

# Modelado y Simulación de Sistemas Dinámicos: Métodos, Algoritmos y Herramientas

## Introducción al Modelado y Simulación

Ernesto Kofman

Laboratorio de Sistemas Dinámicos y Procesamiento de la Información  
FCEIA - Universidad Nacional de Rosario.  
CIFASIS – CONICET. Argentina

# Organización de la Presentación

- 1 Sistemas Dinámicos y Modelos Matemáticos
- 2 Principios de la Teoría General de Sistemas
- 3 Modelos Continuos y Discretos

# Organización de la Presentación

- 1 Sistemas Dinámicos y Modelos Matemáticos
- 2 Principios de la Teoría General de Sistemas
- 3 Modelos Continuos y Discretos

# Sistemas Dinámicos

## Definición de Sistema

Un Sistema es una **disposición delimitada** de **entidades interactuantes**.

- Disposición: define la **Estructura del Sistema**.
- Delimitación: las acciones del resto del universo sobre el sistema se reemplazan por **entradas**.
- Entidades interactuante: son los **componentes** del sistema: procesos, elementos, subsistemas, etc.

## Definición de Sistema Dinámico

Un Sistema Dinámico es un Sistema en el cual hay **almacenamiento** de energía, materia o información; es decir, un Sistema Dinámico es un sistema con **Memoria**.

# Modelos Matemáticos

Por cuestiones de costo, riesgo o imposibilidad (si el sistema todavía no existe por ejemplo), en muchas ocasiones no se puede **experimentar** sobre los sistemas reales. En estos casos se recurre a la experimentación sobre **Modelos** del sistema.

## Definición de Modelo

Un Modelo es una **representación simplificada** de un Sistema que permite **responder interrogantes** sobre este último sin recurrir a la experimentación sobre dicho sistema.

## Definición de Modelo Matemático

Es un conjunto de expresiones matemáticas que describen las relaciones existentes entre las magnitudes caracterizantes del sistema.

# Variables y parámetros

Las magnitudes que caracterizan y rigen la evolución de un sistema se denominan **variables** y **parámetros**.

- Los parámetros son **magnitudes constantes** (o que varían lentamente, independiente de lo que ocurre en el sistema). Ej: masa, resistencia eléctrica, etc.
- Las variables son magnitudes que cambian con el tiempo.

Entre ellas encontramos:

- **Variables fundamentales**: tiempo ( $t$ ) y espacio ( $x, y, z$ ). Son independientes de la evolución del sistema.
- **Entradas**: representan la acción del **resto del universo** sobre el sistema. Son independientes de la evolución del mismo.
- **Variables dependientes**: representan la magnitudes que cambian en función de la evolución del sistema.
- **Salidas**: Son variables dependientes que nos interesan y que podemos observar.

# Concepto de Estado

## Definición:

El **Estado** de un modelo matemático es un conjunto de variables dependientes cuyo conocimiento en un instante de tiempo, asumiendo conocidos los valores de las entradas, permite calcular el valor de cualquier otra variable dependiente en dicho instante.

- Si el modelo es **determinista**, el conocimiento del estado en un instante de tiempo y de las entradas en todo momento permite predecir la evolución de todas las variables del sistema.
- En general, el conjunto de variables dependientes que constituyen el estado puede elegirse de distintas maneras.

# Organización de la Presentación

- 1 Sistemas Dinámicos y Modelos Matemáticos
- 2 Principios de la Teoría General de Sistemas
- 3 Modelos Continuos y Discretos

# Teoría General de Sistemas

La Teoría General de Sistemas estudia las propiedades generales de los Sistemas Dinámicos y de sus modelos matemáticos.

Entre otros problemas, la Teoría General de Sistemas estudia y define:

- Propiedades Generales de los Modelos Matemáticos
- Clasificación de Modelos Matemáticos,
- Modelado de Sistemas,
- Simulación de Modelos,
- Filtrado, Control de Sistemas,
- etc.

# Modelado y Simulación

## Modelado

Es el proceso de obtención de modelos matemáticos.

Para esto, hay dos técnicas:

- A partir de principios analíticos y/o físicos.
- Mediante experimentación (**identificación**)

## Simulación

Es la experimentación sobre un modelo matemático de un sistema, generalmente implementado en una computadora.

