

Modelado y Simulación de Sistemas Dinámicos: Métodos, Algoritmos y Herramientas

Sistemas de Tiempo Discreto

Ernesto Kofman

Laboratorio de Sistemas Dinámicos y Procesamiento de la Información
FCEIA - Universidad Nacional de Rosario.
CIFASIS – CONICET. Argentina

Organización de la Presentación

- 1 Ecuaciones en Diferencias
- 2 Diagramas de Bloques
- 3 Simulación de Sistemas de Tiempo Discreto

Organización de la Presentación

- 1 Ecuaciones en Diferencias
- 2 Diagramas de Bloques
- 3 Simulación de Sistemas de Tiempo Discreto

Ecuaciones en Diferencias

El siguiente modelo, correspondiente a un filtro digital muy simple, es una **ecuación en diferencias** de segundo orden

$$y(k) + a_1 \cdot y(k - 1) + a_2 \cdot y(k - 2) = b_0 u(k)$$

- El modelo está definido sólo para los instantes discretos $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$.
- $y(k) = y(t_k)$ es la **variable de salida** del modelo.
- $u(k) = u(t_k)$ es la **variable de entrada** del modelo.
- Las constantes a_1, a_2, b_0 son **parámetros** del modelo.
- Este caso se trata de un **modelo lineal y estacionario**.

Ecuaciones en Diferencias

En general, las ecuaciones en diferencias pueden escribirse de la forma:

$$y(k) = f[y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), u(k-1), \dots, u(k-m), k]$$

o más generalmente, admitiendo casos **implícitos** tenemos:

$$f[y(k), y(k-1), \dots, y(k-n), u(k), u(k-1), \dots, u(k-m), k] = 0$$

- En ambos casos se trata de un **modelo externo**.
- Suponiendo que $n > m$, n es el **orden** del sistema.

Ecuaciones en Diferencias: Estados

Una ecuación en diferencias de orden n se puede representar por n ecuaciones de orden 1. En el caso del filtro digital,

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -a_2 \cdot x_1(k) - a_1 \cdot x_2(k) + u(k)$$

donde además

$$y(k) = -a_2 \cdot b_0 \cdot x_1(k) - a_1 \cdot b_0 \cdot x_2(k) + b_0 \cdot u(k)$$

- Las nuevas variables $x_1(k)$ y $x_2(k)$ se denominan **variables de estado**.
- Las dos ecuaciones de orden 1 se llaman **ecuaciones de estado**.
- La ecuación estática que calcula $y(k)$ es la **ecuación de salida**.

Ecuaciones en Diferencias. Ejemplo No Lineal

El siguiente modelo se denomina **Ecuación de Nicholson–Bailey** y representa la dinámica de poblaciones de parásitos y huéspedes.

$$N(k + 1) = \lambda \cdot N(k) \cdot e^{-a \cdot P(k)}$$

$$P(k) = N(k) \cdot (1 - e^{-a \cdot P(k)})$$

- $N(k)$ y $P(k)$ son las variables de estado (número de huéspedes y parásitos, respectivamente).
- Son Ecuaciones de Estado **no lineales**.
- Es un **modelo autónomo y estacionario**.

Ecuaciones en Diferencias: Forma General

La forma general de escribir una ecuación en diferencias en su representación de **Ecuaciones de Estado** es la que sigue:

$$x_1(k+1) = f_1[x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k), k]$$

$$x_2(k+1) = f_2[x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k), k]$$

$$\vdots$$

$$x_n(k+1) = f_n[x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k), k]$$

con las **Ecuaciones de Salida**:

$$y_1(k) = g_1[x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k), k]$$

$$y_2(k) = g_2[x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k), k]$$

$$\vdots$$

$$y_p(k) = g_p[x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), u_1(k), \dots, u_m(k), k]$$

