

Modelado y Simulación de Sistemas Dinámicos: Métodos, Algoritmos y Herramientas

Simulación de Sistemas Continuos

Ernesto Kofman

Laboratorio de Sistemas Dinámicos y Procesamiento de la Información
FCEIA - Universidad Nacional de Rosario.
CIFASIS – CONICET. Argentina

Organización de la Presentación

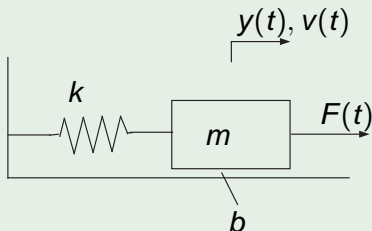
- 1 Algoritmos Clásicos de Integración Numérica
- 2 Sistemas stiff, marginalmente estables y discontinuos
- 3 Métodos de Cuantificación de Estados. Resultados recientes.
 - Introducción
 - Sistemas Cuantificados y DEVS
 - Métodos de QSS

Organización de la Presentación

- 1 Algoritmos Clásicos de Integración Numérica
- 2 Sistemas stiff, marginalmente estables y discontinuos
- 3 Métodos de Cuantificación de Estados. Resultados recientes.
 - Introducción
 - Sistemas Cuantificados y DEVS
 - Métodos de QSS

Sistemas Continuos – Ejemplo

Sistema Masa–Resorte



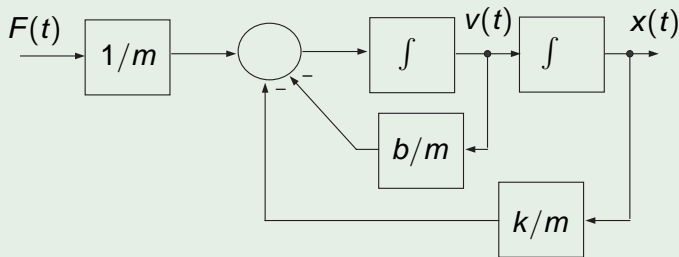
Modelo del sistema (de segundo orden):

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = \frac{1}{m}[-kx(t) - bv(t) + F(t)]$$

Sistemas Continuos – Ejemplo (cont)

Diagrama de Bloques



$$\dot{x}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{b}{m}v(t) + \frac{1}{m}F(t) \quad (1)$$

Sistemas Continuos – Ejemplo (cont)

Si nos interesa predecir el comportamiento del sistema, debemos resolver la Ecuación Diferencial (20).

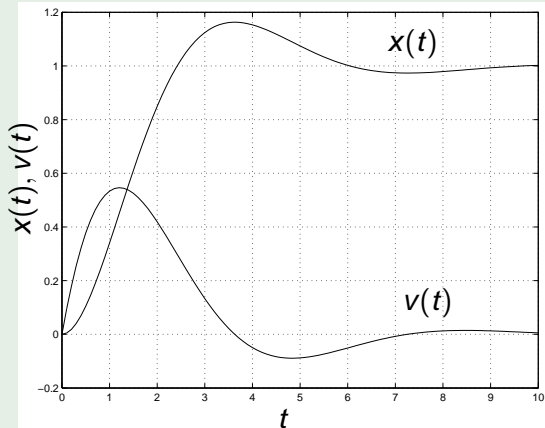
Por ejemplo, para los parámetros $k = b = m = 1$, tomando $F(t) = 1$ para $t \geq 0$ y las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $v(0) = 0$, la solución analítica está dada por

$$\begin{aligned}x(t) &= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \\v(t) &= \frac{\sqrt{12}}{3}e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t\end{aligned}\tag{2}$$

para todo $t \geq 0$

Sistemas Continuos – Ejemplo (cont)

Solución de la Ecuación (20)



Sistemas Continuos – Ecuaciones de Estado

En general, los sistemas continuos con **parámetros concentrados** pueden describirse mediante **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias**.(EDOs)

De aquí en más, escribiremos las EDOs como **Ecuaciones de Estado**:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), t)\end{aligned}\tag{3}$$

donde x_1, x_2, \dots, x_n se denominan **variables de estado** y n es el orden del sistema.

Sistemas Continuos – Solución de las EDOs

La Ecuación de Estados (en forma vectorial)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (4)$$

con **condición inicial**

$$x(t_0) = x_0 \quad (5)$$

en general **no puede resolverse de manera analítica** (salvo en casos lineales o algunos casos no lineales muy simples).

Por este motivo, para conocer la evolución de las variables del sistema $x_i(t)$ debe recurrirse a la **integración numérica**.

Métodos de Integración Numérica

Consideremos el sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad (6)$$

con la condición inicial $x(t_0) = x_0$ conocida.

El objetivo de los métodos de integración numérica es obtener una solución aproximada en los instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_N .

$$\tilde{x}_1 \approx x(t_1), \tilde{x}_2 \approx x(t_2), \dots, \tilde{x}_N \approx x(t_N),$$

La distancia $h_k \triangleq t_{k+1} - t_k$ se denomina **paso de integración**, y puede ser constante o variable, según el método.

