

# SIMULACIÓN DE SISTEMAS DINÁMICOS POR CUANTIFICACIÓN DE ESTADOS

Ernesto Kofman

*Departamento de Electrónica. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura.  
Universidad Nacional de Rosario. Becario del CONICET. Riobamba 245 bis – Rosario -  
e-mail: ekofman@eie.fceia.unr.edu.ar*

Resumen: En este trabajo se desarrolla una nueva metodología de cuantificación de sistemas dinámicos representables mediante ecuaciones diferenciales ordinarias que permite obtener un sistema exactamente simulable bajo un enfoque de eventos discretos. Se propone, además, un algoritmo para efectuar la cuantificación mencionada de modo de asegurar la conservación de propiedades de estabilidad del sistema original:

Keywords: Dynamic Systems, Discrete Event Systems, Simulation.

## 1. INTRODUCCIÓN

La simulación digital de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias requiere la utilización de métodos de cuantificación. Tanto los métodos clásicos de Euler, Runge-Kutta, Adams, etc., así como sus variantes de paso variable y métodos implícitos, están basados en la cuantificación de la base de tiempo (Press, *et al.*, 1986). Como resultado de esta cuantificación temporal, se obtiene un modelo de tiempo discreto que en general es exactamente simulable.

Recientemente se han desarrollado métodos que permiten la simulación de estos sistemas bajo un enfoque de eventos discretos (Zeigler, *et al.*, 2000; Giambiasi, 1998; Naamane, *et al.*, 1999)

La simulación a eventos discretos cuenta con algunas ventajas respecto a la de tiempo discreto ya que en general, para una dada precisión, el número de cálculos puede reducirse notablemente, especialmente en sistemas “stiff” o rígidos. Cuenta además con la posibilidad de realizar simulación distribuida, lo que aumenta notablemente la velocidad. Es importante mencionar también, que un sistema de eventos discretos puede simular a un sistema de tiempo discreto, por lo que, en definitiva, los métodos de tiempo discreto pueden verse como casos particulares de los métodos de eventos discretos (Zeigler, *et al.*, 2000). De esta forma, el estudio de los métodos específicos de eventos discretos abre un nuevo

panorama dentro de la simulación de sistemas dinámicos continuos.

Otra de las importantes ventajas de estos métodos es que, frente a la simulación de sistemas híbridos, los métodos mencionados permiten encuadrar tanto la parte continua como la discreta dentro del mismo paradigma de simulación (Praehofer, 1991).

Una forma de obtener aproximaciones de este tipo es mediante la cuantificación de las variables de estado del sistema dinámico mencionado. Esta idea es desarrollada en Zeigler, *et al.*, (2000), donde la cuantificación es realizada utilizando una *función seccionalmente constante*. Sin embargo esta técnica puede dar lugar a un sistema capaz de realizar un número infinito de transiciones en un intervalo infinitesimal de tiempo, lo que lo hace no exactamente simulable.

Giambiasi, (1998) plantea otro método mucho más preciso consistente en la aproximación de las trayectorias continuas originales por *trayectorias seccionalmente constantes* o seccionalmente polinomiales. Sin embargo, al no haber una transformación directa sobre el sistema continuo resulta sumamente difícil el estudio de propiedades de estabilidad y convergencia.

En este trabajo se propone, en primer lugar, la utilización de una función de cuantificación con histéresis en lugar de una función seccionalmente

constante para salvar los inconvenientes mencionados. Con esta cuantificación se realiza un modelo DEVS (Zeigler, 1976) y posteriormente se realiza un estudio de propiedades de estabilidad del sistema resultante.

## 2. CUANTIFICACIÓN DE ESTADOS.

Antes de presentar el método desarrollado, se introducirá el concepto de *Función de Cuantificación con histéresis*.