Ecuaciones en Diferencias: Notación Vectorial

Las Ecuaciones de Estado se escriben generalmente en forma vectorial. Definiendo:

$$\mathbf{x}(k) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}; \mathbf{u}(k) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_m(k) \end{bmatrix}; \mathbf{y}(k) \triangleq \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix}; \mathbf{f}(\cdot) \triangleq \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix}$$

las ecuaciones de estado y salida se pueden reescribir:

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]$$

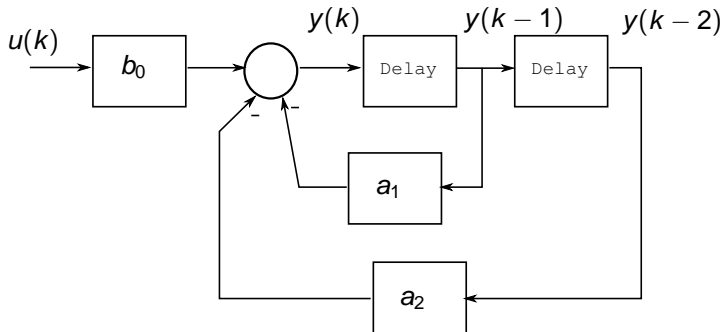
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k]$$

Organización de la Presentación

- 1 Ecuaciones en Diferencias
- 2 Diagramas de Bloques
- 3 Simulación de Sistemas de Tiempo Discreto

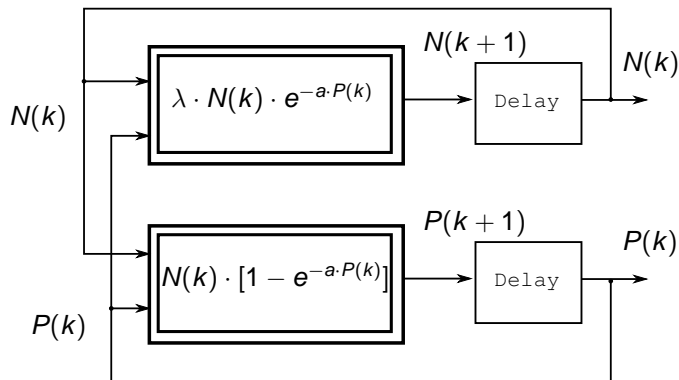
Diagramas de Bloques

Los **Diagramas de Bloques** son una herramienta gráfica de representación de modelos. Las **variables** se representan con **flechas**, y las operaciones matemáticas con **bloques**.