Método de Euler

Aproximando la derivada por el cociente incremental, puede escribirse

$$\frac{x(t_{k+1}) - x(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \approx \dot{x}(t_k) = f(x(t_k), t_k)$$

Tomando $h \triangleq t_{k+1} - t_k$ (h fijo) puede despejarse

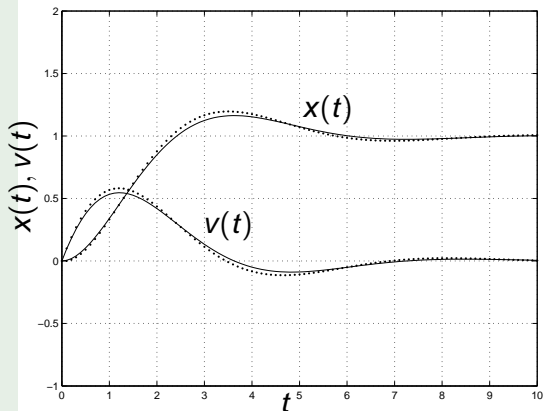
$$x_{k+1} = x_k + h f(x_k, t_k) \quad (7)$$

Luego, conociendo x_0 , pueden obtenerse x_1, x_2, \dots, x_N de forma iterativa.

La fórmula de Euler (7) define una **Ecuación en Diferencias** (Sistema de Tiempo Discreto).

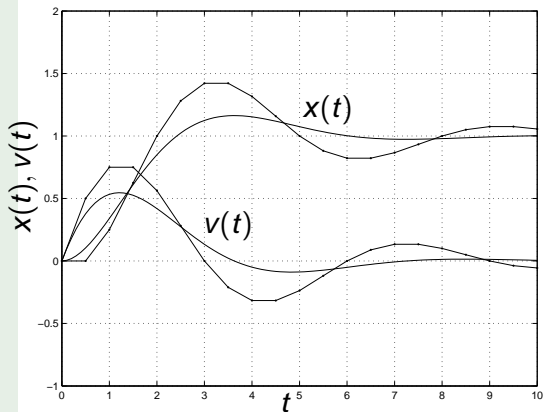
Método de Euler – Ejemplo

Solución con Euler de la Ecuación (20) ($h = 0.1$)



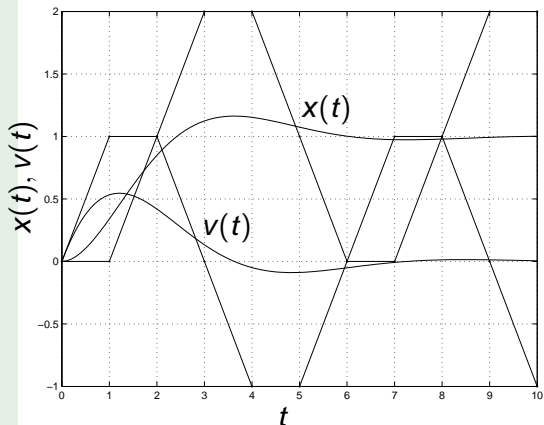
Método de Euler – Ejemplo

Solución con Euler de la Ecuación (20) ($h = 0.5$)



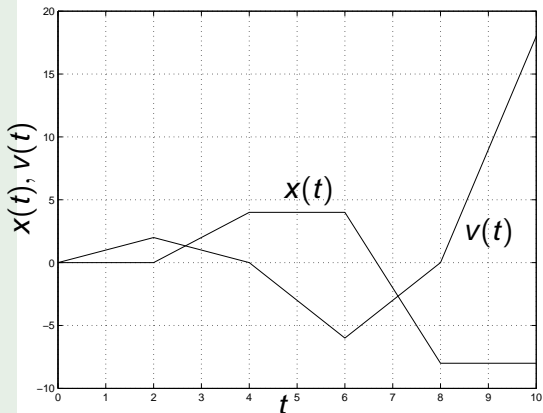
Método de Euler – Ejemplo

Solución con Euler de la Ecuación (20) ($h = 1$)



Método de Euler – Ejemplo

Solución con Euler de la Ecuación (20) ($h = 2$)



Error y Estabilidad Numérica

En todos los casos, la solución numérica tuvo un error apreciable.

El **error local** por truncamiento es el que se comete de un paso al siguiente. En general aumenta al aumentar el paso h .

Además, con $h = 2$ la solución numérica se tornó inestable.

Una solución es numéricamente estable si no diverge cuando $k \rightarrow \infty$

Es deseable que la **estabilidad numérica** coincida con la **estabilidad analítica** de la solución. Evidentemente, en el método de Euler esto depende del paso h .

Orden de Precisión

La expansión en serie de Taylor de la solución exacta de la EDO (6) en torno a x_k es:

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f(x_k, t_k) + \frac{h^2}{2!} \frac{df}{dt}(x_k, t_k) + \frac{h^3}{3!} \frac{d^2f}{dt^2}(x_k, t_k) + \dots \quad (8)$$

El orden de precisión de un método es la máxima potencia de h hasta la cual coinciden las soluciones exacta y numérica.

El método de Euler es entonces un método de **primer orden**

Cuanto mayor es el orden de un método, menor es el **error local por truncamiento**.