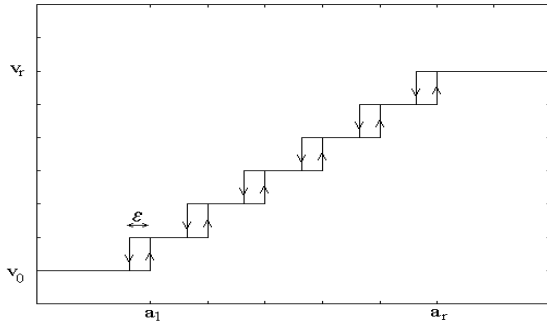


Fig. 1. Relación de cuantificación con histéresis.

Sean los conjuntos finitos:

$$A_c = \{a_0, a_1, \dots, a_r, a_{r+1}\}, V_c = \{v_0, \dots, v_r\}, \text{ donde:}$$

$$a_0 = -\infty \quad a_{r+1} = \infty; \quad a_i < a_{i+1} \quad i = 0, \dots, r \quad \{1\}$$

$$\text{y } v_i < v_{i+1} \quad i = 0, \dots, r-1$$

A partir de estos conjuntos se define la siguiente función seccionalmente constante:

$$d(a) = v_i \quad \text{si } a \in [a_i, a_{i+1}); \quad \{2\}$$

y finalmente

$$V(a, b) = \begin{cases} d(a) & \text{si } d(a) = d(a + \mathbf{e}) \\ d(b) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \{3\}$$

Cuando la variable  $a$  sea una función del tiempo y la variable  $b$  sea  $b = a(t_1^+)$ , siendo  $t_1$  el último instante de tiempo para el que  $d(a)$  cambió, la función  $V(a, b)$  se denominará función de cuantificación con histéresis. Debe cumplirse además que  $\mathbf{e} > 0$ . (Fig. 1).

Sea ahora un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{cases} \quad \{4\}$$

Se define como Sistema cuantificado asociado al anterior, al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(q_1, \dots, q_n, w_1, \dots, w_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(q_1, \dots, q_n, w_1, \dots, w_m) \end{cases} \quad \{5\}$$

donde:

$w_j = W_j(u_j)$  siendo  $W_j$  una función seccionalmente constante y acotada que verifica  $W_j(w_j) = w_j$ .

$q_j = V_j(x_j, c)$ , siendo  $V_j$  una función de cuantificación con histéresis definida por los conjuntos finitos  $X_j$  y  $Q_j$  y el parámetro  $\mathbf{e}_j$ , que además verifica  $V_j(q_j, c) = q_j \quad \forall c, q_j \in Q_j$ .

## 3. ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS CUANTIFICADOS.

*Teorema 1:* En un sistema cuantificado definido como en {5}, donde las funciones  $f_1, \dots, f_n$  son continuas y acotadas en cualquier dominio cerrado, las trayectorias de las variables  $q_1, \dots, q_n$  son seccionalmente constantes en cualquier intervalo finito de tiempo.

*Demostración:* Sean los conjuntos  $Q_j = \{q_j^1, \dots, q_j^{r_j}\}$  y  $X_j = \{x_j^0, \dots, x_j^{r_j}\}$  que junto a  $\mathbf{e}_j$  definen la función de cuantificación. Por {1}, resulta para una variable cuantificada arbitraria:

$$q_j^1 \leq q_j \leq q_j^{r_j} \quad \{6\}$$

Luego, las variables  $q_1, \dots, q_n$  tienen trayectorias acotadas. De forma análoga, las versiones cuantificadas de la entrada  $(w_1, \dots, w_m)$  tienen trayectorias acotadas. Por la condición impuesta a las funciones  $f_1, \dots, f_n$ , estas resultan también acotadas y luego, de {5}, las derivadas  $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$  tienen trayectorias acotadas.

$$-M \leq \dot{x}_j \leq M \quad \forall j \quad \{7\}$$

Dado que:

$$x_j = x_j(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}_j(\mathbf{t}) dt \quad \{8\}$$

De {7} y {8} sigue:

$$x_j(0) - M(t_0 - t) \leq x_j \leq x_j(0) + M(t_0 - t) \quad \{9\}$$

La desigualdad {9} muestra que las variables de estado tienen trayectorias acotadas en un intervalo de tiempo finito arbitrario. Además, de {7} y {8}, las variables de estado tendrán trayectorias continuas.

