es que los integradores cuantificados necesitan el valor de  $\dot{x}$ , el que sólo puede ser obtenido aproximadamente mediante iteraciones.

Uno de los resultados más importantes del área surge de la idea de combinar las reglas del algoritmo numérico con las ecuaciones implícitas de la DAE para resolver todo junto (mediante iteraciones o manipulación simbólica). Esta idea, debida a Gear [15], estableció las bases de todos los métodos modernos de simulación de DAEs.

Luego, si usamos aquí las reglas de los métodos de QSS y QSS2, la variable  $x(t)$  debe reemplazarse por su versión cuantificada  $q(t)$ . Entonces, la Ecuación (6.1) queda

$$\tilde{f}(\dot{x}(t), q(t), u(t)) = 0 \quad (6.2)$$

Tras esto, pueden utilizarse reglas de iteración –como Newton–Raphson– para obtener  $\dot{x}$  en (6.2). En este trabajo se asume que el índice es 1. Si este es mayor, se puede utilizar el algoritmo de Pantelides [51] para reducirlo a 1.

Una vez que se calculan las derivadas del estado, estas pueden enviarse a los integradores cuantificados para que hagan el resto del trabajo, o sea, calcular las trayectorias de las variables cuantificadas. Cada vez que una variable cuantificada cambia, un nuevo proceso de iteración debe realizarse para recalcular  $\dot{x}$ .

Ya se explicó que los métodos QSS y QSS2 explotan la rareza de los sistemas para reducir los costos computacionales. Veremos entonces como mantener esta característica en los problemas DAE.

La Ecuación (6.1) puede reescribirse como

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), z(t)) \quad (6.3a)$$

$$0 = g(x_r(t), u_r(t), z(t)) \quad (6.3b)$$

donde  $z(t)$  es un vector de variables auxiliares cuya dimensión es igual o menor que  $n$  y los vectores  $x_r$  y  $u_r$  son versiones reducidas de  $x$  y  $u$  respectivamente<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Una manera trivial de hacer el pasaje de (6.1) a (6.3) es definiendo  $z(t) = \dot{x}(t)$ ,  $x_r(t) = x(t)$ ,  $u_r(t) = u(t)$ ,  $g(x, u, z) = \tilde{f}(z, x, u)$  y  $f(x, u, z) = z$ .

La Ecuación (6.3b) expresa el hecho que algunas variables de entrada y de salida pueden no actuar directamente en los lazos algebraicos.

Luego, el uso de los métodos de QSS ó QSS2 transforma (6.3) en

$$\dot{x}(t) = f(q(t), u(t), z(t)) \quad (6.4a)$$

$$0 = g(q_r(t), u_r, z(t)) \quad (6.4b)$$

y ahora, las iteraciones deberán ser realizadas solamente para resolver Ec.(6.4b) cuando cambian las componentes de  $q_r$  o  $u_r$ . Si la dimensión de  $x_r$  es significativamente menor que la de  $x$ , o sea, cuando hay muchas variables de estado que no influyen directamente en el lazo, este hecho representa una ventaja muy importante.

Cuando la Ecuación (6.4b) define el valor de  $z$ , (6.4) define un sistema que se comporta como un QSS o un QSS2. De hecho, puede verse fácilmente que las trayectorias de las variables de estado y cuantificadas se corresponden con la de un QSS y un QSS2. Más aún, la variable auxiliar  $z$  tiene trayectorias seccionalmente constantes y lineales en QSS y QSS2 respectivamente.

Luego, se dice que el Sistema (6.4) es un QSS o QSS2 implícitamente definido. Lo que debe resolverse entonces es la forma en que un QSS o un QSS2 implícito como éste se traduce en un modelo DEVS.

Es claro que (6.4a) puede representarse mediante integradores cuantificados y funciones estáticas como se hizo antes. La única diferencia ahora es la presencia de la variable auxiliar  $z$  que actúa de forma similar a la entrada  $u(t)$ . Sin embargo, mientras las componentes de  $u(t)$  son conocidas y se producen en modelos DEVS generadores de señales, las variables auxiliares deben ser calculadas resolviendo la restricción (6.4b).

Entonces, debe construirse un nuevo modelo DEVS que reciba los eventos con los valores de  $q_r$  y  $u_r$  y luego calcule  $z$ . La Figura 6.1 muestra entonces el nuevo esquema de acoplamiento en el cual se agregó este nuevo modelo DEVS.

Un modelo DEVS que resuelve una ecuación implícita general como

$$g(v, z) = g(v_1, \dots, v_m, z_1, \dots, z_k) = 0 \quad (6.5)$$

para el caso de QSS puede escribirse como sigue:

$$M_{10} = (X, Y, S, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta), \text{ donde}$$

$$X = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$$

$$Y = \mathbb{R}^k \times \mathbb{N}$$

$$S = \mathbb{R}^{m+k} \times \mathbb{R}^+$$

$$\delta_{\text{ext}}(s, e, x) = \delta_{\text{ext}}(v, z, \sigma, e, x_v, p) = (\tilde{v}, h(\tilde{v}, z), 0)$$

$$\delta_{\text{int}}(s) = \delta_{\text{int}}(v, z, \sigma) = (v, z, \infty)$$

$$\lambda(s) = \lambda(v, z, \sigma) = (z, 1)$$

$$ta(s) = ta(v, z, \sigma) = \sigma$$

con

$$\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m)^T; \quad \tilde{v}_i = \begin{cases} x_v & \text{si } p = i \\ v_i & \text{en otro caso} \end{cases}$$

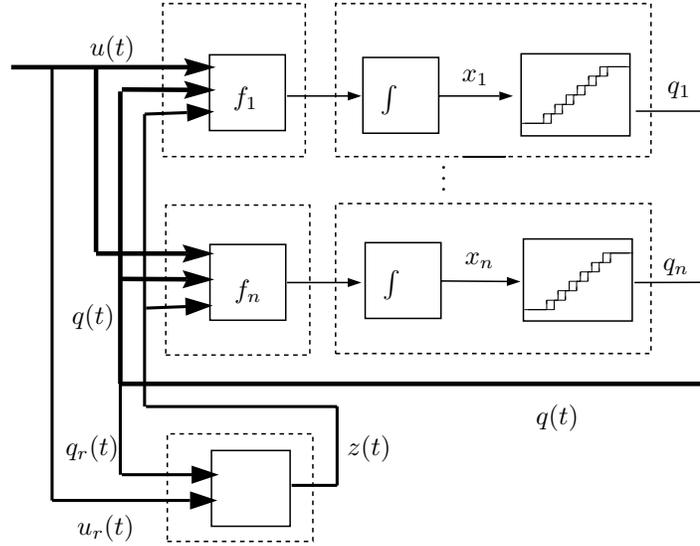


Figura 6.1: Esquema acoplado para la simulación de (6.3) con QSS o QSS2

donde la función  $h(v, z)$  devuelve el resultado de aplicar la iteración de Newton o algún otro método iterativo para encontrar la solución de (6.5) utilizando un valor inicial  $z$ .

Cuando la dimensión de  $z$  (o sea  $k$ ) es mayor que 1, los eventos de salida del modelo  $M_{10}$  contienen un vector. Luego, estos no pueden ser enviados a funciones estáticas como  $M_2$ . En tal caso, podrá usarse un modelo DEVS que demultiplexe una entrada vectorial en sus componentes escalares.

La idea para el método de QSS2 es similar, pero ahora la ecuación implícita debe reescribirse:

$$g(v(t), z(t)) = g(v_0 + m_v \Delta t, z_0 + m_z \Delta t) = 0 \quad (6.6)$$

y esta puede dividirse en

$$g(v_0, z_0) = 0 \quad (6.7a)$$

y la aproximación de primer orden

$$\left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{(v_0, z_0)} m_v + \left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{(v_0, z_0)} m_z = 0 \quad (6.7b)$$

Luego, el algoritmo debe iterar usando la Ec.(6.7a) para obtener  $z_0$  y luego debe usar este valor en (6.7b) para calcular  $m_z$ .

El cálculo de  $m_z$  puede realizarse mediante manipulación simbólica (inversión matricial) o mediante un nuevo proceso de iteraciones que terminará tras dos pasos (la ecuación es lineal). Si no se conocen las derivadas parciales, estas pueden estimarse utilizando los coeficientes como se hizo en la Ecuación (5.12).

Cuando  $z$  y  $g(v, z)$  son escalares, la Ecuación (6.7b) puede resolverse fácilmente. En este caso se tiene

$$m_z = - \frac{\left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{(v_0, z_0)} m_v}{\left. \frac{\partial g}{\partial z} \right|_{(v_0, z_0)}} \quad (6.8)$$

y luego, el modelo DEVS puede construirse como sigue

$$\begin{aligned} M_{11} &= \langle X, S, Y, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta \rangle, \text{ con:} \\ X &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N} \\ S &= \mathbb{R}^{3(m+1)} \times \mathbb{R}_0^+ \infty \\ Y &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N} \\ \delta_{\text{int}}((v_1, m_{v_1}, c_1), \dots, (v_m, m_{v_m}, c_m), (z, m_z, c_z), \sigma) &= \\ &= ((v_1, m_{v_1}, c_1), \dots, (v_m, m_{v_m}, c_m), (z, m_z, c_z), \infty) \\ \delta_{\text{ext}}((v_1, m_{v_1}, c_1), \dots, (v_m, m_{v_m}, c_m), (z, m_z, c_z), \sigma, e, u, mu, p) &= \\ &= ((\tilde{v}_1, \tilde{m}_{v_1}, \tilde{c}_1), \dots, (\tilde{v}_m, \tilde{m}_{v_m}, \tilde{c}_m), (\tilde{z}, \tilde{m}_z, \tilde{c}_z), 0) \\ \lambda((v_1, m_{v_1}, c_1), \dots, (v_m, m_{v_m}, c_m), (z, m_z, c_z), \sigma) &= (z, m_z, 1) \\ ta((v_1, m_{v_1}, c_1), \dots, (v_m, m_{v_m}, c_m), (z, m_z, c_z), \sigma) &= \sigma \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{v}_i = \begin{cases} u & \text{si } p = i \\ v_i + m_{v_i}e & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\tilde{z} = h(\tilde{v}, z)$$

donde  $h$  es el resultado de las iteraciones que resuelven la Ecuación (6.7a) comenzando desde el valor inicial  $z$ .

Los coeficientes que estiman las derivadas parciales pueden recalcularse según:

$$\tilde{c}_i = \begin{cases} \frac{g(v + m_{v_i}e, \tilde{z})}{v_i + m_{v_i}e - \tilde{v}_i} & \text{si } p = i \wedge v_i + m_{v_i}e - \tilde{v}_i \neq 0 \\ c_i & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\tilde{c}_z = \begin{cases} \frac{g(\tilde{v}, z + m_z e)}{z + m_z e - \tilde{z}} & \text{si } z + m_z e - \tilde{z} \neq 0 \\ c_z & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y finalmente, las pendientes nuevas son

$$\tilde{m}_{v_i} = \begin{cases} m_u & \text{si } p = i \\ m_{v_i} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\tilde{m}_z = -\frac{1}{\tilde{c}_z} \sum_{i=1}^m \tilde{m}_{v_i} \tilde{c}_i$$

Si  $m$  es grande, es decir si  $v$  tiene muchos componentes, la nueva pendiente de salida  $\tilde{m}_z$  puede recalcularse con la fórmula equivalente:

$$\tilde{m}_z = \frac{c_z}{\tilde{c}_z} m_z + \frac{1}{\tilde{c}_z} (m_{v_p} c_p - \tilde{m}_{v_p} \tilde{c}_p)$$

Este último modelo es una posible alternativa para resolver una restricción implícita como (6.6) teniendo en cuenta las pendientes. Hay, por supuesto, otras alternativas. Cuando la función  $g$  es lineal este modelo DEVS produce los valores de salida exactos de  $z$  y  $m_z$ . En otro caso, el mismo brinda sólo una aproximación de primer orden.

**Ejemplo 6.1.** *Línea de Transmisión con Protección de Sobretensión.*

La Figura 6.2 muestra el modelo de la línea de transmisión de la Figura 5.3, modificado con el agregado de una carga.

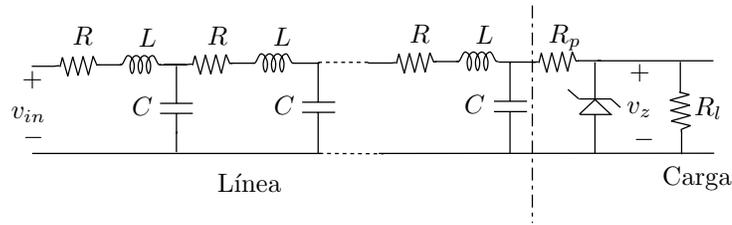


Figura 6.2: Línea de Trasmisión RLC con protección de sobretensión

La carga se compone de una resistencia  $R_l$  –que puede representar la compuerta de algún componente electrónico– y un circuito de protección formado por un diodo zener y un resistor  $R_p$ . Se considerará que el diodo zener satisface la siguiente característica no lineal entre la corriente y la tensión:

$$i_z = \frac{I_0}{1 - (v_z/v_{br})^m} \quad (6.9)$$

donde  $m, v_{br}$  e  $I_0$  son parámetros que dependen de diferentes características físicas.

Si la línea de transmisión se divide en 5 secciones –como se hizo antes– se

obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{di_1}{dt} &= \frac{1}{L}v_{in} - \frac{R}{L}i_1 - \frac{1}{L}u_1 \\
 \frac{du_1}{dt} &= \frac{1}{C}i_1 - \frac{1}{C}i_2 \\
 \frac{di_2}{dt} &= \frac{1}{L}u_1 - \frac{R}{L}i_2 - \frac{1}{L}u_2 \\
 \frac{du_2}{dt} &= \frac{1}{C}i_2 - \frac{1}{C}i_3 \\
 &\vdots \\
 \frac{di_5}{dt} &= \frac{1}{L}u_4 - \frac{R}{L}i_5 - \frac{1}{L}u_5 \\
 \frac{du_5}{dt} &= \frac{1}{C}i_5 - \frac{1}{R_p C}(u_5 - v_z)
 \end{aligned}$$

Aquí, las variables de estado  $u_j$  e  $i_j$  representan el voltaje y la corriente en los capacitores e inductancias respectivamente y el voltaje de salida  $v_z$  es una variable algebraica que debe cumplir

$$\frac{1}{R_p}u_5 - \left( \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_l} \right) v_z - \frac{I_0}{1 - (v_z/v_{br})^m} = 0 \quad (6.10)$$

Luego, se tiene una DAE que no puede convertirse en una ODE mediante manipulación simbólica. Aquí, la simulación utilizando cualquier método clásico debe iterar en cada paso para resolver la ecuación implícita (6.10).

Sin embargo, como puede deducirse de (6.4), el método de QSS (o QSS2) solo iterará cuando haya cambios en las versiones cuantificadas de  $u_5$ . En el resto de los pasos –cuando cambien las otras 9 variables cuantificadas o cuando cambie la entrada– no tendrá que realizarse ninguna iteración.

Utilizando estas ideas, se modificó la simulación de la página 79 con el agregado de un modelo DEVS como  $M_{11}$  que resuelve (6.10) teniendo en cuenta las pendientes.

Tomando  $R_l = 100M\Omega$ ,  $I_0 = 0.1\mu A$ ,  $v_{br} = 2.5V$ ,  $m = 4$  y sin modificar los parámetros restantes, se obtuvieron los resultados que se muestran en la Figura 6.3.

Los primeros 3.2ns de la simulación se completaron con 2640 pasos (entre 200 y 316 pasos en cada integrador). El modelo implícito ( $M_{11}$ ) realizó un total de 485 iteraciones con el método de la secante. El motivo de esto es que el integrador cuantificado que calcula  $u_5$  sólo realizó 200 transiciones internas y luego el modelo implícito recibió 200 eventos externos. El método de las secantes necesita entre dos y tres iteraciones para hallar la solución de la Ec.(6.10) con la tolerancia requerida (se tomó  $tol = 1 \times 10^{-8}$ ) lo que explica el hecho que el número total de iteraciones fue de 485 (entre 400 y 600).

Las ventajas del método de QSS2 son evidentes en este último ejemplo. En un algoritmo de tiempo discreto, el método de las secantes hubiera sido

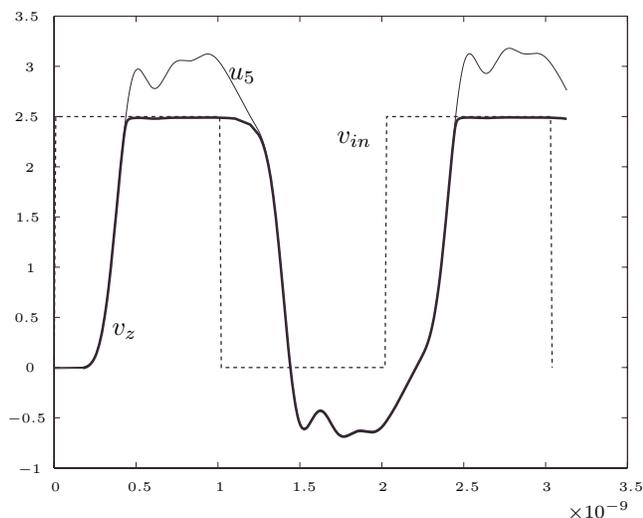


Figura 6.3: Simulación de una línea de transmisión RLC con protección de sobretensión

invocado en todos los pasos mientras que QSS2 sólo lo utilizó tras los cambios en  $u_5$  (aproximadamente en 1 de cada 13 pasos). Así, la presencia de la ecuación implícita sólo agregó unos pocos cálculos que no afectaron significativamente el costo computacional.

## 6.2 Simulación DEVS Bloqueorientada de DAEs

Los sistemas DAEs de índice 1 se representan muchas veces mediante Diagramas de Bloques conteniendo lazos algebraicos.

El circuito de la Figura 6.4, por ejemplo, puede modelizarse mediante el diagrama de bloques de la Figura 6.5. Las líneas gruesas en este diagrama indican la presencia de un lazo algebraico.

El método de QSS puede implementarse transformando los integradores en modelos DEVS como  $M_4$  (integradores cuantificados) y las funciones estáticas en su representación DEVS (modelos como  $M_2$ ). Luego, estos modelos DEVS pueden acoplarse de acuerdo al esquema de la Figura 6.5.

De hecho, esto es lo que se hizo para convertir el Sistema (3.2) en la representación DEVS de (3.3) (ver la Figura 3.2 en la página 34).

Aunque la traducción bloque por bloque de un sistema continuo en un modelo DEVS puede resultar en una simulación ineficiente (desde el punto de vista de los costos computacionales), es muy simple y no requiere de ningún tipo de manipulación simbólica.

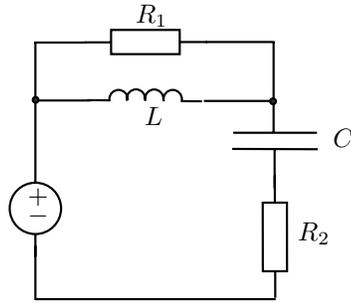


Figura 6.4: Circuito RLC

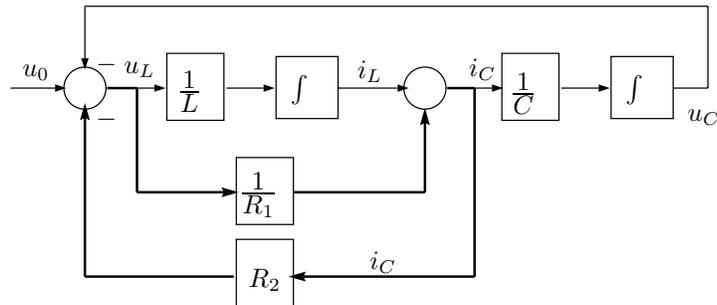


Figura 6.5: Diagrama de Bloques del circuito RLC

Los Diagramas de Bloques son una herramienta muy habitual para la representación de ecuaciones y programas para simular DEVS no brindan herramientas para traducir estos en sistemas de ecuaciones como (3.2). Por esto, si no se desea hacer la traducción a mano y no se cuenta con otro tipo de herramientas automáticas para generar un sistema de ecuaciones, la traducción bloque por bloque es la única posibilidad de aplicar el método de QSS.

Sin embargo, si se hace esto con el Diagrama de Bloques de la Figura 6.5 aparecerá un problema. Debido al lazo algebraico, el modelo DEVS resultará ilegítimo y cuando un evento entre al lazo se propagará por siempre a través de las funciones estáticas.

Evidentemente, es necesario agregar un nuevo modelo DEVS dentro del lazo tal que resuelva la ecuación implícita. Este nuevo modelo se llamará DEVS *rompe-lazo*.

En el ejemplo de la Figura 6.5, este modelo DEVS rompe-lazo puede colocarse, por ejemplo, antes de la ganancia  $R_2$  como se muestra en la Figura 6.6.

Luego, el modelo rompe-lazo recibirá los valores de  $i_C$  y deberá enviar  $\tilde{i}_C$ . Cada vez que este modelo DEVS envíe un evento, recibirá un nuevo evento con el valor  $i_C$  calculado por las funciones estáticas pertenecientes al lazo. Cuando este valor coincida con el valor de  $\tilde{i}_C$  que el modelo había enviado previamente esto querrá decir que la ecuación implícita se ha resuelto y no será necesario

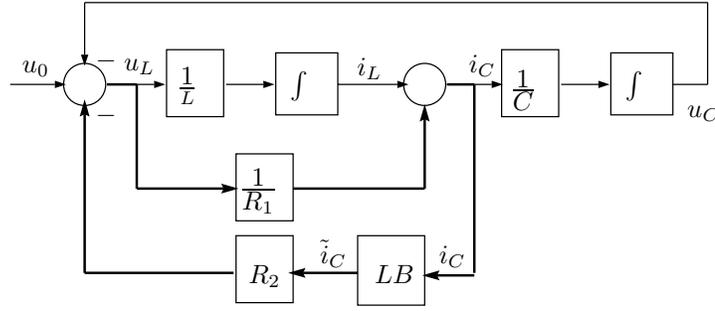


Figura 6.6: Agregado de un modelo rompe-lazo al Diagrama de Bloques de la Fig.6.5

enviar un nuevo valor de  $\tilde{i}_C$ . De esta forma, la simulación continúa fuera del lazo hasta que un nuevo valor de  $i_C$  llegue al modelo rompe-lazo y el proceso se repita.

Esta idea puede resolver el problema. Sin embargo, no se dijo aún como debe calcularse el valor de  $\tilde{i}_C$ .

Antes de contestar esto es necesario plantear el problema de una manera más formal y general.

Llamemos entonces  $z$  a la variable enviada por el modelo rompe-lazo. Luego, cuando este modelo envía un evento con el valor  $z_1$  este recibe inmediatamente un nuevo evento con un valor  $h(z_1)$  calculado por las funciones estáticas del lazo.

Luego, el modelo debe calcular un nuevo valor para  $z$ , que llamaremos  $z_2$ , y que debe satisfacer

$$h(z_2) - z_2 \triangleq g(z_2) \approx 0 \quad (6.11)$$

Si esto no se verifica, el proceso debe repetirse enviando un nuevo valor  $z_3$ .

Queda claro entonces que  $z_{i+1}$  deberá calcularse mediante algún algoritmo iterativo para encontrar la solución de  $g(z) = 0$ . Teniendo en cuenta que la derivada de  $g(z)$  no es conocida, una buena alternativa a la iteración de Newton es utilizar el método de las secantes.

Con este método, el modelo DEVS rompe-lazo puede representarse como sigue:

$M_{12} = (X, Y, S, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta)$ , donde

$$X = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$$

$$Y = \mathbb{R} \times \mathbb{N}$$

$$S = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$$

$$\delta_{\text{ext}}(s, e, x) = \delta_{\text{ext}}(z_1, z_2, h_1, \sigma, e, x_v, p) = \bar{s}$$

$$\delta_{\text{int}}(s) = \delta_{\text{int}}(z_1, z_2, h_1, \sigma) = (z_1, z_2, h_1, \infty)$$

$$\lambda(s) = \lambda(z_1, z_2, h_1, \sigma) = (z_2, 1)$$

$$ta(s) = ta(z_1, z_2, h_1, \sigma) = \sigma$$

con

$$\tilde{s} = \begin{cases} (z_1, z_2, h_1, \infty) & \text{si } |x_v - z_2| < tol \\ (z_2, \tilde{z}, x_v, 0) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$\tilde{z} = \frac{z_1 \cdot x_v - z_2 \cdot h_1}{x_v - h_1 + z_1 - z_2} \quad (6.12)$$

El parámetro  $tol$  es el error máximo permitido entre  $z$  y  $h$ . La Ecuación (6.12) es el resultado de aplicar el método de las secantes para aproximar  $g(z) = 0$  donde  $g(z)$  está definido de acuerdo a (6.11). El algoritmo iterativo puede entonces cambiarse modificando (6.12).

**Ejemplo 6.2.** *Simulación Bloqueorientada de un Circuito RLC.*

Para el ejemplo del circuito, se construyó un modelo DEVS según la Figura 6.6 y se simuló hasta un tiempo final de 30 segundos. Los parámetros utilizados fueron  $R_1 = R_2 = L = C = 1$  y  $u_0$  se eligió igual a un escalón unitario. El quantum e histéresis fue 0.01 en ambas variables de estado y la tolerancia de error  $tol$  se tomó igual a 0.001.

La simulación –cuyos resultados se muestran en la Figura 6.7– se completó tras 118 y 72 transiciones en cada integrador cuantificado y un total de 377 iteraciones en el modelo DEVS rompe-lazos.

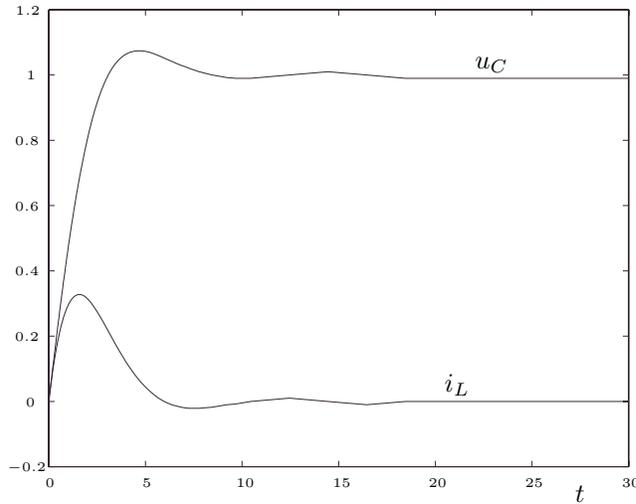


Figura 6.7: Simulación de un circuito RLC con QSS usando un DEVS rompe-lazos

En este caso, debido a la linealidad del sistema, el método de las secantes obtiene la solución exacta de  $g(z) = 0$  en sólo dos iteraciones. Esto explica el hecho que el número total de iteraciones sea aproximadamente el doble del total de pasos.

Una observación interesante es que el efecto del error en el cálculo de  $i_C$  puede verse como una perturbación adicional. Si se puede asegurar que este error es acotado, la perturbación es también acotada y puede ser vista como algo equivalente a tener un quantum más grande, lo que sólo afectará la cota de error pero no modificará las propiedades de estabilidad. Esta misma observación es válida para el ejemplo de la línea de transmisión.

Por último, debe también mencionarse que puede obtenerse un modelo DEVS rompe-lazo como  $M_{12}$  para el caso del método de QSS2 siguiendo las mismas ideas que antes.

### 6.3 QSS y QSS2 en la Simulación de Sistemas Híbridos

La complejidad de muchos sistemas técnicos produce modelos que frecuentemente combinan una parte continua (descrita por ODEs o DAEs) y componentes discretos. La interacción entre estos subsistemas puede provocar cambios repentinos (discontinuidades) en la parte continua que deben ser tratados por los algoritmos de integración.

Estas discontinuidades provocan dificultades importantes en el contexto de los métodos clásicos de tiempo discreto. El problema es que los algoritmos de integración numérica en uso son incompatibles con la concepción de funciones discontinuas [49] y un paso de integración que salte sobre una discontinuidad puede provocar un error inaceptable.