Métodos Monopaso

Son métodos que calculan x_{k+1} utilizando únicamente información sobre x_k . (Métodos de **Runge–Kutta**)

- Forward Euler (primer orden):

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f(x_k, t_k)$$

- Backward Euler (primer orden):

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f(x_{k+1}, t_{k+1})$$

- Regla Trapezoidal (segundo orden):

$$x_{k+1} = x_k + 0.5 \cdot h \cdot [f(x_{k+1}, t_{k+1}) + f(x_k, t_k)]$$

- Heun (segundo orden):

$$k_1 = f(x_k, t_k), \quad k_2 = f(x_k + h \cdot k_1, t_k + h), \quad x_{k+1} = x_k + 0.5 \cdot h \cdot (k_1 + k_2)$$

Métodos Multipaso

Son métodos que calculan x_{k+1} utilizando información sobre x_k y sobre algunos puntos anteriores (x_{k-1} , etc).

- Adams–Bashforth 3 (tercer orden):

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{12}(23 \cdot f_k - 16 \cdot f_{k-1} + 5 \cdot f_{k-2})$$

- Backward Difference Formulae (BDF) 3 (tercer orden):

$$x_{k+1} = \frac{18}{11}x_k - \frac{9}{11}x_{k-1} + \frac{2}{11}x_{k-2} + \frac{6}{11}h \cdot f_{k+1}$$

Nota: llamamos $f_k \triangleq f(x_k, t_k)$.

Métodos Implícitos

Los métodos implícitos utilizan información del **futuro** para calcular x_{k+1} , y por lo tanto requieren resolver una ecuación en cada paso.

Los métodos de **Backward Euler**, la **Regla Trapezoidal** y **BDF3** son ejemplos de métodos implícitos.

Los métodos implícitos tienen grandes ventajas en relación a la **estabilidad numérica**.

Como contrapartida, su implementación requiere de **algoritmos iterativos** para resolver la ecuación implícita en cada paso.

Control de Paso

En muchos casos, los métodos se implementan con un **algoritmo de control de paso** automático:

- 1 Con dos métodos de orden distinto se da un paso h hacia adelante.
- 2 Se **estima el error** como la diferencia entre los dos valores.
- 3 Si el error estimado es menor que el error tolerado, se acepta el paso y se **aumenta** el valor de h para el siguiente paso.
- 4 Si por el contrario, el error es mayor que el tolerado, se **disminuye** el valor de h y se repite el paso.

Con esta idea se puede controlar el paso de integración h en función de una tolerancia de error preestablecida.

Organización de la Presentación

- 1 Algoritmos Clásicos de Integración Numérica
- 2 Sistemas stiff, marginalmente estables y discontinuos
- 3 Métodos de Cuantificación de Estados. Resultados recientes.
 - Introducción
 - Sistemas Cuantificados y DEVS
 - Métodos de QSS

Sistemas Stiff (Rígidos)

Son sistemas que contienen simultáneamente **dinámica lenta** y **dinámica rápida**.

En principio, la idea sería usar un paso chico al comienzo y luego agrandarlo cuando la dinámica rápida desaparece.

El problema es que los métodos explícitos se tornan **numéricamente inestables** al agrandar el paso h .

Por esto, con los sistemas stiff deben utilizarse exclusivamente **métodos implícitos** provistos de algoritmos de control de paso.

Sistemas Marginalmente Estables

Son sistemas que están en el límite de la **estabilidad analítica**.

Ej: el sistema masa resorte (20) sin fricción ($b = 0$), sistemas de dinámica celeste, etc. En estos casos:

- Los métodos explícitos resultan **numéricamente inestables**.
- Los métodos implícitos en general resultan **numéricamente estables**.

Se necesita utilizar métodos implícitos especiales denominados **F-estables** como la **Regla Trapezoidal**

Sistemas Discontinuos

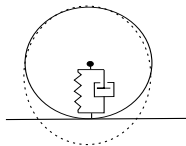
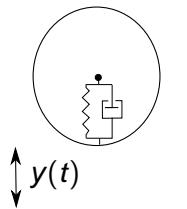
Un modelo simple de una pelota que cae y rebota contra el piso es el siguiente:

$$\dot{y}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = \begin{cases} -g & \text{si } y(t) > 0 \\ -g - \frac{k}{m} \cdot y(t) - \frac{b}{m} \cdot v(t) & \text{si } y(t) \leq 0 \end{cases}$$

Esta EDO tiene una **discontinuidad** en $y = 0$.

Los métodos de integración pueden cometer errores inaceptables. Es necesario **detectar** los instantes en que $y(t) = 0$ y recomenzar la simulación a partir de allí.