Debido a esto último y a la definición de función de cuantificación con histéresis, puede deducirse fácilmente que el tiempo mínimo necesario para que

una variable cuantificada cambie dos veces de valor es mayor que:

$$t_{min} = \frac{e_j}{M} \quad \{10\}$$

Esto último garantiza que las variables cuantificadas tienen trayectorias seccionalmente constantes.

**Teorema 2:** En un sistema cuantificado que cumple con las hipótesis del Teorema 1, las trayectorias de las variables de estado son seccionalmente lineales.

**Demostración:** es inmediata partiendo del Teorema 1.

Los sistemas cuyas trayectorias de entrada y salida son seccionalmente constantes, pueden simularse exactamente por una estructura DEVS (Zeigler, et al., 2000). Para esto, cada trayectoria seccionalmente constante es representada mediante una trayectoria de eventos, de modo tal que se asocie un evento a cada cambio en el valor de la trayectoria original. En virtud de esto, los teoremas 1 y 2 muestran que los sistemas cuantificados son simulables por una estructura DEVS.

#### 4. MODELO DEVS ASOCIADO A UN SISTEMA CUANTIFICADO.

Definiremos el modelo DEVS como un acoplamiento de integradores cuantificados y dos sistemas que calculan las funciones de evolución (F) y de salida (G). (Fig.2).

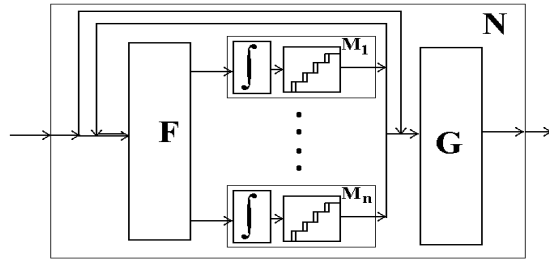


Fig. 2. Esquema del sistema cuantificado.

La estructura DEVS para un integrador cuantificado con entrada seccionalmente constante es:

$$M_j = \langle X, S, Y, \mathbf{d}_{int}, \mathbf{d}_{ext}, \mathbf{I}, ta \rangle, \text{ donde:}$$

$$X = \mathfrak{R}; Y = \mathfrak{R}; S = \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}_0^+ \times \infty$$

(conjuntos de valores de entrada, de salida y de estados respectivamente).

$\mathbf{d}_{int}[(x, u, \mathbf{s})] = (x', u, \mathbf{s}')$  (función de transición interna), donde

$$x' = x + u \cdot \mathbf{s}; y \mathbf{s}' = \begin{cases} \frac{x^{i+1} - x'}{u} & \text{si } u > 0 \\ \frac{e}{|u|} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo  $x^{i+1}$  el siguiente valor cuántico de  $x' = x^i$  en este caso.

$\mathbf{d}_{ext}[(x, u, \mathbf{s}), e, w] = (x', w, \mathbf{s}')$ , (función de transición externa), y ahora,

$$x' = x + u \cdot e; y \mathbf{s}' = \begin{cases} \frac{x^{i+1} - x'}{u} & \text{si } u > 0 \\ \frac{x' - x^i + e}{|u|} & \text{si } u < 0 \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\mathbf{I}(x, u, \mathbf{s}) = d(x + \mathbf{s} \cdot u)$  (función de salida)

$ta(x, u, \mathbf{s}) = \mathbf{s}$  (función de avance de tiempo o tiempo de vida)

Puede verificarse fácilmente que el modelo obtenido simula exactamente el funcionamiento de un integrador como el mencionado, bajo la hipótesis de una trayectoria de entrada seccionalmente constante.