La simulación de un sistema, además del modelado, suele requerir la utilización de **técnicas de aproximación** (métodos numéricos de integración, por ejemplo).

# Clasificación de Modelos Matemáticos

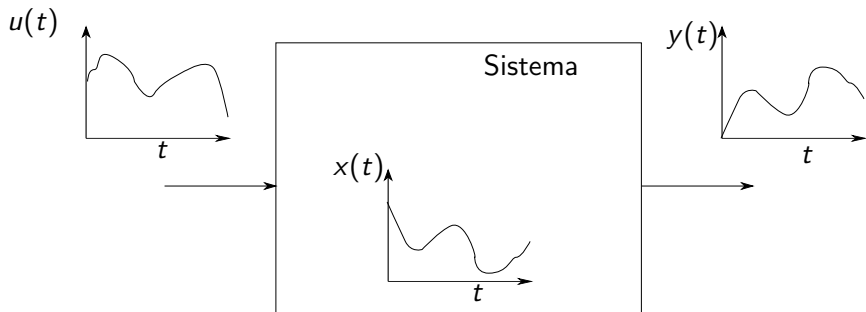
## Según la Evolución Temporal

Una forma de clasificar modelos es en función de la manera en que las variables evolucionan en el tiempo.

- **Tiempo Continuo:** Las variables evolucionan continuamente en el tiempo. Generalmente se representan mediante **ecuaciones diferenciales**.
- **Tiempo Discreto:** Las variables sólo pueden cambiar en determinados instantes de tiempo. Se suelen representar mediante **ecuaciones en diferencias**.
- **Eventos Discretos:** Las variables pueden cambiar en cualquier momento, pero sólo puede haber números finitos de cambios en intervalos de tiempo finitos.

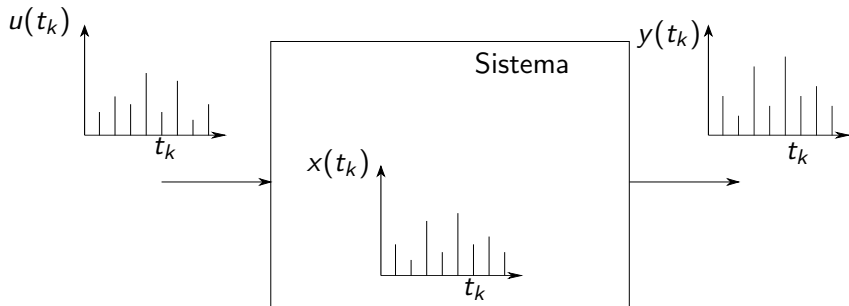
# Clasificación de Modelos Matemáticos

## Sistemas de Tiempo Continuo



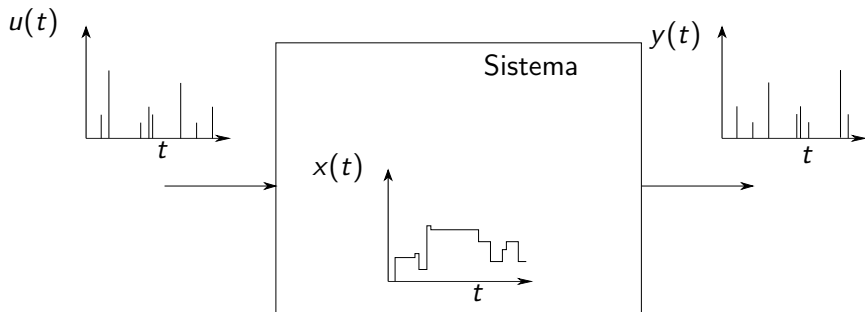
# Clasificación de Modelos Matemáticos

## Sistemas de Tiempo Discreto



# Clasificación de Modelos Matemáticos

## Sistemas de Eventos Discretos



# Clasificación de Modelos Matemáticos

Según el nivel de especificación

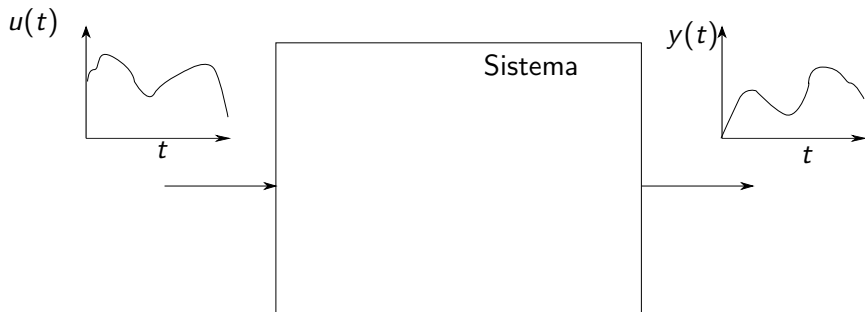
Otra forma de clasificar modelos es acorde al nivel de detalle de la especificación:

- **Especificación Entrada-Salida:** El modelo sólo expresa la relación entre las secuencias o funciones de **entrada** y las secuencias o funciones de **salida**.
- **Especificación de Estados:** El modelo tiene en cuenta además la evolución de los **estados** internos.
- **Especificación de Acoplamiento:** El modelo explicita además **submodelos** y su **interconexión**.

Para un mismo sistema, según los objetivos, pueden plantearse modelos en los tres niveles de especificación.

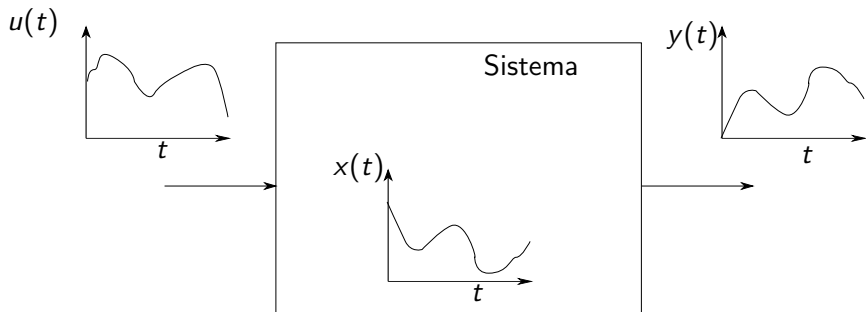
# Clasificación de Modelos Matemáticos

## Especificación Entrada-Salida



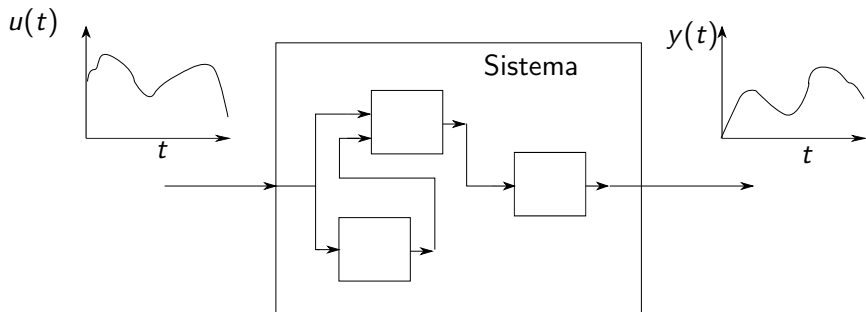
# Clasificación de Modelos Matemáticos

## Especificación de Estados



# Clasificación de Modelos Matemáticos

## Especificación de Acoplamiento



# Organización de la Presentación

- 1 Sistemas Dinámicos y Modelos Matemáticos
- 2 Principios de la Teoría General de Sistemas
- 3 Modelos Continuos y Discretos

# Modelos de Tiempo Continuo

Hay dos grandes categorías:

- Modelos de Parámetros Concentrados, que se representan mediante Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \sin(\theta(t)) = 0 \quad (\text{péndulo sin fricción})$$

(o bien mediante Ecuaciones Algebraico Diferenciales)

- Modelos de Parámetros Distribuidos, que se representan mediante Ecuaciones en Derivadas Parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sigma \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (\text{difusión de calor})$$

## Modelos de Tiempo Discreto

Los modelos de tiempo discreto se representan generalmente como **ecuaciones en diferencias**. Ej:

$$\begin{aligned} N(t_{k+1}) &= \lambda \cdot N(t_k) \cdot e^{-a \cdot P(t_k)} \\ P(t_{k+1}) &= N(t_k) \cdot (1 - e^{-a \cdot P(t_k)}) \end{aligned} \quad (\text{Nicholson} - \text{Bailey})$$

Los instantes de tiempo en los cuales hay cambios en las variables se denotan  $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$ . La distancia  $t_{k+1} - t_k$  se denomina **paso** y suele ser constante (pero esto no es general).