Organización de la Presentación

- 1 Algoritmos Clásicos de Integración Numérica
- 2 Sistemas stiff, marginalmente estables y discontinuos
- 3 **Métodos de Cuantificación de Estados. Resultados recientes.**
 - Introducción
 - Sistemas Cuantificados y DEVS
 - Métodos de QSS

Ejemplo Introductorio

Consideremos el sistema de segundo orden:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)\end{aligned}\tag{9}$$

y la siguiente *aproximación*:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \text{floor}(x_2(t)) = q_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\text{floor}(x_1(t)) = -q_1(t)\end{aligned}\tag{10}$$

Ejemplo Introductorio

La Ecuación

$$\dot{x}_1(t) = q_2(t)$$

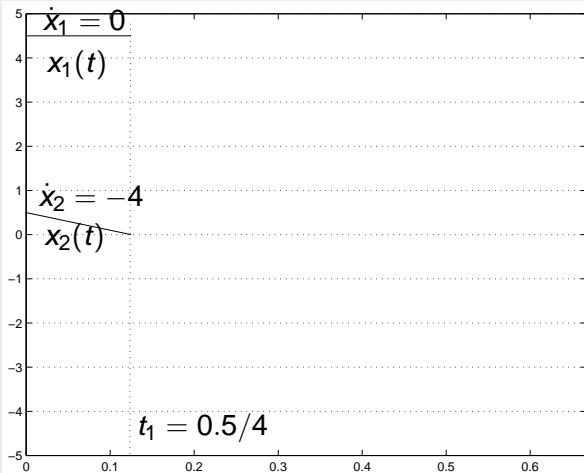
$$\dot{x}_2(t) = -q_1(t)$$

puede resolverse.

Consideremos las

c.i. $x_1(0) = 4.5,$

$x_2(0) = 0.5:$



Ejemplo Introductorio

La Ecuación

$$\dot{x}_1(t) = q_2(t)$$

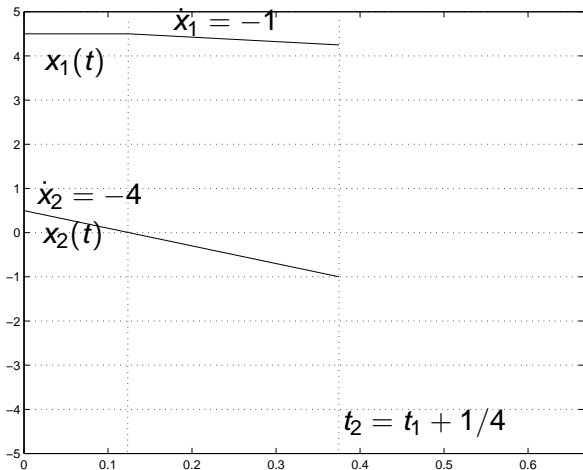
$$\dot{x}_2(t) = -q_1(t)$$

puede resolverse.

Consideremos las

c.i. $x_1(0) = 4.5,$

$x_2(0) = 0.5:$



Ejemplo Introductorio

La Ecuación

$$\dot{x}_1(t) = q_2(t)$$

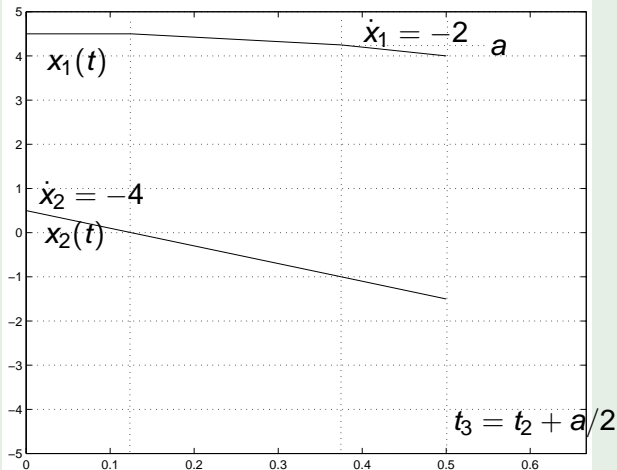
$$\dot{x}_2(t) = -q_1(t)$$

puede resolverse.

Consideremos las

c.i. $x_1(0) = 4.5$,

$x_2(0) = 0.5$:



Ejemplo Introductorio

La Ecuación

$$\dot{x}_1(t) = q_2(t)$$

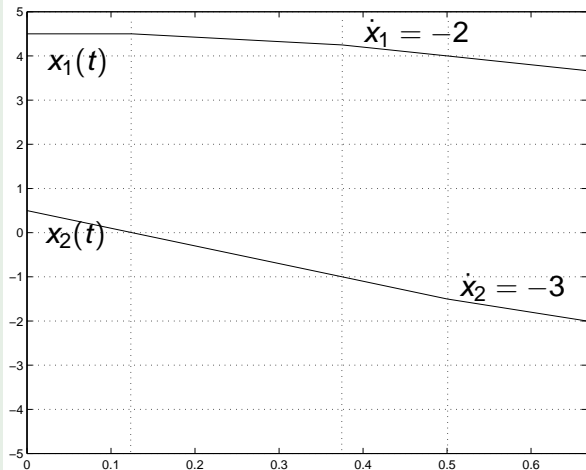
$$\dot{x}_2(t) = -q_1(t)$$

puede resolverse.