Para completar la especificación del sistema definido en {5} se agregan las ecuaciones de salida:

$$\begin{cases} y_1 = g_1(q_1, \dots, q_n, w_1, \dots, w_m) \\ \vdots \\ y_h = g_h(q_1, \dots, q_n, w_1, \dots, w_m) \end{cases} \quad \{11\}$$

La estructura DEVS de acoplamiento entonces es la que sigue:

$N = \langle X, Y, D, \{M_d\}, \{I_d\}, \{Z_{i,d}\}, Select \rangle$ , donde:

$X = [\mathfrak{R} \cup \{\mathbf{f}\}]^m$  (conjunto de valores de entrada, donde el elemento  $\mathbf{f}$  representa la ausencia de evento).

$Y = [\mathfrak{R} \cup \{\mathbf{f}\}]^h$  (conjunto de valores de salida)

$D = \{1, \dots, n, F, G\}$  (conjunto de referencias a los componentes) donde los modelos  $M_j$  corresponden a los  $n$  integradores cuantificados del sistema, el modelo  $M_F$  calcula las funciones estáticas  $f_j$  y el modelo  $M_G$  las funciones  $g_k$ .

$M_F = \langle X, S, Y, \mathbf{d}_{int}, \mathbf{d}_{ext}, \mathbf{I}, ta \rangle$ , donde:

$$X = \{\mathfrak{R} \cup \mathbf{f}\}^{2n+m}$$

$$Y = \{\mathfrak{R} \cup \mathbf{f}\}^n$$

$$S = \mathfrak{R}^{n+m} \times \{0, \infty\}$$

$$\mathbf{d}_{int}(qc_1, \dots, qc_n, uc_1, \dots, uc_m, fc_1, \dots, fc_n, \mathbf{s}) = (qc_1, \dots, qc_n, uc_1, \dots, uc_m, fc'_1, \dots, fc'_n, \infty)$$

donde  $fc'_j = f_j(qc_1, \dots, uc_m)$

$$\mathbf{d}_{ext}[(qc_1, \dots, qc_n, uc_1, \dots, uc_m, fc_1, \dots, fc_n, \mathbf{s}), e,$$

$$(q_1, \dots, q_n, u_1, \dots, u_m)] =$$

$$(qc'_1, \dots, qc'_n, uc'_1, \dots, uc'_m, fc_1, \dots, fc_n, 0)$$

donde:

$$qc'_j = \begin{cases} q_j & \text{si } q_j \neq \mathbf{f} \\ qc_j & \text{si } q_j = \mathbf{f} \end{cases} \quad uc'_j = \begin{cases} u_j & \text{si } u_j \neq \mathbf{f} \\ uc_j & \text{si } u_j = \mathbf{f} \end{cases}$$

$$\mathbf{I}(qc_1, \dots, qc_n, uc_1, \dots, uc_m, fc_1, \dots, fc_n, \mathbf{s}) = (y_1, \dots, y_n),$$

$$y_j = \begin{cases} fc'_j & \text{si } fc'_j \neq fc_j \\ \mathbf{f} & \text{si } fc'_j = fc_j \end{cases} \quad ta(qc_1, \dots, qc_n, uc_1, \dots, uc_m, fc_1, \dots, fc_n, \mathbf{S}) = \mathbf{S} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(q_1, \dots, q_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(q_1, \dots, q_n) \end{cases} \quad \{13\}$$

La especificación de  $M_G$  será idéntica, solo que en lugar de las funciones  $f_j$  se tendrán las  $g_k$ . Los conjuntos de influencias  $\{I_d\}$  y de traducción de entradas y salidas  $\{Z_{i,d}\}$ .