Para evitar esto, los métodos deben realizar pasos en los instantes de tiempo en los cuales tienen lugar las discontinuidades. En consecuencia, los algoritmos para integrar sistemas híbridos deben tener herramientas para detectar la ocurrencia de discontinuidades (que generalmente incluyen iteraciones y costos computacionales adicionales), para adaptar el paso de integración de forma tal que se realicen pasos en los instantes detectados, y por supuesto, para representar y simular la parte discreta del sistema (que puede ser bastante complicada en sí misma) en interacción con la parte continua.

Aunque hay varios métodos y herramientas de software que simulan sistemas híbridos de una manera bastante eficiente, ninguno de estos puede escapar de los problemas mencionados.

Los cambios repentinos mencionados se denominan *eventos*, y pueden distinguirse dos casos según la naturaleza de los mismos. Los eventos que ocurren en un tiempo dado, de manera independiente de lo que esté pasando en la parte continua, se denominan *Eventos Temporales*. Por otro lado, los eventos que se producen cuando el estado del subsistema continuo alcanza alguna condición se denominan *Eventos de Estado*.

La integración a través de discontinuidades sin técnicas de detección de eventos puede causar ineficiencia severa, e incluso fallas de simulación o generación de secuencias de eventos incorrectas, debido a que la presencia de funciones que no son suaves viola las suposiciones teóricas en las que se basan los algoritmos

[3]. Por esto, los eventos temporales y de estado deben detectarse para realizar pasos cuando estos ocurran.

La incorporación de técnicas de detección de eventos en los métodos numéricos se ha venido estudiando desde la Tesis doctoral de François Cellier [8] y en la literatura reciente se pueden encontrar muchos trabajos al respecto (ver por ejemplo [52, 61, 57, 13]).

Aunque estas ideas funcionan bastante bien en general, las técnicas no dicen como representar las partes discretas y como agendar los eventos temporales en casos generales. Más aún, la detección de eventos de estado requiere realizar algunas iteraciones para encontrar los tiempos en los que ocurren los eventos.

En lo que refiere a los métodos de QSS y QSS2, se pueden esperar a priori ciertas mejoras debido a la naturaleza asincrónica de eventos discretos de los mismos.

Antes de comenzar a desarrollar las ideas sobre esto, es necesario mencionar que no existe una representación unificada de sistemas híbridos en la literatura.

De todas formas, los diferentes enfoques coinciden en describir los mismos como conjuntos de ODEs o DAEs que se seleccionan según alguna variable que evoluciona de modo discreto (se pueden encontrar diferentes ejemplos de representaciones de sistemas híbridos en [60, 4, 6, 3]).

Aquí se asumirá que el subsistema continuo estará representado por

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), z(t), m(t)) \quad (6.13a)$$

$$0 = g(x_r(t), u_r(t), z(t), m(t)) \quad (6.13b)$$

siendo  $m(t)$  una trayectoria seccionalmente constante proveniente de la parte discreta que define los diferentes modos del sistema. Luego, para cada valor de  $m(t)$  hay una DAE diferente representando la dinámica del sistema.

Se considerará también que la ecuación implícita (6.13b) tiene una solución para cada valor de  $m(t)$  (lo que implica que el Sistema (6.13) tiene siempre índice 1).

Independientemente de la manera en que se calcule  $m(t)$ , el sub-modelo de simulación correspondiente a la parte continua puede construirse considerando que  $m(t)$  actúa como una entrada.

Luego, los métodos de QSS y QSS2 aplicados a esta parte transformarán (6.13) en:

$$\dot{x}(t) = f(q(t), u(t), z(t), m(t)) \quad (6.14a)$$

$$0 = g(q_r(t), u_r(t), z(t), m(t)) \quad (6.14b)$$

con las mismas definiciones hechas en (6.4). Luego, el esquema de simulación para la parte continua será idéntica a la que se muestra en la Figura 6.1, pero ahora deberá incluirse  $m(t)$  en la entrada.

Una de las características más importantes de DEVS es su capacidad para representar todo tipo de sistemas discretos. Teniendo en cuenta que la parte continua está siendo aproximada por un modelo DEVS, es natural representar

también el comportamiento discreto por otro modelo DEVS. Luego, ambos modelos DEVS pueden acoplarse directamente para construir un modelo DEVS único que aproxime el sistema completo.

En presencia de sólo Eventos Temporales, el modelo DEVS que represente la parte discreta será un simple generador de eventos como  $M_5$  (página 40). Aquí, los eventos de salida llevarán los valores sucesivos de  $m(t)$

Luego, la simulación del sistema híbrido completo podrá realizarse acoplando este generador de eventos temporales con la parte continua.

Teniendo en cuenta la manera asincrónica en que funcionan los modelos DEVS de las funciones estáticas y los integradores cuantificados, los eventos serán procesados por la parte continua apenas sean producidos por el generador sin necesidad de modificar nada en los métodos de QSS o QSS2. Este tratamiento eficiente de los eventos es simplemente debido al comportamiento intrínseco de los métodos.

Este hecho hace una gran diferencia con respecto a los métodos de tiempo discreto que deben modificarse para realizar pasos en el instante en que se producen los eventos temporales.

En lo que respecta a los eventos de estado, la parte discreta está regida no sólo por el avance de tiempo sino también por algunos eventos que se producen cuando las variables de estado y entrada alcanzan ciertas condiciones.

Aquí, los métodos de QSS y QSS2 tienen una ventaja mayor: Las trayectorias de estado son perfectamente conocida en todo instante de tiempo. Más aún, estas son seccionalmente lineales o parabólicas lo que implica que detectar la ocurrencia de eventos es trivial.

Lo único que debe hacerse es brindar las trayectorias a la parte discreta tal que ésta pueda detectar la ocurrencia de los eventos y calcular la trayectoria de  $m(t)$ . Dado que las trayectorias de estado son sólo conocidas dentro de los integradores cuantificados, estos modelos deberían modificarse para que saquen no sólo las variables cuantificadas sino también las de estado.

Sin embargo, esto no es necesario. La parte discreta puede recibir las derivadas de las trayectorias de estado y luego integrarlas. Esto es simple y no requiere esfuerzo computacional alguno ya que estas trayectorias son seccionalmente constantes o seccionalmente lineales (en QSS2) y su integración sólo involucra la manipulación de los coeficientes de los polinomios correspondientes.

Utilizando estas ideas, el modelo de simulación para un sistema híbrido como (6.13) utilizando los métodos de QSS o QSS2 será un modelo DEVS acoplado con la estructura mostrada en la Figura 6.8.

Aquí, la parte discreta es un modelo DEVS que recibe los eventos representando los cambios en las derivadas del estado y los cambios en las trayectorias de entrada.

Dado que el modelo discreto recibe y produce sólo un número finito de eventos en un intervalo de tiempo finito (por su definición como modelo discreto), puede asegurarse que existe un modelo DEVS que lo represente sin importar la complejidad de su dinámica. Teniendo en cuenta esto, el esquema de la Figura 6.8 puede simular cualquier sistema como (6.13) en interacción con cualquier modelo discreto.

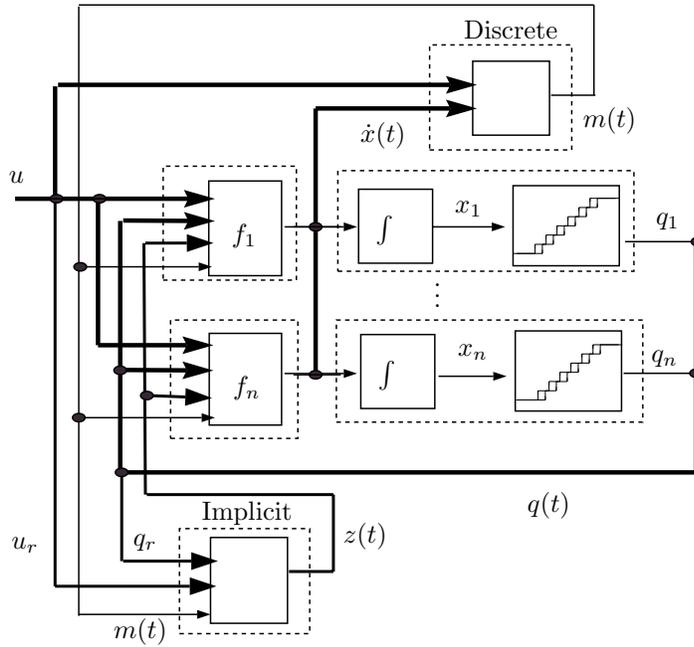


Figura 6.8: Esquema acoplado para la simulación de sistemas discontinuos

Hay casos donde este esquema puede simplificarse. Como se mencionó antes, cuando se consideran sólo Eventos Temporales, el modelo DEVS de la parte discreta no tiene entradas.

Usualmente, la condición de ocurrencia de los eventos está relacionada con un cruce por cero (o por algún otro valor fijo) de alguna variable de estado. En este caso, si la simulación se realiza con el método de QSS la condición puede ser directamente detectada por el integrador cuantificado. Este puede hacerse fácilmente con la condición que las funciones de cuantificación contengan niveles de cuantificación en los valores de cruce mencionados.

**Ejemplo 6.3.** *Circuito Inversor DC-AC.*

*El circuito inversor mostrado en la Figura 6.9 puede utilizarse para alimentar diferentes máquinas eléctricas por ejemplo.*

*El conjunto de llaves puede tomar dos posiciones. En la primera, las llaves 1 y 4 están cerradas y la carga recibe un voltaje positivo. En la segunda posición las llaves 2 y 3 están cerradas y ahora la tensión en la carga es negativa.*

*El sistema puede representarse por la siguiente ecuación diferencial:*

$$\frac{d}{dt}i_L = -\frac{R}{L} \cdot i_L + s_w \cdot V_{in} \tag{6.15}$$

donde  $s_w$  es 1 o  $-1$  según la posición de las llaves.

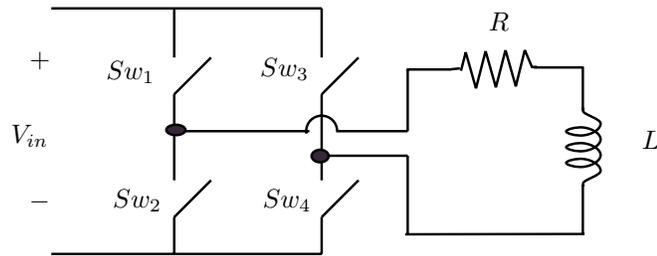


Figura 6.9: DC-AC Full Bridge Inverter

Una forma típica de controlar las llaves para obtener una corriente armónica en la carga es mediante una estrategia de modulación de ancho de pulso (PWM). La señal de PWM se obtiene comparando una onda portadora triangular con una referencia moduladora senoidal. El signo del voltaje a aplicar ( $+V_{in}$  o  $-V_{in}$ ) y la posición correspondiente de las llaves queda determinado por el signo de la diferencia entre ambas señales. La Figura 6.10 muestra esta idea.

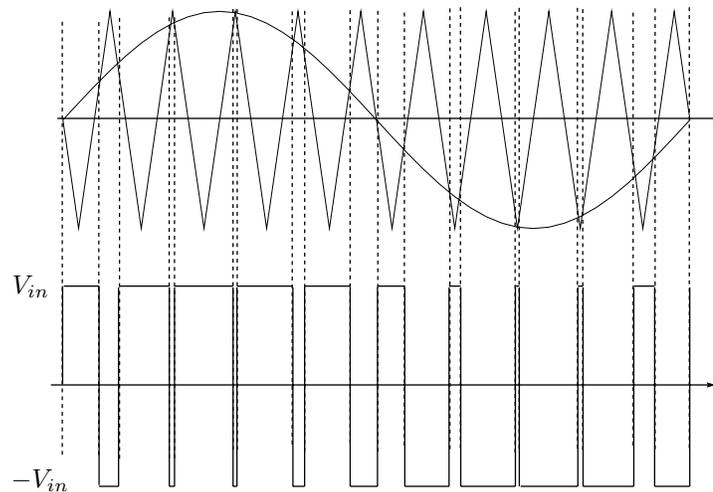


Figura 6.10: Modulación por Ancho de Pulso (PWM)

En esta caso, las llaves cambian su posición independientemente de lo que pasa en el circuito. Luego, los eventos representando los cambios son Eventos Temporales.

El sistema se simuló entonces con el método de QSS2 utilizando un esquema como el que se muestra en la Figura 6.8 pero donde el bloque discreto era simplemente un generador que produce eventos cuando cambia la variable  $sw$ .

Los tiempos de los eventos se calcularon para una frecuencia de portadora de

1.6kHz y una señal moduladora senoidal de la misma amplitud y una frecuencia de 50Hz. Luego, el número de eventos por ciclo era de 64, lo que es suficiente para producir una corriente senoidal bastante suave.

Utilizando parámetros  $R = 0.6\Omega$ ,  $L = 100\text{mHy}$  y  $V_{in} = 300\text{V}$  la simulación comenzando de  $i_L = 0$  con una cuantificación  $\Delta i_L = 0.01\text{A}$  produjo el resultado de las Figuras 6.11–6.12.

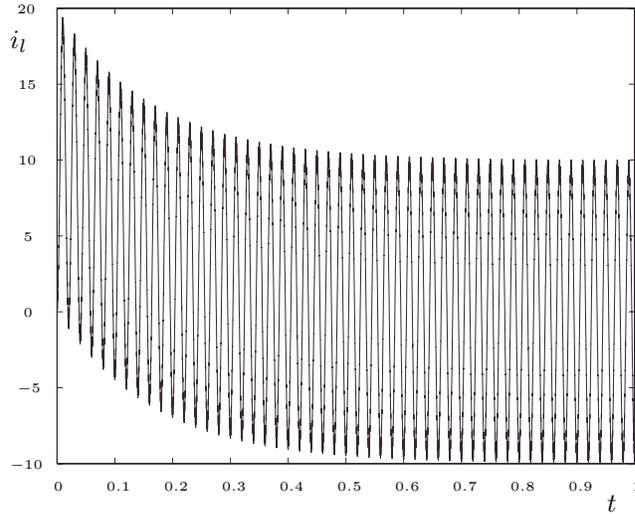


Figura 6.11: Corriente de carga con PWM

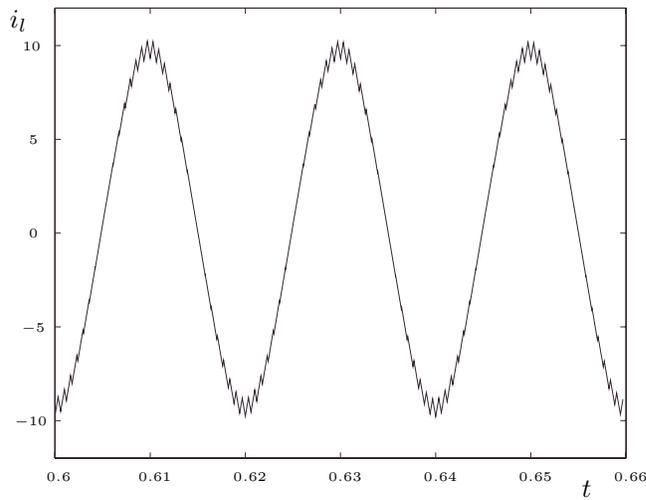


Figura 6.12: Detalle de la corriente de carga en régimen permanente

El tiempo final de la simulación fue de 1 segundo por lo que el número de ciclos fue 50. Esto da un total de 3200 cambios en la posición de las llaves.

A pesar de este número de eventos, la simulación se completó con sólo 3100 transiciones internas en el integrador cuantificado de segundo orden. El número total de pasos fue entonces de 6300 (contando los 3200 eventos del generador)

En este caso, dado que las conmutaciones no producían cambios estructurales (estas sólo afectan el signo del voltaje de entrada), la fórmula (4.50) puede aplicarse y luego se puede asegurar que el error en la trayectoria de  $i_L$  obtenida es siempre menor que 10mA (que es alrededor del 0.1% de la amplitud de las oscilaciones).

El mismo sistema se simuló con todos los métodos de tiempo discreto implementados en Simulink. El algoritmo ode5 (5to. orden) necesitó más de 50000 pasos para obtener un resultado aceptable. Por supuesto, métodos de paso fijo de orden menor requirieron de más pasos.

Utilizando métodos de paso variable el resultado fue aún peor. Sólo el método ode23s brindó un resultado aceptable con alrededor de 100000 pasos.

Las simulaciones se repitieron luego con métodos de paso variable forzando cálculos adicionales en los tiempos de los eventos. En este caso hubo una mejoría notable. De todas formas, utilizando la tolerancia obtenida con QSS2, el método ode23 (que ahora mostró el mejor desempeño) necesitó más de 20000 pasos para completar la simulación.

Sin embargo, este truco –forzar cálculos en instantes de tiempo predeterminados– no puede utilizarse en casos generales ya que los tiempos de los eventos frecuentemente son desconocidos antes que la simulación comience. En el caso de PWM, es común calcularlos durante la simulación ya que la frecuencia y amplitud de la señal moduladora cambian frecuentemente de acuerdo a estrategias de control.

**Ejemplo 6.4.** Una Pelotita Rebotando en una Escalera.

Un ejemplo típico de un sistema discontinuo es la pelotita rebotando. Aquí se considerará el caso en el que la misma se mueve en dos dimensiones ( $x$  e  $y$ ) rebotando en una escalera. De esta forma, la condición de rebote depende de ambas variables,  $x$  e  $y$ .

Se supondrá que la pelotita tiene un modelo en el aire –con la presencia de fricción– y uno diferente en el piso, donde se considerará un modelo resorte–amortiguador.

De acuerdo a esto, el modelo puede escribirse según

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= -\frac{b_a}{m} \cdot v_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_y &= -g - \frac{b_a}{m} \cdot v_y - s_w \cdot \left[ \frac{b}{m} \cdot v_y + \frac{k}{m} (y - \text{int}(h + 1 - x)) \right]\end{aligned}$$

donde  $s_w$  es igual a 1 en el piso y 0 en el aire. La función  $\text{int}(h + 1 - x)$  da la altura del piso en una posición determinada ( $h$  es la altura del primer escalón).

Notar que se consideran escalones de 1m por 1m.

Los Eventos de Estado se producen cuando  $x$  e  $y$  verifican la condición:

$$y = \text{int}(h + 1 - x)$$

La estructura del modelo de simulación resulta entonces similar a la de la Figura 6.8 pero sin el bloque implícito. El modelo discreto debe recibir los eventos con las derivadas de  $x$  e  $y$  y enviar eventos cuando la condición de rebote es alcanzada (para calcular esto, el modelo debe calcular las raíces de una ecuación de segundo grado para el método de QSS2).

El sistema fue entonces simulado con parámetros  $m = 1$ ,  $k = 100000$ ,  $b = 30$ ,  $ba = 0.1$ , condiciones iniciales  $x(0) = 0.575$ ,  $v_x(0) = 0.5$ ,  $y(0) = 10.5$ ,  $v_y = 0$  y un quantum de 0.001 en la posición horizontal, 0.0001 en la posición vertical y 0.01 en las velocidades.

Los primeros 10 segundos de la simulación se completaron con 2984 transiciones internas en los integradores (39 en  $x$ , 5 en  $v_x$ , 2420 en  $y$  y 520 en  $v_y$ ). Las trayectorias obtenidas no difieren apreciablemente de lo que puede obtenerse con un método de paso fijo de orden alto con un paso muy pequeño.

Las Figuras 6.13 y 6.14 muestran los resultados de simulación.

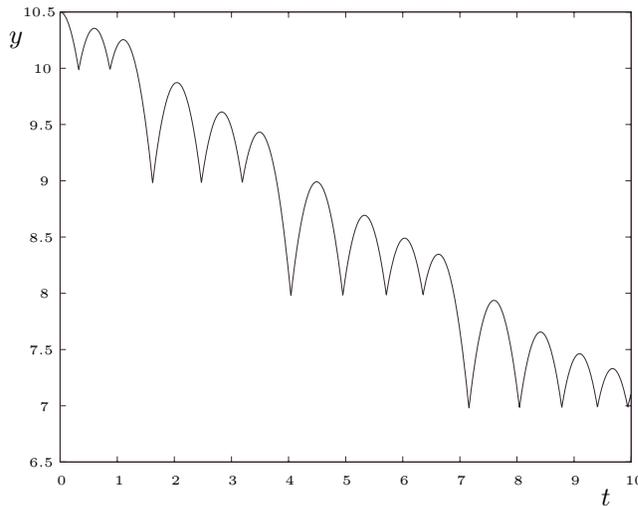


Figura 6.13:  $y$  vs.  $t$  en la pelotita rebotando

Es importante remarcar que cada paso solo involucra muy pocos cálculos y la ralidad es muy bien explotada. De hecho, las transiciones internas en  $x$  no afectan ningún otro subsistema. Los pasos en  $v_x$  brindan eventos al propio integrador, al integrador que calcula  $x$  y al modelo discreto que predice la ocurrencia del próximo evento. Similarmente los eventos internos de  $y$  sólo provocan eventos externos al integrador de  $v_y$  cuando la pelotita está en el piso y por último, los eventos producidos en  $v_y$  se propagan al propio modelo, al integrador que calcula  $y$  y al modelo discreto.

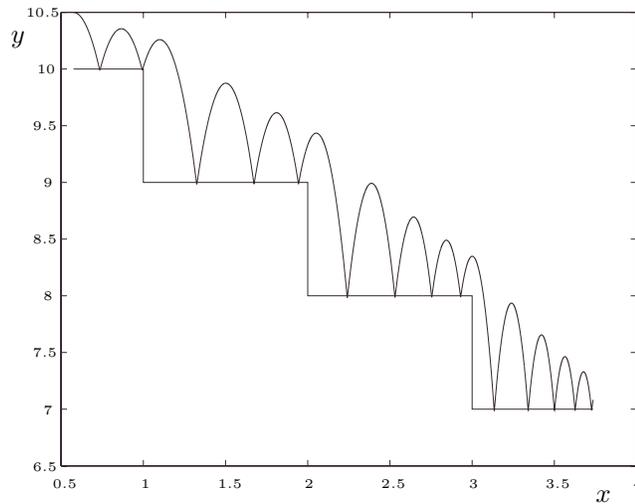


Figura 6.14:  $x$  vs.  $y$  en la pelotita rebotando

*Como resultado de esto, el modelo discreto recibe 525 eventos y produce sólo 26 transiciones internas (en los tiempos que ocurren eventos, o sea, dos eventos por cada rebote).*

*El mismo modelo se simuló con Simulink, utilizando distintos algoritmos de paso fijo y variable. La obtención de resultado similar con el método de paso fijo de quinto orden requiere más de 10000 pasos (y aquí cada paso involucra cálculos sobre todo el sistema).*

*En lo que refiere a métodos de paso variable, el mejor resultado con Simulink proviene del ode23s, que puede obtener un resultado similar al de QSS2 con alrededor de 5000 pasos.*

En el caso de la pelotita rebotando, el problema de los métodos de tiempo discreto es que cuando estos incrementan el paso comienzan a saltar eventos como se muestra en la Figura 6.15. Un ejemplo de este problema es el dado en [13] donde los autores brindan una solución basada en disminuir el paso a medida que el sistema se aproxima a las condiciones de discontinuidad.

Los enfoques basados en cuantificación no modifican nada. Estos simplemente aprovechan el bloque discreto que predice exactamente cuando ocurrirá el próximo evento y luego provocan un evento en ese instante. El resto del modelo DEVS (integradores cuantificados, funciones estáticas e implícitas) funcionan sin tener en cuenta la presencia de las discontinuidades pero reciben los eventos de la parte discreta y los tratan como si vinieran de un generador de entradas o de otro integrador cuantificado. En consecuencia, no hay cálculos adicionales y no hay necesidad de modificar nada.

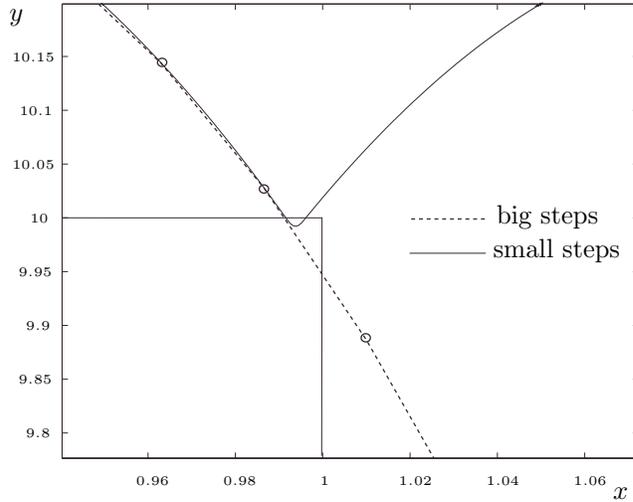


Figura 6.15: Salteo de pasos en algoritmos de tiempo discreto.

## 6.4 Bond Graphs Cuantificados

Los Bond Graphs [55, 9] permiten la representación gráfica de sistemas físicos complejos. De manera similar a otros lenguajes de modelado orientados a objetos, los modelos matemáticos resultantes consisten frecuentemente en sistemas de DAEs en lugar de simples ODEs.

La forma más eficiente –desde el punto de vista de los costos computacionales– de implementar una simulación por QSS de un modelo Bond Graph es obteniendo el sistema de ODEs o DAEs y luego utilizar los resultados explicados en las secciones previas. De hecho, hay muchas herramientas que traducen automáticamente los modelos Bond Graphs en sistemas de ecuaciones (Dymola y Modélica, por ejemplo) o en simples Diagramas de Bloques (Power DynaMo [37] entre estos últimos).

Sin embargo, como se mencionó en la Sección 6.2, a veces es más fácil realizar la simulación directamente sobre el modelo original.

Los modelos Bond Graph se forman mediante componentes estáticos y dinámicos que relacionan las variables de potencia  $e$  (*esfuerzo*) y  $f$  (*flujo*). Los componentes estáticos básicos son las resistencias (**R**), fuentes (**Se** y **Sf**) y los elementos estructurales: vínculos (**0** y **1**), transformadores (**TF**) y giradores (**GY**).

Los elementos dinámicos básicos son los capacitores **C** y las inercias **I**, que establecen relaciones entre esfuerzos y flujos con la presencia de integrales o derivadas.

La principal diferencia con los Diagramas de Bloques es que todas las relaciones mencionadas no están definidas causalmente *a priori*. De todas formas, se puede proponer y representar en el Bond Graph una causalización de las

mismas.

En ausencia de singularidades estructurales (o sea cuando no hay ni resistores acoplados ni almacenadores acoplados), puede encontrarse una asignación causal (siguiendo un algoritmo) tal que las relaciones sean equivalentes a las obtenidas con un Diagrama de Bloques con integradores.

Teniendo en cuenta que QSS modifica el sistema original agregando cuantificadores con histéresis a la salida de sus integradores, lo único que debe modificarse para utilizar este método son los capacitores e inercias.

Un capacitor define la siguiente relación entre las variables de potencia y la variable de energía ( $q$  o desplazamiento):

$$e(t) - g(q(t)) = 0 \quad (6.16a)$$

$$\dot{q}(t) - f(t) = 0 \quad (6.16b)$$

En este elemento, la asignación de *causalidad integral* produce que  $f(t)$  actúe como entrada y  $e(t)$  sea la salida correspondiente. El desplazamiento  $q(t)$  en tanto es la variable de estado (la salida del integrador).

El uso del método de QSS aquí transforma (6.16a) en

$$e(t) = g(q_q(t))$$

siendo  $q_q(t)$  la versión cuantificada de  $q(t)$ .

En esta última ecuación, puede formarse la composición de la función de cuantificación con la función  $g$  y reescribirse:

$$e(t) = g_q(q(t))$$

donde ahora la función  $g_q$  es una *función cuantificada* (la composición de una función de cuantificación con una función continua). La Figura 6.16 muestra una función no lineal y su versión cuantificada.