Consideremos las

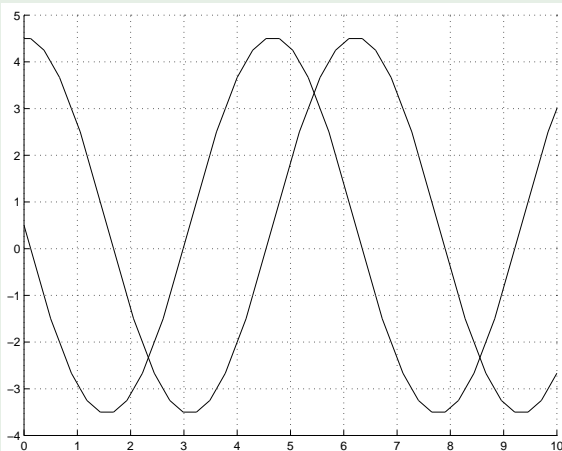
c.i. $x_1(0) = 4.5,$

$x_2(0) = 0.5:$



Ejemplo Introdutorio

Solución del Sistema Cuantificado



Sistemas Cuantificados y DEVS.

A diferencia de los métodos de integración vistos, el sistema aproximado (10) no puede escribirse como una **Ecuación en Diferencias**:

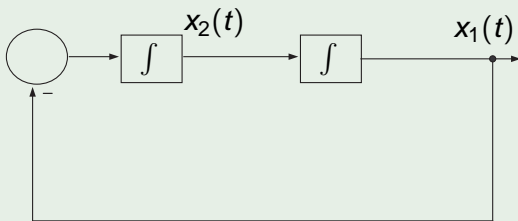
$$x(t_{k+1}) = f(x(t_k), t_k)$$

Como veremos, los **Sistemas Cuantificados** son equivalentes a modelos de **Eventos Discretos DEVS**

$$M = (X, Y, S, \delta_{\text{int}}, \delta_{\text{ext}}, \lambda, ta)$$

Sistemas Cuantificados y DEVS

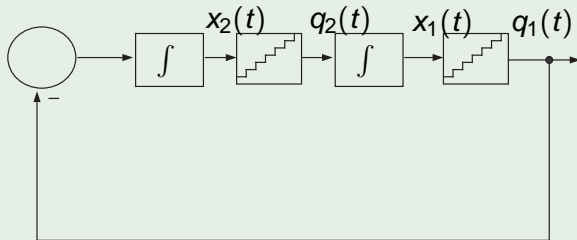
Diagrama de bloques del Sistema (11)



$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t)\end{aligned}\tag{11}$$

Sistemas Cuantificados y DEVS

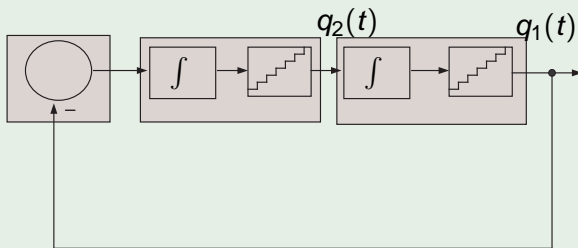
Diagrama de bloques del Sistema (12)



$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -q_1(t) \end{aligned} \quad (12)$$

Sistemas Cuantificados y DEVS

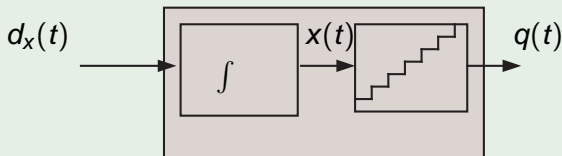
Modelo DEVS Equivalente a (12)



$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -q_1(t) \end{aligned} \quad (12)$$

Integrador Cuantificado

Integrador Cuantificado

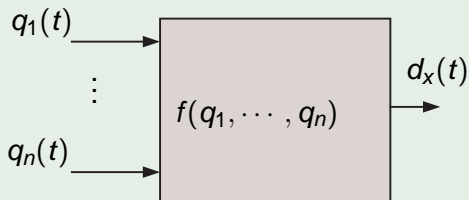


Notar que la salida del bloque es **seccionalmente constante**. Si consideramos además que la entrada también lo es, podemos pensar dichas trayectorias como **secuencias de eventos**.

El comportamiento del **integrador cuantificado** puede representarse por un modelo DEVS elemental.

Funciones Estáticas

Función Estática



Si la entrada es **seccionalmente constante**, la salida también lo será.

El comportamiento de una **función estática** también puede representarse mediante un modelo DEVS elemental.

Sistemas Cuantificados y DEVS

Dado un **sistema continuo**

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (13)$$

el **sistema cuantificado**

$$\dot{x}(t) = f(q(t), u(t)) \quad (14)$$

es equivalente a un **DEVS** y en principio podría simularse acoplando **integradores cuantificados** y **funciones estáticas**.

Esta es la idea original de Bernard Zeigler para simular EDOs mediante **Sistemas Cuantificados**.

Sistemas Cuantificados y DEVS

Dado un **sistema continuo**

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (13)$$

el **sistema cuantificado**

$$\dot{x}(t) = f(q(t), u(t)) \quad (14)$$

es equivalente a un **DEVS** y en principio podría simularse acoplando **integradores cuantificados** y **funciones estáticas**.

Esta es la idea original de Bernard Zeigler para simular EDOs mediante **Sistemas Cuantificados**.