$$I_j = \{F, N\} \quad j = 1 \dots n \\ I_F = \{1, \dots, n, N\} \quad I_G = \{1, \dots, n, N\} \quad I_N = \{G\} \\ Z_{j,F}(q_j) = (u_1, \dots, u_m, q_1, \dots, q_n), u_k = \mathbf{f} \quad k = 1 \dots m \\ q_k = \begin{cases} q_j & \text{si } j = k \\ \mathbf{f} & \text{en otro caso} \end{cases} \\ Z_{N,F}(w_1, \dots, w_m) = (u_1, \dots, u_m, q_1, \dots, q_n) \text{ donde:} \\ q_j = \mathbf{f} \quad j = 1 \dots n \quad u_j = w_j \quad j = 1 \dots m \\ Z_{F,j}(f_1, \dots, f_n) = (u_1, \dots, u_m, f_1, \dots, f_n), \text{ con} \\ u_k = \mathbf{f} \quad k = 1 \dots m \\ Z_{N,j}(u_1, \dots, u_m) = (u_1, \dots, u_m, f_1, \dots, f_n) \text{ siendo} \\ f_k = \mathbf{f} \quad k = 1 \dots n$$

Las funciones  $Z_{N,G}$  y  $Z_{j,G}$  son iguales a  $Z_{N,F}$  y

$Z_{j,F}$  respectivamente..

$Z_{G,N}$  es una función identidad.

Finalmente, la función *Select* puede ser cualquiera, ya que no es necesario establecer prioridades entre componentes.

Esta estructura DEVS presentada como acoplamiento de modelos atómicos no es la única capaz de simular al sistema cuantificado definido por {5} y {11}. Una posibilidad es utilizar un único modelo atómico que represente todo el sistema, lo que ahorrará memoria y aumentará la velocidad, a costa de una construcción mas complicada. Hay, por otro lado, muchas posibilidades para construir estructuras acopladas diferentes a la propuesta.

## 5. PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD DE LOS SISTEMAS CUANTIFICADOS.

Al desarrollar un método de simulación de sistemas, es importante poder garantizar que el modelo de simulación conserve los puntos de equilibrio, así como las propiedades de estabilidad del modelo original. Los siguientes teoremas brindan condiciones suficientes para que esto ocurra:

*Teorema 3:* Sea un sistema continuo y autónomo {12} y su respectivo sistema cuantificado asociado {13}:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad \{12\}$$

Entonces  $[\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]$  es un punto de equilibrio de {12} si y solo si  $[\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n]$  es un punto de equilibrio de {13}, donde  $\bar{q}_j = \bar{x}_j \quad j = 1, \dots, n$ .

La demostración de este teorema es inmediata, y puede extenderse a sistemas con entradas constantes, con la condición de que las versiones cuantificadas de las mismas sean idénticas a las originales.

*Teorema 4:* Si un sistema autónomo como el definido en {12} tiene como punto de equilibrio al origen y las funciones  $f_i$  son continuas y con derivadas parciales acotadas, siendo además posible encontrar una función de Lyapunov con derivada temporal definida negativa y continua en una región abierta  $Z$  que contiene al origen, entonces, dada una región arbitraria  $Z_1 \subset Z^*$  en torno al origen siempre es posible hallar una cuantificación tal que todas las trayectorias del sistema cuantificado asociado resultante iniciadas en una región cerrada arbitraria  $Z_2$  interior a  $Z^*$ ,  $Z_2 \supset Z_1$  converjan al interior de  $Z_1$ .  $Z^*$  es una región interior a  $Z$  delimitada por una superficie de nivel de la función de Lyapunov.

*Demostración:* Sea  $V(\mathbf{X})$  la función de Lyapunov mencionada y  $\dot{V}(\mathbf{X})$  su derivada temporal. Al ser esta última definida negativa, en los puntos  $\mathbf{X} / \mathbf{X} \in Z_3 = Z_2 \cap \bar{Z}_1$ , (región que no contiene al origen), existe una cota  $m > 0 / \dot{V}(\mathbf{X}) < -m$ .