## Modelos de Eventos Discretos

Consideremos el siguiente ejemplo: un sistema, que posee un sensor que detecta cada vez que entra o sale una persona a una habitación, registra el número de personas dentro de la misma. El número de personas se imprime en un panel cada vez que se modifica.

- Cada vez que entra o sale una persona, ocurre un **evento de entrada**.
- Al imprimirse el número en el panel, ocurre un **evento de salida**.
- El número de personas dentro de la habitación representa el **estado del sistema**.

Este tipo de modelos no tiene un formalismo de representación unificado. Vamos a ver luego distintas alternativas.

## Representación General de Sistemas Dinámicos

Los sistemas dinámicos **deterministas** pueden representarse por la estructura:

$$D = \langle T, U, \Omega, Y, Q, \Delta, \Lambda \rangle, \text{ donde}$$

- $T$  es la **base de tiempo** (el conjunto de valores posibles para la variable  $t$ ).
- $U$  es el conjunto de valores posibles de la **entrada**.
- $\Omega$  es el conjunto de **segmentos admisibles de entrada** (sus elementos son funciones  $\omega : [t_1, t_2] \subset T \rightarrow U$ ).
- $Y$  es el conjunto de valores posibles de la **salida**.
- $Q$  es el conjunto de valores posibles de los **estados**.
- $\Delta : Q \times \Omega \rightarrow Q$  es la **función de transición de estados**.
- $\Lambda : Q \rightarrow Y$  es la **función de salida**.

# Representación General de Sistemas Dinámicos

## Función de Transición

La función de transición  $\Delta$  tiene las siguientes características:

- Dado un segmento de entrada admisible  $\omega : [t_1, t_2] \subset T \rightarrow U$ , y sabiendo que el estado en  $t_1$  es  $q(t_1) \in Q$ , entonces  $q(t_2) = \Delta(q(t_1), \omega)$ .
- Dados dos segmentos de entrada admisibles consecutivos  $\omega_1 : [t_1, t_2] \rightarrow U$  y  $\omega_2 : [t_2, t_3] \rightarrow U$ , y asumiendo que la concatenación  $\omega_1 \circ \omega_2 \in \Omega$ , debe cumplirse  $\Delta(q, \omega_1 \circ \omega_2) = \Delta(\Delta(q, \omega_1), \omega_2)$ .

La restricción última nos dice que la función  $\Delta$  para definir un sistema dinámico **no puede ser arbitraria**.

# Sistemas Estacionarios y Sistemas Lineales

## Sistemas Estacionarios

Dados dos segmentos  $\omega_1 : [t_1, t_2] \rightarrow U, \omega_2 : [t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t] \rightarrow U$  con la propiedad  $\omega_1(t) = \omega_2(t + \Delta t)$ , cuando la función de transición cumple que  $\Delta(q, \omega_1) = \Delta(q, \omega_2)$  se dice que el sistema es **estacionario** o invariante en el tiempo.




Lo que ocurre en los sistemas **estacionarios** o **invariantes en el tiempo** no depende explícitamente del tiempo inicial considerado.

## Sistemas Lineales

Dados dos segmentos  $\omega_1 : [t_1, t_2] \rightarrow U, \omega_2 : [t_1, t_2] \rightarrow U$ , cuando la función de transición cumple que  $\Delta(q_1 + q_2, \omega_1 + \omega_2) = \Delta(q_1, \omega_1) + \Delta(q_2, \omega_2)$  y además vale que  $\Lambda(q_1 + q_2) = \Lambda(q_1) + \Lambda(q_2)$ , se dice que el sistema es **lineal**.

En los sistemas lineales vale el **principio de superposición**.

# Bibliografía

-  Cátedra de Dinámica de los Sistemas Físicos.  
Sistemas dinámicos y modelos matemáticos.  
FCEIA–UNR. [www.fceia.unr.edu.ar/dsf](http://www.fceia.unr.edu.ar/dsf), 2001.
-  B. Zeigler.  
*Theory of Modeling and Simulation*.  
John Wiley & Sons, New York, 1976.
-  B. Zeigler, T.G. Kim, and H. Praehofer.  
*Theory of Modeling and Simulation. Second edition*.  
Academic Press, New York, 2000.