Sistemas Cuantificados – Problema

Desafortunadamente, esta idea no funciona debido a la aparición de oscilaciones infinitamente rápidas.

Analicemos por ejemplo lo que ocurre con el sistema cuantificado

$$\dot{x}(t) = -\text{floor}(x(t)) - 0.5 \quad (15)$$

con $x(0) = 0$.

Esto se puede solucionar agregando histéresis a la cuantificación, lo que resulta en el **Método de QSS**.

Sistemas Cuantificados – Problema

Desafortunadamente, esta idea no funciona debido a la aparición de oscilaciones infinitamente rápidas.

Analicemos por ejemplo lo que ocurre con el sistema cuantificado

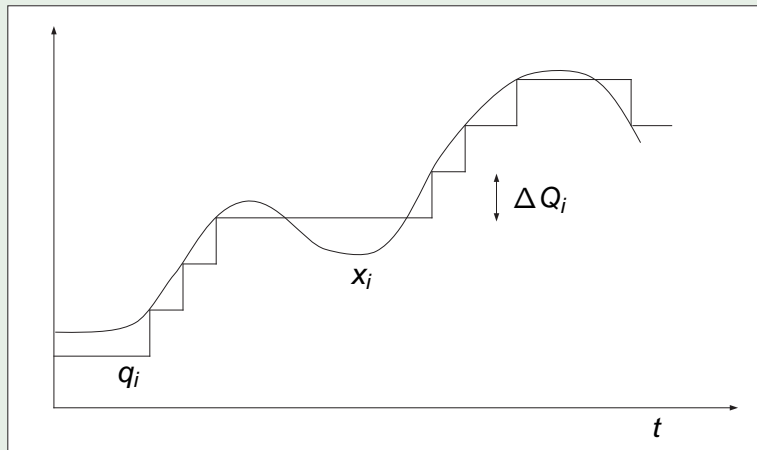
$$\dot{x}(t) = -\text{floor}(x(t)) - 0.5 \quad (15)$$

con $x(0) = 0$.

Esto se puede solucionar agregando histéresis a la cuantificación, lo que resulta en el **Método de QSS**.

Método de QSS

Función de Cuantificación con Histéresis



Método de QSS

Definición

Dado un sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (16)$$

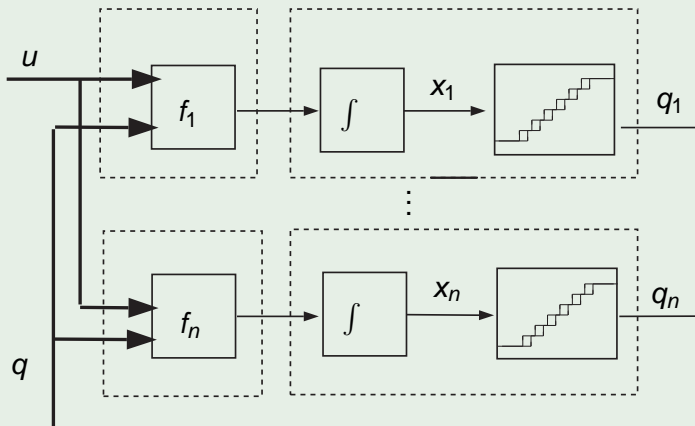
con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la aproximación QSS está dada por

$$\dot{x}(t) = f(q(t), u(t)) \quad (17)$$

donde $q(t)$ y $x(t)$ están vinculadas componente a componente por funciones de cuantificación con histéresis.

El QSS (17) es equivalente a un modelo DEVS *Legítimo*.

QSS – Diagrama de Bloques



Propiedades de QSS

Definiendo $\Delta x(t) \triangleq q(t) - x(t)$, la Ec.(17) puede reescribirse como

$$\dot{x}(t) = f(x(t) + \Delta x(t), u(t))$$

que es muy similar a (16), excepto por la **perturbación acotada** Δx . Luego resulta:

- **Convergencia:** El error tiende a 0 cuando la cuantificación $\Delta Q \rightarrow 0$.
- **Estabilidad *práctica*:** Cuando el sistema original es estable, las soluciones quedan en un entorno del punto de equilibrio.
- **Cota de Error Global Calculable!:** En sistemas lineales, se puede acotar el error cometido en función de la cuantificación.

QSS – Ejemplo

La aproximación QSS del sistema masa resorte (20) puede escribirse como

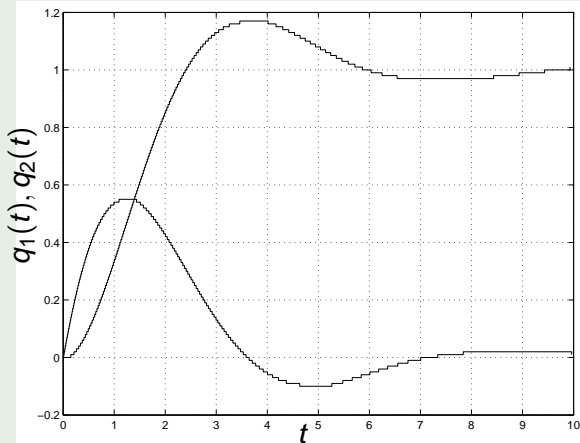
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= q_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{k}{m} q_1(t) - \frac{b}{m} q_2(t) + \frac{1}{m} F(t)\end{aligned}\quad (18)$$