Sea  $\mathbf{X}_1$  un punto arbitrario en  $Z_3$ . En torno a este punto definimos la función:

$$\mathbf{a}_{x_1}(\mathbf{X}) = \text{grad}[V(\mathbf{X}_1)] \times \mathbf{f}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}) \quad \{14\}$$

Esta función es continua ya que es el producto escalar de un vector constante y una función continua ( $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]^T$ ). Además vale:

$$\mathbf{a}_{x_1}(\mathbf{0}) = \dot{V}(\mathbf{X}_1) < -m \quad \{15\}$$

Se define entonces:

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \sup[\mathbf{a}_{x_1}(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X}_1 \in Z_3] \quad \{16\}$$

Puede demostrarse facilmente que esta función es continua y que verifica:

$$\mathbf{a}(\mathbf{0}) < -m \quad \{17\}$$

Luego, puede encontrarse un número positivo  $r_2$  que cumple:

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) < 0 \quad \text{si} \quad \|\mathbf{X}\| < r_2 \quad \{18\}$$

Entonces, para cualquier par de puntos  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X} \in Z_3$  /  $\|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}\| < r_2$  se verifica:

$$\text{grad}[V(\mathbf{X}_1)] \times \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{a}_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}) \leq \mathbf{a}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}) < 0 \quad \{19\}$$

La desigualdad {19} muestra que en el punto  $\mathbf{X}_1$  la dirección de la trayectoria definida en  $\mathbf{X}$  es hacia el interior de la superficie de nivel de  $V$  que pasa por  $\mathbf{X}_1$ .

En un sistema cuantificado como el definido en {13}, la dirección de la trayectoria en un punto  $\mathbf{X}_1$  que tiene como valor cuantificado a  $[q_1, \dots, q_n]^T$  queda definida según la trayectoria del sistema continuo en el punto  $\mathbf{X} = [q_1, \dots, q_n]^T$ .

Al ser  $\mathbf{X}$  un punto interior al intervalo de cuantificación que contiene a  $\mathbf{X}_1$ , eligiendo los intervalos de cuantificación tal que la distancia desde un punto cualquiera hasta el o los puntos correspondientes a los valores cuantificados del mismo sea menor que  $r_2$ , las direcciones de las trayectorias del sistema cuantificado serán interiores a las superficies de nivel de  $V$ . De esta forma, si todos los intervalos de cuantificación correspondientes a todos los puntos de la región  $Z_3$  cumplen la condición mencionada, la convergencia hacia la región  $Z_1$  quedará garantizada. Una forma de lograr la condición sobre la distancia entre dos puntos de un mismo intervalo es definir:

$$\Delta q + \mathbf{e} < \frac{r_2}{\sqrt{n}} \quad \{20\}$$

siendo  $\Delta q$  la distancia entre dos valores consecutivos de cuantificación de una variable de estado,  $\mathbf{e}$  el valor de la ventana de histéresis y  $n$  el orden del modelo.

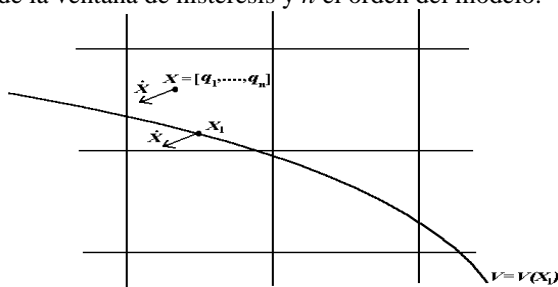


Fig. 3. Trayectorias en el sistema cuantificado.

Una importante observación es que si el intervalo de cuantificación que contiene al origen contiene completamente a la región  $Z_1$ , el vector  $[q_1, \dots, q_n]^T$  convergerá al origen. Así, es posible construir una cuantificación, en general no uniforme, de modo que el intervalo que contiene al origen se elija lo suficientemente grande para contener la región  $Z_1$  y fuera de este intervalo, la cuantificación cumpla con la condición {19}. Esto permite garantizar la

convergencia al origen bajo las hipótesis mencionadas en el teorema.