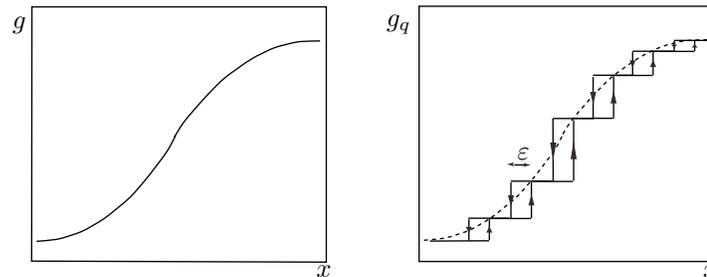


Figura 6.16: Una función y su versión cuantificada

Los mismos conceptos pueden aplicarse a las inercias y luego el método de QSS puede aplicarse a Bond Graphs reemplazando las funciones estáticas de las inercias y capacitores por sus versiones cuantificadas.

Las siguientes definiciones formalizan las ideas antes expresadas:

**Definición 6.1.** *Función Cuantificada con Histéresis.*

Sea  $x(t)$  una trayectoria escalar continua. Decimos que  $y(t)$  se relaciona con  $x(t)$  mediante una función cuantificada si existe una función  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$y(t) = g(z(t))$$

estando  $z(t)$  y  $x(t)$  relacionadas por alguna función de cuantificación con histéresis.

En tal caso, diremos también que  $x(t)$  e  $y(t)$  se relacionan por la versión cuantificada de la función  $g$

En base a esta definición se puede definir ahora lo siguiente:

**Definición 6.2.** *Capacitor (Inercia) Cuantificado.*

Un capacitor (inercia) cuantificado es un capacitor (inercia) donde el desplazamiento (impulso) se relaciona con el esfuerzo (flujo) mediante una función cuantificada con histéresis.

y finalmente,

**Definición 6.3.** *Bond Graph Cuantificado (QBG).*

Un Bond Graph Cuantificado es un Bond Graph donde las inercias y los capacitores son cuantificados.

Como se mencionó antes, en ausencia de singularidades estructurales un Bond Graph es equivalente a un Diagrama de Bloques con integradores y define un sistema de ecuaciones de estado como (3.2) donde las variables de estado son las correspondientes variables de energía ( $p$  y  $q$ ) de las inercias y capacitores.

Si en ese sistema las funciones estáticas que relacionan las variables de energía y de potencia de las inercias y capacitores se reemplazan por sus versiones cuantificadas, se obtiene un QBG. Puede verse fácilmente que si se escriben las nuevas ecuaciones se obtiene un sistema como (3.3).

Luego, todo lo que se demostró para el método de QSS vale en QBG. En lo que refiere a las trayectorias, tenemos que

**Teorema 6.1.** *Trayectorias en QBG.*

Sea un QBG sin almacenadores acoplados, donde todos los componentes pasivos y estructurales están definidos por relaciones continuas y acotadas. Luego, las trayectorias de todas las variables de potencia son seccionalmente constantes y las trayectorias de todas las variables de energía son seccionalmente lineales.

*Demostración.* Bajo las suposiciones hechas, la utilización del procedimiento estándar para obtener ecuaciones de estados [55] en el QBG producirá un QSS de la forma de (3.3).

Allí, debido también a las suposiciones, la función  $f$  será acotada y continua en cualquier conjunto compacto. Esta propiedad, junto con el Teorema 3.1, garantiza que las trayectorias de las variables de energía cuantificadas sean seccionalmente constante. Las variables de potencia son consecuentemente también

seccionalmente constantes, ya que estas se calculan de las anteriores a través de relaciones estáticas.

Luego, sigue que las variables de energía son seccionalmente lineales debido que pueden calcularse como la integral de algunas variables de potencia.  $\square$

En base a este resultado y teniendo en cuenta que los elementos de Bond Graph están relacionados entre sí por las variables de potencia, puede obtenerse una representación DEVS exacta de cada componente de un QBG.

El elemento estático  $\mathbf{R}$  calcula un esfuerzo o flujo seccionalmente constante de acuerdo a un flujo o esfuerzo de entrada seccionalmente constante. Luego, este elemento puede representarse mediante un modelo como  $M_2$ .

Pueden utilizarse ideas similares con los transformadores y giradores, pero ahora estos calculan dos variables de potencia seccionalmente constantes y el modelo DEVS debe ser modificado agregando un nuevo puerto de salida. Un modelo DEVS posible para un transformador o girador (que relacionan esfuerzos y flujos mediante una función  $h$ ) es el siguiente:

$$\begin{aligned}
M_{13} &= (X, Y, S, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta), \text{ donde} \\
X &= Y = \mathbb{R} \times \mathbb{N} \\
S &= \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}_0^+ \\
\delta_{\text{int}}(s) &= \delta_{\text{int}}(u_1, u_2, m, \sigma) = (u_1, u_2, m, \infty) \\
\delta_{\text{ext}}(s, e, x) &= \delta_{\text{ext}}((u_1, u_2, m, \sigma), e, (x_v, p)) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, p, 0) \\
\lambda(s) &= \lambda(u_1, u_2, m, \sigma) = (h(u_m), m) \\
ta(s) &= ta(u_1, u_2, m, \sigma) = \sigma
\end{aligned}$$

con

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} x_v & \text{if } i = p \\ u_i & \text{otherwise} \end{cases}$$

El caso de vínculos multipuerto  $\mathbf{0}$  y  $\mathbf{1}$  puede tratarse de la misma forma (pero ahora con más que dos puertos de entrada).

En lo que refiere a los capacitores e inercias, el modelo será prácticamente el mismo que el de un integrador cuantificado. La única diferencia es que ahora la salida no es la variable cuantificada sino la variable de potencia.

Con esto, el modelo es simplemente el mismo que antes ( $M_4$  en la página 37) con sólo un cambio en la función de salida, que ahora será:

$$\lambda(s) = \lambda(x, d_x, j, \sigma) = (g(Q_{j+\text{sgn}(d_x)}), 1)$$

siendo  $g$  la función estática que relaciona las variables de energía y potencia correspondientes.

Las fuentes ( $\mathbf{Se}$  y  $\mathbf{Sf}$ ), como en el caso de QSS, estarán representadas por generadores DEVS.

Luego, el QBG se representará mediante un modelo DEVS acoplado formado por los modelos DEVS correspondientes a los elementos Bond Graph.

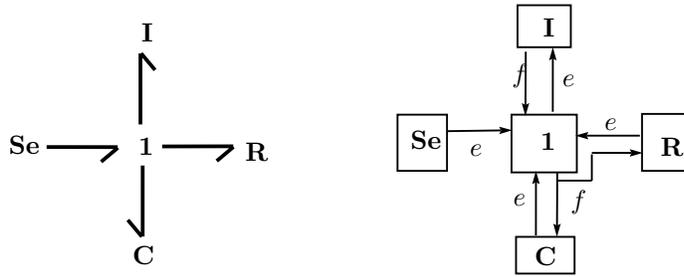


Figura 6.17: Estructura DEVS de un Bond Graph Cuantificado

La estructura DEVS acoplada será la del modelo Bond Graph, siendo cada arpción reemplazado por dos conexiones entre los elementos correspondientes. Estas conexiones transportarán valores de esfuerzo y flujo de acuerdo a la asignación de causalidad. La Figura 6.17 ilustra esta idea.

En ausencia de singularidades estructurales un QBG define un QSS. Por esto, sus propiedades teóricas –estabilidad, convergencia y cota de error– serán las mismas del QSS correspondiente.

**Ejemplo 6.5.** *Simulación QBG de un Motor de Corriente Continua.*

*El motor de imán permanente de la Figura 6.18 puede representarse por el Bond Graph de la Figura 6.19.*

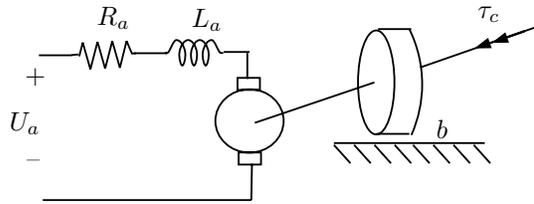


Figura 6.18: Motor de Corriente Continua de imán permanente.

Los parámetros adoptados fueron  $R_a = 0.01$ ,  $L_a = 1 \times 10^{-5}$ ,  $b = 1$ ,  $J = 1$  y  $k_m = 1$ . La simulación consiste en la respuesta del sistema inicialmente en reposo a un escalón de tensión de armadura de  $U_a = 10$  en  $t = 0$  y un escalón de torque de carga  $\tau_c = 10$  aplicado en  $t = 1$ .

El QBG se obtuvo utilizando un quantum de  $1 \times 10^{-5}$  en la inductancia y 0.1 en la inercia mecánica.

Los resultados se muestran en las Figuras 6.20–6.22.

El total de transiciones internas realizadas por las inercias cuantificadas durante la simulación de los primeros 2 segundos de la evolución fue de 203 y 103 en la parte eléctrica y mecánica respectivamente.

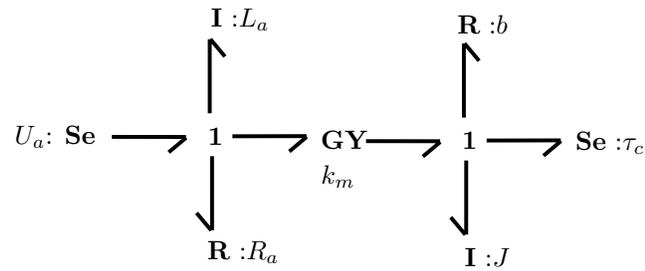


Figura 6.19: Modelo Bond Graph del motor de corriente continua

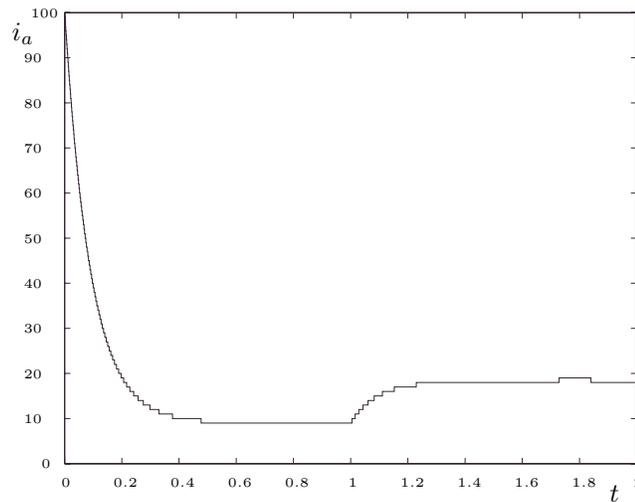


Figura 6.20: Corriente de armadura en el motor de corriente continua.

La rigidez del sistema puede verse fácilmente comparando las Figuras 6.21 y 6.22. Allí, el arranque de la corriente de armadura es muy rápido comparado con la evolución de la velocidad.

De hecho, la matriz de evolución es

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_m}{J} \\ \frac{k_m}{L_a} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix}$$

cuyos autovalores están ubicados en  $-9990$  y en  $-11.011$ .

El uso de (4.50) aquí brinda una cota de error de  $3.006 \times 10^{-5}$  en el flujo de la inductancia y de 0.1004 en el impulso mecánico (o sea, 3.006 en la corriente y 0.1004 en la velocidad angular).

En este caso, el método de QSS aplicado a través del enfoque de QBG funcionó muy bien. La simulación completa fue realizada con sólo 306 pasos mien-

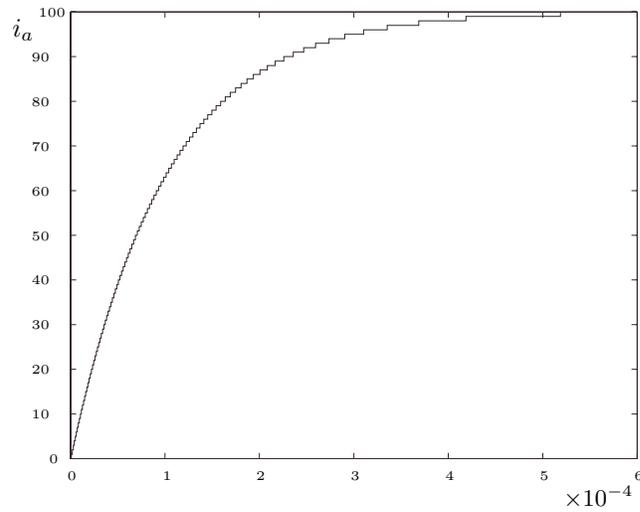


Figura 6.21: Comienzo de la trayectoria de corriente de armadura.

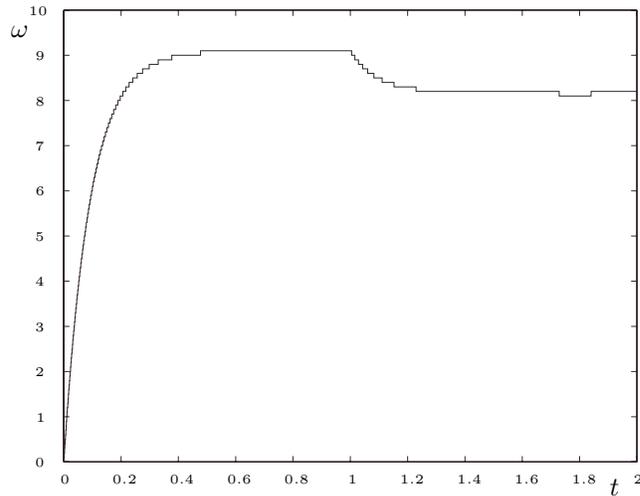


Figura 6.22: Velocidad angular en el motor.

tras que la mayor parte de los métodos clásicos requieren bastante más que esto. De hecho, resultados similares con el método de Euler requieren al menos 10000 pasos, 8000 con Runge-Kutta de cuarto orden y 6000 con Runge-Kutta 4-5 (ode45 de Matlab). Únicamente los métodos de paso variable implícitos pueden resolver el problema con menos de 100 pasos, pero la complejidad computacional de cada paso es considerablemente mayor que en QSS.

De todas formas, como se mencionó antes, QSS no funciona en sistemas

*stiff* generales. Este problema será tratado nuevamente más adelante.

## 6.5 QBG y Singularidades Estructurales

El uso de QBG en ausencia de singularidades estructurales no difiere significativamente de la simulación de Diagramas de Bloques. La presencia de estas singularidades, sin embargo, cambia todo.

En lo que refiere a los disipadores acoplados el sistema resultante tiene un lazo algebraico que resulta en una DAE de índice 1. Luego, lo que fue desarrollado en la Sección 6.2 puede aplicarse agregando modelos rompelazo entre los disipadores.

El caso de los almacenadores acoplados es algo más complejo, ya que resulta en causalidades derivativas que conlleva DAEs de índice superior. Por esto, este caso no puede tratarse siguiendo lo que ya se desarrolló.

Un camino posible es el uso del algoritmo de Pantelides para reducir el índice. Sin embargo, esta solución implica tratar con las ecuaciones resultantes y, de esa forma, se estaría volviendo al caso de simulación de DAEs sin utilizar la estructura del Bond Graph.

En estos casos de índice superior, una solución alternativa podría resultar de las siguientes observaciones. Para esto, consideremos un tanque como el que se muestra en la Figura 6.23.

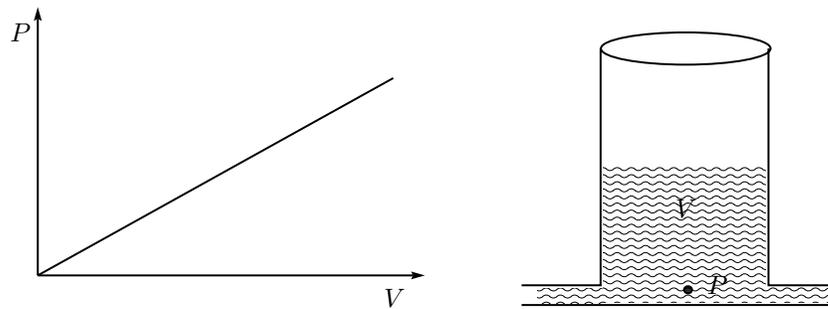


Figura 6.23: Tanque con relación lineal  $P$  vs.  $V$

Este tanque puede representarse por un capacitor en Bond Graph. El uso de QBG resulta en la cuantificación de la característica lineal  $P$  vs.  $V$ . Dejando a un lado la histéresis, la función cuantificada puede interpretarse físicamente como se muestra en la Figura 6.24.

Aquí, debe considerarse que la altura de cada compartimento tiende a cero mientras que el área tiende a infinito de manera tal que el volumen permanece constante.

En base a esta idea, veamos que ocurre con el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 6.6.** *Tanques acoplados.*

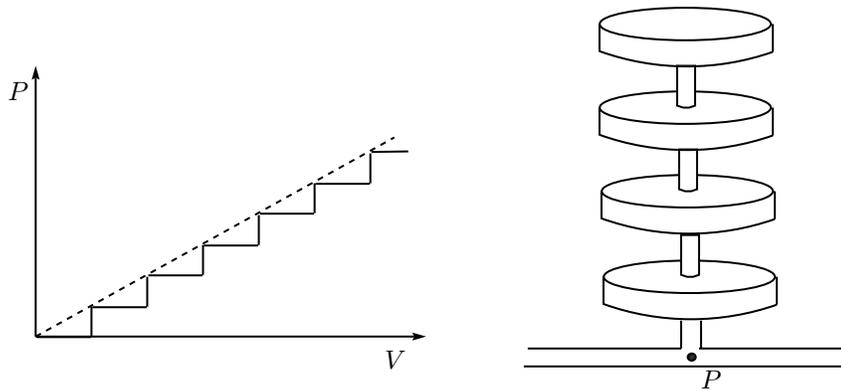


Figura 6.24: Tanque cuantificado físicamente.

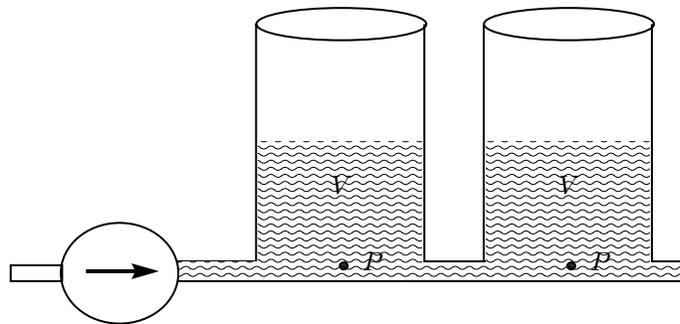


Figura 6.25: Dos tanques acoplados.

Consideremos el sistema hidráulico de la Figura 6.25.

Este sistema puede representarse por el Bond Graph de la Figura 6.26

En este ejemplo, el uso de QBG es equivalente a simular el sistema físicamente cuantificado que se muestra en la Figura 6.27.

En un sistema continuo, uno de los capacitores debería tener causalidad derivativa ya que es imposible que ambos calculen el esfuerzo de manera simultánea.

Sin embargo, el sistema de la Figura 6.27 funciona de otra forma. Supongamos que el sistema se alimenta desde condiciones iniciales nulas. El volumen en el tanque de la izquierda comienza a crecer, sin que fluya líquido al interior del tanque de la derecha (porque el diámetro de su primer columna es casi nulo).

Esta situación se invierte cuando el recipiente inferior del tanque de la izquierda se completa: el volumen en el primer compartimento del tanque de la derecha empieza a crecer, sin que fluya líquido al tanque de la izquierda.

La presión en la base del sistema es determinada exclusivamente por el compartimento que se está llenando en un dado momento. La presión cambia de

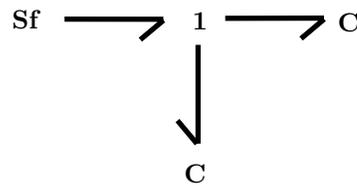


Figura 6.26: Bond Graph de los tanques acoplados

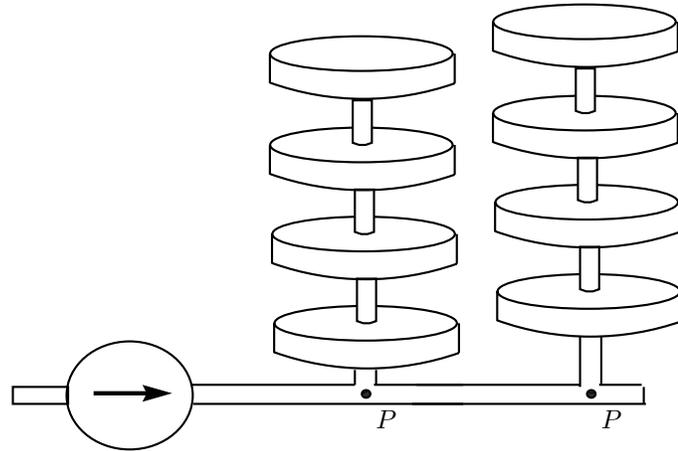


Figura 6.27: Dos tanques cuantificados acoplados.

*manera discontinua en los momentos en que cada compartimento se llena.*

*Este comportamiento indica que la causalidad integral es alternada entre ambos capacitores con el tiempo, lo que recuerda al comportamiento de los Switched Bond Graphs [59], donde las llaves imponen flujo o esfuerzo nulo de forma alternada.*

La idea anterior puede también aplicarse en caso de tener varios almacenadores acoplados, incluyendo ambos, inercias y capacitores. Esta situación resulta en un modelo con varias configuraciones causales alternativas que dependen de los valores de las variables de energía.

La presencia de histéresis no modifica los conceptos que se desprenden de las consideraciones previas.

Una consecuencia interesante de este análisis es que podrían simularse DAEs de índice superior en base a un comportamiento conmutado en lugar de reducir el índice e iterar.

Sin embargo, esta conjetura requiere una investigación mucho más exhaustiva. Además, la generalización de estas ideas para el método de QSS2 no es

evidente.

De todas formas, la aplicación de QSS en Bond Graphs muestra algunas ventajas relacionadas con la simplicidad y la posibilidad de simular directamente sobre el modelo sin manipulación algebraica previa.



## Capítulo 7

# Control de Estados Cuantificados

Las implementaciones prácticas de la mayor parte de los sistemas de control requieren de la utilización de dispositivos digitales. En estos casos, debido a la diferencia de naturaleza de las señales de entrada y salida del controlador digital y la planta continua, la interconexión entre los mismos debe realizarse a través de conversores A/D y D/A.

La implementación digital de controladores continuos puede pensarse como un problema de discretización de una ODE, generalmente realizada mediante Euler o alguna otra regla de aproximación de *tiempo discreto*.

Consecuentemente, las técnicas de conversión A/D realizan un muestreo sincrónico dejando la planta sin control entre las muestras sucesivas. Este hecho suele degradar la respuesta dinámica y afectar las regiones de atracción en sistemas no lineales.

Además de este problema las conversiones A/D se realizan con un número finito de bits, lo que conlleva efectos indeseados tales como errores en régimen permanente y oscilaciones. Debido a estos efectos de cuantificación debe reemplazarse la estabilidad asintótica por la acotación final de las soluciones y con esto, los puntos de equilibrio devienen en regiones atractoras.

Teniendo en cuenta que el método de QSS evita la discretización temporal, es natural pensar que su uso en el lugar del método de Euler puede brindar algún tipo de solución al problema de *intersampling* mencionado.

Por supuesto, esto debe complementarse con un esquema de muestreo asincrónico en los conversores A/D y D/A de manera tal que la planta esté siempre bajo control.

En lo que se refiere a los efectos de cuantificación, es sabido que QSS introduce oscilaciones finales. Sin embargo, como se vio en el estudio teórico, las cotas finales pueden limitarse con la elección de la cuantificación. Este hecho, traducido a control, implica que los efectos de cuantificación pueden acotarse en la etapa de diseño.

Estas ideas –aproximar el controlador continuo con el método de QSS y utilizar muestreo asincrónico– llevarán a la definición de un nuevo esquema de control digital basado en *eventos discretos*.

El método nuevo –que será llamado Control de Estados Cuantificados (QSC)– es un camino alternativo para implementar controladores digitales que, en algunos casos, muestra una mejora significativa de la respuesta dinámica y los efectos de cuantificación de los conversores con respecto a las aproximaciones de tiempo discreto.

Desde el punto de vista teórico, las propiedades de QSC resultarán similares a las de QSS permitiendo asegurar la estabilidad, convergencia y cota de error de la implementación bajo diferentes condiciones.

## 7.1 Muestreo Asincrónico

En todos los esquemas de control digital, las conversiones A/D y D/A se realizan de manera sincrónica. Como se mencionó antes, una de las metas de QSC es evitar la discretización temporal, lo que hace deseable utilizar un esquema asincrónico de muestreo.

Los conversores D/A son dispositivos de tipo asincrónico si bien sus entradas digitales suelen evolucionar a una frecuencia fija. De todas formas, estos pueden ser utilizados con entradas digitales que cambien de manera asincrónica sin muchas consideraciones especiales siempre y cuando esos cambios no sean demasiado rápidos con respecto a la dinámica interna de los circuitos.

Luego, si un dispositivo digital produce datos de salida de manera asincrónica, la correspondiente salida digital puede conectarse directamente a un conversor D/A y la señal analógica correspondiente se obtendrá con un retardo muy pequeño (los tiempos de conversión D/A son muy cortos).

El caso de los conversores A/D es más complejo dado que el período de conversión es generalmente mucho mayor que en el caso de los D/A. Si bien se puede dar la orden de realizar una conversión en cualquier instante (asincrónico), el resultado digital no estará disponible inmediatamente y el retardo consecuente puede ser completamente inaceptable si lo que se quiere es evitar la discretización del tiempo. Además, no queda claro en que momento debe hacerse la pretendida conversión asincrónica ya que la señal continua de salida de la planta es ahora la que se quiere convertir.

Una manera diferente de realizar muestreo A/D es la propuesta por Sayiner et al. en [56]. La idea es utilizar un conversor A/D que sólo realice conversiones cuando la diferencia entre la entrada analógica y la salida digital sea mayor que la resolución dada (ver Figura 7.1).

Este tipo de conversión A/D puede implementarse fácilmente con un esquema como el que se muestra en la Figura 7.2.

Aquí, el conversor A/D se implementa mediante un contador, un conversor D/A y un comparador. La salida del contador se conecta al conversor D/A y la salida del último se compara con la señal a muestrear. Cuando la diferencia es mayor que un dado umbral (el intervalo de cuantificación), el valor del contador

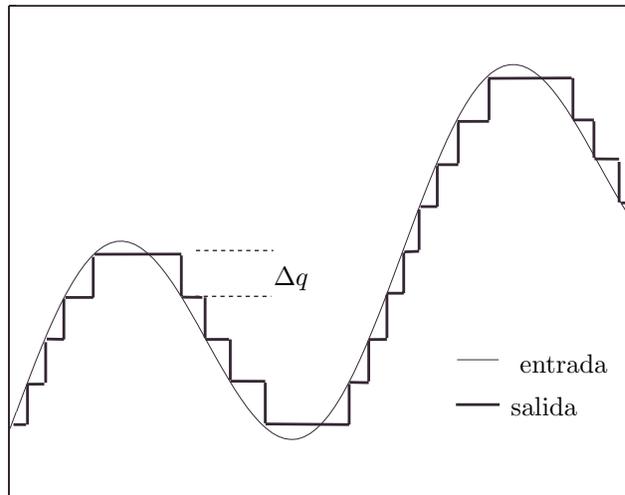


Figura 7.1: Conversión A/D asincrónica

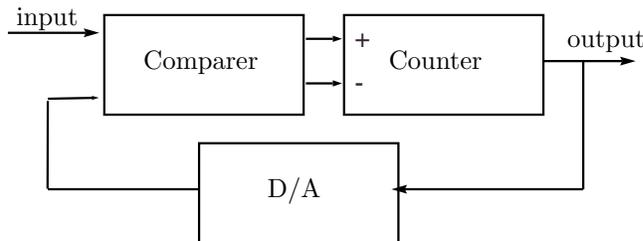


Figura 7.2: Conversor A/D asincrónico

se incrementa (o se decreenta según el signo de la diferencia). Luego, el valor del contador constituye la salida digital del convertor A/D.

El retardo en este esquema nuevo es insignificante comparado con un convertor A/D común ya que la salida digital se actualiza apenas el comparador detecta el cruce por el valor umbral.