Para los parámetros utilizados ($m = b = k = 1$), la **cota de error global** puede calcularse como

$$\begin{bmatrix} |e_1(t)| \\ |e_2(t)| \end{bmatrix} \leq 2.3094 \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_1 + \Delta Q_2 \\ \Delta Q_1 + \Delta Q_2 \end{bmatrix}\quad (19)$$

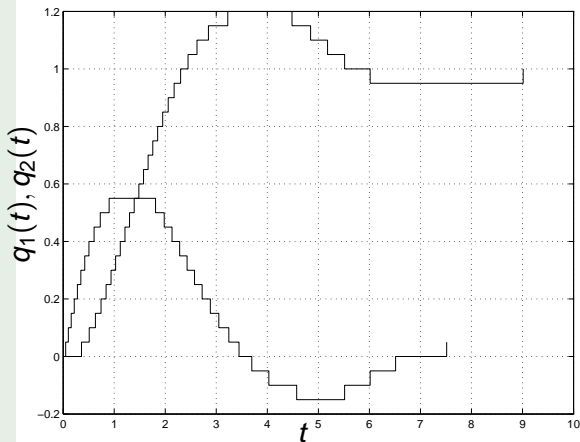
QSS – Ejemplo

Solución con $\Delta Q = 0.01$



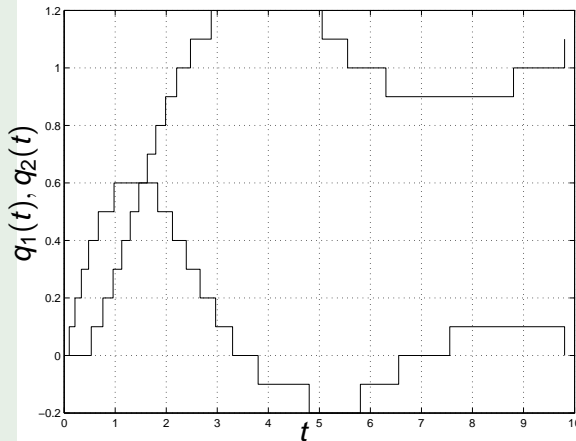
QSS – Ejemplo

Solución con $\Delta Q = 0.05$



QSS – Ejemplo

Solución con $\Delta Q = 0.1$



QSS – Características

Ventajas

- Estabilidad y Cota de Error.
- Descentralización (sólo cálculos locales). Explora ralidad
- Grandes ventajas para simular sistemas discontinuos

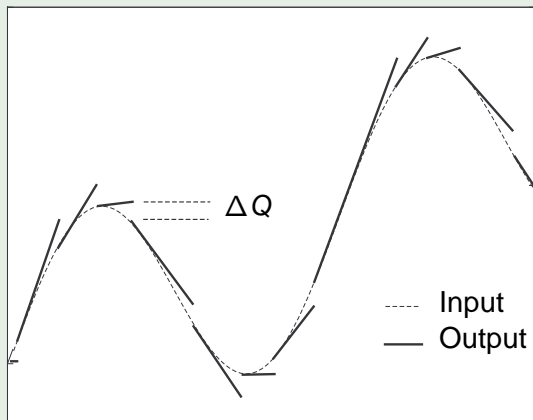
Desventajas

- Aparición de oscilaciones. Problemas en **sistemas stiff** .
- Necesidad de elegir el quantum.
- **El número de pasos crece linealmente con la precisión.**

Método de QSS2

Cuantificación de primer orden

First Order Quantizer

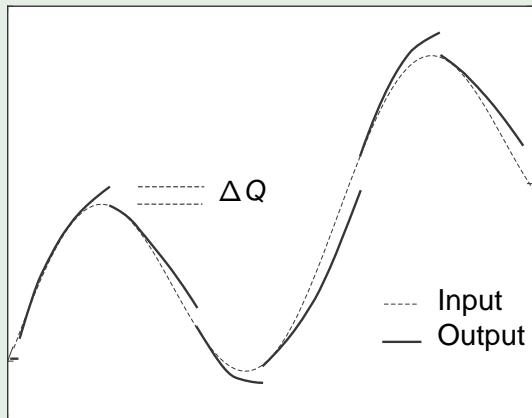


- Mismas propiedades y ventajas que QSS.
- Método de **segundo orden**.
- El número de pasos crece con la raíz cuadrada de la precisión.

Método de QSS3

Cuantificación de segundo orden

Second Order Quantizer

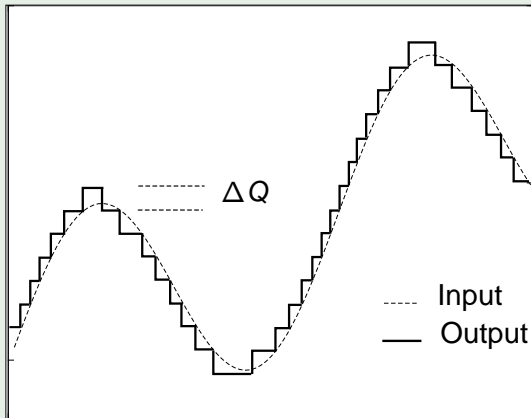


- Mismas propiedades y ventajas que QSS.
- Método de **tercer orden**.
- El número de pasos crece con la raíz cúbica de la precisión.