## 6. EJEMPLOS Y RESULTADOS

A fin de mostrar la utilidad de los métodos desarrollados, se presentan los resultados obtenidos mediante cuantificación para la simulación de una ecuación diferencial de segundo orden con características stiff {20}. Las simulaciones se realizaron utilizando el software Power DynaMo (Kofman y Junco, 1999) con una ventana de histéresis ( $\mathbf{e}$ ) de valor igual a la distancia entre valores consecutivos de cuantificación.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L} x_2 \\ \dot{x}_2 = U - \frac{1}{C} x_1 - \frac{R}{L} x_2 \\ y = \frac{1}{L} x_2 \end{cases} \quad \{21\}$$

Para la simulación se adoptaron los siguientes parámetros:  $R=100$   $L=0,01$   $C=0,01$   $U=100$ , con lo que resulta un sistema stiff ya que los autovalores son  $-1$  y  $-10000$ .

En primer lugar se simuló utilizando intervalos de cuantificación de  $1 \times 10^{-4}$  y  $1 \times 10^{-2}$  para  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente. El resultado obtenido puede verse en la figura 4.

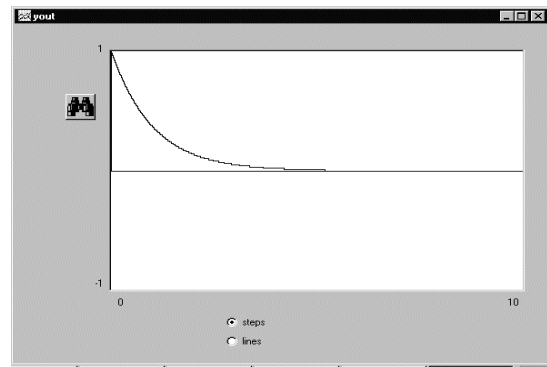


Fig. 4. Trayectoria de salida de la simulación

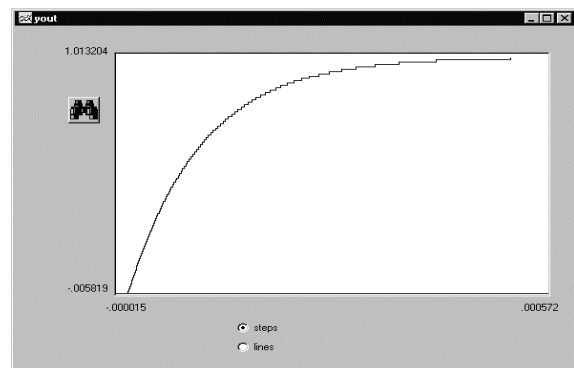


Fig. 5. Ampliación del comienzo de la simulación.

Para completar la simulación, el modelo DEVS realizó un total de 366 transiciones.

El error cometido puede evaluarse comparando la trayectoria obtenida en la simulación con {22} (solución exacta de la ecuación diferencial).

$$y(t) = \frac{10000}{9999} (e^{-t} - e^{-10000t}) \quad \{22\}$$

El máximo valor absoluto del error resulta menor que  $6 \times 10^{-3}$ .

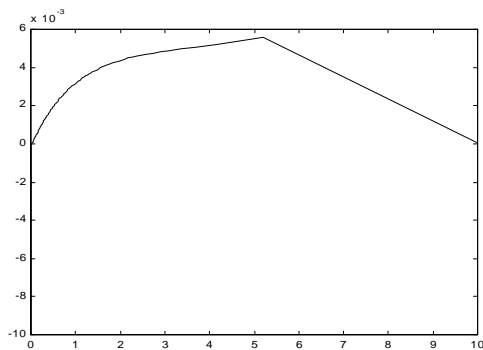


Fig. 6. Error en la simulación.