$$y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) = b_0 u(k)$$

Diagramas de Bloques. Ejemplo No Lineal

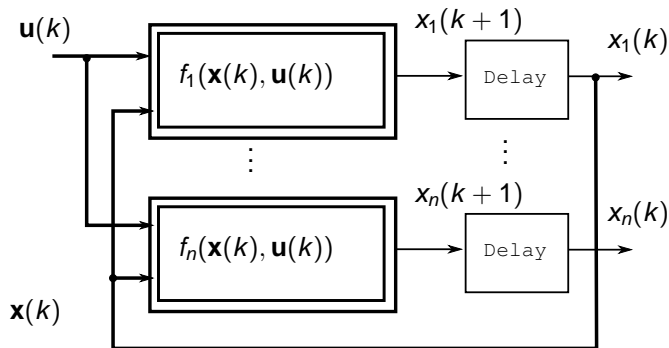


$$N(t_{k+1}) = \lambda \cdot N(t_k) \cdot e^{-a \cdot P(t_k)}$$

$$P(t_{k+1}) = N(t_k) \cdot [1 - e^{-a \cdot P(t_k)}]$$

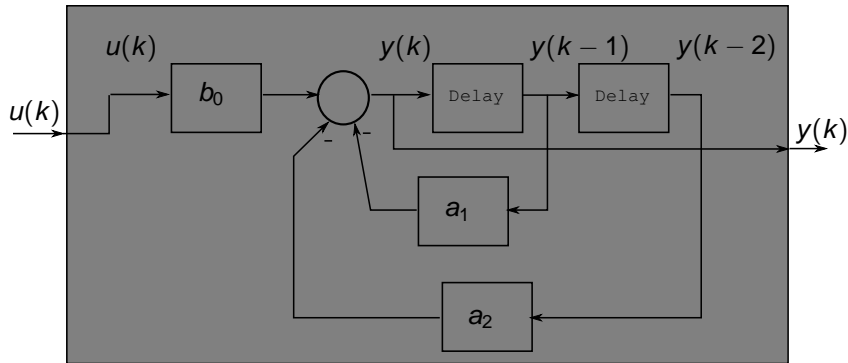
Nicholson–Bailey

Diagrama de Bloques. Caso General



$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$$

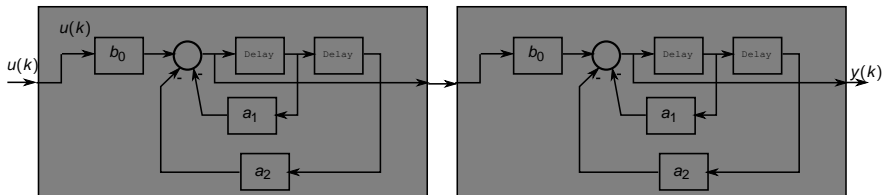
Diagramas de Bloques Jerárquicos



$$y(k) + a_1 \cdot y(k-1) + a_2 \cdot y(k-2) = b_0 u(k)$$

Diagramas de Bloques Jerárquicos

El **acoplamiento jerárquico** permite construir modelos más complejos a partir de **submodelos** ya construidos.



Cascada de dos filtros.

Organización de la Presentación

- 1 Ecuaciones en Diferencias
- 2 Diagramas de Bloques
- 3 Simulación de Sistemas de Tiempo Discreto**

Simulación de Sistemas de Tiempo Discreto

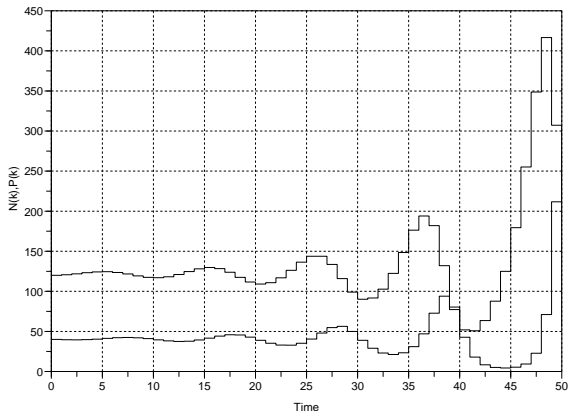
La simulación de un sistema de tiempo discreto es trivial. Dada una representación de la forma

$$\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$$

y conocidas las **condiciones iniciales** $\mathbf{x}(0)$, el siguiente algoritmo simula el sistema:

- 1 Ponemos inicialmente $k = 0$
- 2 Calculamos el siguiente valor del estado $\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]$.
- 3 Incrementamos k en 1.
- 4 Si $t_k \geq t_f$ terminamos la simulación. En otro caso, volvemos al punto 2.

Simulación de la Ecuación de Nicholson-Bailey



Cond. Inic.

$$N(0) = 120,$$

$$P(0) = 40.$$

Parámetros:

$$\lambda = 1.5, a = 0.01.$$

Software de Simulación de Sistemas de Tiempo Discreto

- Si bien la simulación de un sistema de tiempo discreto es trivial, su **representación** puede ser **complicada**.
- En el caso de los dos filtros en cascada, por ejemplo, resulta tedioso deducir las ecuaciones.
- Esto motivó el herramientas de software capaces de tratar en forma **gráfica** con los **Diagramas de Bloques**.
- Matlab, Dymola y PowerDEVS, sólo por nombrar algunos ejemplos, permiten simular Diagramas de Bloques de Sistemas de Tiempo Discreto.

Bibliografía



J. Proakis and D. Manolakis.
Digital Signal Processing.
Prentice Hall, 4th. edition, 2006.