Método de Backward QSS

Cuantificación *Backward*

Backward Quantizer



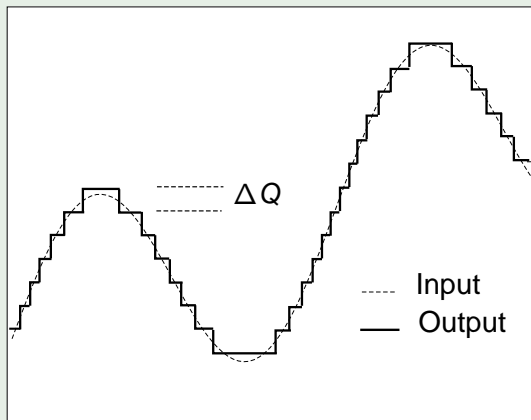
BQSS:

- Similares propiedades y ventajas que QSS.
- Método de **primer orden**.
- No produce oscilaciones, y sirve para **sistemas stiff**.

Método de Centered QSS

Cuantificación *Centrada*

Centered Quantizer



CQSS:

- Similares propiedades y ventajas que QSS.
- Método de **primer orden**.
- Es **F-estable** y sirve para **sistemas marginalmente estables**.

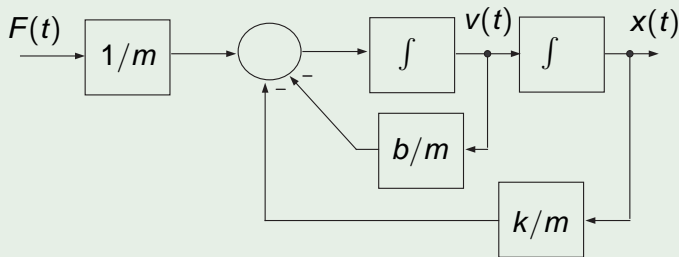
Implementación de los Métodos: PowerDEVS

PowerDEVS es un simulador de DEVS que tiene librerías que implementan los métodos de QSS.

- Es una herramienta libre, totalmente desarrollada en la FCEIA–UNR.
- Tiene un editor gráfico y un motor de simulación DEVS programado en C++.

Ejemplo – Sistema Masa Resorte

Diagrama de Bloques



$$\dot{x}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{b}{m}v(t) + \frac{1}{m}F(t) \quad (20)$$

Ejemplo – Pelotita Rebotando

Un modelo simple de una pelota cayendo y rebotando por una escalera es el siguiente:

$$\dot{x} = v_x$$

$$\dot{v}_x = -\frac{b_a}{m} \cdot v_x$$

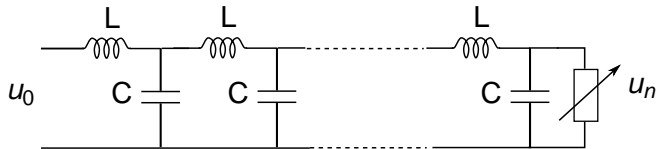
$$\dot{y} = v_y$$

$$\dot{v}_y = -g - \frac{b_a}{m} \cdot v_y - s_w \cdot \left[\frac{b}{m} \cdot v_y + \frac{k}{m} (y - \text{int}(h + 1 - x)) \right]$$

donde s_w es 1 en el piso y 0 en el aire. Los **eventos de estado** se producen cuando:

$$y = \text{int}(h + 1 - x) \quad (21)$$

Ejemplo – Línea de Transmisión



Este modelo de **línea de transmisión** sin pérdidas es

- Stiff (debido a la carga).
- No Lineal (debido a la carga).
- Marginalmente estable.
- De orden elevado.

$$\dot{\phi}_1(t) = u_0(t) - u_1(t)$$

$$\dot{u}_1(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\phi}_n(t) = u_{n-1}(t) - u_n(t)$$

$$\dot{u}_n(t) = \phi_n(t) - (10000 \cdot u_n)^3$$

Trabajo Actual en el Tema

En el **Laboratorio de Sistemas Dinámicos** de la FCEIA estamos trabajando actualmente en los siguientes temas relacionados con los métodos de QSS:

- Métodos de QSS para sistemas **stiff**.
- Simulación de sistemas de **electrónica de potencia**.
- Implementación de los métodos en **tiempo real**.
- Simulación de **sistemas de control** por redes de comunicación.

Bibliografía



François Cellier and Ernesto Kofman.
Continuous System Simulation.
Springer Verlag, New York, 2006.



Ernesto Kofman.
Artículos online.
FCEIA – UNR. www.fceia.unr.edu.ar/kofman.



Ernesto Kofman.
Simulación de Sistemas Continuos. Notas de Clase.
FCEIA – UNR. www.fceia.unr.edu.ar/control/ssc.