Para obtener un error similar utilizando el método de Euler son necesarios mas de 150000 pasos, mientras que Runge-Kutta necesita mas de 90000 pasos. Un algoritmo de paso variable como Runge-Kutta 4-5 (Press, *et al.*, 1986) (ode45 de Matlab), necesita mas de 30000 pasos, mientras que Adams-Bashforth-Moulton (ode113 de Matlab) necesita mas de 60000.

El ode15s de Matlab puede lograr una precisión similar con solo 81 pasos, pero debe tenerse en cuenta que se está comparando un método implícito de quinto orden contra un simple método explícito de primer orden como el presentado.

Utilizando una cuantificación cuatro veces mayor, se obtiene el resultado de la figura 8 (la gráfica puede mejorarse uniendo los puntos con rectas en lugar de escalones).

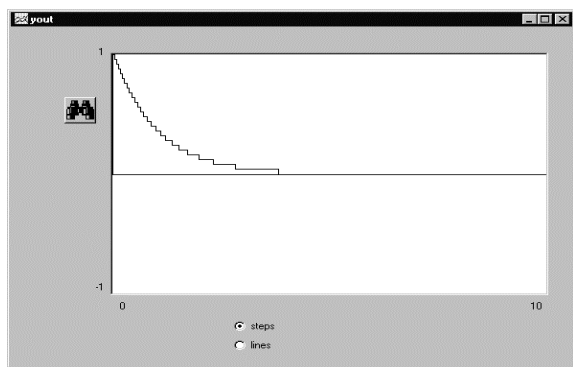


Fig. 7. Trayectoria de salida con mayor cuantificación

En este caso, el máximo error absoluto es menor que  $4 \times 10^{-3}$ . El número de transiciones es ahora 78. El ode15s de Matlab necesita 64 pasos para alcanzar un error similar, pero el número de cálculos realizados en cada paso es mucho mayor.

Al comparar métodos de eventos discretos con métodos de tiempo discreto hay que tener en cuenta lo siguiente: en cada paso que realiza el sistema de tiempo discreto se realizan cálculos sobre todas las variables de estado, mientras que en el de eventos discretos, sólo se realizan cálculos sobre el estado que realiza la transición interna y sobre los estados en los que este ejerce influencia directa, lo que en sistemas muy grandes implica una ventaja considerable.

## 7. CONCLUSIONES

Se presentó un nuevo método para cuantificar los estados de sistemas continuos que permite obtener una especificación exactamente simulable bajo un enfoque de eventos discretos. En base a esta especificación se construyó un modelo genérico DEVS capaz de simular estos sistemas cuantificados.

Se discutieron y demostraron algunas importantes propiedades de estabilidad y se propuso un algoritmo para realizar la cuantificación de manera tal que, bajo ciertas condiciones, el sistema cuantificado conserve propiedades de convergencia del sistema original.

Finalmente, se presentó un ejemplo de aplicación, comparando la performance del método propuesto contra la de los métodos de simulación clásicos, evidenciando algunas ventajas del mismo.

## REFERENCIAS

- Giambiasi, N. (1998). Abstraction à événements discrets de systèmes dynamiques. *APII-Jesa*. Vol.32, No.3, pp275-311.
- Kofman, E. y S. Junco (1999). Un ambiente computacional para la modelización de sistemas dinámicos no lineales con Bond Graphs. *Anales de VIII RPIC*. Vol.3, 16-10.
- Naamane, A., A. Damiba and N. Giambiasi (1999). Abstraction à événements discrets de modèles hybrides à base de Bond Graphs. *Technique et science informatiques*, Vol. 15, No.9, pp 1-30.
- Praehofer, H. (1991). System Theoric foundations for combined Discrete - Continuous System simulation. PhD Thesis, J. Kepler University of Linz.
- Press, W.H., B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling (1986). *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Zeigler, B (1976). *Theory of Modeling and Simulation*. Wiley Interscience, New York.
- Zeigler, B., H. Praehofer and T.G. Kim (2000). *Theory of Modeling and Simulation second ed.*, Academic Press, New York.