## 7.2 El Esquema QSC

Como se vio en los capítulos anteriores, los Sistemas de Estados Cuantificados pueden representarse exactamente mediante modelos DEVS. Teniendo en cuenta que los modelos DEVS pueden simularse en tiempo real<sup>1</sup> [64], se puede

<sup>1</sup>La representación DEVS de un QSS es exacta. Sin embargo, la simulación en tiempo real de DEVS tiene errores relacionados a la resolución temporal y los errores de redondeo introducidos por el dispositivo digital.

implementar una aproximación de una ODE basada en el método de QSS en un dispositivo digital funcionando en tiempo real.

Considerando esto último, pueden presentarse entonces las principales definiciones del Control de Estados Cuantificados:

Sea el Sistema Continuo de Control (CCS) formado por la planta y el controlador, Ecs.(7.1) y (7.2) respectivamente, y su interconexión (ideal), Ec.(7.3).

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) &= f_p(x_p(t), u_p(t), t) \\ y_p(t) &= g_p(x_p(t), t) \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= f_c(x_c(t), u_c(t), u_r(t)) \\ y_c(t) &= g_c(x_c(t), u_c(t), u_r(t)) \end{cases} \quad (7.2)$$

$$u_p(t) = y_c(t), \quad u_c(t) = y_p(t) \quad (7.3)$$

Se considera aquí que la planta podría ser inestacionaria. En lo que refiere al controlador, se asume que es estacionario y que tiene una referencia de entrada  $u_r(t)$ .

**Definición 7.1.** *Controlador QSC.*

*Se denomina Controlador de Estados Cuantificados (Controlador QSC) a cualquier QSS asociado a un controlador continuo (7.2)*

**Definición 7.2.** *Sistema QSC.*

*Un sistema QSC se define como un esquema de control compuesto por una planta continua y un controlador QSC conectados a través de conversores A/D y D/A asincrónicos.*

De acuerdo a estas definiciones, la implementación de un QSC requiere diseñar un controlador continuo, elegir la cuantificación a aplicar en cada una de sus variables de estado para obtener el QSS correspondiente y finalmente elegir la cuantificación de los conversores A/D y D/A.

La Figura 7.3 muestra una representación en diagrama de bloques de un sistema QSC.

La implementación QSC del controlador transforma (7.2) en el nuevo sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= f_c(q_c(t), u_c(t), u_r(t)) \\ y_c(t) &= g_c(q_c(t), u_c(t), u_r(t)) \end{cases} \quad (7.4)$$

La Figura 7.1 también muestra que la entrada y la salida de los conversores A/D se relacionan en realidad mediante funciones de cuantificación con histéresis donde el ancho de histéresis  $\varepsilon$  es igual al quantum  $\Delta q$ .

Los conversores D/A también introducen cuantificación (debido a que tienen un número finito de bits). Sin embargo, aquí no hay histéresis ya que no hay memoria en el comportamiento de los mismos.

En consecuencia, la presencia de conversores asincrónicos transforma (7.3) en:

$$u_p(t) = y_{c_q}(t), \quad u_c(t) = y_{p_q}(t) \quad (7.5)$$

donde las variables  $y_{c_q}(t)$  e  $y_{p_q}(t)$  son las versiones cuantificadas de las salidas del controlador y de la planta.

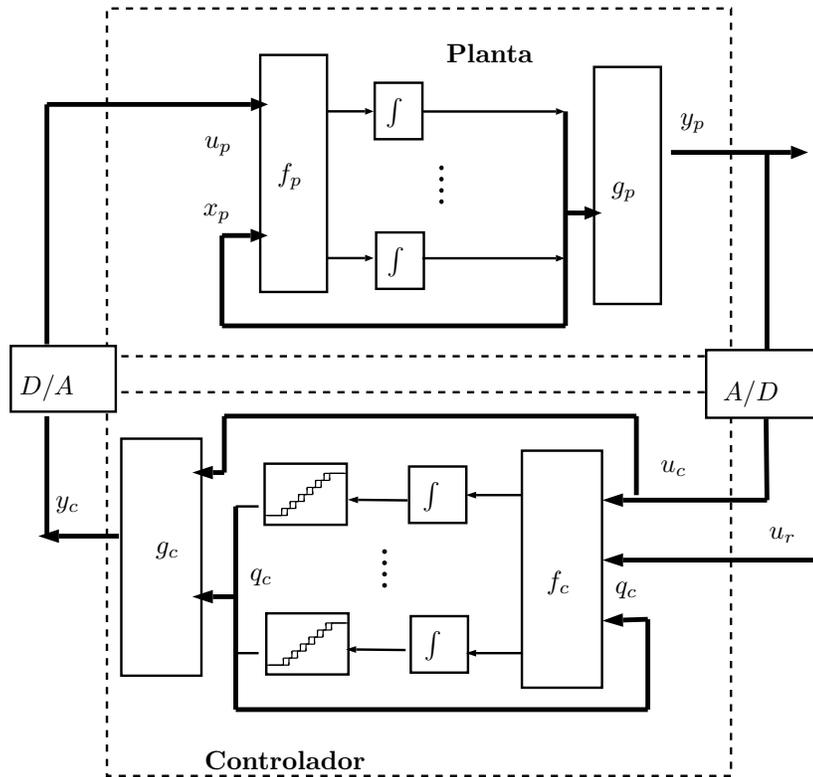


Figura 7.3: Diagrama de Bloques de un sistema QSC

### 7.3 QSC y Perturbaciones

El objetivo de QSC es obtener una aproximación digital del controlador continuo original. Dado que este fue diseñado originalmente para alcanzar ciertos objetivos, debería esperarse que el controlador QSC se comporte de una forma similar.

Teniendo en cuenta esto, lo primero que debiera asegurarse es que el sistema QSC conserve de alguna manera las propiedades de estabilidad del controlador continuo.

En el control digital clásico, el tiempo entre muestras debe cumplir algunas condiciones para conservar la estabilidad del sistema. Por ejemplo, en sistemas LTI, la frecuencia de muestreo debe ser mayor que la *frecuencia de Nyquist*.

En el caso de QSC, es lógico esperar encontrar algunas condiciones sobre la cuantificación en el controlador y los conversores para asegurar la estabilidad del esquema resultante.

Veamos entonces en primer lugar el caso más general, o sea, el de una planta posiblemente no lineal e inestacionaria con un controlador eventualmente no lineal.

Aquí, las ecuaciones del CCS en lazo cerrado pueden obtenerse de las Ecuaciones (7.1)–(7.3) llegando a

$$\begin{cases} \dot{x}_p &= f_p(x_p, g_c(x_c, g_p(x_p, t), u_r), t) \\ \dot{x}_c &= f_c(x_c, g_p(x_p, t), u_r) \end{cases} \quad (7.6)$$

Definiendo entonces

$$\Delta x_c(t) \triangleq q_c(t) - x_c(t) \quad (7.7a)$$

$$\Delta y_p(t) \triangleq y_{p_q}(t) - y_p(t) \quad (7.7b)$$

$$\Delta y_c(t) \triangleq y_{c_q}(t) - y_c(t) \quad (7.7c)$$

resulta que de las Ecuaciones (7.1), (7.4) y (7.5), las ecuaciones del QSC en lazo cerrado pueden escribirse como:

$$\begin{cases} \dot{x}_p &= f_p(x_p, g_c(x_c + \Delta x_c, g_p(x_p, t) + \Delta y_p, u_r) + \Delta y_c, t) \\ \dot{x}_c &= f_c(x_c + \Delta x_c, g_p(x_p, t) + \Delta y_p, u_r) \end{cases} \quad (7.8)$$

Luego, el sistema QSC (7.8) puede verse como una versión perturbada del CCS original (7.6). Mas aún, teniendo en cuenta lo que ya se sabe sobre las funciones de cuantificación, las perturbaciones en el QSC están acotadas componente a componente por cada quantum correspondiente.

Esto en realidad será cierto siempre y cuando las variables  $x_c$ ,  $y_p$  e  $y_c$  no alcancen los límites de saturación correspondientes. Por esto, desde aquí hasta el final se considerará que la región de *no-saturación* es lo suficientemente grande para que las trayectorias no la abandonen.

En base a estas observaciones, las propiedades de la implementación por QSC de un CCS pueden estudiarse como el efecto de perturbaciones acotadas en el sistema en lazo cerrado original. Esto es completamente análogo a lo que ocurriría con las propiedades de la aproximación por QSS de ODEs.

En ese último caso, la estabilidad no podía asegurarse debido a la presencia de perturbaciones no evanescentes. Aquí se está frente al mismo caso y por lo tanto todo lo que puede esperarse con QSC es obtener trayectorias finalmente acotadas.

Mas aún, en las siguientes secciones se verá que todas las propiedades estudiadas en QSS resultarán muy similares en QSC. Sin embargo, la dependencia eventual de  $f_p$  y  $g_p$  con  $t$  agregará algunas complicaciones adicionales al análisis.

Por esto, comenzaremos estudiando las propiedades de QSC en plantas estacionarias y luego volveremos al caso general inestacionario.

## 7.4 Estabilidad de Sistemas QSC Estacionarios

Las propiedades de estabilidad de un sistema similar a (7.8) en relación a la estabilidad de (7.6) ya fueron estudiadas. De hecho, el Teorema 4.2 estableció

condiciones para asegurar la cota final de las trayectorias de la versión estacionaria (7.8) sin los términos de perturbación  $\Delta y_p$  y  $\Delta y_c$ .

Teniendo en cuenta ese resultado, intentaremos extenderlo y utilizarlo en el caso particular de un controlador QSC con una planta estacionaria.

Entonces, bajo las consideraciones mencionadas y considerando que la referencia  $u_r$  es nula o constante, las ecuaciones del CCS (7.1) y (7.2) pueden reescribirse como:

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = f_p(x_p(t), u_p(t)) \\ y_p(t) = g_p(x_p(t)) \end{cases} \quad (7.9)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = f_c(x_c(t), u_c(t)) \\ y_c(t) = g_c(x_c(t), u_c(t)) \end{cases} \quad (7.10)$$

mientras que el controlador QSC puede representarse por

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = f_c(q_c(t), u_c(t)) \\ y_c(t) = g_c(q_c(t), u_c(t)) \end{cases} \quad (7.11)$$

Con este nuevo conjunto de ecuaciones se puede entonces establecer el siguiente teorema:

**Teorema 7.1.** *Estabilidad de QSC Estacionario.*

Consideremos que el origen del CCS en lazo cerrado (7.9)–(7.10) es un punto de equilibrio regionalmente estable. Supongamos que las funciones  $f_p, g_p, f_c$  y  $g_c$  son continuamente diferenciables y que se conoce una función de Lyapunov  $V$  definida en una región abierta  $D$  que contiene al origen. Luego, puede encontrarse un sistema QSC asociado al CCS original tal que todas las condiciones iniciales en una región arbitraria interior a  $D$  son atraídas en tiempo finito a otra región arbitraria contenida en la anterior. Ambas regiones interiores deben estar limitadas por superficies de nivel de  $V$ .

*Demostración.* De las Ecuaciones (7.9), (7.10) y (7.3) pueden obtenerse las siguientes ecuaciones a lazo cerrado del CCS:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = f_p(x_p, g_c(x_c, g_p(x_p))) \\ \dot{x}_c = f_c(x_c, g_p(x_p)) \end{cases} \quad (7.12)$$

La implementación del sistema QSC correspondiente –Ecs.(7.11) y (7.5)– transforma (7.12) en:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = f_p(x_p, g_c(x_c + \Delta x_c, g_p(x_p) + \Delta y_p) + \Delta y_c) \\ \dot{x}_c = f_c(x_c + \Delta x_c, g_p(x_p) + \Delta y_p) \end{cases} \quad (7.13)$$

donde se está utilizando la notación introducida en (7.7a).

Sea:

$$\begin{aligned} \alpha(x, \Delta x_c, \Delta y_p, \Delta y_c) \triangleq & \quad (7.14) \\ & \frac{\partial V}{\partial x_p}(x) \cdot f_p(x_p, g_c(x_c + \Delta x_c, g_p(x_p) + \Delta y_p) + \Delta y_c) + \\ & \frac{\partial V}{\partial x_c}(x) \cdot f_c(x_c + \Delta x_c, g_p(x_p) + \Delta y_p) \end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x_p}(x) &= \left[ \frac{\partial V}{\partial x_{p_1}} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_{p_n}} \right] (x) \\ \frac{\partial V}{\partial x_c}(x) &= \left[ \frac{\partial V}{\partial x_{c_1}} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_{c_k}} \right] (x)\end{aligned}$$

donde  $n$  y  $k$  son el orden de la planta y el controlador respectivamente y  $V(x) = V(x_p, x_c)$  es la función de Lyapunov del sistema a lazo cerrado definido en (7.12). De la Ecuación (7.14) puede verse que:

$$\alpha(x, 0, 0, 0) = \dot{V}(x) \Big|_{(7.12)} \quad (7.15)$$

Sea  $D_1$  una región interior de  $D$  ( $D \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ) limitada por alguna superficie de nivel de  $V$ . Sea  $D_2$  otra región interior de  $D_1$  también limitada por una superficie de nivel de  $V$ . Sea  $D_3$  la región interior definida por  $D_3 = D_1 - D_2$ .

Dado que  $\dot{V}(x)$  es definida negativa, es posible encontrar un número positivo  $s$  tal que:

$$\dot{V}(x) < -s, \forall x \in D_3 \quad (7.16)$$

Sea  $\alpha_M$  una función definida según:

$$\alpha_M(\Delta x_c, \Delta y_p, \Delta y_c) \triangleq \sup_{x \in D_3} (\alpha(x, \Delta x_c, \Delta y_p, \Delta y_c)) \quad (7.17)$$

De (7.15) y (7.16) sigue que:

$$\alpha_M(0, 0, 0) < -s \quad (7.18)$$

Como la función  $\alpha$  es continua, la función  $\alpha_M$  resulta continua. De esta propiedad y de (7.18), dado un número arbitrario  $s_1$  ( $s > s_1 > 0$ ), es posible encontrar una constante positiva  $\rho$  tal que la condición:

$$\|(\Delta x_c, \Delta y_p, \Delta y_c)\| < \rho \quad (7.19)$$

implique que:

$$\alpha_M(\Delta x_c, \Delta y_p, \Delta y_c) < -s_1 \quad (7.20)$$

Teniendo en cuenta que las perturbaciones están acotadas por los intervalos de cuantificación respectivos, la condición dada en (7.19) puede satisfacerse eligiendo una cuantificación adecuada<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Por ejemplo, considerando la misma cuantificación uniforme en todas las variables cuantificadas, la condición mencionada puede alcanzarse tomando:

$$\Delta q < \frac{\rho}{\sqrt{k+m+p}}$$

donde  $\Delta q$  es el quantum (igual al ancho de histéresis),  $k$  es el orden del controlador (o sea, la dimensión de  $\Delta x_c$ ),  $p$  es el número de variables de salida de la planta (dimensión de  $\Delta y_p$ ) y  $m$  es el número de variables de entrada de la planta (dimensión de  $\Delta y_c$ ).

Sea  $\phi(t)$  una solución de la Ecuación (7.13) para la condición inicial  $\phi(t = 0) = x_0 \in D_3$ . Supongamos que la cuantificación fue tomada de forma tal que se satisface la condición dada por (7.19). De (7.13) y (7.14) sigue que:

$$\begin{aligned} \alpha(\phi, \Delta x_c, \Delta y_p, \Delta y_c) &= \frac{\partial V}{\partial x_p}(\phi) \cdot \dot{\phi}_p + \frac{\partial V}{\partial x_c}(\phi) \cdot \dot{\phi}_c = \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}(\phi) \cdot \dot{\phi} \end{aligned}$$

Usando (7.17) y (7.20) en la última ecuación, tenemos,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\phi) \cdot \dot{\phi} < -s_1 \quad (7.21)$$

Esta condición se cumplirá al menos durante cierto tiempo mientras  $\phi(t)$  permanezca en  $D_3$  (esto queda garantizado por la continuidad de  $\phi(t)$ ). Tras integrar ambos lados de la Desigualdad (7.21), resulta

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial V}{\partial x}(\phi) \cdot \dot{\phi} \cdot dt &< \int_0^t -s_1 \cdot dt \\ V(\phi(t)) - V(\phi(0)) &< -s_1 \cdot t \\ V(\phi(t)) &< V(x_0) - s_1 \cdot t \end{aligned}$$

Esto implica que  $V$  evaluada a lo largo de la solución está acotada por una función estrictamente decreciente mientras la solución permanece en  $D_3$ . Dado que el valor  $V(x_0)$  es menor que el valor que toma  $V$  en la frontera de  $D_1$ , está claro que la trayectoria nunca puede dejar  $D_1$ .

Sea  $V_1$  el valor que  $V$  toma en la frontera de la región  $D_2$ . Luego, puede verse fácilmente que la trayectoria alcanzará la región  $D_2$  en un tiempo finito  $t_1$  con:

$$t_1 \triangleq \frac{V(x_0) - V_1}{s_1} \quad (7.22)$$

lo que completa la demostración.  $\square$

**Corolario 7.1.** *Estabilidad Semiglobal de QSC.*

*Cuando la derivada de la función de Lyapunov es definida negativa en todo el espacio de estados, la implementación de QSC puede asegurar cota final semiglobal de las soluciones.*

La demostración es inmediata. Para alcanzar la estabilidad semiglobal basta con agrandar la región  $D_1$  indefinidamente. Desafortunadamente, esto también implica agrandar la región de no-saturación y luego, la estabilización global no puede asegurarse en casos generales.

La Ecuación (7.19) da la máxima perturbación permitida para asegurar el cumplimiento de la meta propuesta (o sea, región de atracción  $D_1$  y cota final dentro de  $D_2$ ). Dado que la máxima perturbación en cada variable está dada por el quantum correspondiente, esta ecuación puede utilizarse para elegir el

quantum en las diferentes variables de estado del controlador y en los conversores completando así el diseño del QSC.

Es importante notar que  $D_1$  es también la estima de la región de atracción del CCS utilizando la función de Lyapunov  $V$ . Luego, puede encontrarse una implementación QSC que conserva la región de atracción estimada.

La presencia de cuantificación igualmente destruye la estabilidad asintótica aunque aún puede asegurarse la existencia de una cota final par las soluciones. Más aún, la región final  $D_2$  puede ser elegida arbitrariamente. Sin embargo, si esta es tomada demasiado pequeña el quantum resultará demasiado pequeño y el costo computacional se incrementará por encima de lo que se puede implementar de manera práctica ya que, al igual que en QSS, la tasa de eventos en el controlador será aproximadamente proporcional a la inversa del quantum.

## 7.5 Algoritmo de Diseño de QSC Estacionario

En base a las ideas anteriores, el diseño de un controlador QSC puede dividirse en dos pasos. El primero es el diseño de un controlador continuo que puede hacerse siguiendo cualquier técnica.

El segundo es la elección de la cuantificación en cada variable. El uso de un quantum muy pequeño produce soluciones cuya cota final puede reducirse a valores arbitrariamente pequeños como se demostró en el Teorema 7.1.

Sin embargo, como ya se mencionó también, el uso de un quantum pequeño incrementa el número de eventos en el controlador y el dispositivo digital puede fallar en el intento de brindar los valores de salida correctos en el instante de tiempo requerido.

Por esto, hay que buscar una solución de compromiso entre la precisión y las consideraciones prácticas relacionadas a los costos computacionales. Entonces la idea es explotar el Teorema 7.1 para elegir la cuantificación de acuerdo a algunas características esenciales (región de atracción y cota final). De esta forma, la cuantificación adoptada deberá ser sólo lo suficientemente pequeña para asegurar estas propiedades y –siempre y cuando el CCS no sea demasiado rápido– que el dispositivo digital sea capaz de implementar correctamente el controlador QSC resultante.

La traducción de estas ideas en un algoritmo de diseño para QSC puede escribirse como sigue:

1. Diseñar un controlador continuo y calcular la función de Lyapunov  $V(x)$  para el CCS en lazo cerrado.
2. Identificar la región  $D$  donde la derivada de la función de Lyapunov es negativa y elegir la región de atracción  $D_1$  del QSC dentro del mismo y la región  $D_2$  de la cota final de acuerdo a los objetivos de control
3. Obtener las ecuaciones de lazo cerrado perturbadas de acuerdo a (7.13).
4. Obtener la función  $\alpha$  de acuerdo a (7.14) y  $\alpha_M$  según (7.17).

5. Calcular la constante  $s$  con (7.16) y elegir la constante positiva  $s_1 < s$ . Si la meta es sólo asegurar cota final en  $D_2$   $s_1$  debe elegirse muy pequeño. Si por el contrario la velocidad de convergencia es también importante,  $s_1$  puede elegirse teniendo en cuenta (7.22).
6. Encontrar el máximo valor de  $\rho$  tal que (7.19) implique (7.20).
7. Elegir la cuantificación en las variables de estado del controlador y los conversores tales que se cumpla (7.19).
8. Tomar los límites de saturación de las funciones de cuantificación fuera de la región  $D_1$

Puede verse que este algoritmo produce un controlador QSC que asegura una región de atracción  $D_1$  y cota final en  $D_2$ .

**Ejemplo 7.1.** *Estabilización de un Planta no Lineal Estacionaria.*

Sea la planta:

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) &= x_p^2 + u_p \\ y_p(t) &= x_p(t) \end{cases} \quad (7.23)$$

Se supondrá que el objetivo es estabilizar la misma en torno al origen.

El primer paso del algoritmo es el diseño de un controlador continuo. Por ejemplo, el siguiente controlador puede lograr la meta mencionada:

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= -x_c - u_c \\ y_c(t) &= x_c(t) - u_c(t) - u_c^2(t) \end{cases} \quad (7.24)$$

Las ecuaciones de lazo cerrado resultantes son las siguientes:

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) &= -x_p + x_c \\ \dot{x}_c(t) &= -x_p - x_c \end{cases}$$

Puede verificarse fácilmente que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente y globalmente estable. Tomando la función de Lyapunov:

$$V(x) = \frac{1}{2}x_p^2 + \frac{1}{2}x_c^2 \quad (7.25)$$

sigue que:

$$\dot{V}(x) = -x_p^2 - x_c^2$$

Dado que la estabilidad es global ( $D = \mathbb{R}^2$ ) la definición de la región  $D_1$  será sólo necesaria para elegir los límites de saturación (en este caso al menos). Supongamos también que se desea asegurar la convergencia de las trayectorias a la región  $D_2 = \{x/\|x\| < 1\}$ .

De (7.14), (7.23), (7.24) y (7.25) sigue que:

$$\begin{aligned} \alpha(x, \Delta x_c, \Delta y_p, \Delta y_c) = & \\ & -x_p^2 - x_c^2 + x_p(\Delta x_c - \Delta y_p - \Delta y_p^2 - 2x_p\Delta y_p + \\ & + \Delta y_c) + x_c(-\Delta x_c - \Delta y_p) \end{aligned} \quad (7.26)$$

El cálculo de  $\alpha_M$  siguiendo la definición en (7.17) es bastante difícil en realidad. Sin embargo, esta función puede ser fácilmente acotada. De (7.26) se obtiene que:

$$\alpha(x, \Delta x_c, \Delta y_p, \Delta y_c) \leq -\|x\|^2 + \|x\|(|\Delta x_c| + |\Delta y_p|) + \|x\|(|\Delta x_c| + |\Delta y_p| + |\Delta y_p^2|) + 2\|x\| |\Delta y_p| + |\Delta y_c|$$

Luego, de (7.17) y de la última desigualdad resulta que

$$\alpha_M(\Delta x_c, \Delta y_p, \Delta y_c) \leq \sup_{\|x\| \geq 1} [-\|x\|^2 + \|x\|(2|\Delta x_c| + 2(\|x\| + 1)|\Delta y_p| + |\Delta y_p^2| + |\Delta y_c|)]$$

Dado que fuera de la región  $D_2$  se satisface la condición  $\dot{V}(x) < -1$ , la cota de la velocidad de convergencia  $s_1$  puede elegirse entre 0 y 1. Supongamos que interesa que  $s_1 = 0.5$ . Luego, la cuantificación debe elegirse para satisfacer  $\alpha_M < -0.5$ , condición que puede verificarse eligiendo un quantum  $\Delta q = \varepsilon = 0.07$  en todas las variables.

Si la restricción sobre la velocidad de convergencia no se tiene en cuenta y el objetivo es simplemente asegurar estabilidad el quantum  $\Delta q = 0.07$  es suficientemente chico para garantizar la convergencia a la región dada por  $\|x\| < 0.4127$ .

El sistema QSC resultante fue simulado con una condición inicial  $x_p = 10$ ,  $x_c = 0$ . Los resultados se muestran en las Figuras 7.4 a 7.6. El número de conversiones realizadas por el conversor A/D fue de 178 para los 40 segundos simulados. El mínimo tiempo entre conversiones sucesivas fue de 5.6 milisegundos (al comienzo de la simulación) mientras que el máximo fue mayor que 2 segundos.

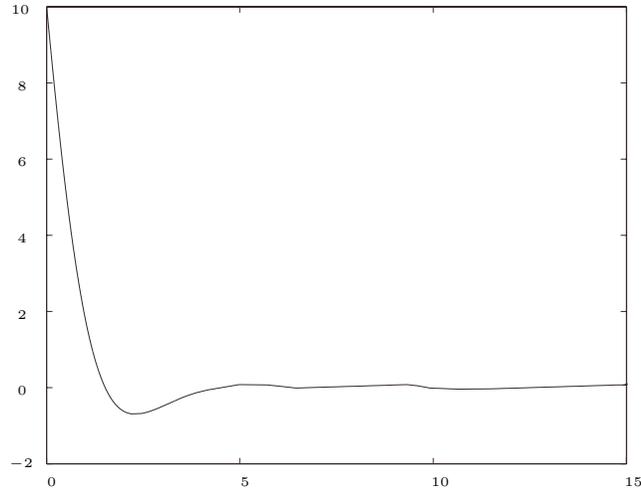


Figura 7.4: Evolución de  $x_p$  en la planta con QSC

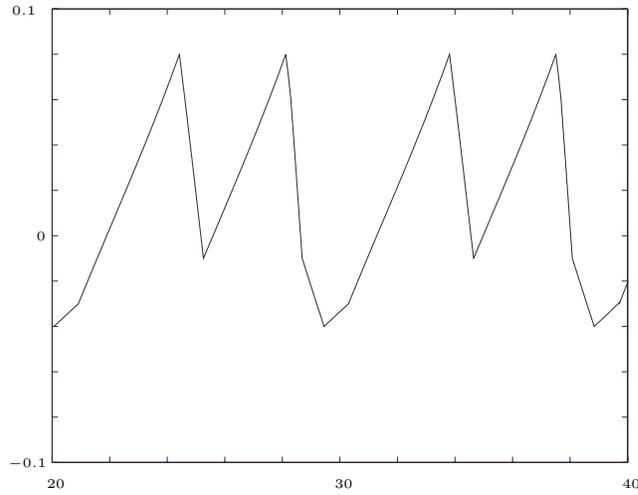
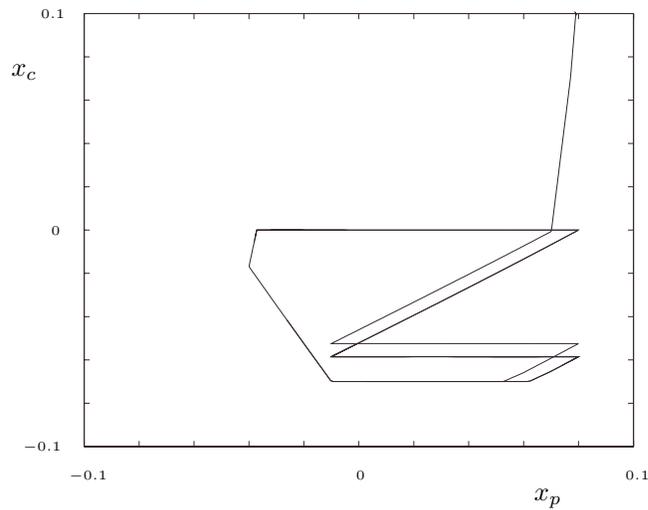
Figura 7.5: Oscilaciones finales en  $x_p$ 

Figura 7.6: Oscilaciones finales en el retrato de fases

La trayectoria de la Fig. 7.4 es bastante similar a la obtenida con el controlador continuo excepto por las oscilaciones finales en la Figura 7.5. Sin embargo, en la Fig. 7.6 la diferencia con el comportamiento del CCS es más evidente. Allí pueden verse claramente los fenómenos de cota final debido a la cuantificación y los cruces de trayectorias debidos a la histéresis.

## 7.6 Estabilidad de QSC Generales

El Teorema 7.1 se basó en el hecho que la planta era estacionaria. Sin embargo esa hipótesis no estaba presente en la definición general de QSC (allí solo se asumió que el controlador era estacionario ya que las ODEs inestacionarias no pueden aproximarse con el método de QSS).

Luego, se torna necesario extender estos resultados a los casos generales inestacionarios. Aquí, cuando la trayectoria de referencia  $u_r(t)$  es nula (o constante), el sistema QSC (7.8) puede reescribirse como

$$\dot{x} = f(x + \Delta x, \Delta y, t) \quad (7.27)$$

donde  $x \triangleq [x_p, x_c]^T$ ,  $\Delta x \triangleq [0, \Delta x_c]^T$ ,  $\Delta y \triangleq [\Delta y_p, \Delta y_c]^T$ , y  $f \triangleq [f_p, f_c]^T$ .

Con estas definiciones, el CCS (7.6) queda

$$\dot{x} = f(x, 0, t) \triangleq \tilde{f}(x, t) \quad (7.28)$$

y el problema puede reducirse a relacionar la estabilidad de los sistemas (7.27) y (7.28).

Entonces, para responder al problema, planteamos el siguiente teorema:

**Teorema 7.2.** *Estabilidad de QSC.*

Sea el origen un punto de equilibrio asintóticamente estable del CCS en lazo cerrado (7.28). Supongamos que la función  $f$  es continua y que se conoce una función de Lyapunov  $V(x, t)$  continuamente diferenciable, con

$$W_1(x) \leq V(x, t) \leq W_2(x) \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \tilde{f}(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -W_3(x) \quad (7.30)$$

$\forall t \geq 0, \forall x \in D$  siendo  $D$  una región compacta que contiene al origen y  $W_i$  son funciones definidas positivas definidas en  $D$ .

Sea  $\Omega_{2_a} = \{x | W_2(x) \leq a\}$  con  $a$  siendo una constante positiva arbitraria lo suficientemente pequeña para que  $\{x | W_1(x) \leq a\}$  sea una región cerrada dentro de  $D$ .

Sea  $\Omega_{1_b} = \{x | W_1(x) \leq b\}$  donde  $b$  es otra constante positiva arbitraria ( $b < a$ ) lo suficientemente pequeña tal que  $\Omega_{1_b} \subset \Omega_{2_a}$ .

Luego, puede encontrarse una cuantificación tal que las trayectorias del sistema QSC que comienzan en  $\Omega_{2_a}$  terminen en  $\Omega_{1_b}$ , alcanzando esta región en tiempo finito.

Notar que las condiciones que  $V(x, t)$  debe satisfacer –(7.29) y (7.30)– son simplemente las necesarias para asegurar la estabilidad del CCS original.

*Demostración.* La derivada de  $V(x, t)$  sobre las soluciones del sistema QSC (7.27) es

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x + \Delta x, \Delta y, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, 0, t) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot (f(x + \Delta x, \Delta y, t) - f(x, 0, t)) \end{aligned}$$

Luego, usando (7.30) resulta que

$$\dot{V}(x, t) \leq -W_3(x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot (f(x + \Delta x, \Delta y, t) - f(x, 0, t))$$

Sean las regiones  $\Omega_{2_b} = \{x | W_2(x) \leq b\}$  y  $\Omega_{1_a} = \{x | W_1(x) \leq a\}$ . De las hipótesis formuladas acerca de  $a$  y  $b$ , resulta que

$$\Omega_{2_b} \subset \Omega_{1_b} \subset \Omega_{2_a} \subset \Omega_{1_a} \subset D$$

Dado que  $W_3(x)$  es definida positiva en  $D$ , es positiva en  $\Omega_{1,2} \triangleq \Omega_{1_a} - \Omega_{2_b}$ . Mas aún, existe una constante positiva  $s$  donde

$$s \triangleq \min_{x \in \Omega_{1,2}} W_3(x) \quad (7.31)$$

Definamos entonces la siguiente función

$$\alpha(x, \Delta x, \Delta y, t) \triangleq -W_3(x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot (f(x + \Delta x, \Delta y, t) - f(x, 0, t)) \quad (7.32)$$

La continuidad de las funciones  $W_3$  y  $f$  y el hecho que  $V$  es continuamente diferenciable implica que  $\alpha$  es continua. De la definición de  $\alpha$  y de la Ec.(7.31) resulta que

$$\alpha(x, 0, 0, t) \leq -s \quad \forall x \in \Omega_{1,2}, \forall t \geq 0$$

Sea  $\alpha_M$  entonces la función definida por

$$\alpha_M(\Delta x, \Delta y) \triangleq \sup_{x \in \Omega_{1,2}, t \geq 0} (\alpha(x, \Delta x, \Delta y, t)) \quad (7.33)$$

Puede verse fácilmente que  $\alpha_M$  es continua y  $\alpha_M(0, 0) \leq -s$ . Luego, para cualquier número positivo  $s_1 < s$  puede encontrarse una constante positiva  $\rho$  tal que la condición

$$\|(\Delta x, \Delta y)\| \leq \rho \quad (7.34a)$$

implique que

$$\alpha_M(\Delta x, \Delta y) \leq -s_1$$

y luego resulta que

$$\dot{V}(x, t) \leq \alpha(x, \Delta x, \Delta y, t) \leq \alpha_M(\Delta x, \Delta y) \leq -s_1$$

en  $\Omega_{1,2}$ .

Desde aquí hasta el final la demostración sigue la del Teorema 5.3 de [22].

Sean  $\Omega_{a,t} = \{x | V(x, t) \leq a\}$  y  $\Omega_{b,t} = \{x | V(x, t) \leq b\}$  dos conjuntos variables en el tiempo. De (7.29) resulta

$$\Omega_{2_b} \subset \Omega_{b,t} \subset \Omega_{1_b} \subset \Omega_{2_a} \subset \Omega_{a,t} \subset \Omega_{1_a} \subset D$$

La frontera de  $\Omega_{a,t}$  está dentro de  $\Omega_{1,2}$ , donde  $\dot{V}(x, t)$  es negativa. Esto implica que las trayectorias del sistema QSC (7.27) no pueden dejar  $\Omega_{a,t}$ .

Luego, cualquier trayectoria que comience en  $\Omega_{2_a}$  no puede abandonar  $\Omega_{1_a}$ . La frontera de  $\Omega_{b,t}$  está también dentro de  $\Omega_{1,2}$ . Luego las trayectorias tampoco pueden abandonar este conjunto variable en el tiempo.

Para completar la demostración, es necesario asegurar que las trayectorias iniciadas en  $\Omega_{2_a} \subset \Omega_{a,t}$  alcanzan  $\Omega_{b,t}$  en un tiempo finito.

Sea  $\phi(t)$  una solución de (7.27) comenzando en  $\Omega_{a,t}$  (i.e.  $V(\phi(0), 0) \leq a$ ) y supongamos que

$$V(\phi(t), t) > b \quad \forall t \quad (7.35)$$

luego tenemos que  $\dot{V}(\phi(t), t) \leq -s_1$  y tras

$$t_1 \triangleq \frac{a-b}{s_1} \quad (7.36)$$

resultará que  $V(\phi(t_1), t_1) \leq b$  lo que contradice lo asumido en (7.35). Luego, la región  $\Omega_{b,t}$  debe ser alcanzada antes del tiempo finito  $t_1$ .

Dado que  $\Omega_{b,t} \subset \Omega_{1_b}$  la trayectoria también alcanza la región  $\Omega_{1_b}$  antes de ese tiempo.  $\square$

Como antes, la Ecuación (7.34a) brinda la máxima perturbación permitida para asegurar el cumplimiento de la meta propuesta (ahora la región de atracción es  $\Omega_{2_a}$  y la cota final está dentro de  $\Omega_{1_b}$ ). Es también cierto que  $\Omega_{2_a}$  es la estimación de la región de atracción del CCS utilizando la función de Lyapunov  $V$ . Luego, podemos también en este caso encontrar una implementación QSC que conserva la región de estimación estimada.

## 7.7 Algoritmo General para la Implementación de QSC

Teniendo en cuenta las diferencias entre el Teorema 7.1 y el Teorema 7.2, el algoritmo de diseño introducido en la Sección 7.5 puede modificarse como sigue

1. Diseñar un controlador continuo y calcular la función de Lyapunov  $V(x, t)$  y las funciones  $W_i(x)$  de acuerdo a (7.29)–(7.30) para el CCS en lazo cerrado.
2. Elegir la región de atracción del QSC  $\Omega_{2_a}$  y la región de la cota final  $\Omega_{1_b}$  junto con las constantes  $a$  y  $b$ .
3. Obtener la función perturbada en lazo cerrado  $f$  según (7.27).
4. Obtener la función  $\alpha$  de acuerdo a (7.32) y  $\alpha_M$  de acuerdo a (7.33).
5. Calcular la constante  $s$  según (7.31) y elegir la constante positiva  $s_1 < s$ . Si la meta es sólo asegurar cota final en  $D_2$   $s_1$  debe elegirse muy pequeño. Si por el contrario la velocidad de convergencia es también importante,  $s_1$  puede elegirse teniendo en cuenta (7.36).

6. Calcular el valor de  $\rho$  según (7.34).
7. Elegir la cuantificación en las variables de estado del controlador y en los convertidores para cumplir con (7.34a).

Como antes, este algoritmo produce un controlador QSC que asegura una región de atracción  $\Omega_{2_a}$  y cota final en  $\Omega_{1_b}$ .

**Ejemplo 7.2.** *Control de Estados Cuantificados de una Planta Inestacionaria. La planta inestable e inestacionaria*

$$\begin{cases} \dot{x}_p &= x_p \cdot (1 + \sin t + \cos t) + u_p \\ y_p &= (2 + \cos t) \cdot x_p \end{cases}$$

puede ser estabilizada por el controlador

$$\begin{cases} \dot{x}_c &= -x_c + u_c \\ y_c &= -x_c - u_c \end{cases} \quad (7.37)$$

El sistema en lazo cerrado puede escribirse como

$$\begin{cases} \dot{x}_p &= -(1 - \sin t) \cdot x_p - x_c \\ \dot{x}_c &= (2 + \cos t) \cdot x_p - x_c \end{cases}$$

Aquí, la candidata de Lyapunov

$$V(x_p, x_c, t) = x_p^2 + \frac{1}{2}x_c^2 + \frac{1}{2}x_p^2 \cos t$$

verifica (7.29) con

$$\begin{aligned} W_1(x_p, x_c) &= \frac{1}{2}x_p^2 + \frac{1}{2}x_c^2 \\ W_2(x_p, x_c) &= \frac{3}{2}x_p^2 + \frac{1}{2}x_c^2 \end{aligned} \quad (7.38)$$

La derivada orbital en tanto es

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t} = (2 + \cos t) \cdot (\sin t - 1) \cdot x_p^2 - x_c^2 - \frac{1}{2}x_p^2 \sin t$$

satisfaciendo (7.30) con

$$W_3 = -\frac{1}{2}x_p^2 - x_c^2$$

Luego, el CCS en lazo cerrado es asintóticamente estable y el algoritmo que resulta del Teorema 7.2 puede utilizarse para diseñar el controlador QSC.

El primer paso para el diseño QSC consiste en elegir la región de atracción y la cota final. Dado que las Desigualdades (7.29)–(7.30) valen en  $\mathbb{R}^2$  (o sea que la estabilidad del CCS es global) no es necesario restringir (al menos en este caso) la región de atracción salvo para elegir los límites de saturación. Por esto, en este caso la elección de  $\Omega_{2_a}$  no afecta los cálculos.

La región de la cota final  $\Omega_{1_b}$  será elegida con  $b = 0.5$ . Luego, teniendo en cuenta (7.38) resulta que  $\Omega_{1_b} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ .

Las ecuaciones perturbadas (7.27) pueden escribirse como

$$\begin{cases} \dot{x}_p &= -(1 - \sin t) \cdot x_p - x_c - \Delta x_c + \Delta y_c - \Delta y_p \\ \dot{x}_c &= (2 + \cos t) \cdot x_p - x_c - \Delta x_c + \Delta y_p \end{cases}$$

y luego, de (7.32) la función  $\alpha(x, \Delta x, \Delta y, t)$  resulta

$$\alpha = -x_c^2 - \frac{1}{2}x_p^2 + x_p \cdot (2 + \cos t) \cdot (-\Delta x_c + \Delta y_c - \Delta y_p) + x_c \cdot (-\Delta x_c + \Delta y_p)$$

Si bien el máximo  $\alpha_M$  en (7.33) no puede obtenerse fácilmente, este puede acotarse como sigue

$$\begin{aligned} \alpha &\leq -\frac{1}{2}\|x\|^2 + \sqrt{9 \cdot (|\Delta x_c| + |\Delta y_c| + |\Delta y_p|)^2 + (|\Delta x_c| + |\Delta y_p|)^2} \cdot \|x\| \\ &\leq \|x\| \cdot \left(-\frac{1}{2}\|x\| + \sqrt{9 \cdot (|\Delta x_c| + |\Delta y_c| + |\Delta y_p|)^2 + (|\Delta x_c| + |\Delta y_p|)^2}\right) \end{aligned}$$

y luego, teniendo en cuenta que  $\|x\| > 1/3$  en  $\Omega_{1,2}$ , resulta que

$$\alpha_M \leq -\frac{1}{18} + \sqrt{9 \cdot (|\Delta x_c| + |\Delta y_c| + |\Delta y_p|)^2 + \frac{1}{9}(|\Delta x_c| + |\Delta y_p|)^2}$$

Entonces, tomando el quantum igual a 0.018 en el controlador y en los conversores podemos asegurar que

$$\alpha_M \leq -0.0093$$

en  $\Omega_{1,2}$ , lo que implica que las trayectorias terminan dentro de  $\Omega_{1_b}$  en tiempo finito, con una velocidad mínima  $s_1 = 0.0093$ .

Las Figuras 7.7–7.12 muestran los resultados de simulación para una condición inicial  $x_p = 5$ ,  $x_c = 0$ .

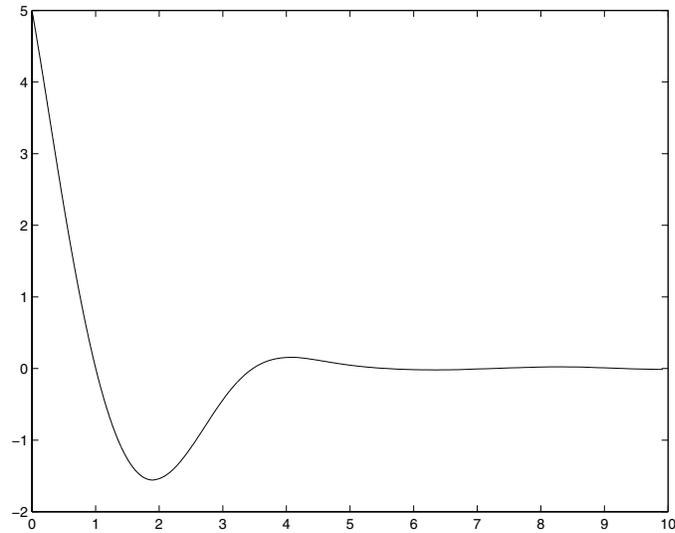
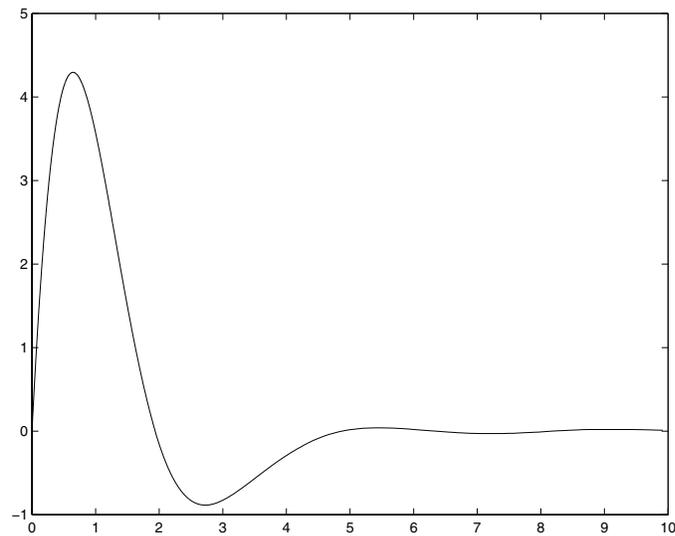
La Figura 7.12 muestra también que el diseño fue bastante conservador. La cota final observada en la simulación es alrededor de 0.03 (en norma 2) lo que es más de 30 veces menor que la estimada.

## 7.8 Convergencia de QSC

Como se vio anteriormente, la implementación QSC puede aproximar las propiedades de estabilidad y velocidad de convergencia del control originalmente continuo. Sin embargo, no se dijo aún nada sobre el comportamiento del QSC durante el período transitorio.

Se introducirá entonces ahora la versión QSC del Teorema 4.1, donde se demostrará que las trayectorias del sistema con el controlador QSC tienden a las trayectorias del sistema con el controlador continuo original cuando la cuantificación tiende a cero.

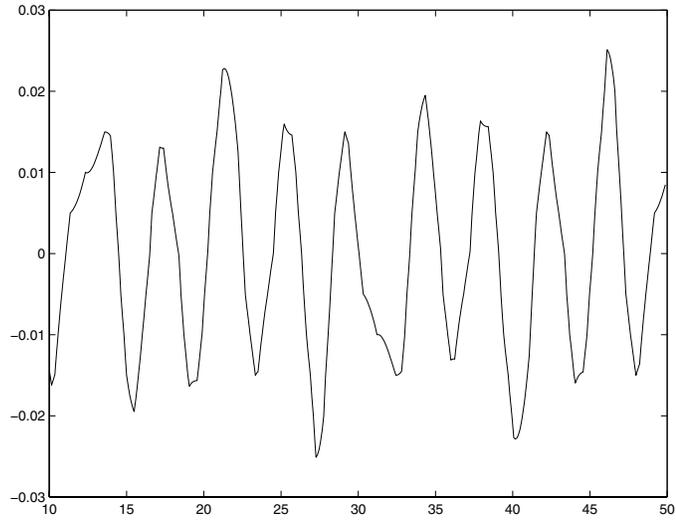
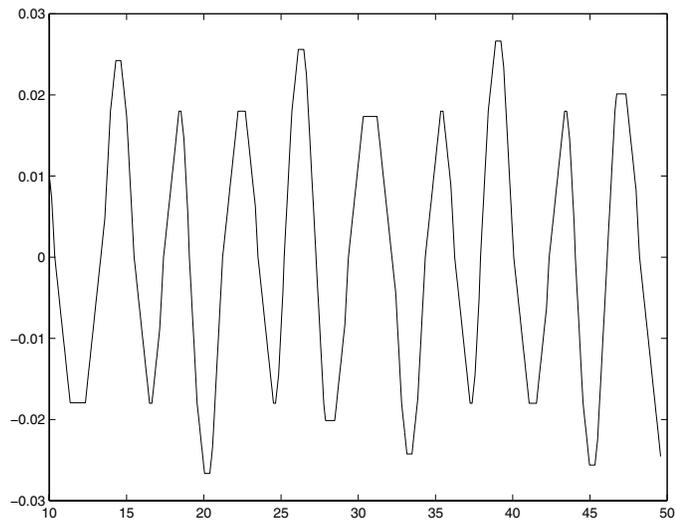
Esto implica que cualquier medida de performance alcanzada por el controlador continuo original puede alcanzarse aproximadamente por el controlador

Figura 7.7:  $x_p$  vs.  $t$ Figura 7.8:  $x_c$  vs.  $t$ 

QSC mediante la elección de intervalos de cuantificación suficientemente pequeños.

**Teorema 7.3.** *Convergencia de QSC.*

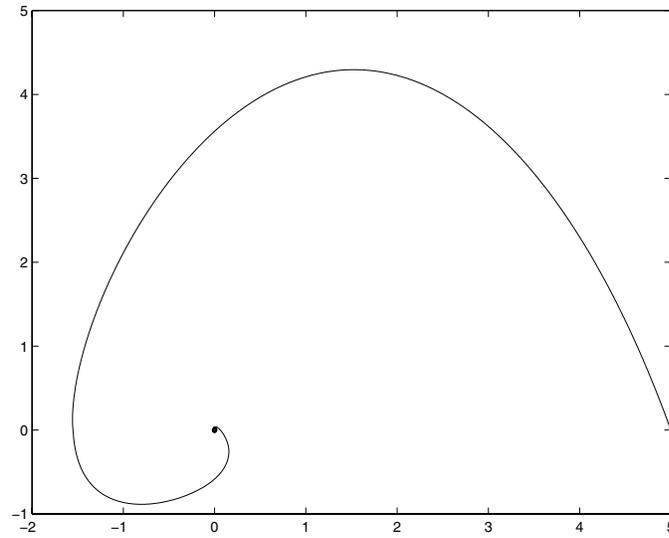
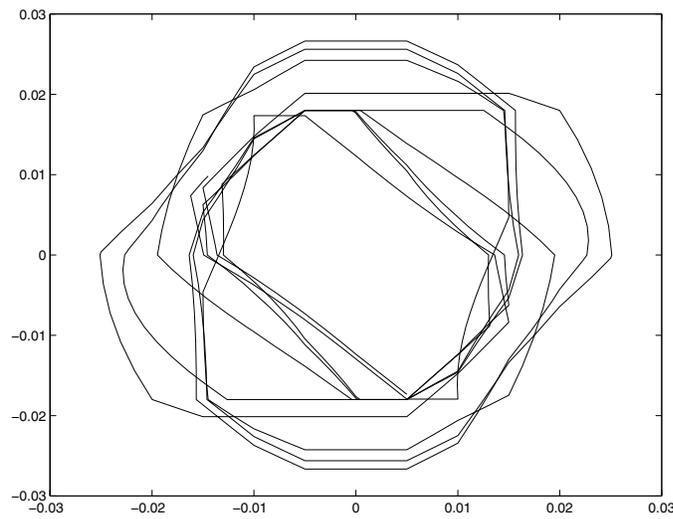
Sean el sistema correspondiente a una planta continua con un controlador continuo dado por (7.6) y la implementación QSC asociada (7.8). Sean  $D_{x_c}$ ,  $D_{y_c}$  y  $D_{y_p}$  las regiones de no-saturación del controlador QSC, de los conversores D/A y de los conversores A/D respectivamente (o sea, las regiones donde las

Figura 7.9: Oscilaciones finales en  $x_p$  vs.  $t$ Figura 7.10: Oscilaciones finales en  $x_c$  vs.  $t$ 

variables correspondiente no alcanzan los límites de saturación). Sea  $D_{x_p}$  una región acotada en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $D$  una región del espacio de estado donde no hay saturación de ninguna variable, o sea

$$D = \{(x_p, x_c) | x_p \in D_{x_p}, x_c \in D_{x_c}, g_p(x_p, t) \in D_{y_p} \forall t, g_c(x_c, g_p(x_p)) \in D_{y_c}\}$$

Supongamos que las funciones  $f_c$  y  $g_c$  son Lipschitz en  $D_{x_c} \times D_{y_p}$ , la función  $f_p$  es Lipschitz en  $D_{x_p} \times D_{y_c}$  y la función  $g_p$  es Lipschitz en  $D_{x_p}$ . Sea  $\phi(t)$  una solución de (7.6) desde la condición inicial  $x(0) = x_0$  y sea  $\phi_1(t)$  una solución

Figura 7.11:  $x_p$  vs.  $x_c$ Figura 7.12: Oscilaciones finales en  $x_p$  vs.  $x_c$ 

de (7.8) que comienza en la misma condición inicial  $x_0$ . Asumamos también que  $\phi(t) \in D_1 \forall t$  siendo  $D_1$  una región cerrada interior a  $D$ . Luego,  $\phi_1(t) \rightarrow \phi(t)$  cuando los intervalos de cuantificación tienden a 0.

*Demostración.* Sea  $S \triangleq \mathbb{R}^{n+k} - D$  y

$$D_2 \triangleq D_{x_p} \times D_{x_c} \times D_{y_p} \times D_{y_c}$$

Sea  $F$

$$F \triangleq \sup_{(x_p, x_c, y_p, y_c) \in D_2} \left\| \begin{array}{c} f_p(x_p, y_c, t) \\ f_c(x_c, y_p) \end{array} \right\| \quad (7.39)$$

y  $d$  definida por

$$d \triangleq \inf_{x \in S} \left( \inf_{t \in [0, \infty]} \|\phi(t) - x\| \right) \quad (7.40)$$

Dado que  $d$  es positiva y  $F$  es finita, puede encontrarse un número positivo  $t_1$  que satisfaga

$$t_1 < \frac{d}{F} \quad (7.41)$$

De (7.39), (7.40) y (7.41) puede verse que  $\phi_1(t)$  no abandona la región  $D$  en el intervalo  $[0, t_1]$ .

En este intervalo de tiempo, el Sistema (7.8) cumple con las siguientes condiciones:

$$\|\Delta x_c\| \leq \Delta_{x_c} \quad (7.42a)$$

$$\|\Delta y_p\| \leq \Delta_{y_p} \quad (7.42b)$$

$$\|\Delta y_c\| \leq \Delta_{y_c} \quad (7.42c)$$

siendo  $\Delta_{x_c}$ ,  $\Delta_{y_p}$  y  $\Delta_{y_c}$  constantes definidas por los intervalos de cuantificación del controlador QSC y de los convertidores A/D y D/A respectivamente.

De (7.8), (7.6) y del hecho que  $\phi_1(0) = \phi(0)$  sigue que:

$$\phi_1(t) - \phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_{1_p}(t) - \phi_p(t) \\ \phi_{1_c}(t) - \phi_c(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} \psi_{1_p}(\tau) - \psi_p(\tau) \\ \psi_{1_c}(\tau) - \psi_c(\tau) \end{bmatrix} d\tau \quad (7.43)$$

donde

$$\psi_{1_p}(\tau) \triangleq f_p(\phi_{1_p}, g_c(\phi_{1_c} + \Delta x_c, g_p(\phi_{1_p}, \tau) + \Delta y_p) + \Delta y_c, \tau) \quad (7.44a)$$

$$\psi_p(\tau) \triangleq f_p(\phi_p, g_c(\phi_c, g_p(\phi_p, \tau)), \tau) \quad (7.44b)$$

$$\psi_{1_c}(\tau) \triangleq f_c(\phi_{1_c} + \Delta x_c, g_p(\phi_{1_p}, \tau) + \Delta y_p) \quad (7.44c)$$

$$\psi_c(\tau) \triangleq f_c(\phi_c, g_p(\phi_p, \tau)) \quad (7.44d)$$

Luego, utilizando la norma 2 en la primer fila de (7.43), se tiene

$$\begin{aligned} \|\phi_{1_p}(t) - \phi_p(t)\| &= \left\| \int_0^t \psi_{1_p}(\tau) - \psi_p(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t \|\psi_{1_p}(\tau) - \psi_p(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (7.45)$$

Similarmente, para la segunda fila resulta

$$\|\phi_{1_c}(t) - \phi_c(t)\| \leq \int_0^t \|\psi_{1_c}(\tau) - \psi_c(\tau)\| d\tau \quad (7.46)$$

De (7.45) y (7.46) sigue que

$$\|\phi_{1_p} - \phi_p\| + \|\phi_{1_c} - \phi_c\| \leq \int_0^t (\|\psi_{1_p}(\tau) - \psi_p(\tau)\| + \|\psi_{1_c}(\tau) - \psi_c(\tau)\|) d\tau \quad (7.47)$$

Teniendo en cuenta que  $\phi(t)$  y  $\phi_1(t)$  están dentro de la región  $D$ , y tomando  $\Delta x_c$ ,  $\Delta y_c$  y  $\Delta y_p$  suficientemente pequeños podemos asegurar que los argumentos de las funciones  $f_p$ ,  $f_c$ ,  $g_c$  y  $g_p$  en (7.44a) y (7.44c) están dentro de las regiones donde dichas funciones satisfacen las condiciones de Lipschitz. Utilizando estas condiciones y las definiciones (7.44a) y (7.44b), resulta

$$\begin{aligned} \|\psi_{1_p}(\tau) - \psi_p(\tau)\| &\leq M_{f_p} \|(\phi_{1_p}, g_c(\phi_{1_c} + \Delta x_c, g_p(\phi_{1_p}, \tau) + \Delta y_p) + \Delta y_c) \\ &\quad - (\phi_p, g_c(\phi_c, g_p(\phi_p, \tau)))\| \\ &\leq M_{f_p} (\|\phi_{1_p} - \phi_p\| + \|\Delta y_c\| + M_{g_c} \\ &\quad \|(\phi_{1_c} + \Delta x_c, g_p(\phi_{1_p}, \tau) + \Delta y_p) - (\phi_c, g_p(\phi_p, \tau))\|) \\ &\leq M_{f_p} (\|\phi_{1_p} - \phi_p\| + \|\Delta y_c\| + M_{g_c} \\ &\quad (\|\phi_{1_c} - \phi_c\| + \|\Delta x_c\| + \|\Delta y_p\| + M_{g_p} \|\phi_{1_p} - \phi_p\|)) \\ &\leq M_1 (\|\phi_{1_p} - \phi_p\| + \|\phi_{1_c} - \phi_c\| + \Delta) \end{aligned} \quad (7.48)$$

donde  $M_{f_p}$ ,  $M_{g_c}$  y  $M_{g_p}$  son las constantes de Lipschitz de las funciones correspondientes. Aquí, definimos también  $M_1 \triangleq \max(M_{f_p}(1 + M_{g_c}M_{g_p}), M_{f_p}M_{g_c})$  y  $\Delta \triangleq \Delta x_c + \Delta y_c + \Delta y_p$ .

Similarmente, se puede obtener que

$$\|\psi_{1_c}(\tau) - \psi_c(\tau)\| \leq M_2 (\|\phi_{1_p} - \phi_p\| + \|\phi_{1_c} - \phi_c\| + \Delta) \quad (7.49)$$

con  $M_2 \triangleq \max(M_{f_c}, M_{f_c}M_{g_p})$ . Sea  $M \triangleq M_1 + M_2$ . De (7.48) y (7.49) sigue que

$$\|\psi_{1_p}(\tau) - \psi_p(\tau)\| + \|\psi_{1_c}(\tau) - \psi_c(\tau)\| \leq M (\|\phi_{1_p} - \phi_p\| + \|\phi_{1_c} - \phi_c\| + \Delta) \quad (7.50)$$

Definiendo  $\Delta_\phi(t) \triangleq \|\phi_{1_p} - \phi_p\| + \|\phi_{1_c} - \phi_c\|$  y utilizando (7.50) en (7.47) tenemos

$$\Delta_\phi(t) \leq \int_0^t (M\Delta_\phi(\tau) + M\Delta) d\tau$$

y finalmente

$$\Delta_\phi(t) \leq \int_0^t M\Delta_\phi(\tau) d\tau + Mt\Delta$$

Pueden verse que la función  $\Delta_\phi$  es continua. Siendo también  $M$  positiva, es posible aplicar la *Desigualdad de Gronwall-Bellman*, que resulta en

$$\begin{aligned} \Delta_\phi(t) &\leq Mt\Delta + \int_0^t M^2 s \Delta e^{\int_s^t M d\tau} ds \\ \Rightarrow \Delta_\phi(t) &\leq (e^{Mt} - 1)\Delta \end{aligned}$$

Luego, para cada  $t \in [0, t_1]$  resulta que

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \|\phi_{1_p}(t) - \phi_p(t)\| + \|\phi_{1_c}(t) - \phi_c(t)\| = 0$$

y luego

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \|\phi_1(t) - \phi(t)\| = 0 \quad (7.51)$$

De (7.40) tenemos

$$d \leq \inf_{x \in S} (\|\phi(t_1) - x\|) \quad (7.52)$$

Teniendo en cuenta (7.41), (7.51) y (7.52) puede encontrarse una cuantificación suficientemente pequeña tal que

$$t_1 < \frac{\inf_{x \in S} \|\phi_1(t_1) - x\|}{F}$$

Esta desigualdad implica que  $\phi_1$  no abandona la región  $D$  durante el intervalo  $[t_1, 2t_1]$ . Luego, todo el análisis hecho desde (7.42a) es también válido para el intervalo  $[0, 2t_1]$ . Repitiendo este argumento tenemos que el resultado de (7.51) vale para todo  $t$ .  $\square$

La propiedad de convergencia muestra que las trayectorias del sistema QSC pueden resultar arbitrariamente cercanas a las del CCS original. Sin embargo, este hecho solo brinda información cualitativa. No hay aquí ninguna relación cuantitativa entre el quantum y la diferencia entre las trayectorias del CCS y del QSC.

Por esto, la única medida de performance que puede analizarse es la cota final y la velocidad de convergencia de las soluciones del QSC en base al Teorema 7.2.

Para llegar a resultados más fuertes es necesario realizar suposiciones más restringidas en la planta y el control. Por esto, el siguiente capítulo trata con casos particulares llegando así a resultados más simples y más prácticos.

## Capítulo 8

# Sistemas QSC Lineales

En el capítulo anterior se introdujeron las definiciones generales de QSC y se estudiaron propiedades tales como estabilidad y convergencia.

Aunque fue posible deducir algoritmos de diseño basados en los teoremas de estabilidad, estos resultaban bastante complicados debido a la presencia de funciones de Lyapunov (que podían ser incluso dependientes del tiempo en el caso inestacionario).

En muchas aplicaciones de control, los modelos de la planta son en realidad lineales y estacionarios (LTI). En estos casos, los algoritmos que se dedujeron siguen siendo correctos pero tienen complicaciones que pueden evitarse.

Como se vio también, el uso de las funciones de Lyapunov produce resultados conservadores que pueden mejorarse con el uso de análisis geométricos como el realizado en la Sección 4.5.

Teniendo en cuenta estas observaciones, este capítulo está involucrado con la particularización de las propiedades de QSC para llegar a condiciones de diseño más simples.

Como puede esperarse, los resultados serán completamente análogos a los mostrados por los métodos de QSS y QSS2 en el campo de la integración numérica. En consecuencia, será posible encontrar la cuantificación que permita acotar el error entre el sistema de control continuo y el digital. Como antes, la implementación digital resultará finalmente acotada para cualquier cuantificación adoptada.

Desde un punto de vista más práctico, se encontrarán también reglas de diseño mucho más simples basadas en una fórmula cerrada que reemplazará los algoritmos de diseño desarrollados en el capítulo previo.

Por último, la anunciada mejora de la respuesta dinámica y de los costos computacionales con respecto al control digital clásico se tornará más evidente en algunas aplicaciones que serán introducidas.

## 8.1 QSC en Sistemas LTI

Sean la planta y el controlador LTI continuos, (8.1) y (8.2).

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) &= A_p \cdot x_p(t) + B_p \cdot u_p(t) \\ y_p(t) &= C_p \cdot x_p(t) \end{cases} \quad (8.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) &= A_c \cdot x_c(t) + B_c \cdot u_c(t) + B_r \cdot u_r(t) \\ y_c(t) &= C_c \cdot x_c(t) + D_c \cdot u_c(t) + D_r \cdot u_r(t) \end{cases} \quad (8.2)$$

Con la interconexión dada por (7.3) se obtiene la siguiente ecuación de lazo cerrado:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u_r \quad (8.3)$$

donde

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_p + B_p D_c C_p & B_p C_c \\ B_c C_p & A_c \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} B_p D_r \\ B_r \end{bmatrix}$$

La implementación QSC del controlador modifica (8.2) que puede escribirse como

$$\begin{cases} \dot{x}_c &= A_c \cdot q_c + B_c \cdot u_c + B_r \cdot u_r \\ y_c &= C_c \cdot q_c + D_c \cdot u_c + D_r \cdot u_r \end{cases} \quad (8.4)$$

Como en el caso general, los efectos de los convertidores A/D y D/A asincrónicos están dados por (7.5). Luego, teniendo en cuenta esta ecuación, (8.1), (8.4) y la definición de las variables de perturbación (7.7a), el uso de QSC transforma la Ecuación (8.3) en

$$\dot{x} = A(x + \Delta x) + F \cdot \Delta y + B \cdot u_r \quad (8.5)$$

donde  $x$ ,  $\Delta x$  y  $\Delta y$  tienen las mismas definiciones que en Ec.(7.27) y

$$F \triangleq \begin{bmatrix} B_p D_c & B_p \\ B_c & 0 \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

## 8.2 Estabilidad y Error en LTI QSC

Si se considera  $u_r(t) = 0$  (sin pérdida de generalidad), el Sistema (8.5) no es más que un sistema LTI perturbado, donde cada componente de la perturbación (o sea, cada componente de  $\Delta x$  y  $\Delta y$ ) está acotado por el quantum correspondiente.

Luego, de acuerdo al Teorema 4.4, las trayectorias del sistema LTI QSC estarán global y finalmente acotadas con cota final<sup>1</sup>:

$$\mu = \left\| |V| \cdot (|\operatorname{Re}(\Lambda)^{-1} \Lambda| \cdot |V^{-1}| \Delta q_x + |\operatorname{Re}(\Lambda)^{-1} V^{-1} F| \Delta q_y) \right\| \quad (8.7)$$

<sup>1</sup>La notación usada aquí fue introducida en la página 54.

donde  $\Delta q_x$  es el vector de los tamaños del quantum en las variables de estado de la planta y del controlador (todas las componentes correspondientes a la planta son nulas, ya que esta no está cuantificada),  $\Delta q_y$  es el vector de la cuantificación en las salidas de la planta y del controlador (introducida por los conversores A/D y D/A respectivamente), la matriz  $F$  está definida según (8.6),  $\Lambda$  es una matriz diagonal de autovalores de  $A$  y  $V$  es una matriz correspondiente de autovectores.

Más aún, de acuerdo al mismo teorema, existe un tiempo finito  $t_1 = t_1(c, x_0)$  tal que para cada constante positiva  $c$  las soluciones satisfacen

$$|x(t)| \leq (1+c)|V| \cdot (|\Re(\Lambda)^{-1}\Lambda| \cdot |V^{-1}|\Delta q_x + |\Re(\Lambda)^{-1}V^{-1}F|\Delta q_y)$$

Entonces, para cualquier cuantificación adoptada el sistema QSC será global y finalmente acotado.

Queda claro entonces que la última desigualdad puede utilizarse con fines de diseño: dado un error máximo final aceptable en cada variable puede obtenerse el quantum que asegura alcanzar dicha meta.

Además de esto, como en el caso de QSS y QSS2, será posible no sólo estimar la cota final sino también la máxima desviación con respecto a las trayectorias del CCS.

Sean  $x(t)$  y  $\tilde{x}(t)$  soluciones de (8.3) y (8.5) que comienzan de la misma condición inicial  $x(t_0) = \tilde{x}(t_0) = x_0$ . Luego el error

$$e(t) = \tilde{x}(t) - x(t) \tag{8.8}$$

puede verse como una cota de la pérdida de performance debido la implementación QSC.

De (8.3), (8.5), (8.8) y las definiciones de  $x(t)$  y  $\tilde{x}(t)$  tenemos

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A \cdot [e(t) + \Delta x(t)] + F \cdot \Delta y(t) \\ e(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\Delta x$  y  $\Delta y$  están acotados y  $e(t_0) = 0$ , El Teorema 4.3 puede utilizarse para cuantificar el error debido al esquema QSC. El resultado queda entonces expresado por el siguiente teorema:

**Teorema 8.1.** *Error en LTI QSC.*

*Sean  $x(t)$  y  $\tilde{x}(t)$  trayectorias de un LTI CCS y de su implementación QSC que comienzan desde la misma condición inicial y sea  $A$  la matriz de evolución del sistema continuo en lazo cerrado. Si  $A$  es Hurwitz y diagonalizable, la diferencia entre ambas trayectorias está siempre acotada por*

$$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq |V|(|\Re(\Lambda)^{-1}\Lambda||V^{-1}|\Delta q_x + |\Re(\Lambda)^{-1}V^{-1}F|\Delta q_y) \tag{8.9}$$

*bajo las mismas definiciones hechas en (8.7).*

La demostración es trivial en base al teorema mencionado.

La Desigualdad (8.9) puede también utilizarse como fórmula de diseño para obtener la cuantificación del controlador y los conversores de acuerdo a la desviación permitida de las trayectorias del CCS.

Una observación muy importante es que la cota calculada no depende ni de la condición inicial ni de la trayectoria de referencia ( $u_r(t)$ ). La única restricción es que  $u_r(t)$  debe ser seccionalmente constante para garantizar que el controlador QSC pueda ser exactamente representado por un modelo DEVS e implementado en un dispositivo digital.

El Teorema 8.1 dice, en definitiva, que la diferencia entre las trayectorias de lazo cerrado del CCS y del QSC está siempre acotada. Más aún, la cota vale para todo  $t$  y este hecho puede implicar una mejora notable en la respuesta dinámica con respecto a las aproximaciones de tiempo discreto.

### 8.3 Algoritmo para la Implementación de LTI QSC

La forma cerrada de la Desigualdad (8.9) brinda una herramienta útil para diseñar la cuantificación. El procedimiento de diseño consiste entonces en elegir el máximo error permitido en cada variable y luego en encontrar valores apropiados de  $\Delta q_x$  y  $\Delta q_y$  para satisfacer la desigualdad.

El único problema aquí es que para una tolerancia dada en cada variable de estados, hay muchos valores posibles de  $\Delta q_x$  y  $\Delta q_y$  con los que se satisface (8.9). De hecho, el quantum puede agrandarse en una variable y reducirse en las otras tal que la desigualdad se siga verificando.

Desde el punto de vista teórico, cualquier juego de valores que satisfaga (8.9) da lo mismo. Sin embargo, teniendo en cuenta consideraciones prácticas, no es deseable que una variable cambie muy rápido mientras otras permanecen casi sin cambios. Tal situación resultaría en eventos muy rápidos que podrían incluso ser más rápidos que lo que el dispositivo digital puede seguir.

En consecuencia, una buena solución sería aquella que produzca una secuencia de eventos *balanceada* en las diferentes variables. Sin embargo, no está completamente claro como puede alcanzarse esto.

De todas formas, un regla empírica que generalmente funciona consiste en elegir la cuantificación de manera tal que cada término de  $\Delta q_x$  y  $\Delta q_y$  contribuya al error total de manera balanceada.

**Ejemplo 8.1.** *Un controlador PI.*

*Sea la planta (8.1) con*

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_p = [ 1 \quad 0 ]$$

*Un controlador PI con parámetros  $K_P$  y  $K_I$  puede escribirse en la forma de (8.2) con  $A_c = 0$ ,  $B_c = -1$ ,  $B_r = 1$ ,  $C_c = K_I$ ,  $D_c = -K_P$  y  $D_r = K_P$ . Por esto, usando  $K_P = K_I = 10$ , la matriz de evolución a lazo cerrado es*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & -4 & 10 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matriz posible de autovectores (calculada con Matlab) es

$$V = \begin{bmatrix} 0.0085 + j0.342 & 0.0085 - j0.342 & 0.5452 \\ -0.825 - j0.433 & -0.825 + j0.433 & -0.734 \\ -0.108 + j0.064 & -0.108 - j0.064 & 0.4049 \end{bmatrix}$$

Tomando  $\Delta q_c = \Delta y_p = 0.01$  y  $\Delta y_c = 0.1$ , la cota de error según (8.9) es 0.1443, 0.3383 y 0.0679 en cada variable de estado de la planta y del controlador respectivamente

Luego, el error máximo en la salida de la planta está acotado por 0.1443. La Figura 8.1 muestra la evolución de la salida de la planta con el controlador continuo y con el controlador QSC cuando la referencia es un escalón de amplitud 10. La Figura 8.2 muestra la diferencia entre ambas trayectorias. El máximo de la misma es 0.1399 siendo este bastante cercano al margen teórico.

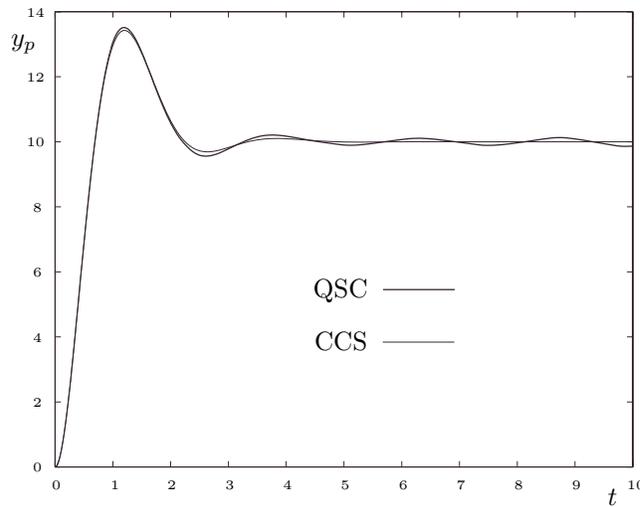


Figura 8.1: Salida de la planta con CCS y QSC

El último ejemplo mostró el uso del Teorema 8.1 para la implementación QSC de un controlador PI.

El siguiente ejemplo sigue un diseño LQR para controlar un péndulo invertido introducido por Messner y Tilbury en [45]. Tras simular los controladores continuo y digital propuestos en la referencia, los resultados se comparan con los obtenidos a través de la implementación QSC.

**Ejemplo 8.2.** Control de un péndulo invertido.

Consideremos el péndulo invertido de la Figura 8.3 Usando parámetros  $M = 0.5$ ;  $m = 0.2$ ;  $b = 0.1$  (fricción en el carro);  $J = 0.006$ ;  $g = 9.8$ ; y  $l = 0.3$  (longitud al centro de masa del péndulo), un modelo linealizado alrededor de

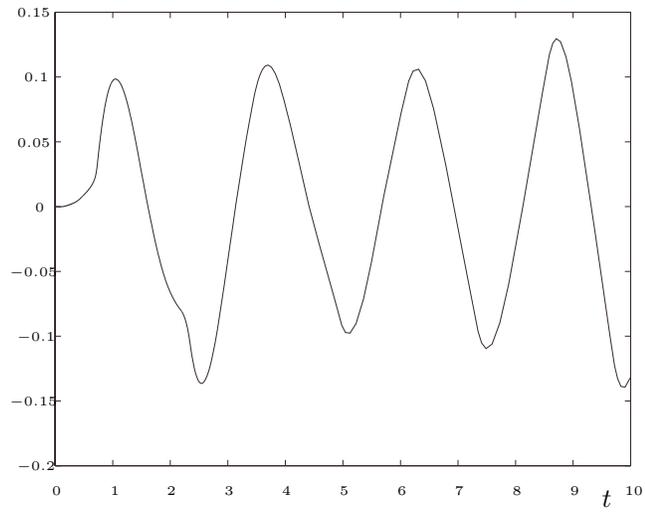


Figura 8.2: Diferencia en la salida de la planta con CCS y QSC

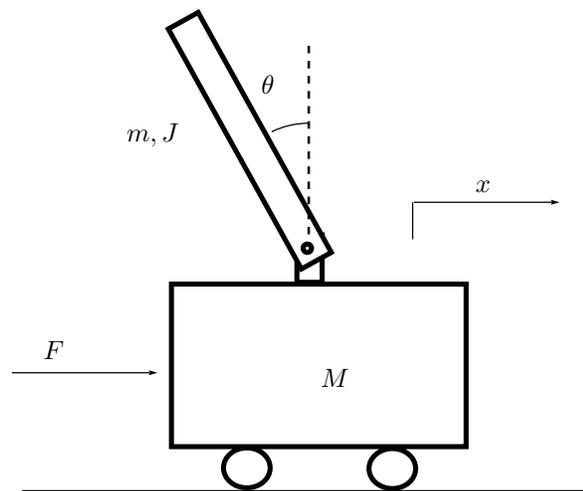


Figura 8.3: Esquema del péndulo invertido

$\theta = \pi$  queda dado por las ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\Phi} \\ \ddot{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.181 & 2.672 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.454 & 31.18 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \Phi \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.818 \\ 0 \\ 4.545 \end{bmatrix} u$$

donde  $\Phi \triangleq \theta - \pi$  es el ángulo de desviación desde la posición vertical.

El objetivo es implementar un control para la posición del carro. Las variables medidas son  $x$  y  $\Phi$ . Luego, las ecuaciones de salida de la planta pueden escribirse como

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \Phi \\ \dot{\Phi} \end{bmatrix}$$

Siguiendo un diseño LQR con pesos  $w_x = 5000$  y  $w_\Phi = 100$  y utilizando un observador de estados completo con polos de estimación ubicados en  $p_1 = 40$ ,  $p_2 = 41$ ,  $p_3 = 42$  y  $p_4 = 43$  el controlador resultante puede escribirse en la forma de (8.2), donde

$$A_c = \begin{bmatrix} -82.64 & 1 & 1.037 & 0 \\ -1570 & 68.61 & 148.9 & -38.04 \\ 1.385 & 0 & -83.18 & 1 \\ 397.6 & 171.5 & 2209 & -95.11 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 82.64 & -1.037 \\ 1699 & -40.22 \\ -1.385 & 83.18 \\ -76.18 & 1760 \end{bmatrix}; B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ -128.6 \\ 0 \\ -3.214 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [ 70.71 \quad 37.83 \quad -1055 \quad -20.92 ]$$

y

$$D_c = [ 0 \quad 0 ]; D_r = -70.71$$

Para la implementación digital QSC del controlador se utilizaron los siguientes tamaños de cuantificación:

$$\Delta q_x = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.015 \\ 0.002 \\ 0.04 \end{bmatrix}; \Delta q_y = \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0.004 \\ 2 \end{bmatrix}$$

El desempeño de QSC fue entonces comparado con un controlador discreto clásico obtenido de la discretización del controlador continuo. El período de muestreo para el controlador digital clásico se tomó  $T_s = 0.01$ . En este caso, se consideró también la presencia de conversores A/D y D/A con la misma cuantificación que en el control QSC (o sea 0.002 en la posición, 0.004 en el ángulo y 2 en la salida del controlador).

Las Figuras 8.4–8.6 muestran las trayectorias obtenidas con el controlador de tiempo continuo (sin cuantificación), con el controlador QSC y con el controlador clásico de tiempo discreto. La primera observación es que el QSC muestra un desempeño mucho mejor durante el transitorio (ver Figura 8.5) y reduce las oscilaciones finales.

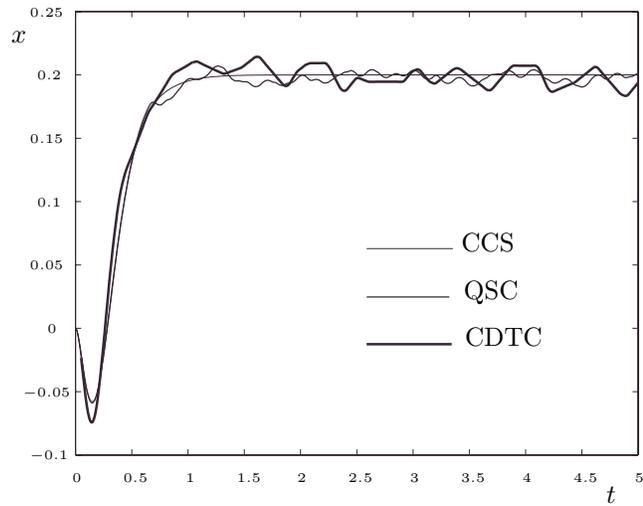


Figura 8.4: Posición del carro con QSC y con Control Digital Clásico.

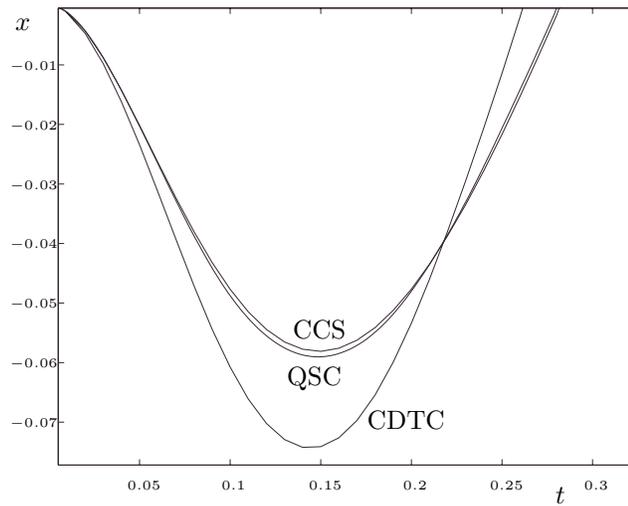


Figura 8.5: Posición del carro (arranque) con QSC y con Control Digital Clásico.

*El número de conversiones A/D realizadas por el conversor en los 5 segundos de simulación fue de 211 y de 185 en la posición y ángulo respectivamente mientras que el controlador digital clásico realiza  $5/0.01 = 500$  conversiones en cada variable. De manera similar, el número de conversiones D/A en QSC es de 303 contra las 500 del controlador digital clásico.*

*Teniendo en cuenta lo que pasa desde  $t = 3$  hasta  $t = 5$  (durante el estado estacionario) puede verse que el QSC sólo realiza 29 conversiones A/D en la*

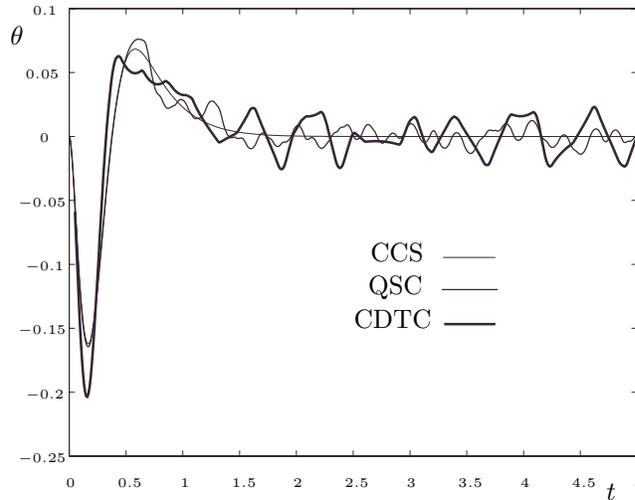


Figura 8.6: Ángulo del péndulo con QSC y con Control Digital Clásico.

posición, 44 en el ángulo y 76 conversiones D/A mientras que el controlador de tiempo discreto realiza 200 conversiones en cada variable. La reducción de los costos computacionales es más evidente aquí.

Estas ventajas se pagan con más cálculos en el controlador (el número de cambios en las variables internas es de 1600 contra las 500 en el controlador de tiempo discreto). Sin embargo, el tiempo necesario para realizar conversiones A/D y D/A es siempre mucho mayor que el utilizado para un cálculo simple.

De todas formas, el número de cálculos en el controlador puede reducirse utilizando una realización diferente. Una alternativa interesante es utilizar una matriz de evolución  $A_c$  diagonal o diagonal en bloques. De esta forma, la simulación QSS es mucho más eficiente.

Por un lado el número de cambios en las variables cuantificadas se reduce. Por el otro, cada transición involucra cálculos solamente en el estado que está cambiando (recordar que una de las características más importantes de QSS es como se explota la ralitud). En este ejemplo, el uso de un controlador diagonal en bloques reduce el número de cálculos a 547 en los 5 segundos obteniéndose un desempeño casi idéntico.

Es también interesante observar que el polo más rápido del sistema a lazo cerrado está ubicado en 43. Luego, la frecuencia media de muestreo en QSC durante el estado estacionario está por debajo del ancho de banda del sistema de modo tal que el esquema QSC funciona violando la frecuencia de Nyquist. Es sabido que un sistema de control muestreado que funcione por debajo de esta frecuencia será inestable. QSC puede funcionar utilizando esta frecuencia porque el punto de equilibrio es en realidad inestable (pero las soluciones son finalmente acotadas).

Por último, debe mencionarse que el uso de la Desigualdad (8.9) da una

estima bastante conservadora en este caso. La cota de error en  $x(t)$  es 3.08, es decir, alrededor de 300 veces el error observado en la Figura 8.4. De todas formas, un análisis de Lyapunov brida una cota de  $9.6 \times 10^9$ , lo que es completamente inútil para el diseño.

## 8.4 Ajuste de los Conversores

La diferencia entre el control continuo diseñado y la implementación por eventos discretos se debe a los efectos introducidos por la cuantificación de los estados del controlador y la presencia de los conversores A/D y D/A. Sin embargo, en algunos casos, los efectos de la cuantificación en los conversores D/A pueden eliminarse.

La entrada de los conversores D/A está dada por

$$y_c = g_c(q_c, u_c)$$

Dado que  $q_c$  y  $u_c$  son variables cuantificadas,  $g_c$  tiene un dominio finito y luego  $y_c$  puede sólo tomar valores en un conjunto finito. Este conjunto es determinado por los niveles de cuantificación de  $q_c$  y  $u_c$  y por la función  $g_c$ . Si estos valores de cuantificación se toman de forma tal que el conjunto mencionado sea un subconjunto de los valores de cuantificación de los conversores D/A, estos conversores no introducirán ningún error.

Uno de los casos en los que los errores D/A pueden evitarse es cuando las variables de salida del controlador coinciden con variables de estado de dicho sistema. En ese caso, el error mencionado puede eliminarse tomando la misma función de cuantificación en las variables de estado y los correspondientes conversores D/A.

En el Ejemplo 7.2 se obtuvo por un resultado muy conservador. Se sabe del Capítulo 4 que los análisis basados en Lyapunov generalmente llegan a estimaciones conservadoras.

Sin embargo, en este caso, el problema se debe también al hecho que no se tuvo en cuenta que el conversor D/A estaba perfectamente ajustado. De hecho, aquí la función de salida del controlador era

$$y_c(t) = -x_c(t) - u_c(t) \tag{8.10}$$

y el quantum fue elegido igual a 0.018 en todas las variables. Luego,  $q_c(t)$  (la versión cuantificada de  $x_c$ ),  $u_c(t)$  y  $u_p(t)$  pueden sólo tomar valores en el conjunto  $\{\dots, -0.036, -0.018, 0, 0.018, 0.036, \dots\}$ .

Teniendo en cuenta (8.10), resulta que  $y_c$  sólo puede tomar valores en el mismo conjunto. Dado que  $u_p(t)$  también toma esos valores, no hay efecto de cuantificación entre  $y_c$  y  $u_p$ .

Si bien estos conceptos podrían aplicarse en sistemas QSC generales, los mismos son realmente útiles sólo cuando la ecuación de salida del controlador es lineal. De otra forma, el ajuste de los conversores requeriría el uso de cuantificación no uniforme.

## 8.5 Reducción de los Costos Computacionales en QSC

En este capítulo se mostraron algunas ventajas teóricas de QSC que resultan en una mejora de la estabilidad y la respuesta dinámica con respecto a las aproximaciones de tiempo discreto. Se mencionó y se ilustró con ejemplos que QSC también reduce el costo computacional aunque este hecho no fue explicado aún.

Mientras que los controladores tradicionales de tiempo discreto realizan cálculos a intervalos regulares, los controladores QSC sólo realizan cálculos cuando alguna variable supera un cierto umbral. Este hecho puede verse cómo una primer razón intuitiva de la mencionada reducción de costos.

En el Ejemplo 7.1 (página 129), cuando la trayectoria llega cerca del origen el controlador realiza aproximadamente un cálculo por segundo. Cualquier controlador de tiempo discreto utilizando esa frecuencia de muestreo (e incluso una tasa 10 veces más veloz) será divergente para la misma condición inicial de  $x_p = 10$  debido a problemas de *escape en tiempo finito*<sup>2</sup>.

Observaciones similares pueden hacerse en lo que respecta al control del péndulo invertido (Ejemplo 8.2) donde la frecuencia de muestreo cerca del equilibrio estaba por debajo de la frecuencia de Nyquist.

El siguiente ejemplo ilustra de manera más clara la reducción de los costos computacionales en el esquema QSC.

### Ejemplo 8.3. Reducción de la tasa de muestreo en QSC.

*Consideremos el sistema de primer orden*

$$\dot{x} = \operatorname{sgn}(x) + u$$

*Supongamos que el controlador puede medir la variable  $x$ , pero el conversor solo produce números pares  $(-2, 0, 2, 4, \dots)$  brindando el más cercano a su entrada analógica. Cuando  $x$  está en la región sombreada de la Figura 8.7 (entre  $-1$  y  $1$ ) el sistema de control ve el valor  $0$ .*

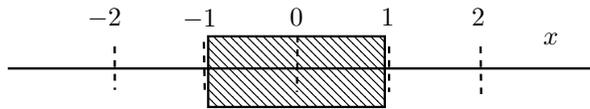


Figura 8.7: Zona *invisible* debido a la cuantificación

*Supongamos que la meta es mantener el valor de  $x$  entre  $-2$  y  $2$ . El tiempo para ir desde  $1$  hasta  $2$  (o desde  $-1$  hasta  $-2$ ) con  $u = 0$  es  $t_1 = 1$ . Esto implica que es imposible encontrar un controlador de tiempo discreto que logre*

<sup>2</sup>La frase “escape en tiempo finito” se utiliza para describir el fenómeno en el cual una trayectoria escapa a infinito en tiempo finito [22]

la meta propuesta con un período de muestreo mayor que  $t_1$ . La razón es que el controlador no puede distinguir si el valor de  $x$  es positivo o negativo cuando este está en la región sombreada y en tal caso el signo de  $u$  podría ser el mismo que el de  $x$  y la trayectoria abandonarían entonces la región deseada antes del tiempo  $t_1$ .

Sin embargo, utilizando QSC, el tiempo entre muestreos puede hacerse arbitrariamente grande. Esto puede lograrse, por ejemplo, considerando la siguiente ley de control estática

$$y_c = -u_c(1 + a)$$

donde  $a$  es una constante positiva.

Aquí, cuando  $x$  sale de la región sombreada el controlador detecta inmediatamente el cambio e invierte el signo de la derivada. La nueva velocidad en  $x$  es  $a$ . Luego,  $x$  entra nuevamente en la región sombreada y el tiempo para alcanzar el origen es  $1/a$ . Tras esto,  $x$  va hacia el otro extremo de la región sombreada pero ahora con una velocidad de  $2 + a$ . Cuando  $x$  deja la región sombreada nuevamente el controlador invierte el signo de la derivada y obtenemos entonces un comportamiento cíclico en el que  $x$  oscila entre 1 y -1. El tiempo entre conversiones A/D sucesivas es

$$t_2 = \frac{1}{a} + \frac{1}{2 + a}$$

Es entonces claro que tomando valores pequeños para el parámetro  $a$ , el tiempo  $t_2$  puede hacerse arbitrariamente grande. Luego, con esta implementación el número de cálculos en el controlador y el tamaño de las oscilaciones puede reducirse considerablemente.

Desafortunadamente, la implementación QSC no es exacta. De hecho, hay retardos debidos a la presencia de convertidores y al procesador digital. En este último ejemplo, estos retardos deben ser menores que el período mínimo de muestreo  $t_1 = 1$  para lograr la meta propuesta de mantener a  $x$  entre 2 y -2.

Podría pensarse que si es posible implementar un QSC que logre ese retardo mínimo, entonces sería posible también implementar un controlador de tiempo discreto utilizando ese período de muestreo. Sin embargo, el retardo en el sistema QSC es sólo el tiempo requerido para detectar el error y realizar la conversión D/A ya que los cálculos pueden hacerse antes que se detecte el error. Esto es posible porque el controlador QSC sabe que el próximo valor de entrada puede sólo tomar dos valores distintos (sube o baja un quantum).

En el ejemplo, si el último valor detectado de  $x$  era 0, entonces los únicos dos valores que la nueva entrada puede tomar son 2 y -2. En consecuencia, el controlador tiene dos posibles valores de salida que podrían ser calculados antes de la detección del nuevo valor de entrada. Si bien esto es así porque el controlador es estático, en uno dinámico se pueden utilizar ideas similares.

Un controlador clásico de tiempo discreto durante cada período de muestreo debe realizar la conversión A/D, calcular el siguiente estado y salida del controlador y luego realizar la conversión D/A. El tiempo requerido para terminar todas estas tareas es sin dudas mucho mayor que el retardo en el esquema QSC.

# Capítulo 9

## Epílogo

Como se mencionó en la introducción, vemos esta Tesis como una contribución al desarrollo de una teoría sobre la aproximación por eventos discretos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las nuevas teorías –o paradigmas, de acuerdo a Khun– generalmente brindan mejores soluciones a algunos problemas *viejos* y abren muchos problemas *nuevos*. Por otro lado, las mismas no pueden dar respuesta a todos los problemas *viejos* involucrados.

En virtud de esto, esta Tesis no debe verse como un intento de reemplazar los métodos numéricos de tiempo discreto.

Teniendo en cuenta que los métodos de integración clásicos se vienen estudiando desde hace más de 330 años (el método de Euler fue descrito por primera vez en 1768 [17]), es inútil esperar obtener la solución *mágica* tras sólo 3 años de trabajo comenzando de una filosofía completamente nueva,

Lo mejor que puede esperarse es que los problemas *viejos* así como los problemas *nuevos* abiertos por este trabajo sean resueltos progresivamente en el futuro de forma tal que la teoría comience a brindar buenas soluciones en más y más casos.

Teniendo en cuenta estas observaciones, este último capítulo comenzará enumerando algunos de los problemas *viejos* que están aún sin resolver por el nuevo enfoque. Luego, muchos de los nuevos problemas abiertos serán mencionados junto con algunas ideas para resolverlos. Por último, presentaremos las conclusiones generales de la Tesis.

### 9.1 Problemas no Resueltos

*Sistemas Rígidos.* El problema no resuelto más importante es probablemente el relacionado con la simulación de sistemas rígidos. De hecho, este es uno de los problemas más difíciles en el área de la integración numérica.

Veamos esto en un ejemplo simple:

**Ejemplo 9.1.** *Simulación QSS de un sistema rígido.*

Sea la ODE de segundo orden dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 100 \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 &= -100 \cdot x_1 - 10001 \cdot x_2 + U(t)\end{aligned}\quad (9.1)$$

Los autovalores son  $-1$  y  $-10000$  lo que significa que el sistema, a pesar de su simplicidad, es rígido.

Se simularon con el método de QSS los primeros 10 segundos de la solución del sistema usando tamaños de quantum e histéresis de  $1 \times 10^{-2}$  y  $1 \times 10^{-4}$  en  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente. De acuerdo a (4.50), esta cuantificación asegura que el error en  $x_1$  está acotado por 0.01 mientras que el error en  $x_2$  es menor que 0.0003.

Las condiciones iniciales se tomaron nulas y la entrada fue un escalón de  $U(t) = 100$ . La simulación se completó tras 100 y 200 transiciones internas en los integradores cuantificados que calculan  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente. La trayectoria de  $x_2$  se muestra en las Figuras 9.1–9.2.

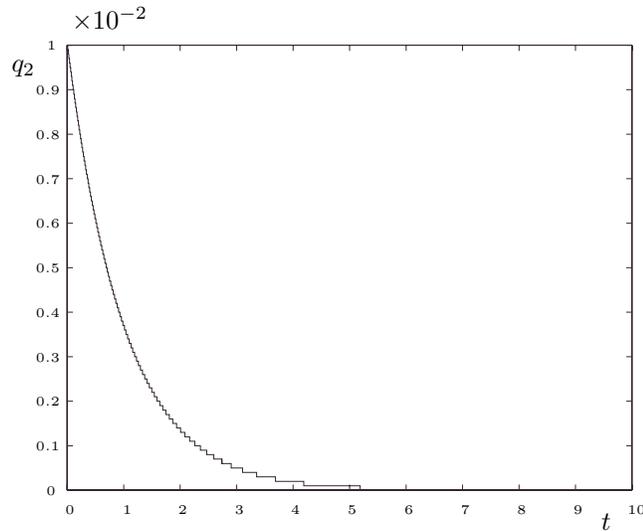


Figura 9.1: Simulación QSS del Sistema (9.1)

La rigidez del sistema queda clara comparando las escalas de tiempo de las Figuras 9.1 y 9.2. En este caso, el comportamiento del método de QSS es sorprendente. El mismo adaptó el paso de integración de una forma muy natural y realizó la simulación en unos pocos pasos.

Puede verse que el número de transiciones realizadas puede calcularse aquí dividiendo la amplitud de las trayectorias por el quantum.

Observando este resultado, podría pensarse que el método de QSS es la mejor solución para los sistemas rígidos: es un método explícito que permite simular un sistema rígido más rápido y más eficientemente que lo que pueden hacer los métodos implícitos y de paso variable más complejos. Esta idea parece coherente

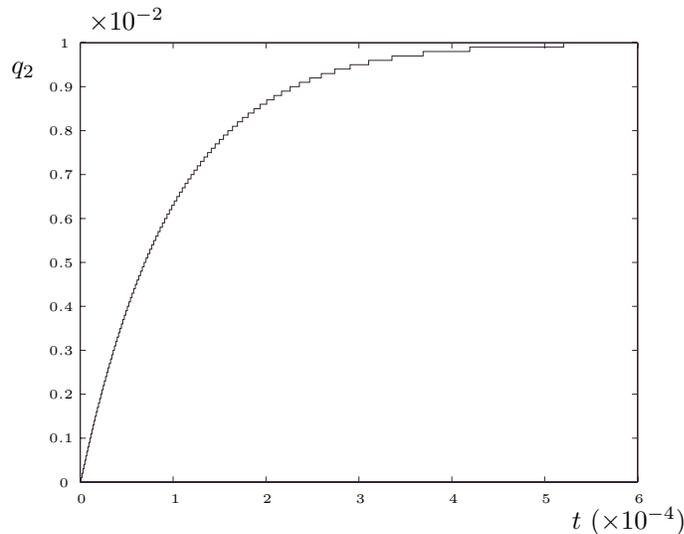


Figura 9.2: Comienzo de la simulación QSS del Sistema (9.1)

con el hecho que el método de QSS es siempre “estable”. Por supuesto, si un método de simulación fuera tan bueno, el mismo probablemente cambiaría toda la teoría de la integración numérica.

Sin embargo, no debe olvidarse el significado dado a la palabra “estable”. El método de QSS no asegura estabilidad sino acotación final de las soluciones y, desafortunadamente, este es el principal problema que tiene con los sistemas rígidos.

Veamos ahora que pasa entonces si se introduce una pequeña modificación en la amplitud de entrada. Cuando este valor es cambiado de  $U(t) = 100$  a  $U(t) = 99.5$  aparece un problema en la simulación por QSS.

En los primeros 5 segundos de simulación el integrador cuantificado que calcula  $x_1$  realiza 100 transiciones internas (lo mismo que antes) pero el otro calcula un total de 25057 transiciones. La trayectoria de  $q_2$  se muestra en las Figuras 9.3–9.4.

En esta simulación, el resultado es casi el mismo que antes. El error, en concordancia con la predicción teórica, está acotado pero el número de cálculos es enorme.

La razón de esto es la aparición de oscilaciones muy rápidas en  $x_2$  que arruinaron las expectativas de tener un método explícito, eficiente, estable y confiable para sistemas rígidos. Si esas oscilaciones no hubieran aparecido, el número de transiciones podría haber sido calculado como antes, dividiendo la amplitud de la trayectoria por el quantum. Sin embargo, esto no es posible en este caso.

Aunque su presencia pueda sorprender, las oscilaciones ya fueron vistas a lo largo de esta Tesis. De hecho, estas no son diferentes de las oscilaciones en la

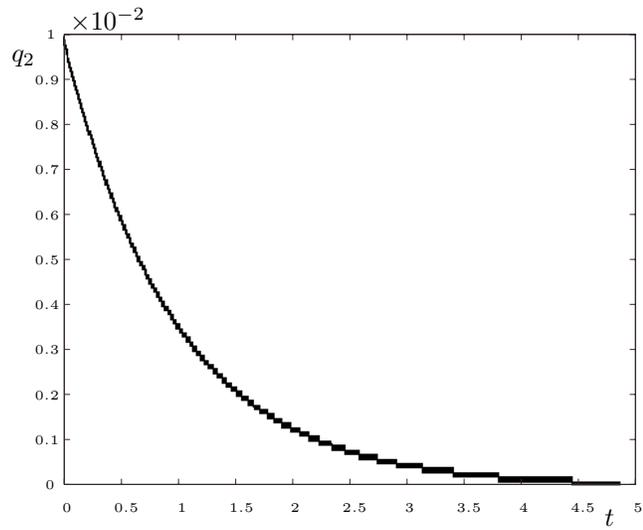


Figura 9.3: Simulación QSS del Sistema (9.1) con  $U = 99.5$

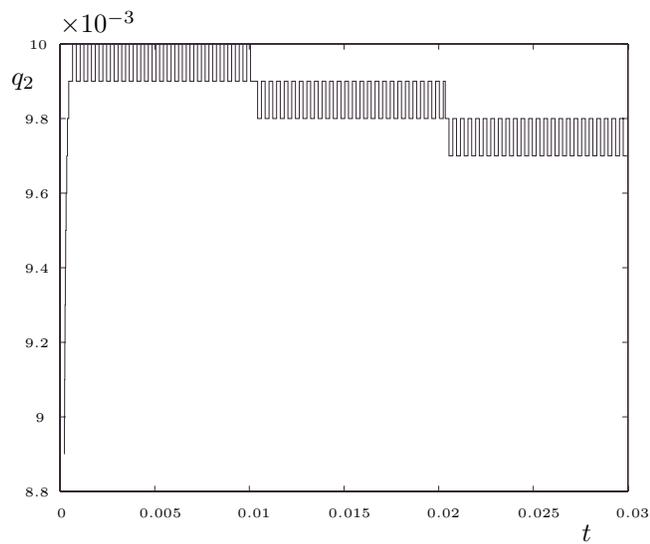


Figura 9.4: Detalle de la Fig.9.3

Figura 4.1 (página 47). Sin embargo, las oscilaciones allí no eran un problema ya que su período no era mucho más corto que el tiempo de establecimiento del sistema.

Desafortunadamente, la frecuencia de las oscilaciones está siempre vinculada a la velocidad del sistema –o sea, la ubicación de los autovalores– lo que sí es

un problema en los casos rígidos. Aquí, puede haber oscilaciones debidas a los modos rápidos que producen muchas transiciones antes que los modos lentos alcancen su estado de régimen.

En lo que refiere a la solución de este problema, no hay aún una respuesta definitiva.

Una modificación interesante que funciona en muchos casos se basa en el uso de conceptos de integración implícita. La idea es mirar los valores futuros de los valores de las variables cuantificadas para calcular las derivadas que determinan los avances de tiempo.

Teniendo en cuenta que el valor futuro de una variable cuantificada es conocido (si el valor actual es  $Q_j$ , en la próxima transición este puede tomar dos valores diferentes:  $Q_{j+1}$  o  $Q_{j-1}$ ), no es necesario resolver ecuaciones implícitas a priori. Aquí, integración implícita no implica necesariamente la resolución de ecuaciones implícitas.

De todas formas, para determinar si el siguiente valor cuantificado es el de arriba o el de abajo debe evaluarse el signo de  $f_i$  (que determina la derivada en ambos casos). Si  $f_i$  evaluada en  $Q_{j+1}$  es positiva, luego  $Q_{j+1}$  deberá ser el siguiente valor. Si  $f_i$  en  $Q_{j-1}$  es negativa, luego el siguiente valor será  $Q_{j-1}$ . Si ninguno de estos casos es cierto, puede asegurarse que entre  $Q_{j-1}$  y  $Q_{j+1}$  hay un punto en el cual  $f_i = 0$  y luego puede ponerse directamente  $\sigma = \infty$ .

Una observación aquí es que los integradores cuantificados deben poder evaluar  $f_i$ , lo que significa que los mismos no deben estar separados de las funciones estáticas que calculan las derivadas.

Aunque los modelos atómicos resultantes son más complejos dado que combinan características de un integrador cuantificado y de una función estática, la simulación se torna mucho más eficiente ya que el número de eventos se reduce a menos de la mitad (el modelo acoplado no tiene que transmitir eventos desde las funciones estáticas hacia los integradores cuantificados ni desde los integradores cuantificados hacia las funciones estáticas que computan su propia derivada).

Esta idea fue implementada de esta forma y la simulación el Ejemplo 9.1 se repitió con  $U(t) = 99.5$ . Ahora, el número de transiciones fue el mismo que utilizando el método de QSS con  $U(t) = 100$ , o sea, sin oscilaciones.

Sin embargo, no se demostró aún que esta idea constituya un solución general para los sistemas rígidos. En sistemas de orden más alto esta *cuantificación en avance* no es trivial debido a que tras cada transición deben analizarse varios conjuntos de posibles valores próximos para determinar cual es el apropiado.

Por esto, a pesar del hecho que los métodos basados en cuantificación pueden brindar una solución apropiada y eficiente en muchos casos rígidos, el problema está aún abierto.

*Elección del Quantum.* Otro problema abierto en estos métodos tiene que ver con la elección de la cuantificación. Si bien se brindaron algunos algoritmos y fórmulas que permiten elegir el quantum de acuerdo al error admitido, esta no es una solución completamente satisfactoria.

Salvo en aplicaciones donde sea necesario asegurar una cota de error que justifique realizar un análisis preciso antes de realizar la simulación, nadie quiere

calcular una función de Lyapunov ni las matrices de autovalores y autovectores para determinar el quantum a utilizar.

Una solución posible consistiría en brindar a la computadora las herramientas necesarias para calcular tales matrices y para elegir automáticamente el quantum antes de simular. Sin embargo, una idea mucho más interesante consistiría en hacer algo similar a lo que hacen los métodos de paso variable. Esto nos llevaría a algo que podría llamarse *cuantificación adaptiva*.

*Precisión.* Otro problema de los métodos es la precisión. Hay muchas aplicaciones en las cuales el error del método de QSS2 puede resultar demasiado grande. Para estos casos pueden imaginarse métodos de orden mayor que 2 que satisfagan las mismas propiedades de QSS y QSS2 (con funciones de cuantificación de orden mayor).

Sin embargo, hay un problema aquí. El modelo DEVS de un integrador cuantificado debe calcular el avance de tiempo tras cada transición externa. Para hacer esto, debe encontrar la raíces de una ecuación polinomial como (5.10). Puede verse que el grado de esta ecuación es el mismo que el orden del método. Por esto, la solución se torna más y más complicada a medida que el orden aumenta.

*QSC en Tiempo Real.* En lo que refiere a QSC, hay un problema que no fue mencionado aún. Ya se dijo que los conversores asincrónicos funcionan mucho más rápido que los comunes. Se sabe también que el costo computacional se reduce y que los cálculos dentro del controlador son más simples. Sin embargo, no debe olvidarse que la implementación de QSC es también un problema de simulación en tiempo real.

La meta de la simulación en tiempo real no es sólo obtener una buena aproximación sino también obtener el resultado antes que el tiempo correspondiente expire. Para alcanzar esto, debemos asegurar que todos los cálculos involucrados en cada paso no tomen más tiempo que lo que está permitido.

En este contexto, la precisión es frecuentemente sacrificada para obtener los resultados en el *tiempo permitido*. Por esto, es muy importante tener un número acotado de cálculos en cada paso.

Este último no es un problema para un modelo de simulación QSS dado que cada paso solo involucra un par de transiciones y el número de cálculos es aproximadamente constante. Sin embargo, el *tiempo permitido* es lo que no es constante aquí y este caso puede constituir un problema en algunas aplicaciones reales.

Para esto, algunas observaciones incluidas en la Sección 8.5 pueden brindar algún tipo de solución parcial pero una respuesta definitiva requerirá también de implementaciones experimentales.

## 9.2 Problemas Abiertos y Trabajo Futuro

Además de los problemas no resueltos ya mencionados (la simulación de sistemas rígidos, la elección de la cuantificación y algunos aspectos de la implementación

de QSC) hay varios problemas *nuevos* que fueron abiertos por las nuevas metodologías.

Una de las ventajas más interesantes mostradas por los métodos de QSS y QSS2 es la eficiente explotación de la rareza. Teniendo en cuenta que el *método de las líneas* así como otros métodos para aproximar ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (PDEs) resultan en ODEs raras, el uso de QSS y QSS2 en estos casos podría constituir una alternativa muy conveniente.

De hecho, esto es lo que se hizo en los ejemplos de la línea de transmisión (Ejemplos 5.1 y 6.1 en las páginas 77 y 92 respectivamente) donde el segundo caso era una ecuación diferencial algebraica en derivadas parciales (PDAE).

Aunque en el ejemplo mencionado se obtuvieron muy buenos resultados, se necesita una investigación más profunda en esta dirección. De hecho, el uso de los métodos de aproximación de PDEs frecuentemente produce ODEs rígidas por lo que este problema debería ser resuelto antes.

En lo que refiere a DAEs, los problemas de índice superior deberían aún tenerse en cuenta. Ya se mencionó que el algoritmo de Pantelides puede utilizarse para reducir el índice a 1 y que así el sistema pueda simularse con los métodos desarrollados. Sin embargo, podría encontrarse un método más eficiente siguiendo las observaciones de la Sección 6.5.

Aunque se mencionó que la estabilidad no es un problema en estos casos y que los errores en el cálculo de las variables implícitas sólo incrementa la cota de error, este hecho debería ser demostrado formalmente. Es también importante en este sentido encontrar una relación entre la tolerancia de la solución de la ecuación implícita y el incremento de la cota de error.

Con respecto a la simulación de sistemas híbridos es necesario extender los resultados teóricos de estabilidad y el análisis de cota de error a sistemas discontinuos generales para establecer condiciones que aseguren la correctitud de la simulación. Lo que fue hecho en el ejemplo del inversor DC-AC (página 101) —donde se estimó la cota de error utilizando Ec.(4.50)— podría constituir un primer paso en esta dirección que podría ser extendido a sistemas generales con sólo eventos temporales.

En el enfoque presentado, sólo se consideraron sistemas híbridos cuyas partes continuas no cambian de orden. Sería interesante considerar también casos más generales incluyendo los de orden variable.

Otro problema interesante es la paralelización de los métodos. La implementación en paralelo de QSS y QSS2 en ODEs y DAEs parece ser trivial ya que la división entre subsistemas es clara. Si consideramos cada par compuesto por un integrador cuantificado y la función estática correspondiente como subsistemas, el tráfico de mensajes entre los distintos subsistemas no será grande.

Más aún, en QSS el valor llevado por cada mensaje diferirá del anterior en un quantum. Luego, el mismo puede transmitirse utilizando sólo un bit diciendo si la variable cuantificada se incrementó o decreció. Este hecho puede constituir una ventaja muy importante en la simulación en tiempo real (en simulación *off-line* el mensaje debe transportar también información sobre el tiempo).

Volviendo al método de QSC, es sabido que la implementación en tiempo real no simula exactamente al modelo QSS (debido a los problemas ya mencio-

nados de retardos y redondeos). Aunque los problemas de redondeo no resultan importantes en general, los retardos sí modifican significativamente el comportamiento de los sistemas QSC.

Luego, es importante estudiar su efecto sobre la estabilidad y las cotas de error. Tal estudio debería también incluir una caracterización de los retardos que requeriría de algún tipo de trabajo experimental en aplicaciones reales. Actualmente hay en la literatura algunos trabajos que siguen objetivos similares en control clásico y que pueden utilizarse como modelo a seguir (ver por ejemplo [69]).

En lo que se refiere a los aspectos teóricos de QSC, las propiedades más importantes fueron demostradas para sistemas generales no lineales e inestacionarios y para sistemas LTI.

Hay un caso intermedio que debería ser tenido en cuenta que corresponde a plantas lineales de parámetros variables (LPV). El Ejemplo 7.2 (página 135) de hecho corresponde a esta categoría y aunque pudo realizarse un análisis de Lyapunov para este caso, el resultado fue muy conservador. Si pudiera extenderse el análisis geométrico hecho para los sistemas LTI en la Sección 8.2 para plantas LPV, podrían esperarse resultados menos conservadores.

Es también importante estudiar el modo en que QSC afecta no sólo la estabilidad, región de atracción y cota de error sino también otras medidas de performance (error cuadrático medio, sobrevalores, etc.)

Finalmente, debe tenerse en cuenta que los QSS son solo una pequeña clase dentro de la amplia familia de los modelos DEVS. Con el uso de modelos DEVS más generales podría eventualmente realizarse un estudio de condiciones óptimas para controladores asincrónicos.

### 9.3 Conclusiones Generales

Esta Tesis presentó una amplia variedad de contribuciones al desarrollo de una nueva teoría sobre la aproximación por eventos discretos de ecuaciones diferenciales.

Se propusieron dos métodos de aproximación –llamados QSS y QSS2– que, basados en ideas de cuantificación, mapean sistemas continuos en modelos DEVS. Aquí fueron considerados no sólo ODEs, sino también DAEs, Sistemas Híbridos y Bond Graphs.

El método de primer orden –QSS– fue también utilizado para aproximar controladores continuos para aplicaciones de control digital. Entonces, utilizando además muestreo asincrónico, se obtuvo un nuevo esquema de control digital asincrónico. Este esquema –llamado QSC– tiene la característica destacable de evitar la discretización del tiempo.

Además de formular los métodos, se desarrollaron herramientas matemáticas basadas en la teoría de perturbaciones que permitieron analizar las propiedades teóricas de las aproximaciones.

En los casos más generales (no lineales e inestacionarios) estas herramientas fueron una simple adaptación del análisis clásico de Lyapunov. En el caso LTI

en cambio, para evitar los resultados conservadores, se propuso un nuevo camino para analizar los efectos de las perturbaciones. Las herramientas resultantes de dicho resultado pueden incluso ser utilizadas con fines mucho más generales que los presentados en el contexto de este trabajo.

Los métodos nuevos muestran muchas ventajas (y también desventajas) con respecto a las aproximaciones clásicas de tiempo discreto como bien puede esperarse del hecho que los mismos se basan en principios esencialmente diferentes.

Desde el punto de vista teórico las ventajas más notables son las concernientes con las propiedades de estabilidad y cota de error. Por un lado, los métodos de simulación (QSS y QSS2) son siempre *estables*<sup>1</sup> en sistemas LTI. Considerando que los métodos son explícitos y no adaptivos este hecho es llamativo. Por otro lado la Desigualdad (4.50) constituye una fórmula cerrada de la cota del error global. Esta es otra ventaja ya que los algoritmos de tiempo discreto carecen de tales expresiones.

Todos estos hechos tienen su correspondencia en QSC. Aquí, es también muy importante la conservación de la región de atracción en plantas no lineales e inestacionarias. Otra ventaja teórica en QSC es que los efectos de cuantificación de los conversores A/D y D/A pueden tenerse en cuenta y acotarse en la etapa de diseño.

En lo que se refiere a las ventajas prácticas, una de las más importantes es la forma en que los métodos de QSS y QSS2 explotan la ralidad debido a que cada integrador funciona independientemente.

En la integración de DAEs, no debe iterarse sobre las ecuaciones implícitas en todos los pasos. De esta forma, estos métodos evitan un gran número de cálculos. Teniendo en cuenta esta característica y el hecho que cada paso sólo involucra cálculos en algunas variables de estado, puede concluirse en que las aproximaciones basadas en cuantificación constituyen una herramienta interesante para resolver sistemas DAE ralos.

Aquí, es también notable la simplicidad con la que se pueden simular Diagramas de Bloques con lazos algebraicos. Aunque la eficiencia computacional de esta metodología *bloqueorientada* no es óptima, es un método sistemático que puede implementarse directamente en cualquier entorno de simulación de DEVS y que explota la ralidad y las demás ventajas de los métodos basados en cuantificación.

Como podía esperarse de una aproximación por eventos discretos, la reducción más importante de los costos computacionales se observó en los sistemas híbridos. La facilidad para tratar discontinuidades constituye una de las ventajas más importantes de los métodos con respecto a los algoritmos clásicos.

En los ejemplos analizados, los métodos mostraron un desempeño claramente superior a todos los algoritmos complejos, implícitos, de orden elevado y de paso variable implementados en Simulink. Teniendo en cuenta que tanto QSS como QSS2 son muy simples, de bajo orden y con cuantificación fija; es natural pensar que futuros métodos de eventos discretos más complejos pueden llegar a ofrecer una performance más que notable.

---

<sup>1</sup>en realidad tienen soluciones finalmente acotadas

Con respecto a las ventajas prácticas de QSC, ya se mencionó la reducción de los costos computacionales como resultado del esquema de muestreo asincrónico. Aquí, los conversores solo toman muestras cuando es necesario (o sea, cuando estas difieren del valor previo en un cantidad dada). Similarmente, los estados internos del controlador se recalculan bajo la misma condición. Por esto, QSC puede pensarse como una estrategia de control que sólo actúa cuando tiene que hacerlo.

Aunque los principios de la implementación de QSC parecen bastante complicados (al menos para la gente que no esta familiarizada con el formalismo DEVS) su programación es bastante simple. De hecho, lo único que hay que hacer es implementar las rutinas explicadas en la Sección 2.4 y ejecutarlas en tiempo real. Por supuesto, hay herramientas que lo hacen automáticamente como PowerDEVS [50]. Utilizando esta última herramienta el problema se reduce a armar de manera gráfica un Diagrama de Bloques del controlador y ejecutar la simulación con las opciones de tiempo real.

Otra ventaja es que, para la implementación de QSC, pueden utilizarse técnicas clásicas de diseño de controladores (por ejemplo, en el Ejemplo 7.1 en la página 129, el controlador continuo original se diseño mediante *linealización exacta* [22]). Más aún, si se utilizan técnicas de diseño basadas en Lyapunov, los algoritmos de implementación descritos en las Secciones 7.5 y 7.7 pueden aplicarse fácilmente.

Otro hecho que debe remarcar es el relacionado con la información utilizada por el controlador QSC. Una vez que el controlador adquiere su primer valor de entrada, los conversores A/D asincrónicos pueden transmitir los valores siguientes utilizando sólo un bit por conversión con el signo del cambio. Similarmente –siempre y cuando haya algún tipo de ajuste entre los cuantificadores internos y los conversores– las salidas del controlador pueden transmitirse con sólo un bit por valor.

Esta es una ventaja muy importante en sistemas de control distribuidos, donde la información debe transmitirse entre sensores, controladores y actuadores. Aunque hay algunos resultados basados en cuantificación para reducir el monto de información [12], el uso de sólo un bit nunca fue logrado con esquemas de control no trivial.

Por último, y dejando a un lado las ventajas, desventajas y problemas no resueltos, la esencia de esta Tesis es simplemente una nueva forma de concebir la aproximación de ecuaciones diferenciales, en la cual se rompe el principio de que los estados discretos deben cambiar de manera simultánea y sincrónica.

# Bibliografía

- [1] François Baccelli, Guy Cohen, Geert Olsder, y Jean Pierre Quadrat. *Synchronization and Linearity*. Wiley, 1992.
- [2] J.S. Balduc y H. Vangheluwe. Expressing ODE models as DEVS: Quantization approaches. En *Proceedings of AIS'2002*, páginas 163–169, Lisbon, Portugal, 2002.
- [3] P.I. Barton. Modeling, Simulation, and Sensitivity Analysis of Hybrid Systems: Mathematical Foundations, Numerical Solutions, and Software Implementations. En *Proc. of the IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design*, páginas 117–122, Anchorage, Alaska, 2000.
- [4] M. Branicky. Stability of Switched and Hybrid Systems. En *Proc. 33rd IEEE Conf. Decision Control*, páginas 3498–3503, Lake Buena Vista, FL, 1994.
- [5] R. Brockett y D. Liberzon. Quantized feedback stabilization of linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 45:1279–1289, 2000.
- [6] J.F. Broenink y P.B. Weustink. A Combined-System Simulator for Mechatronic Systems. En *Proceedings of ESM96*, páginas 225–229, Budapest, Hungary, 1996.
- [7] François Cellier y Ernesto Kofman. *Continuous System Simulation*. Springer, New York, 2003. In preparation.
- [8] François Cellier. *Combined Continuous/Discrete System Simulation by Use of Digital Computers: Techniques and Tools*. Tesis Doctoral, Swiss Federal Institute of Technology, 1979.
- [9] François Cellier. *Continuous System Modeling*. Springer, New York, 1991.
- [10] François Cellier. Object-Oriented Modeling: Means for Dealing With System Complexity. En *Proc. 15th Benelux Meeting on Systems and Control*, páginas 53–64, Mierlo, The Netherlands, 1996.
- [11] D. Delchamps. Stabilizing a linear system with quantized state feedback. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 35:916–924, 1990.

- [12] N. Elias y S. Mitter. Stabilization of Linear Systems with Limited Information. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 46(9):1384–1400, 2001.
- [13] J.M. Esposito, V. Kumar, y G.J. Pappas. Accurate Event Detection for Simulating Hybrid Systems. En *HSCC*, volumen 2034 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 204–217. Springer, 2001.
- [14] J. Farrel y A. Michel. Estimates of asymptotic trajectory bounds in digital implementations of linear feedback control systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34:1319–1324, 1989.
- [15] C.W. Gear. The Simultaneous Numerical Solution of Differential–Algebraic Equations. *IEEE Trans. Circuit Theory*, TC-18(1):89–95, 1971.
- [16] Norbert Giambiasi, Bruno Escude, y Sumit Ghosh. GDEVs: A generalized Discrete Event specification for accurate modeling of dynamic systems. *Transactions of SCS*, 17(3):120–134, 2000.
- [17] Ernst Hairer, Syvert Norsett, y Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Springer, 2da edición, 1993.
- [18] Ernst Hairer y Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential–Algebraic Problems*. Springer, 1era edición, 1991.
- [19] L. Hou, A. Michel, y H. Ye. Some qualitative properties of sampled-data control systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 42:1721–1725, 1997.
- [20] L. Hu y A. Michel. Some qualitative properties of multirate digital control systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44:765–770, 1999.
- [21] Y. Ismail, E. Friedman, y J. Neves. Figures of merit to characterize the importance of On-Chip inductance. *IEEE Trans. on VLSI Systems*, 7(4):442–449, 1999.
- [22] Hassan Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 2da edición, 1996.
- [23] Kihyung Kim, Wonseok Kang, y Hyungon Seo. Efficient Distributed Simulation of Hierarchical DEVS Models: Transforming Model Structure into a Non-Hierarchical One. En *Proceedings of Annual Simulation Symposium*, 2000.
- [24] Tag Gon Kim. *DEVSsim++ User’s Manual. C++ Based Simulation with Hierarchical Modular DEVS Models*. Korea Advance Institute of Science and Technology, 1994. Disponible en <http://www.acims.arizona.edu/>.
- [25] Ernesto Kofman. Quantized Bond Graph. Una aproximación para la simulación de sistemas físicos por eventos discretos. En *Proceedings of AADECA 2000*, páginas 419–424, Buenos Aires, 2000.

- [26] Ernesto Kofman. Simulación de sistemas dinámicos por cuantificación de estados. En *Proceedings of AADECA 2000*, páginas 425–430, 2000.
- [27] Ernesto Kofman. Algunas Propiedades de la Simulación de ODE's por Cuantificación de Estados. En *Proceedings of RPIC'01*, páginas 532–537, 2001.
- [28] Ernesto Kofman. Quantized-State Control. A Method for Discrete Event Control of Continuous Systems. Part I. En *Proceedings of RPIC'01*, páginas 103–108, 2001.
- [29] Ernesto Kofman. Quantized-State Control. A Method for Discrete Event Control of Continuous Systems. Part II. En *Proceedings of RPIC'01*, páginas 109–114, 2001.
- [30] Ernesto Kofman. A Second Order Approximation for DEVS Simulation of Continuous Systems. *Simulation*, 78(2):76–89, 2002.
- [31] Ernesto Kofman. Discrete Event Simulation of Hybrid Systems. Reporte Técnico LSD0205, LSD, UNR, 2002. Enviado a *SIAM Journal on Scientific Computing*. Disponible en [www.fceia.unr.edu.ar/~kofman/](http://www.fceia.unr.edu.ar/~kofman/).
- [32] Ernesto Kofman. Non Conservative Ultimate Bound Estimation in LTI Perturbed Systems. En *Proceedings of AADECA 2002*, Buenos Aires, Argentina, September 2002.
- [33] Ernesto Kofman. Quantization–Based Simulation of Differential Algebraic Equation Systems. Reporte Técnico LSD0204, LSD, UNR, 2002. Aceptado para publicación en *Simulation*.
- [34] Ernesto Kofman. Quantized-State Control of Linear Systems. En *Proceedings of AADECA 2002*, Buenos Aires, Argentina, September 2002.
- [35] Ernesto Kofman. Discrete Event Approximation of Continuous Controllers. Reporte Técnico LSD0301, LSD, UNR, 2003. Enviado a *Automatica*. Disponible en [www.fceia.unr.edu.ar/~kofman/](http://www.fceia.unr.edu.ar/~kofman/).
- [36] Ernesto Kofman. Quantized-State Control. A Method for Discrete Event Control of Continuous Systems. *Latin American Applied Research*, 33(4):399–406, 2003.
- [37] Ernesto Kofman y Sergio Junco. Un ambiente computacional para la modelización de sistemas dinámicos no lineales con Bond Graphs. En *Proceedings of RPIC99*, volumen 3, 16–10, 1999. In Spanish.
- [38] Ernesto Kofman y Sergio Junco. Quantized State Systems. A DEVS Approach for Continuous System Simulation. *Transactions of SCS*, 18(3):123–132, 2001.

- [39] Ernesto Kofman y Sergio Junco. Quantized Bond Graphs: An Approach for Discrete Event Simulation of Physical Systems. En *Proceedings of ICBGM'01*, páginas 369–374, Phoenix, 2001.
- [40] Ernesto Kofman, J.S. Lee, y Bernard Zeigler. DEVS Representation of Differential Equation Systems. Review of Recent Advances. En *Proceedings of ESS'01*, 2001.
- [41] A.J. Koskovej y A.S. Zinober. Sliding Mode Controller-Observer Design for Multivariable Linear Systems with Unmatched Uncertainty. *Cybernetics*, 36(1):95–115, 2000.
- [42] J.S. Lee, H. Shim, J. Byun, y J.H. Seo. Robust Stabilization of a class of MIMO nonlinear systems: Sliding mode control & Passification Approach. En *Proceedings of ACC98*, 1998.
- [43] D.G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, 2da edición, 1989.
- [44] J. Lunze, B. Nixdorf, y J. Schröder. Deterministic Discrete Event Representation of Linear Continuous-Variable Systems. *Automatica*, 35(3):395–406, 1999.
- [45] William Messner y Dawn Tilbury. *Control Tutorials For MATLAB And Simulink: A Web-Based Approach*. Addison-Wesley, 1998.
- [46] R. Miller, A. Michel, y J. Farrel. Quantizer effects on steady-state error specifications of digital feedback control systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34:651–654, 1989.
- [47] R. Miller, M. Mousa, y A. Michel. Quantization and overflow effects in digital implementation of linear dynamic controllers. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 33:698–704, 1988.
- [48] Aziz Naamane, Alfonse Damiba, y Norbert Giambiasi. Bond Graphs and GDEVs. En *Proceedings of ICBGM'01*, páginas 375–380, Phoenix, 2001.
- [49] Martin Otter y François Cellier. *The Control Handbook*, capítulo Software for Modeling and Simulating Control Systems, páginas 415–428. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [50] Esteban Pagliero y Marcelo Lapadula. Herramienta Integrada de Modelado y Simulación de Sistemas de Eventos Discretos. Proyecto Final de Ingeniería. FCEIA, UNR, Argentina, Julio 2002.
- [51] C. Pantelides. The Consistent Initialization of of Differential-Algebraic Systems. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 9(2):213–231, 1988.
- [52] T. Park y P.I. Barton. State Event Location in Differential-Algebraic Models. *ACM Trans. Mod. Comput. Sim.*, 6(2):137–165, 1996.

- [53] Herbert Praehofer. *System Theoretic foundations for combined Discrete - Continuous System simulation*. Tesis Doctoral, J. Kepler University of Linz, 1991.
- [54] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, y W.T. Vetterling. *Numerical Recipes*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.
- [55] R. Rosenberg y D. Karnopp. *Introduction to Physical System Dynamics*. McGraw Hill, 1983.
- [56] N. Sayiner, H. Sorensen, y T. Viswanathan. A non-uniform sampling technique for A/D conversion. En *Proceedings of ISCAS'93*, volumen 2, páginas 1220–1223, 1993.
- [57] T. Schlegl, M. Buss, y G. Schmidt. Development of Numerical Integration Methods for Hybrid (Discrete-Continuous) Dynamical Systems. En *Proceedings of Advanced Intelligent Mechatronics*, Tokio, Japan, 1997.
- [58] L. Shampine y Reichelt M. The MATLAB ODE Suite. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(1):1–22, 1997.
- [59] J.E. Strömberg. *A Mode Switching Modeling Philosophie*. Tesis Doctoral, Linköpings Universitet, 1994.
- [60] J.H. Taylor. Toward a Modeling Language Standard for Hybrid Dynamical Systems. En *Proc. 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, páginas 2317–2322, San Antonio, TX, 1993.
- [61] J.H. Taylor y D. Kebede. Modeling and Simulation of Hybrid Systems in Matlab. En *Proc. IFAC World Congress*, páginas 275–280, San Francisco, CA, July 1996.
- [62] G. Walsh, O. Beldiman, y L. Bushnell. Error Encoding Algorithms for Networked Control Systems. *Automatica*, 2001.
- [63] Bernard Zeigler, George Ball, Hyup Cho, J.S. Lee, y Hessam Sarjoughian. Bandwidth Utilization/Fidelity Tradeoffs in Predictive Filtering. En *Proceedings of 1999 Spring SIW. SISO*, 1999.
- [64] Bernard Zeigler y J. Kim. Extending the DEVS-Scheme knowledge-based simulation environment for real time event-based control. *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, 3(9):351–356, 1993.
- [65] Bernard Zeigler, Tag Gon Kim, y Herbert Praehofer. *Theory of Modeling and Simulation. Second edition*. Academic Press, New York, 2000.
- [66] Bernard Zeigler y J.S. Lee. Theory of quantized systems: formal basis for DEVS/HLA distributed simulation environment. En *SPIE Proceedings*, páginas 49–58, 1998.

- [67] Bernard Zeigler y Hessam Sarjoughian. *Introduction to DEVS Modeling and Simulation with JAVA: A Simplified Approach to HLA-Compliant Distributed Simulations*. Arizona Center for Integrative Modeling and Simulation. Disponible en <http://www.acims.arizona.edu/>.
- [68] Bernard Zeigler. *Theory of Modeling and Simulation*. John Wiley & Sons, New York, 1976.
- [69] Wei Zhang, Michael Branicky, y Stephen Phillips. Stability of Networked Control Systems. *IEEE Control Systems*, 21(1):84–99, 2001.

# Apéndice A

## Lista de Abreviaciones

- BG – Bond Graph
- CCS – Sistema de Control Continuo (Continuous Control System)
- DAE – Ecuación Diferencial Algebraica (Differential Algebraic Equation)
- DEVS – Discrete EVent System Specification
- F.O.Q. – Cuantificador de Primer Orden (First Order Quantizer)
- LTI – Lineal y Estacionario (Linear Time Invariant)
- PDE – Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales (Partial Differential Equation)
- QBG – Bond Graph Cuantificado (Quantized Bond Graph)
- QS – Sistema Cuantificado (Quantized System)
- QSC – Control de Estados Cuantificados (Quantized State Control)
- QSS – Sistema de Estados Cuantificados (Quantized State System)
- QSS2 – Sistema de Estados Cuantificados de Segundo Orden (Second Order Quantized State System)
- ODE – Ecuación Diferencial Ordinaria (Ordinary Differential Equation)
- TI – Estacionario (Time Invariant)



## Apéndice B

# Pseudo-Códigos para la Simulación de DEVS

El siguiente pseudo-código corresponde a un simulador asociado a un modelo atómico genérico.

```
DEVS-simulator
variables:
  tl // time of last event
  tn // time of next event
  s // state of the DEVS atomic model
  e // elapsed time in the actual state
  y = (y.value, y.port) // current output of the DEVS atomic model
when receive i-message (i, t) at time t
  tl = t - e
  tn = tl + ta(s)
when receive *-message (*, t) at time t
  y =  $\lambda$ (s)
  send y-message (y, t) to parent coordinator
  s =  $\delta_{\text{int}}$ (s)
  tl = t
  tn = t + ta(s)
when receive x-message (x, t) at time t
  e = t - tl
  s =  $\delta_{\text{ext}}$ (s, e, x)
  tl = t
  tn = t + ta(s)
end DEVS-simulator
```

La rutina correspondiente a un coordinador puede escribirse como sigue:

```
DEVS-coordinator
```

```

variables:
  tl // time of last event
  tn // time of next event
  y = (y.value, y.port) // current output of the DEVS coordinator
  D // list of children
  IC // list of connections of the form [(di, port1), (dj, port2)]
  EIC // list of connections of the form [(N, port1), (dj, port2)]
  EOC // list of connections of the form [(di, port1), (N, port2)]
when receive i-message (i, t) at time t
  send i-message (i, t) to all the children
when receive *-message (*, t) at time t
  send *-message (*, t) to d*
  d* = arg[ $\min_{d \in D}(d.tn)$ ]
  tl = t
  tn = t + d*.tn
when receive x-message ((x.value, x.port), t) at time t
  (v, p) = (x.value, x.port)
  for each connection [(N, p), (d, q)]
    send x-message ((v, q), t) to child d
  d* = arg[ $\min_{d \in D}(d.tn)$ ]
  tl = t
  tn = t + d*.tn
when receive y-message ((y.value, y.port), t) from d*
  if a connection [(d*, y.port), (N, q)] exists
    send y-message ((y.value, q), t) to parent coordinator
  for each connection [(d*, p), (d, q)]
    send x-message ((y.value, q), t) to child d
end DEVS-coordinator

```

Por último, el coordinador raíz ejecuta la siguiente rutina:

```

DEVS-root-coordinator
variables:
  t // global simulation time
  d // child (coordinator or simulator)
t = t0
send i-message (i, t) to d
t = d.tn
loop
  send *-message (*, t) to d
  s =  $\delta_{\text{int}}(s)$ 
  t = d.tn
until end of simulation
end DEVS-root-coordinator

```

# Índice de Materias

- álgebra max-plus, 46
- acoplamiento jerárquico, 17
- algoritmo de Pantelides, 88
- almacenadores acoplados, 114
- Balduc;Jean S., 6
- BG, 171
- bond graphs, 107–108
  - cuantificados, 4, 107–117
- código plano, 21
- capacitor cuantificado, 109
- causalidad derivativa, 114
- CCS, 171
- Cellier;François, 99, 165, 168
- circuito inversor, 101
- control de estados cuantificados, 4
- conversor
  - A/D, 120
  - ajuste, 152
  - D/A, 120
- cota final
  - Lyapunov, 54–57
  - no conservadora, 57–63
  - QSC, 127, 129, 135
- cuantificación adaptiva, 160
- cuantificador, 22
  - de primer orden, 69
- DAE, 4, 88–98, 171
- detección de eventos, 99
- DEVS, 3, 14–21, 171
  - acoplado, 17–19
  - atómico, 15–17
  - con puertos, 17
  - coordinator, 19, 173
  - generador de eventos, 40
  - ilegítimo, 24
  - legítimo, 24
  - rompe-lazo, 95, 96
  - root-coordinator, 174
  - root-coordinator, 20
  - simulación, 19–21, 173–174
  - simulator, 19, 173
- disipadores acoplados, 114
- ecuación
  - algebraico diferencial, 4
  - en diferencias, 14
- efectos de cuantificación, 8
- error
  - global, 7, 45, 64
  - local, 45
- escape en tiempo finito, 153
- estabilidad
  - semiglobal, 127
- estabilidad de QSS, 50
- evento, 14
  - de estado, 98
  - temporal, 98
- explotación de ralitud, 7, 39, 77, 161
- external transition function, 16
- frecuencia de Nyquist, 123
- función
  - cuantificada, 109
  - de avance de tiempo, 16
  - de cuantificación, 22
    - con histéresis, 32
    - de primer orden, 70
  - de desempate, 18, 42
  - de salida, 16
  - de transición externa, 16

- de transición interna, 16
- GDEVs, 6, 28, 74
- Gear;C.W., 88, 166
- Giambiasi;Norbert, 6, 28, 74, 166
- Gronwall–Bellman, desigualdad, 49
- histéresis, 32
- ilegitimidad, 3
- inercia cuantificada, 109
- integrador cuantificado, 22
  - con histéresis, 37
  - de segundo orden, 74
- internal transition function, 16
- Junco;Sergio, 168
- Khun;Thomas, 155
- Lapadula;Marcelo, 19, 168
- lazo algebraico, 94, 114
- Lee;J.S., 169
- Lipschitz
  - condición, 49
  - constante, 49
- Lotka–Volterra, 80
- LTI, 171
- Lyapunov
  - análisis, 51, 54–57
  - función, 51, 53
- método
  - de las líneas, 161
- método de QSS2, 69–84
  - definición, 71
- Michel;Anthony, 8
- motor de corriente continua, 111
- muestreo asincrónico, 120–121
- niveles de cuantificación, 32
- output function, 16
- Pagliari;Esteban, 19, 168
- Pantelides;C., 88, 168
- paradoja de Zenón, 24
- Parallel-DEVs, 18
- PDE, 161, 171
- perturbaciones no evanescentes, 53
- PowerDEVs, 19
- Praehofer;Herbert, 169
- puntos de equilibrio en QSS, 50
- QBG, 4, 107–117, 171
  - definición, 109
  - trayectorias, 109
- QS, 3, 171
- QSC, 4, 121–142, 171
  - controlador, 122
  - convergencia, 136
  - error, 145
  - estabilidad, 125, 132
  - implementación, 122, 128, 134, 146
  - LTI, 144–152
  - perturbaciones, 123
  - sistema, 122
- QSS, 3, 31–43
  - arranque, 42–43
  - convergencia, 48–50
  - elección de histéresis, 65
  - elección del quantum, 65
  - error global, 64
  - estabilidad, 50–54
  - implícito, 89
  - método, 3, 33–43
  - puntos de equilibrio, 50
  - sistemas LTI, 63–65
  - trayectorias, 34–36
  - vs. QSS2, 83–84
- QSS2, 4, 69–84
  - definición, 71
  - implícito, 89
  - método, 4
  - propiedades, 77
  - trayectorias, 71
  - vs. QSS, 83–84
- quantum, 32
  - elección, 159
- región
  - de atracción, 127, 129, 135
  - de no-saturación, 48, 124

- representación perturbada, 46
- secuencia de eventos, 14
- singularidades estructurales, 114
- sistema
  - cuantificado, 3, 21–27
  - DAE, 88–98
  - de estados cuantificados, 3, 33
  - de eventos discretos, 14
  - de tiempo discreto, 11
  - de Zenón, 24
  - híbrido, 4, 7
    - representación, 99
    - simulación, 98–106
  - LPV, 162
  - LTI perturbado, 54–63
  - rígido, 67, 155–159
  - ralo, 21, 39
- teoremas conversos, 53
- time advance function, 16
- transmisión de información, 8
- trayectoria
  - de entrada, 39–42, 77
  - finalmente acotada, 48
- trayectoria de eventos, 15
- variable cuantificada, 23, 71
- Zeigler;Bernard, 6, 14, 169, 170